



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях

№ 2 (7)'2024

Харків
2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№2 (7)'2024

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No.2 (7)'2024

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2024

Kharkiv
NTU "KhPI", 2024

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2024. — № 2 (7). — 82 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців у галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Ідентифікатор медіа R30-02563 згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 11.01.2024 №33.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров С. Є., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Кошовий Г. І., канд. фіз.-мат. наук, доц., ІРЕ НАНУ, Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Литвин О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Меньшиков О. В., д-р фіз.-мат. наук, Абердинський університет, Великобританія;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірнін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук, НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 9 від 29 лютого 2024 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaiev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Koshoviy G., PhD, Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., IRE of NASU, Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Lytvyn O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., UEPA, Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Menshykov O., Dr. Phys.-Math. Sci., University of Aberdeen, UK;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD, Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

Г. С. АБРАМОВ, Д. В. МАКАРЧУК

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ НАВІГАЦІЙНОГО КОМПЛЕКСУ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

У статті розглядається навігаційний комплекс судна як система масового обслуговування та досліджується зв'язок між складністю морських умов і можливостями системи. Проведено математичне моделювання та аналіз надійності суднового навігаційного комплексу з позицій теорії масового обслуговування. Представлена робота є однією з перших кроків у застосуванні теорії масового обслуговування в аналізі проблем безпечного судноплавства. Розроблену математичну модель було реалізовано в чисельних експериментах в широкому діапазоні вхідних даних. Отримані результати візуалізували та математично обробили, побудувавши апроксимаційні рівняння другого порядку, які пов'язують ймовірність робочого стану системи з відповідними інтенсивностями потоків відмов та обслуговування. Лінеаризована модель доведена до побудови номограми, яка може мати широке практичне використання. Математичне моделювання здійснено для різних умов навігаційної складності (від берегової до прибережної навігації та портових маневрів). Це забезпечує високу практичну важливість результатів моделі при розробці відповідних морських правил та оцінці переваг електронної навігації.

Ключові слова: системи навігації, стабільність системи, надійність, системи масового обслуговування, відмова та відновлення системи, квадратична апроксимація, номограма.

G. S. ABRAMOV, D. V. MAKARCHUK

MATHEMATICAL MODELING OF THE RELIABILITY OF THE NAVIGATION COMPLEX USING QUEUEING SYSTEMS THEORY

This article examines the navigation complex as a queueing system and defines the relationship between the difficulty of navigation conditions and the system's capacity. A mathematical model was developed to calculate and analyze the reliability of the ship's navigational complex using queueing systems theory. This work is one of the first steps in using queueing systems theory to analyze issues with safe shipping. The mathematical model was implemented with experimentation across a wide range of input data. The results are visualized and mathematically processed, building approximation equations of the second order, which tie the probability of the system's functional state to the corresponding intensities of failure and servicing streams. The linearized model is taken to build a nomogram, which may have broad practical uses. Mathematical modeling is done for various conditions of navigational difficulty (from coastal to littoral navigation and port maneuvers). This ensures the practical importance of the model's results when developing relevant naval rules and judging the benefits of electronic navigation.

Key words: navigation systems, system stability, reliability, queueing systems, system failure and recovery, flow of requests, quadratic approximation, nomogram.

Вступ. Безпека на морі повністю залежить від безпечного стану судна та його механізмів. Щоб досягти цього мореплавці, аналітики та дослідники повинні мати глибокі технічні знання та досвід. Відповідно до звітів *Ради з розслідування морських аварій (МАІВ)* з 1993 по 2012 рік, 6692 морські аварії були спричинені лише технічними факторами, а 69 % аварій пов'язані з комбінацією інших факторів. Технічні фактори включають різні аспекти, такі як основні/допоміжні/палубні механізми, процедури містка, маневреність, зіткнення/контакт, електричні системи, захист від пожежі та вибуху, ризик затоплення, загальні засоби контролю та процедури, бортові дії, ризик заземлення тощо. Протягом історії людства одним із найпоширеніших підходів було отримання цінної інформації з минулих несприятливих подій, яка може допомогти людям подолати потенційні рецидиви [1].

Резервування критично важливих для безпеки систем і датчиків може фактично забезпечити достатній рівень безпеки для складних систем, таких як *ANS*. Однак цей спосіб не є найвигіднішим варіантом. Щоб покращити продуктивність і ефективність, часто рекомендується інтегрувати оновлені версії ключових компонентів і датчиків, які збільшують середній час напрацювання на відмову (*MTBF*). Крім того, інтелектуальне програмне забезпечення, таке як моніторинг стану датчиків, може допомогти вчасно виявити проблеми та спланувати необхідні операції з обслуговування. Нарешті, рівень безпеки концептуального програмного забезпечення в досліджуваній системі повинен бути визначений шляхом верифікації та валідації [2, 3].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Було виявлено кілька підходів до аналізу надійності електронних навігаційних систем, головним чином зосереджених на визначенні характеристик надійності системи та її підсистем [4]. Деякі дослідження щодо надійності навігаційної системи посилаються на її визначення, яке стверджує, що навігаційний пристрій або певна система чи компонент (якщо доступний) є схильними до помилок протягом певного періоду часу за певних умов. У такому разі надійність – це ймовірність виконання певної функції без виникнення відмов. Унікальним параметром, який використовується для характеристики надійності, є середній час напрацювання на відмову (*MTBF*). Це середній час між послідовними відмовами системи або частини системи. На додаток до надійності *IALA* [5] також визначає доступність, яка визначається як ймовірність того, що допоміжний засіб або допоміжна система виконуватиме необхідну функцію за певних умов у випадково вибраній час. Параметром, який використовується для оцінки доступності, є середній час до ремонту (*MTTR*).

Що стосується аналізу надійності диференціальних систем глобального позиціонування (*DGPS*), *Шпехт* [6] ввів структуру надійності системи та її підсистем у зв'язку з їх функціями та взаємозв'язками. Потім компонен-

там і системам було призначено два стани, пов'язані з їхньою функціональністю: 0, якщо компонент або система вийшли з ладу; 1, якщо компонент або система функціонує нормально. Крім того, надійність навігаційної системи з урахуванням її структури визначається як ймовірність часу виживання системи. Припускаючи експоненціальний розподіл тривалості служби та часу простою, було визначено надійність навігаційної системи та її граничну надійність протягом певного інтервалу часу.

Аналіз доступності системи АІС, запроваджений Яскольським [7], застосовано до ланцюгів Маркова. Шляхом реєстрації доступності передачі даних АІС було виділено три стани системи (робочий, проміжний стан і відмова) за коефіцієнтом доступності. Далі була визначена матриця ймовірностей переходів між конкретними станами готовності АІС. Матриця була створена на основі частоти переходів між станами, визначеної шляхом аналізу записаних сигналів базової станції АІС. Нарешті, шляхом прийняття початкового та сукупного розподілів переходів між конкретними станами була визначена ймовірність того, що система залишається в робочому стані.

Оцінка надійності електронних систем передачі по відношенню до електромагнітних перешкод, представлена Пасем і Росінським [8], складається з трьох систем безпеки: повна безпека (повна функціональність), ризик безпеки (пріоритет безпеки) і ненадійна безпека. Це було зроблено шляхом розмежування станів. Вказуючи переходи між конкретними безпечними станами, аналізована система була описана системою рівнянь Чепмена – Колмогорова. Потім були застосовані початкові умови та використано перетворення Лапласа для визначення ймовірності того, що система залишиться в певному стані. Крім того, зафіксувавши швидкість переходу між конкретними станами та ймовірність того, що система залишиться в певному стані, була встановлена ймовірність того, що система залишиться в повністю функціональному стані. Програми для оцінки надійності систем транспорту електронів базуються на припущенні, що час переходу між певними станами безпеки описується експоненціальним розподілом.

Сумич та ін. [9] застосували модель Маркова для аналізу надійності та доступності системи ECDIS, що складається з основної (*master*) і резервної підсистеми (*backup subsystem*). Основна та резервна системи утворюють паралельну структуру, де, припускаючи, що кожна підсистема може залишатися в робочому або несправному стані, система приймає один із чотирьох можливих станів. Використовуючи властивості моделі Маркова (умовний розподіл ймовірностей майбутніх станів процесу залежить лише від поточного стану; наступний стан залежить лише від поточного стану, а не від історії, що веде до нього), була розрахована надійність системи, визначена як ймовірність непереребування в невдалому стані. Основним результатом дослідження було те, що бажаного рівня надійності не було досягнуто. Це спонукало авторів запропонувати альтернативне рішення, так звану холодну резервну систему, яка включає *резервні системи з послідовним або паралельним підключенням*.

Ціль та задачі дослідження. Загальноприйнятим методом оцінки ефективності технічних систем є використання *теорії систем масового обслуговування*. Ця теорія дозволяє розраховувати ймовірності різних станів у системі масового обслуговування (СМО) і визначати зв'язок між певними параметрами СМО та показниками її ефективності.

Припускаючи, що всі канали в системі є елементарними каналами, процес, який СМО виконує в даний момент, можна описати як *марківський випадковий процес*. Цей процес складається з дискретних станів і відбувається протягом безперервного періоду часу. Якщо процес задовольняє умову ергодичності, досягається остаточний усталений (фінальний) режим. У цьому режимі ймовірності станів та інші параметри процесу не залежать від часу. Дослідники часто зосереджують свої дослідження на цих усталених, довготривало існуючих характеристиках.

Розглянемо навігаційний комплекс судна (в тому числі і судноводія, як найважливішого її елемента), як *одноканальну СМО*, на вхід якої приходить потік заявок (відмов) того чи іншого елемента, а система реагує потіком обслуговування (відновлення). В залежності від інтенсивності негативних умов мореплавства ці потоки відмов можуть мати критичні значення, які необхідно компенсувати відповідним збільшенням інтенсивностей потоків обслуговування і відновлення. Здійснимо моделювання роботи такої СМО з метою отримання залежностей вихідних характеристик означеної СМО від інтенсивностей відповідних вхідних потоків (вхідних факторів).

Математична модель. Нерегулярні потоки заявок і різний час обробки призводять до непослідовного використання СМО. У деяких випадках невиконані замовлення (запити) можуть накопичуватися на вході, що призводить до перевантаження СМО. І навпаки, бувають ситуації, коли на вході є доступний канал, але немає замовлень (запитів), що призводить до того, що СМО недостатньо завантажена і цей канал залишається неактивним. Замовлення накопичуються на вході. Є два можливі результати для цих заявок. Їх або додають до черги, або, якщо вони більше не можуть чекати в черзі, вони залишають СМО без обслуговування [10].

У разі збою каналу (відмова якогось із елементів системи) негайно починається процес відновлення його працездатності. Це може бути заміна несправного блоку системи або підключення резервного модуля, агрегату тощо. Якщо ми розглядаємо судноводія як канал обслуговування, то його умовна «відмова» може бути спричи-

нена раптовою кризою: хворобою, що може призвести до раптової втрати свідомості (не кажучи вже про елементарну неухабність, відволікання, пропуск важливого сигналу від приладів; судноводій, з тих чи інших причин, може неправильно оцінити обстановку і, як наслідок, прийняти хибний порядок дій – той самий сакраментальний людський фактор). Відновлення може відбуватися у формі відновлення уваги, працездатності, більш-менш швидкого приходу до тями, прийому відповідних ліків для лікування хвороби або нападу.

Граф схеми «народження та загибелі», що відображає стан системи, має наступний вигляд (рис. 1):

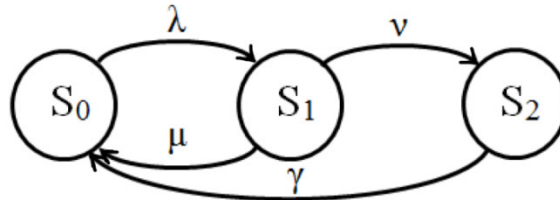


Рис. 1 – Граф станів СМО.

де S_0 – канал вільний; S_1 – канал зайнятий (робочий), справний; S_2 – канал вийшов з ладу, відновлюється.

Найпростіший потік запитів приходить до входу з інтенсивністю, позначеною λ . Час обслуговування – експоненціальний з параметром

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обсл.}}},$$

де $\bar{t}_{\text{обсл.}}$ – середній час обслуговування запиту. Це означає, що потік обслуговування є найпростішим, тобто стаціонарний пуассонівський процес можна описати параметром інтенсивності, позначеним μ . Функціонуючий канал може вийти з ладу і запити не будуть обслуговані (відхилені). Припустимо, що потік відмов каналу є найпростішим з інтенсивністю ν . Відразу після відмови каналу починається процес його відновлення. Час відновлення каналу відповідає експоненціальному розподілу, який характеризується параметром, що називається інтенсивністю

$$\gamma = \frac{1}{t_p},$$

де t_p – середній час відновлення (ремонт). У [11] проблема була розглянута подібним чином, зосереджуючись на навігаторі як сервісному каналі. У представленому дослідженні задача дещо ускладнюється за рахунок розгляду можливості виникнення збурень каналу ще в стані спокою (тобто, коли канал ще не працює), що позначається інтенсивністю ν' . Розумно припустити, що $\nu' < \nu$ [12].

Граф, що представляє стани СМО, матиме тепер такий вигляд (рис. 2):

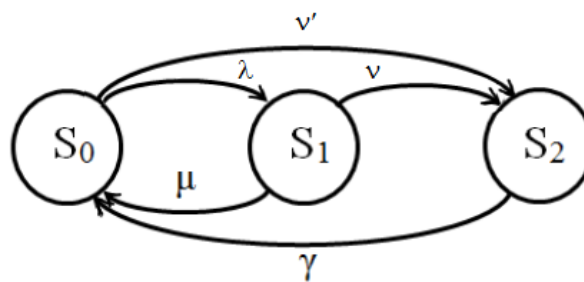


Рис. 2 – Граф станів СМО з можливістю відмови під час простою.

Тепер ми можемо визначити остаточну ймовірність станів системи та її характеристики ефективності: позначимо абсолютну пропускну здатність як A , а Q нехай представляє відносну пропускну здатність (ймовірність того, що вхідний запит буде успішно оброблено). Остаточна ймовірність станів визначається в системі алгебраїчних рівнянь, які виводяться з системи диференціальних рівнянь Колмогорова шляхом прирівнювання лівих частин (похідних ймовірностей станів за часом) до нуля, та може бути виражена таким чином:

$$\begin{aligned} (\lambda + \nu') p_0 &= \mu p_1 + \gamma p_2, \\ (\mu + \nu) p_1 &= \lambda p_0, \\ \gamma p_2 &= \nu p_1 + \nu' p_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Крім того, умова нормування на одиницю може бути інтегрована в цю систему:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1. \quad (2)$$

Завдання полягає у визначенні передбачуваних остаточних (фінальних) ймовірностей:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu + \nu} + \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\gamma(\mu + \nu)} \right]^{-1}; \quad (3)$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} p_0; \quad (4)$$

$$p_2 = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' + \nu\nu'}{\gamma(\mu + \nu)} p_0. \quad (5)$$

Для визначення відносної пропускної здатності застосовуємо принципи, описані в [10], і отримаємо такий результат:

$$Q = p_0 \frac{\mu}{\mu + \nu}. \quad (6)$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda Q = p_0 \frac{\lambda\mu}{\mu + \nu}. \quad (7)$$

Спростивши вираз для Q , ми можемо записати його у формі, більш зручній для чисельних розрахунків:

$$Q = \frac{\mu\gamma}{(\mu + \nu)(\gamma + \nu') + \lambda(\gamma + \nu)}. \quad (8)$$

Результати моделювання. Ймовірність обробки вхідного запиту (відносна пропускна здатність) Q визначається п'ятьма параметрами. Ці параметри є відповідними інтенсивностями потоків: λ , μ , γ , ν і ν' .

Проведемо чисельне моделювання значень Q для різних комбінацій наведених вище параметрів. Розрахунки ймовірностей виконання вхідних запитів у різних умовах плавання та інтенсивності потоків вхідних запитів, потоків відмов та потоків відновлення представлені на рис. 3 – 6. Відповідні залежності для умов плавання в прибережних районах показані на рис. 3 – 4. У цьому сценарії інтенсивність потоку відмов зростає до 1, а інтенсивність потоку запитів змінюється від 10 до 20. У результаті шанси на виконання запитів зменшуються порівняно з плаванням у відкритому морі.

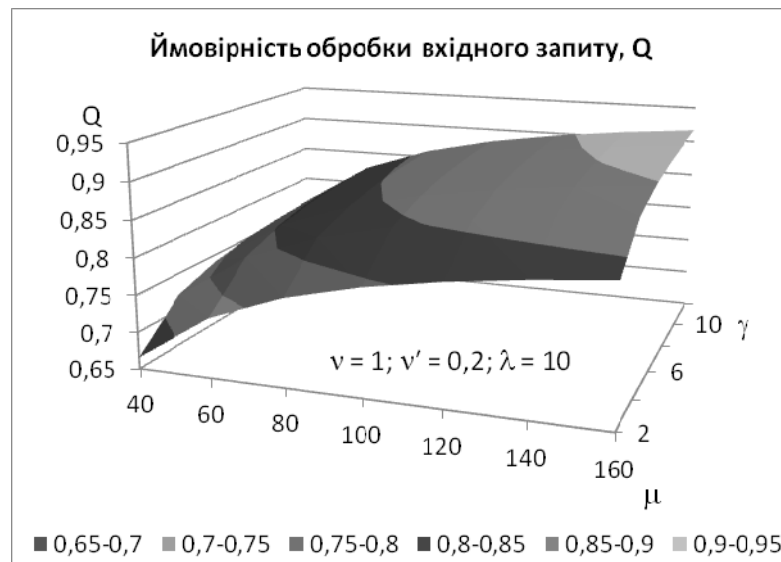


Рис. 3 – Залежність між Q та λ , μ , γ , ν , ν' . Інтенсивності відповідних потоків такі: $\nu = 1$ за годину; $\nu' = 0,2$ за годину; $\lambda = 10$; μ від 40 до 160 за годину; γ від 2 до 12 за годину.

$$Q_{\tau} = 0,5098 \pm 0,01 + (0,0258 \pm 0,0018)\gamma + (-0,0013 \pm 0,0001)\gamma^2 + (0,0036 \pm 0,0002)\mu + (-1,2002 \cdot 10^{-5} \pm 0,0912 \cdot 10^{-5})\mu^2; \quad (9)$$

$$R^2 = 0,984; \quad \sigma = 0,0082.$$

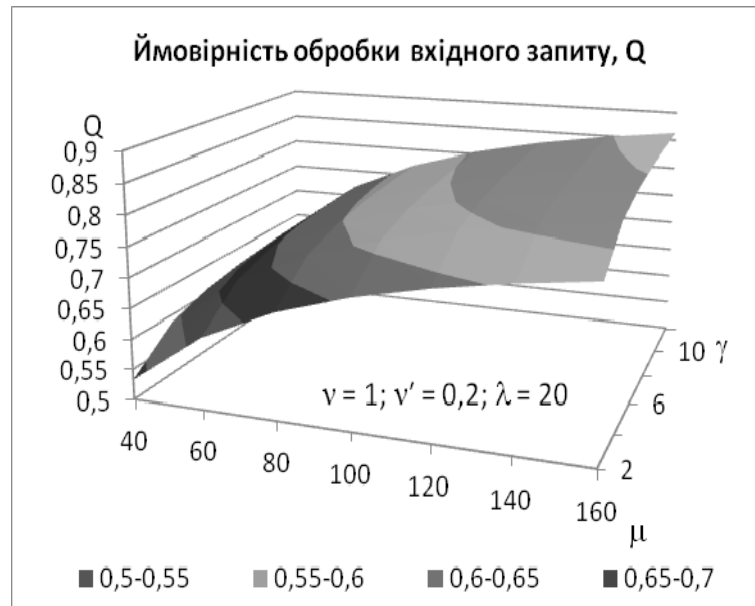


Рис. 4 – Залежність між Q і λ , μ , γ , ν , ν' . Інтенсивності відповідних потоків такі: $\nu=1$ за годину; $\nu'=0,2$ за годину; $\lambda=20$; μ від 40 до 160 за годину; γ від 2 до 12 за годину.

$$Q_{\tau} = 0,3222 \pm 0,011 + (0,0275 \pm 0,002)\gamma + (-0,0014 \pm 0,0001)\gamma^2 + (0,0051 \pm 0,0002)\mu + (-1,6011 \cdot 10^{-5} \pm 0,101 \cdot 10^{-5})\mu^2; \quad (10)$$

$$R^2 = 0,990; \quad \sigma = 0,0091.$$

У складних навігаційних обставинах, таких як річки, гавані, де інтенсивний рух і погана видимість, рис. 5 – 6, ілюструють взаємозв'язки, що спостерігаються під час плавання в таких умовах. Інтенсивність потоку відмов збільшується до 5, тоді як потік запитів змінюється від 20 до 40, що додатково зменшує ймовірність виконання запиту порівняно з попередніми даними.

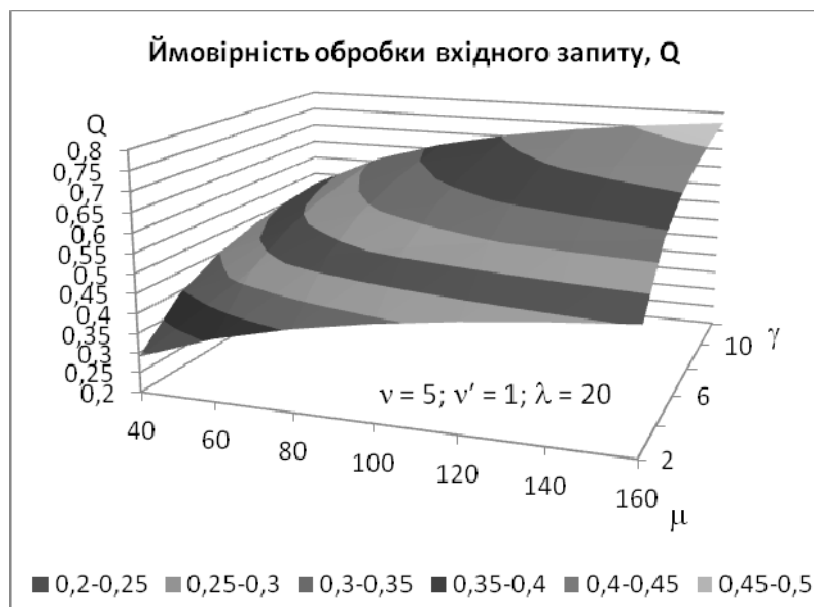


Рис. 5 – Залежність між Q і λ , μ , γ , ν , ν' . Інтенсивності відповідних потоків такі: $\nu=5$ за годину; $\nu'=1$ на годину; $\lambda=20$; μ від 40 до 160 на годину; γ від 2 до 12 годин.

$$Q_{\tau} = -0,0095 \pm 0,0163 + (0,0667 \pm 0,003)\gamma + (-0,0031 \pm 0,0002)\gamma^2 + (0,0049 \pm 0,0003)\mu + (-1,5023 \cdot 10^{-5} \pm 0,1487 \cdot 10^{-5})\mu^2; \quad (11)$$

$$R^2 = 0,989; \quad \sigma = 0,0134.$$

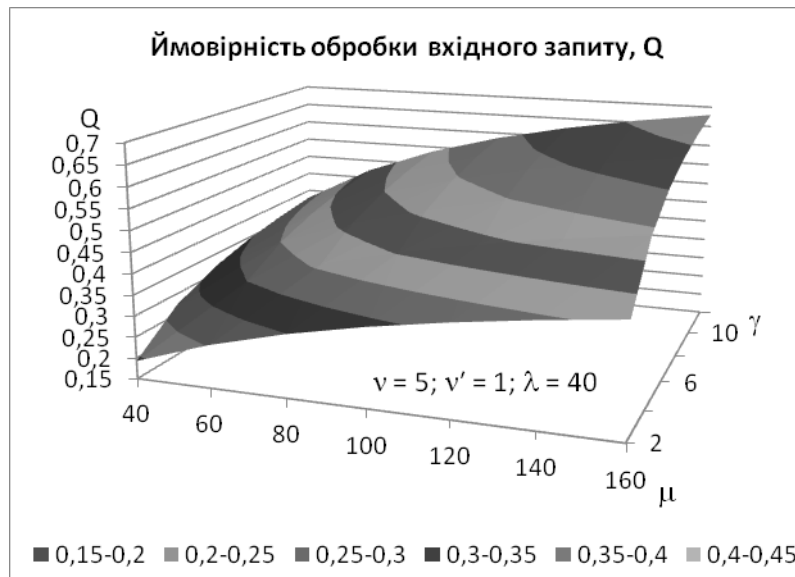


Рис. 6 – Залежність між Q і λ , μ , γ , ν , ν' . Інтенсивності відповідних потоків такі: $\nu = 5$ за годину; $\nu' = 1$ на годину; $\lambda = 40$; μ від 40 до 160 на годину; γ від 2 до 12 годин.

$$Q_{\tau} = -0,1196 \pm 0,0171 + (0,0604 \pm 0,0031)\gamma + (-0,0027 \pm 0,0002)\gamma^2 + (0,005 \pm 0,0003)\mu + (-1,3831 \cdot 10^{-5} \pm 0,1561 \cdot 10^{-5})\mu^2; \quad (12)$$

$$R^2 = 0,9886; \quad \sigma = 0,014.$$

Рівняння $Q_{\tau} = Q_{\tau}(\gamma, \mu)$ під кожним графіком отримані за допомогою *квадратичної двофакторної апроксимації*. Високий рівень коефіцієнта детермінації ($R^2 = 0,98 - 0,99$) вказує на те, що отримані квадратичні статистичні моделі адекватні і цілком доречні. Стандартне відхилення квадратичних регресій доволі низьке ($\sigma = 0,006 - 0,014$), що вказує на їх достатньо хорошу точність. Тому ці моделі можна на практиці використовувати для отримання надійних оцінок ймовірності [13, 14].

Аналіз рівнянь (12) і (13), отриманих при однакових значеннях $\nu = 1,0$ і $\nu' = 0,2$, але з різною інтенсивністю потоку запитів λ , показує, що збільшення λ від 10 до 20 зменшує ймовірність обслуговування вхідного запиту Q (відносно пропускну здатність) на 0,2.

У цьому випадку коефіцієнти при μ і μ^2 збільшуються приблизно в півтора рази, а коефіцієнти для γ і γ^2 залишаються практично незмінними. Це означає, що збереження високого рівня Q значною мірою залежить від μ , а не від γ .

Водночас аналіз рівнянь (14) і (15) показує, що збільшення інтенсивності потоку відмов каналу ν від 1 до 5 (ν' від 0,2 до 1) при тій самій інтенсивності потоку запитів ($\lambda = 20$) зменшує Q на 0,3. При цьому коефіцієнт для γ зростає в 2,4 рази (для γ^2 – у 2,2 рази), хоча коефіцієнти для μ і μ^2 практично не змінюються.

Це означає, що збереження високого рівня Q значною мірою залежить від інтенсивності відновлення каналу γ , а не від інтенсивності потоку обслуговування μ . Таким чином, на збільшення інтенсивності потоку запитів λ система реагує збільшенням ролі інтенсивності потоку обслуговування μ і, навпаки, зі збільшенням інтенсивності потоку відмов ν система реагує підвищенням ролі інтенсивності відновного потоку γ . На нашу думку, система в цьому випадку діє дуже фізично і логічно.

Отримані результати моделювання також узгоджуються з наступними рекомендаціями щодо експлуатаційної роботи на містку у різних складних навігаційних умовах [15] табл. 1.

Стан вахти на містку – I.

Щоб виконати цю умову, на містку повинні бути як вахтовий, так і спостерігач.

Вахтовий офіцер виконує регулярні вахтові обов'язки, а іноді є єдиним вахтовим протягом дня.

В умовах, коли потрібне ручне керування, важливо зазначити, що капітан не може діяти як спостерігач. Тому необхідно призначити додаткового члена команди в якості спеціального спостерігача.

Таблиця 1 – Стани вахтенної роботи на містку, що пов'язані з умовами плавання

	Відкриті води	Обмежені води, постановка на якір, посадка або висадка лоцмана	Вхід або вихід з порту
Ясна погода, рух транспорту незначний або відсутній	I	II	III
Ясна погода, інтенсивний рух	II	II або III	III
Обмежена видимість, рух транспорту незначний або відсутній	II	II	III
Обмежена видимість, інтенсивний рух транспорту	II or III	II або III	III
Пілотаж	I	I або II	II або III

Машинне відділення має можливість працювати як в пілотованому, так і в безпілотному режимах.

Стан вахти на містку – II.

Для виконання цієї вимоги необхідно, щоб на містку були присутні такі особи: капітан або старший помічник, вахтовий помічник, спостерігач і керманіч.

Безпечно плавання екіпажу та загальна вахта контролюються капітаном або старпомом. Вахтовий офіцер, який допомагає капітану або старпому, надає відповідну інформацію, керує судном і контролює виконання наказів. У ситуаціях, які екіпаж вважає необхідними, або в складних умовах, таких як інтенсивний рух, обмежена видимість, маневри в порту або посадка лоцманів, керманіч бере на себе керування судном вручну.

Важливо, щоб у машинному відділенні завжди був доступний персонал, але в кінцевому підсумку капітан вирішує, призначити туди персонал чи ні.

Стан вахти на містку – III.

Для виконання цієї умови на містку необхідна присутність наступного персоналу: капітан, вахтовий, додатковий спостерігач і рульовий.

В умові III вахтовий офіцер звільняється від обов'язків спостереження за зіткненнями, і додатковий офіцер виконує цю роль, використовуючи системи AIS/ARPA. Вони забезпечують вахтового офіцера важливою навігаційною інформацією та інформацією про судна, що знаходяться поблизу.

Вкрай важливо, щоб персонал був присутній і готовий у машинному відділенні.

Як бачимо, судноводії – практики, зважаючи на ускладнення умов судноплавства, відповідним чином посилюють склад вахти на містку. Тим самим вони фактично переводять систему з одноканальної в двох-, а при потребі і в трьохканальну, що значно підвищує її надійність і ефективність за рахунок перерозподілу обов'язків між офіцерами вахти.

В роботі також було проведено статистичне моделювання результатів чисельних експериментів. З цією метою була побудована 4-факторна лінійна регресія для залежності величини Q від усіх 4 факторів (λ , ν , γ та μ). Отримане рівняння множинної регресії представлено на рис. 7.

Регресійний аналіз проводився на основі 168 точок за 4 змінними.

$$Q_r = -0,6377 \pm 0,0138 + (0,0157 \pm 0,001)\gamma + (0,0018 \pm 8,678 \cdot 10^{-5})\mu + (-0,0412 \pm 0,0024)\nu + (-0,0063 \pm 0,0004)\lambda; \quad (13)$$

$$R^2 = 0,9329; \quad \sigma = 0,045.$$

Отримане рівняння візуалізовано за допомогою побудованої номограми, що дозволяє швидко і достатньо просто виконувати будь-які необхідні розрахунки та оцінки.

Дана модель має високий показник коефіцієнта детермінації $R^2 = 0,9329$ (що показує високу адекватність побудованої моделі) та доволі низьку стандартну помилку регресії, що є прийнятним для практичного використання.

Наведемо кілька прикладів використання номограми.

Приклад 1. Вибираємо значення λ (наприклад, 30), рухаємося в напрямку стрілки вліво, вибираємо значення ν (в даному випадку це 1), рухаємося по стрілці вгору щоб вибрати значення γ (у наведеному прикладі 10), рухаючись по стрілці вправо в першому квадранті вибираємо значення μ (у нашому прикладі 160) і в самому кінці ми йдемо стрілками вниз до осі Q , де отримаємо його значення (це приблизно 0,85).

Приклад 2. Можливий і зворотний напрямок руху по номограмі, тобто розв'язування оберненої задачі: за заданими значеннями, крок за кроком рухаючись по номограмі проти стрілки часу, вибираємо значення вхідних

параметрів моделі, які забезпечили б задане значення Q . Це завдання має багато можливих рішень і залежить від реальної можливості забезпечення того чи іншого рівня кожного з факторів, зрештою, від ступеня їх реальної досяжності на тому рівні розвитку техніки, що існує на даний час.

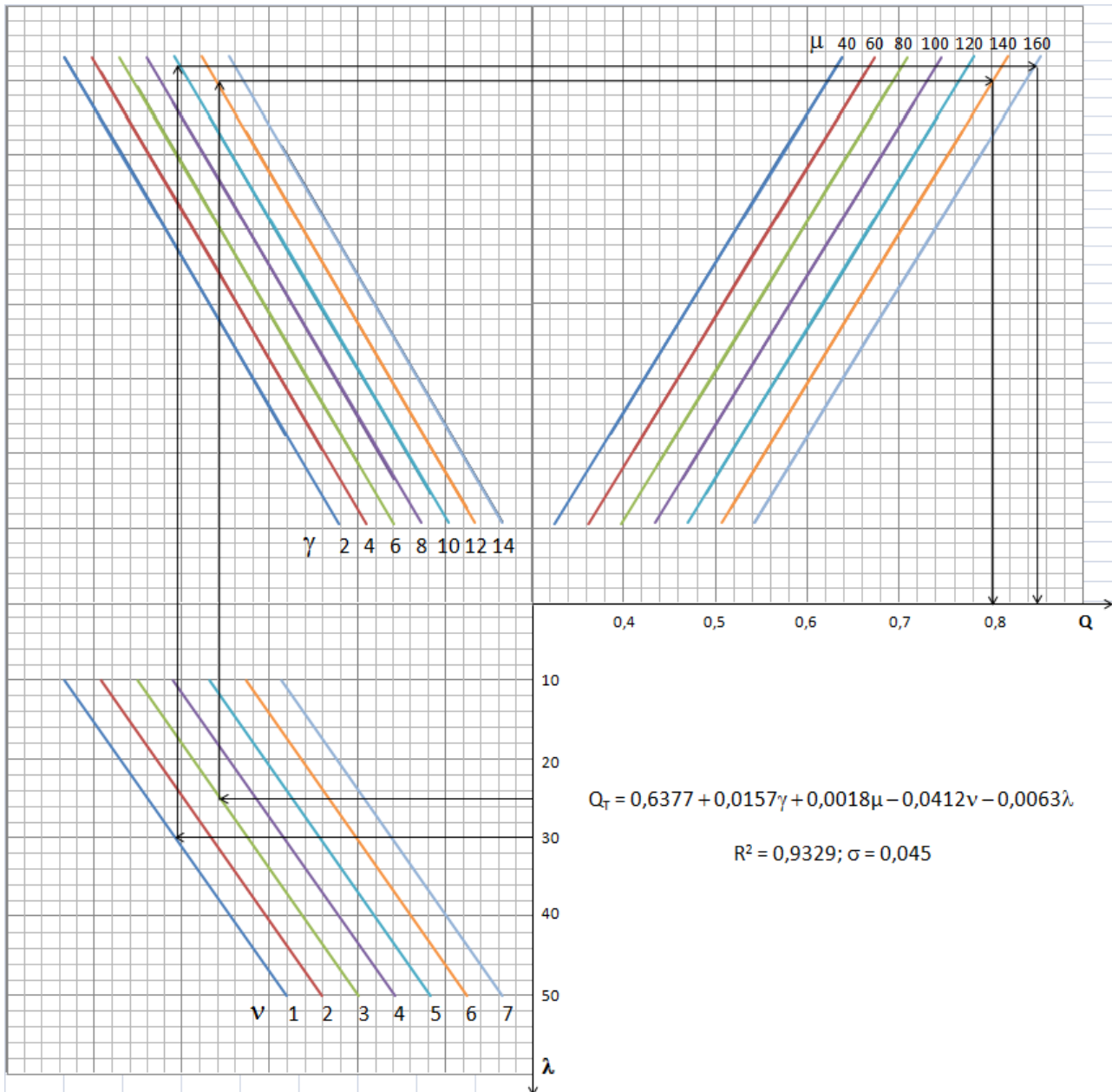


Рис. 7 – Номограма чотирьохфакторної регресійної моделі для оцінки залежності Q від λ , ν , γ та μ .

Приклад 3. Наведеними прикладами використання номограм не обмежується. Також можливий зустрічний рух згідно наведеної схеми. Наприклад, задавши бажане значення Q і відомі значення деяких факторів з моделі, можна знайти необхідні значення інших факторів, які б забезпечили досягнення обраного Q . При такій постановці задачі номограма дає змогу визначити існування розв'язку і, якщо він існує, визначити множину можливих значень факторів, що визначаються, а також можливість їх заміщення (в певних межах зменшення значення одного з факторів може бути компенсовано збільшенням значення іншого фактора).

Приклад 4. Наведена номограма надає широкі можливості для оцінки можливих граничних меж значень Q , якщо відомі межі, в яких можуть змінюватися вхідні коефіцієнти моделі. Тобто, якщо відомі межі, в яких з певною достовірністю можна знайти значення кожного з факторів, можна по заданій номограмі поступово переходити від одного фактора до іншого зі «смугами» значень, де кожна «смуга» відображає межі варіювання можливих значень цього фактора. Наприкінці цього процесу ми досягнемо відповідної «смуги» значень Q (віднос-

ної пропускної здатності), тобто матимемо оцінки можливих відхилень від середнього прогнозного значення Q (песимістичний і оптимістичний прогнози).

Висновки. Аналізуючи результати моделювання, можна визначити вплив початкових параметрів на ймовірність виконання вхідного запиту. Це дає можливість прогнозувати стабільність компонентів навігаційної системи. Отримані результати дають можливість розробити відповідні рекомендації щодо підвищення функціональної стійкості навігаційних комплексів. Результати моделювання показують, що зі збільшенням частоти відмов і частоти запитів ймовірність того, що вхідний запит буде виконано, значно зменшується. В результаті знижується продуктивність навігаційного комплексу.

Таким чином, розробка моделей стійкості для навігаційних систем дозволяє моделювати різні аварійні ситуації, а також швидко розраховувати та оцінювати різні сценарії за допомогою візуалізації номограми, отриманої за допомогою багатовимірної лінійної регресії. Моделювання виявило кореляцію між продуктивністю системи та її параметрами: λ , μ , γ , ν , ν' . Розроблена модель доведена до побудови номограми, яка, на наш погляд, має неабияку практичну цінність і може бути використана при розробці відповідних морських регламентів та оцінці можливостей електронної навігації.

Це дослідження підкреслює важливість визначення належного рівня резервування навігаційних пристроїв для забезпечення надійності системи. Якщо значення Q впаде нижче 0,7, на борту корабля виникне критична ситуація. Як показано на рис. 3 – 6, ймовірність того, що запит буде прийнято, залежить від навігаційних умов судноплавства. Тому необхідно вживати відповідних заходів для забезпечення стабільності навігаційної системи навіть у складних ситуаціях. Якщо вичерпані технологічні можливості підвищення надійності елементів систем, що складають навігаційний комплекс судна, то чи не єдиним засобом підвищення надійності комплексу в цілому є більш-менш глибоке дублювання і резервування його складових елементів. Проблемні питання, пов'язані з задачами дублювання і резервування елементів комплексу з метою підвищення його надійності, ми ставимо як мету наших наступних досліджень.

Таким чином, отримані в роботі результати можуть покращити розуміння питань, пов'язаних з безпекою та відповідних рівнів ризику втрати надійності навігаційного комплексу. Хоча інтерес до цих питань зростає, про що свідчить збільшення кількості публікацій, важливо визнати певну нестачу наукової літератури з означених питань та підкреслити необхідність подальших досліджень. Однією з рекомендацій є проведення комплексного аналізу небезпек погіршення надійності систем навігаційного комплексу і більш детальна їх класифікація. Такий підхід дозволить глибше оцінити комплекс факторів, що визначають надійність систем навігаційного комплексу, і допоможе привести до більш конкретної та ефективної стратегії дій по забезпеченню високого рівня надійності.

Список літератури

1. Yip Tsz L., Sahin B. Technical factor in maritime accidents: an index for systematic failure analysis // IAME 2020 Conference. – 2020. – pp. 1 – 11. DOI: 10.17632/8p9hsvfhmx.2.
2. Aksu S. (2019). Assessing compartment-wide damage consequences in ships and offshore vessels using Fault Trees with System Location Attribution // Ocean Engineering. – 2019. – vol. 192. 106510. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2019.106510.
3. Banda O. A. V., Kannos S., Goerlandt F., van Gelder P. H., Bergström M., Kujala P. A systemic hazard analysis and management process for the concept design phase of an autonomous vessel // Reliability Engineering & System Safety. – 2019. – vol. 191(C). 106584. DOI: 10.1016/j.res.2019.106584.
4. Blokus A., Dziula P. Reliability analysis of different configurations of master and back-up systems used in maritime navigation // Journal of Marine Science and Engineering. – 2020. – 8. – 34. DOI: 10.3390/jmse8010034.
5. IALA. (1989). Guide to the Availability and Reliability of Aids to Navigation; International Association of Lighthouse and Aids to Navigation Authorities: Saint-Germain-en-Laye, France.
6. Specht C. Availability, Reliability and Continuity Model of Differential GPS Transmission // Annual of Navigation. – 2003. – no. 5. – 85 p.
7. Jaskólski K. Application of Markov Chains to Analyse the AIS Availability // Annual of Navigation. – 2011. – no. 18. – pp. 5–16.
8. Pa's J., Rosi'nski A. Selected issues regarding the reliability-operational assessment of electronic transport systems with regard to electromagnetic interference // Eksploat. Niezawodn. Maint. Reliab. – 2017. – vol. 19. – no. 3 – pp. 375 – 381. DOI: 10.17531/ein.2017.3.8.
9. Sumic D., Perakovic D., Jurcevic M. Contribution to ECDIS reliability using Markov Model // Trans. Marit. Sci. – 2014. – no. 3(2). – pp. 149 – 157. DOI: 10.7225/toms.v03.n02.006.
10. Aubakirov S. K., Selivyorstov P. Y. System of mass service. Post capacity // Bulletin of Science and Education. – 2016. – vol. 6(18). – pp. 44 – 47.
11. Abramov G. S., Makarchuk D. V., Nosov P. S., Zinchenko S. M. The ship officer as a failure-prone single-channel queueing system // Materials of the 13th international scientific and practical conference "Modern information and innovation technologies in transport (MINTT-2021)". – 2021. – vol. 13. – pp. 157 – 162.
12. Abramov G. S., Makarchuk D. V., Plotnikov V. I. (2023). Analysis of the stability of marine navigation complex systems from the point of view of the QS // Materials of the 15th international scientific and practical conference "Modern information and innovation technologies in transport (MINTT-2023)". – 2023. – vol. 15. – pp. 244 – 249.
13. Abramov G. S., Plotnikov V. I., Zinoviev V. I. (2023). Analysis of the reliability of the navigation complex and its influence on the functioning of the maritime logistics system // Materials of the 1st International Scientific and Practical Conference "Transport, port, logistics, security: modern-day challenges and development prospects". – 2023. – vol. 1. – pp. 17 – 29.

14. Plotnikov V. I., Dudchenko S. V., Abramov G. S., Makarchuk D. V. Mathematical modeling and analysis of the reliability of the navigation complex // Scientific Bulletin of the Kherson State Maritime Academy. – 2023. – № 26–27. – pp. 82 – 95.
15. Columbia Shipmanagement. Bridge Operations Manual BOPR-01.2. – 2018.

References (transliterated)

1. Yip Tsz L., Sahin B. Technical factor in maritime accidents: an index for systematic failure analysis. *IAME 2020 Conference*. 2020, pp. 1–11. DOI: 10.17632/8p9hsvfhm2.
2. Aksu S. Assessing compartment-wide damage consequences in ships and offshore vessels using Fault Trees with System Location Attribution. *Ocean Engineering*. 2019, vol. 192. 106510. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2019.106510.
3. Banda O. A. V., Kannos S., Goerlandt F., van Gelder P. H., Bergström M., Kujala P. A systemic hazard analysis and management process for the concept design phase of an autonomous vessel. *Reliability Engineering & System Safety*. 2019, vol. 191(C), 106584. DOI: 10.1016/j.ress.2019.106584.
4. Blokus A., Dziula P. Reliability analysis of different configurations of master and back-up systems used in maritime navigation. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2020, 8, 34. DOI: 10.3390/jmse8010034.
5. IALA. (1989). Guide to the Availability and Reliability of Aids to Navigation; International Association of Lighthouse and Aids to Navigation Authorities: Saint-Germain-en-Laye, France.
6. Specht C. Availability, Reliability and Continuity Model of Differential GPS Transmission. *Annual of Navigation*. 2003, no. 5, 85 p.
7. Jaskólski K. Application of Markov Chains to Analyse the AIS Availability. *Annual of Navigation*. 2011, no. 18, pp. 5–16.
8. Pa's J., Rosiński A. Selected issues regarding the reliability-operational assessment of electronic transport systems with regard to electromagnetic interference. *Ekspluat. Niezawodn. Maint. Reliab.* 2017, vol. 19, no. 3, pp. 375–381. DOI: 10.17531/ein.2017.3.8.
9. Sumic D., Perakovic D., Jurcevic M. Contribution to ECDIS reliability using Markov Model. *Trans. Marit. Sci.* 2014, no. 3(2), pp. 149–157. DOI: 10.7225/toms.v03.n02.006.
10. Aubakirov S. K., Selivyorstov P. Y. System of mass service. Post capacity. *Bulletin of Science and Education*. 2016, vol. 6(18), pp. 44–47.
11. Abramov G. S., Makarchuk D. V., Nosov P. S., Zinchenko S. M. The ship officer as a failure-prone single-channel queueing system. *Materials of the 13th international scientific and practical conference "Modern information and innovation technologies in transport (MINTT-2021)"*. 2021, vol. 13, pp. 157–162.
12. Abramov G. S., Makarchuk D. V., Plotnikov V. I. (2023). Analysis of the stability of marine navigation complex systems from the point of view of the QS. *Materials of the 15th international scientific and practical conference "Modern information and innovation technologies in transport (MINTT-2023)"*. 2023, vol. 15, pp. 244–249.
13. Abramov G. S., Plotnikov V. I., Zinoviev V. I. Analysis of the reliability of the navigation complex and its influence on the functioning of the maritime logistics system. *Materials of the 1st International Scientific and Practical Conference "Transport, port, logistics, security: modern-day challenges and development prospects"*. 2023, vol. 1, pp. 17–29.
14. Plotnikov V. I., Dudchenko S. V., Abramov G. S., Makarchuk D. V. Mathematical modeling and analysis of the reliability of the navigation complex. *Scientific Bulletin of the Kherson State Maritime Academy*. 2023, no. 26–27, pp. 82–95.
15. Columbia Shipmanagement. Bridge Operations Manual BOPR-01.2. 2018.

Надійшла (received) 05.10.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Абрамов Геннадій Серафимович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри Судноводіння, Херсонська Державна Морська Академія, м. Херсон; тел.: (067) 789-10-01; ORCID: 0000-0003-0333-8819; e-mail: gennadabra@gmail.com.

Abramov Hennadii Serafimovich – PhD in physics and mathematics, associate professor of Navigation department, Kherson State Maritime Academy, Kherson; tel.: (067) 789-10-01; ORCID: [https:// orcid.org/0000-0001-9055-3257](https://orcid.org/0000-0001-9055-3257); e-mail: litvin@mail.ua.

Макарчук Дмитро Володимирович – кандидат технічних наук, завідувач кафедри судноводіння, Херсонська Державна Морська Академія, м. Херсон; тел.: (066) 502-36-44; ORCID: 0000-0002-4299-6614; e-mail: dmytro1991@gmail.com.

Makarchuk Dmytro Volodymyrovych – PhD, head of navigational department, Kherson State Maritime Academy, Kherson; tel.: (066) 502-36-44; ORCID: 0000-0002-4299-6614; e-mail: dmytro1991@gmail.com.

Ю. М. АНДРЕЄВ, О. О. ГОЛОВНЯ, Г. В. ШАБАНОВ

АВТОМАТИЧНИЙ ВИБІР КОНФІГУРАЦІЇ ПРОСТОРОВОГО МАНІПУЛЯТОРА З ШІСТЬМА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДИ НА ПІДСТАВІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ ВИТРАТ НА ЗАДАНОМУ РУСІ

Розглянута проблема автоматичного вибору конфігурації робота-маніпулятора з усіх можливих на базі оцінки енергетичних витрат в робочому процесі при здійсненні відповідного руху захвату. На прикладі зварювального маніпулятора з шістьма степенями свободи викладено формули для аналітичного комп'ютерного розв'язання оберненої задачі кінематики широкого кола маніпуляторів типу ПУМА. Особливістю такого алгоритму є те, що кожна конфігурація ланок маніпулятора задається індивідуальним значенням одного параметра. Це дозволило за одним описом моделі в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ) автоматично згенерувати в пам'яті комп'ютера декілька конфігурацій. Модифікацією існуючого алгоритму розв'язання оберненої задачі динаміки, що передбачає визначення руху узагальнених координат попереднім вирішенням оберненої задачі кінематики, вдалося об'єднати ці дві задачі в одну. Перша задача дає можливість за заданим рухом захвату отримати закони зміни кутів повороту ланок, причому одразу для всіх конфігурацій. Друга – розрахувати рушійні моменти в кінематичних парах одразу для всіх можливих конфігурацій механізму і обрати оптимальну за мінімумом енергетичних витрат конфігурацію. Після чого за отриманими законами зміни кутів можна реалізувати відповідний рух маніпулятора. Наведені приклади розрахунків механізмів широкого кола типу ПУМА використанням кватерніонів для задання і отримання орієнтацій ланок механізму. Таким чином, отриманий алгоритм не вироджується ні для яких положень робота.

Ключові слова: просторові маніпулятори, пряма і обернена задача кінематики роботів, обернена задача динаміки роботів, аналітичне розв'язання механічних задач роботів, спеціальна система комп'ютерної алгебри.

YU. M. ANDRIEIEV, O. O. HOLOVNIYA, H. V. SHABANOV

AUTOMATIC SELECTION OF A SPATIAL MANIPULATOR CONFIGURATION WITH SIX DEGREES OF FREEDOM BASED ON ENERGY CONSUMPTION FOR A GIVEN MOTION

The problem of automatically selecting the configuration of a robot manipulator from all possible configurations based on the evaluation of energy consumption during the operation process when performing a specific gripping movement is considered. Using the example of a welding manipulator with six degrees of freedom, formulas for the analytical computer solution of the inverse kinematics problem for a wide range of PUMA-type manipulators are presented. A distinctive feature of this algorithm is that each configuration of the manipulator links is defined by an individual value of one parameter. This allowed for the automatic generation of several configurations in the computer's memory using one model description in a specialized computer algebra system, KiDyM (ССКА KiDyM). By modifying the existing algorithm for solving the inverse dynamics problem, which involves determining the movement of generalized coordinates by previously solving the inverse kinematics problem, it was possible to merge these two tasks into one. The first task allows for obtaining the laws of changing the rotation angles of the links for all configurations based on a given gripping motion. The second calculates the driving moments in the kinematic pairs immediately for all possible configurations of the mechanism and selects the optimal one with the minimum energy expenditure. Afterward, the corresponding movement of the manipulator can be implemented according to the obtained laws of angle changes. Examples of calculations for manipulator mechanisms are provided. A significant achievement of the work is the development of an analytical algorithm for solving the inverse kinematics problem for a wide range of PUMA-type manipulators using quaternions to define and obtain the orientations of the mechanism links. Thus, the obtained algorithm does not degenerate for any robot positions.

Key words: spatial manipulators, direct and inverse kinematics problems of robots, inverse dynamics problem of robots, analytical solution of mechanical problems of robots, specialized computer algebra system.

Вступ. Сучасні *роботи-маніпулятори* представляють багатоланкові механізми з відкритим кінематичним ланцюгом. Для таких систем характерною є можливість зайняття заданого положення вихідною ланкою при декількох принципово різних положеннях проміжних ланок. Тому при розв'язанні *задач оберненої кінематики* встає дилема, якій з таких конфігурацій віддати перевагу. Крім необхідності обрання необхідної конфігурації для загального розгляду руху механізму, ця проблема може дуже заважати проведенню циклу розрахунків оберненої задачі кінематики *ітераційними наближеними методами*, наприклад, *методом Ньютона* [1]. Бо можливі випадки, коли алгоритм для одних моментів часу «іде» по одній конфігурації, а для інших – по другій. Діагностувати таку ситуацію дуже складно. Найбільш ефективним рішенням тут, як нам представляється, по-перше, використовувати аналітичне розв'язання задачі, по-друге, мати можливість для виконання заданого руху вихідною ланкою обрати спочатку конфігурацію механізму і при розрахунках дотримуватися її. Для обрання потрібної конфігурації механізму потрібен критерій. Таким чином, завданням, яке вирішується в даній статті, є – на основі *аналітичного алгоритму* розв'язання оберненої задачі для роботів-маніпуляторів *класу ПУМА* [2, 3] і *енергетичного критерію* для обрання оптимальної конфігурації, побудувати і дослідити алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки, в якому паралельно розраховується декілька конфігурацій і обирається найкраща за *критерієм мінімуму роботи рушійних моментів*.

Аналіз останніх досліджень. Перше завдання, що тут вирішується, це – створення аналітичного алгоритму розв'язання задачі оберненої кінематики для конкретного маніпулятора – представника сімейства ПУМА [2]. Питання, що стосуються алгоритмів пошуку та використання рішень обернених завдань кінематики, широко висвітлюються в публікаціях, починаючи з відомої статті *Денавіта і Хартенберга* [4]. Ця стаття задала стандарт у формальному описі механізмів з кінематичними парами п'ятого класу. Практично кожна стаття зазначеного напрямку використовує такий опис (з останніх публікацій, наприклад [5]). Однак, нам здається, що *D – Х нотація* не

завжди є оптимальною у зв'язку з обмеженням, що використовується в ній – обов'язковим позначенням осей кінематичних пар як осей аплікат відповідних систем координат ланок. Це призводить до обліку зайвих поворотів систем координат (далі, СК) на 90° і 180° . У наших алгоритмах та розрахунках використовується просто опис послідовності зсувів та поворотів СК однієї ланки щодо іншої із зазначенням осей перенесення та повороту [6 – 9].

У переважній більшості просторові роботи-маніпулятори зі шістьма степенями свободи (прикладом є класичний робот ПУМА [2, 10]) задовольняють критерію Піпера [3, 11], що полягає в тому, що механізм повинен мати три послідовно розташованих ланки з осями кінематичних пар, які перетинаються в одній точці. Будемо називати таку точку вузловою. Тому в цій статті розглядаються моделі таких пристроїв. Для роботів, що не задовольняють цій умові, але схема яких близька до розглянутої тут, можливо використовувати наближені ітераційні методи і використовувати в якості початкового наближення рішення, що можна отримати пропонуваним методом. Проблема уточнення параметрів моделі може бути розв'язана за допомогою сучасних алгоритмів оптимізації, наприклад метода Левенберга – Марквардта [12].

Питанням розрахунків обернених задач кінематики та обернених задач динаміки приділяється значна увага в літературі [13, 14]. Бо ці задачі є дуже складними для сучасних роботів. Найбільш близько до питань, що розглянуті в даній статті, підходить стаття [14]. Але там не ставиться питання автоматичного обрання оптимальної конфігурації. Автори зупиняються на розрахунку законів зміни кутів розв'язанням оберненої задачі кінематики та на розрахунку моментів в кінематичних парах розв'язанням оберненої задачі динаміки. При цьому вони об'єднують обидві задачі в одну, що також пропонується в даній статті. Але розрахунок робіт рушійних моментів залишається поза увагою авторів статті [14].

Постановка задачі. Ставиться завдання на основі розробленого аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики і критерію мінімуму загальної роботи рушійних моментів в кінематичних парах роботів-маніпуляторів типу ПУМА реалізувати алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки і отримання законів руху ланок і діючих в їх з'єднаннях моментів для оптимальної конфігурації.

Пропонується для розв'язання оберненої задачі кінематики шестиступеневого кутового маніпулятора спочатку вирішити орієнтаційну задачу для робочої ланки – захвату. Ця задача в якості початкових даних повинна використовувати закони руху трьох його характерних точок, що будуються з умов руху при виконанні робочого процесу. На підставі таких законів потрібно отримати положення вузлової точки і кватерніон орієнтації захвату. Положення вузлової точки повинно дати можливість отримати кути повороту трьох перших ланок механізму. Вони, в свою чергу, дають кватерніон орієнтації 3-ї ланки, який сумісно з кватерніоном орієнтації захвату повинен дати розв'язання відповідного кватерніонного рівняння кватерніон відносно орієнтації захвату щодо 3-ї ланки. Цей кватерніон виражається через кути трьох останніх ланок, що дозволяє їх розрахувати.

Такий алгоритм дозволяє розраховувати значення узагальнених координат роботів вказаного класу безпосередньо для механізмів, що задовольняють критерію Піпера. Для механізмів, що не задовольняють йому, отримане рішення аналітичним алгоритмом може використовуватись як початкове наближення в методі Ньютона [1]. Точне рішення вийде ітераційним уточненням такого рішення, взятого як початкове наближення для методу Ньютона.

Слід сказати, що проблема вибору оптимальної з енергетичних міркувань конфігурації, що тут розглядається, не обов'язково потребує використання точних розв'язок оберненої задачі кінематики. Тому тут буде розглянуто тільки аналітичне рішення.

Результат розв'язання оберненої задачі кінематики використовується для розрахунку рушійних моментів в задачі оберненої динаміки для всіх можливих конфігурацій, а за ними – механічних робіт кожного моменту і загальній роботі всіх рушійних моментів теж для всіх конфігурацій. Порівняння значень загальних робіт і дає змогу обрати оптимальну конфігурацію за мінімумом енергетичних витрат.

Всі вказані тут пункти розв'язання задачі треба об'єднати в одну задачу для наступної реалізації алгоритму на бортовому комп'ютері.

Алгоритм розв'язання оберненої задачі кінематики. Розглянемо приклад типового маніпулятора-зварювальника (рис. 1), виконаного за поширеною схемою, запропонованою свого часу розробниками маніпулятора ПУМА 560 [2]. Наведений нижче підхід до вирішення поставленого завдання легко переноситься на подібні механізми такого типу. Маніпулятор має шість кутових ступенів свободи, які забезпечуються 6-ма кінематичними обертальними парами 5-го класу (рис. 1) – поворот «колоні» (**C**) здійснюється навколо вертикальної осі на кут φ_1 , поворот «плеча» (**S**) і «ліктя» (**L**) – навколо горизонтальних осей на кути φ_2 та φ_3 , поворот «передпліччя» (**F**) – навколо своєї поздовжньої осі на кут φ_4 , поворот «зап'ястя» (**W**) – навколо осі, яка поперечна «передпліччю» на кут φ_5 , нарешті, поворот «захвату» (**B**) – навколо своєї поздовжньої осі на кут φ_6 , робочий інструмент (**T**) закріплений в захваті.

Позначимо точку перетину осі повороту захвату на кут φ_6 та осі повороту зап'ястя на кут φ_5 буквою **K** (на рис. 1 вона показана білим кольором). Прийемо, що ця точка лежить на осі симетрії початкової ланки робочого

інструменту BE , і що через цю точку проходить і вісь повороту на кут φ_4 передпліччя F . У такому разі існує повністю аналітичне рішення оберненої задачі кінематики маніпулятора, яке буде викладено нижче.

Визначимо для подальшого дві точки: E – точка зламу та D – точка кінця робочого інструменту (рис. 1).

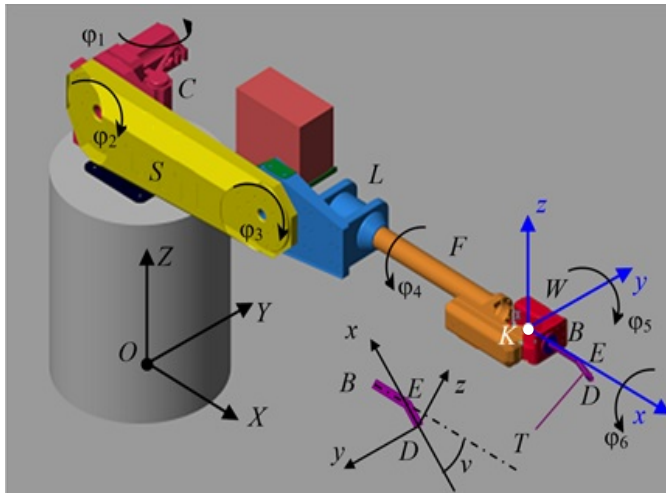


Рис. 1 – Схема розрахункового робота-зварювальника виконанні робочого процесу.

Визначення орієнтації вхідної і вихідної систем координат. СК $Dxyz$ розглядається тут тому, що її положення можна визначити за положенням характерних точок робочого інструмента – K , E , D . Три точки твердого тіла, які не належать одній прямій, задають його положення, бо з площиною їх трикутника можна зв'язати систему координат, яка називається «пов'язаною з тілом СК», або, просто, «пов'язаною». Візьмемо точку D за центр одиничної сфери і розглянемо 2 положення в 2 моменти часу двох деяких точок A і B тіла. Позначимо їх положення на сфері радіус-векторами \vec{r}_{A_0} і \vec{r}_{B_0} – для моменту часу t_0 та \vec{r}_{A_1} і \vec{r}_{B_1} – для моменту часу t_1 . Поставимо у відповідність цим моментам часу і положенням точок A і B кінцевий поворот тіла щодо точки D , що переводить точки і їх радіус-вектори з початкового ($t=t_0$) в кінцеве ($t=t_1$) положення. Знайдемо кватерніон, що буде відповідати такому кінцевому повороту тіла (рис. 2). Тобто, треба знайти вісь та кут кінцевого повороту.

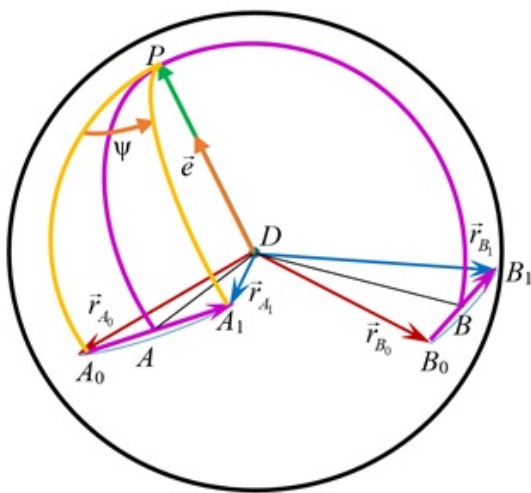


Рис. 2 – До отримання кватерніону орієнтації.

Позначимо координати радіус-векторів

$$\begin{aligned} \vec{r}_{A_0} &= \{x_{A_0}, y_{A_0}, z_{A_0}\}, & \vec{r}_{A_1} &= \{x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}\}, \\ \vec{r}_{B_0} &= \{x_{B_0}, y_{B_0}, z_{B_0}\}, & \vec{r}_{B_1} &= \{x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1}\}. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду вектори

$$\Delta\vec{r}_A = \vec{r}_{A_1} - \vec{r}_{A_0}, \quad \Delta\vec{r}_B = \vec{r}_{B_1} - \vec{r}_{B_0}.$$

Зафіксуємо середини цих векторів і позначимо їх теж буквами A і B . Вектори $\vec{r}_{A_0}, \vec{r}_{A_1}, \Delta\vec{r}_A$ і $\vec{r}_{B_0}, \vec{r}_{B_1}, \Delta\vec{r}_B$ створюють рівнобічні трикутники, в яких відрізки DA та DB є за побудовою медіанами, а, отже, і висотами. Проведемо через точки A і B площини, перпендикулярні площинам трикутників. Будь-яка точка таких площин рівновіддалена від кінців радіус-векторів. Тому лінія перетину цих площин і буде віссю кінцевого повороту. Тоді знайдемо вектор \overline{DP} і орт осі кінцевого повороту:

$$\overline{DP} = \Delta\vec{r}_A \times \Delta\vec{r}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A_1} - x_{A_0} & y_{A_1} - y_{A_0} & z_{A_1} - z_{A_0} \\ x_{B_1} - x_{B_0} & y_{B_1} - y_{B_0} & z_{B_1} - z_{B_0} \end{vmatrix}.$$

Кут кінцевого повороту будемо визначати як кут між площинами A_0DP та A_1DP (або між B_0DP та

B_1DP), який знайдемо через скалярне множення нормалей до них. У зв'язку з тим, що в результаті можна отримати кут тільки в діапазоні $[0, \pi]$, то узгоджуємо напрямок вектору \overline{DP} – направимо його в той бік, з якого переміщення точок A і B спостерігалось проти ходи годинникової стрілки. Це значить, що моменти векторів $\overline{A_0A_1}$ і $\overline{B_0B_1}$ відносно осі \overline{DP} повинні бути позитивними. Якщо це буде від'ємною величиною, треба буде змінити напрямок вектору \overline{DP} на протилежний. Знак вказаних моментів можна визначити через один зі змішаних векторних добутоків:

$$\begin{aligned}(\overline{OA_0} \times \overline{A_0A_1}) \cdot \overline{DP} &= (\overline{A_0A_1} \times \overline{DP}) \cdot \overline{OA_0} = (\overline{DP} \times \overline{OA_0}) \cdot \overline{A_0A_1} = \vec{N}_{A_0DP} \cdot \overline{A_0A_1}, \\(\overline{OB_0} \times \overline{B_0B_1}) \cdot \overline{DP} &= (\overline{B_0B_1} \times \overline{DP}) \cdot \overline{OB_0} = (\overline{DP} \times \overline{OB_0}) \cdot \overline{B_0B_1} = \vec{N}_{B_0DP} \cdot \overline{B_0B_1}.\end{aligned}$$

Таким чином орт осі такого кінцевого повороту отримає вираз («+» берем, коли попередні вирази позитивні):

$$\vec{e} = \pm \frac{\overline{DP}}{|\overline{DP}|}. \quad (1)$$

Для визначення кута кінцевого повороту – кута (рис. 2) між площинами A_0DP та A_1DP (або – між площинами B_0DP та B_1DP) треба знайти для них нормалі. Це буде або

$$\vec{N}_0 = \vec{N}_{A_0DP} = \overline{DP} \times \overline{OA_0}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N}_{A_1DP} = \overline{DP} \times \overline{OA_1}, \quad \text{або} \quad \vec{N}_0 = \vec{N}_{B_0DP} = \overline{DP} \times \overline{OB_0}, \quad \vec{N}_1 = \vec{N}_{B_1DP} = \overline{DP} \times \overline{OB_1}$$

в залежності, які з них не дорівнюють нулю. Кут кінцевого повороту визначиться формулою:

$$\psi = \arccos \left(\frac{\vec{N}_0 \cdot \vec{N}_1}{|\vec{N}_0| \cdot |\vec{N}_1|} \right), \quad (2)$$

а шуканий кватерніон – формулою:

$$\Lambda = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (3)$$

Відзначимо, що формула (1) та нормалі з формули (2) вироджуються, коли 1) $\Delta \vec{r}_A = 0$, 2) $\Delta \vec{r}_B = 0$, 3) $\Delta \vec{r}_A \times \Delta \vec{r}_B = 0$. Це може бути, коли, відповідно, 1) $A \equiv P$, 2) $B \equiv P$, 3) P знаходиться між точками A і B на колі, що проходить через них.

Таким чином, шляхом задання положень точок D , E , K в робочому процесі, за формулами (1), (2), (3) можна отримати кватерніон (3) орієнтації вхідної СК $Dxyz$. Позначимо його $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$.

Для подальшого нам потрібно задати орієнтацію вихідної СК $Kxyz$. Для перетворення СК $Dxyz$ до $Kxyz$ згідно рис. 1 її треба повернути на кут ν навколо осі Dy і потім – на кут π (180°) навколо нового положення осі Dz . Отримаємо кватерніон цих додаткових поворотів:

$$\Lambda_{\nu\pi} = \left(\cos \frac{\nu}{2} + \vec{j} \sin \frac{\nu}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\pi}{2} + \vec{k} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \left(0 + \vec{i} \sin \frac{\nu}{2} + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cos \frac{\nu}{2} \right).$$

Тоді кватерніон вихідної СК $Kxyz$ отримає вигляд:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{\nu\pi}. \quad (4)$$

Розв'язання транспортної задачі маніпулятора.

Отримана формула (3) дає змогу визначити потрібне з умов здійснення робочого процесу положення точки K в абсолютній системі координат

$$\begin{bmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} + \text{Vect} \left(\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} \circ \tilde{\Lambda}_{(Dxyz)}^{(abs)} \right), \quad (5)$$

де функція Vect повертає векторну частину кватерніону.

А це дає змогу розв'язати задачу визначення кутів повороту одна відносно іншої перших трьох ланок механізму. Тобто розв'язати транспортну задачу – задачу доставки точки K – перетину осей трьох останніх ланок у розраховане за формулами (3), (5) положення.

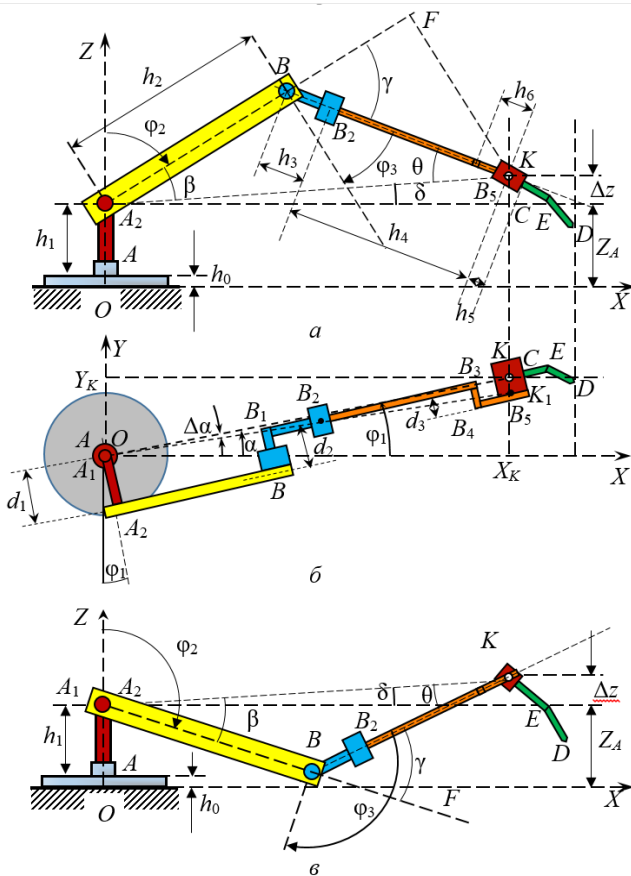


Рис. 3 – До отримання формул для кутів у шарнірах:
 а – проекція верхньої основної конфігурації маніпулятора на вертикальну площину; б – проекція схеми маніпулятора на горизонтальну площину; в – проекція нижньої основної конфігурації маніпулятора на вертикальну площину.

У зв'язку з тим, що основною задачею тут є задача оцінки енергетичних витрат при здійсненні руху маніпулятора, можна знехтувати похибкою перетину трьох осей в одній точці K і прийняти, що осі трьох останніх кінематичних пар перетинаються в одній точці K .

На рис. 3. показано проекції схем маніпулятора: на вертикальну площину «верхньої» основної конфігурації маніпулятора, рис. 3, а, (лікоть – точка B – розташовується при русі вверху) та «нижньої» основної конфігурації маніпулятора, рис. 3, в, (лікоть – внизу), а на рис. 3, б показано проекцію схеми маніпулятора на горизонтальну площину.

Вважаємо відомими розміри ланок маніпулятора $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, d_1, d_2, d_3$ (рис. 3) і координати в абсолютній системі відліку X_K, Y_K, Z_K точки K .

Кут φ_1 легко знаходиться з нижньої проекції (рис. 3, б). Для отримання кутів φ_2 та φ_3 треба розв'язати трикутники $\Delta A_1 B_1 K$ на проекціях рис. 3, а та рис. 3, в.

Спочатку знайдемо очевидні розміри

$$\Delta z = Z_K - h_0 - h_1 \text{ та } A_1 K = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 + \Delta z^2}.$$

Тоді відразу знайдемо кути α – кут між вертикальною площиною $A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 K E$ і віссю $O X$ (використано функцію atan2 для отримання кута в межах $[-\pi; +\pi]$), δ – кут між прямою $A_1 K$ та горизонтальною площиною, θ і β – кути в трикутниках $\Delta A_1 B_1 K$ за теоремою косинусів (рис. 3), та по них – кут γ :

$$\alpha = \text{atan2}(Y_K, X_K), \delta = \arcsin \frac{\Delta z}{A_1 K}, \theta = \arccos \frac{A_1 K^2 + B_1 K^2 - A_1 B_1^2}{2 B_1 K \cdot A_1 K}, \beta = \arccos \frac{A_1 B_1^2 + A_1 K^2 - B_1 K^2}{2 A_1 B_1 \cdot A_1 K}, \gamma = \beta + \theta. \quad (6)$$

З формул (6) знайдемо кути повороту перших трьох ланок маніпулятора:

$$\varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \mp (\beta \pm \delta), \varphi_3 = \pm \gamma - \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

де верхні знаки у формулах відповідають верхній конфігурації, а нижні – нижній.

Таким чином, транспортна задача розв'язана.

Розв'язання орієнтаційної задачі маніпулятора. Отримані кути визначають, крім віддаленості точки K від стійки маніпулятора, орієнтацію у просторі «ліктя» L (рис. 1, $B B_2$ на рис. 3). Запишемо вираз для кватерніону повороту «ліктя» відносно абсолютної СК відповідно до послідовності поворотів на кути (7) множенням кватерніонів елементарних поворотів:

$$\Lambda_{(B_2,xyz)}^{(abs)} = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_2) \circ \Lambda_x(\varphi_3) = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_2 + \varphi_3), \quad (8)$$

де позначення $\Lambda_\xi(\varphi)$, $\xi = x, y, z$ – тут і далі означають кватерніон елементарного повороту навколо осі ξ на кут, вказаний у дужках. Так кватерніони, що входять до виразу (8), задаються формулами:

$$\Lambda_z(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right); \quad \Lambda_y(\varphi_2 + \varphi_3) = \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right);$$

$$\Lambda_{(B_2,xyz)}^{(abs)} = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) - i_1 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_2 \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right). \quad (9)$$

Для отримання орієнтації «захвату» («робочого інструменту») «лікоть» треба повернути на кути φ_4, φ_5 і φ_6 у шарнірах B_2 і двічі – в K (рис. 1, 3). СК $Kxyz$ захвату позначена блакитним кольором на рис. 1. Її орієн-

тація в абсолютній СК може визначатися через задану вище орієнтацію вихідної СК (4), а може через кути поворотів ланок маніпулятора в шарнірах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$.

Кватерніон орієнтації $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$ вихідної СК відносно абсолютної представляється в цьому випадку добутком кватерніонів повороту від абсолютної СК $OXYZ$ до СК B_2xyz «ліктя» $\left(\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}\right)$ та повороту від СК B_2xyz «ліктя» до СК $Kxyz$ «захвату» $\left(\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}\right)$:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}, \quad (10)$$

де кватерніон повороту від абсолютної СК до СК B_2xyz «ліктя» $\left(\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}\right)$ дається формулами (8), (9).

Сформуємо кватерніон повороту СК B_2xyz «ліктя» до СК $Kxyz$ «захвату» за допомогою кватерніонів послідовності поворотів, які здійснюються при такому повороті:

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \Lambda_x(\varphi_4) \circ \Lambda_y(\varphi_5) \circ \Lambda_x(\varphi_6).$$

Відповідно до цього отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} \Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_1 \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + \\ & + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Таки чином, в рівнянні (10) невідомим буде кватерніон $\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)}$, бо кватерніони $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$ та $\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ вже визначені формулами (4) і (9). Запишемо розв'язок рівняння (10):

$$\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}, \quad (12)$$

де $\tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ – спряжений кватерніон (9).

Проста форма шуканого кватерніона (11) дозволяє знайти кути $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ останніх ланок маніпулятора.

Позначимо $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – компоненти кватерніона, що отримується праворуч в формулі (12). Тоді знайдемо:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); & \lambda_1 = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); \\ \lambda_2 = & \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right); & \lambda_3 = & \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Звідси, остаточно

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & 0.5(\text{atan2}(\lambda_1, \lambda_0) + \text{atan2}(\lambda_3, \lambda_2)); \\ \varphi_5 = & \arccos(\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2); \\ \varphi_6 = & 0.5(\text{atan2}(\lambda_1, \lambda_0) - \text{atan2}(\lambda_3, \lambda_2)). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, формулами (1) – (5) за заданими законами зміни в часі координат характерних точок механізму – B, E, D , які визначаються з умов виконання роботом рухів захвату з робочим інструментом під час робочого процесу, будуються як функції часу кватерніон вихідної СК $Kxyz$ і координати точки K – вузлової точки маніпулятора. Після цього обернена задача кінематики розпадається на дві, які розв'язуються аналітично – задачу транспортувальну і задачу орієнтаційну. Транспортувальна – задача доставки вузлової точки K до визначеного умовами робочого процесу положення – розв'язується через вирішення відповідних трикутників, що створюють ланки механізму, – знаходяться значення кутів повороту трьох перших ланок за формулами (6), (7) для двох суттєвих з точки зору основної задачі статті конфігурацій маніпулятора. Визначення таких кутів задає не тільки положення, а і орієнтацію третьої ланки (8), (9). Тому орієнтаційна задача, виходячи з відомих кватерніонів – орієнтації вихідної СК і орієнтації 3-ї ланки, буде спеціальне кватерніонне рівняння (10) для визначення кватерніону орієнтації захвату щодо орієнтації третьої ланки. Останній кватерніон (12) виражається через шукані кути останніх трьох ланок (13), звідси і знаходяться ці кути (14).

Алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки. Розроблений в статті алгоритм сформульованої задачі реалізовано і протестовано за допомогою спеціальної системи комп'ютерної алгебри *КиДим* (ССКА *КиДим* [15, 16]). Однією з ключових переваг способу отримання рівнянь механіки (динаміки, статички, кінематики,

кінетостатики, коливач), реалізованого за допомогою вбудованої системи комп'ютерної алгебри в КіДиМ, є представлення *механічної моделі* процесу сукупністю елементів – *силових, інерційних, пружних та дисипативних* [6, 15 – 18]. З них КіДиМ автоматично збирає *математичну модель* процесу. Динамічні рівняння, що отримуються в пам'яті комп'ютера в КіДиМі в аналітичному вигляді для голономних або неголономних дискретних механічних систем n твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки, можна представити у вигляді [15, 16]:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\bar{R}_i}^T m_i \ddot{\bar{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\bar{M}_i}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\bar{\omega}}_i^{(i)} + \bar{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \bar{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (15)$$

де $\mathbf{W}_{\bar{R}_i}^T, \mathbf{W}_{\bar{M}_i}^T, \mathbf{W}_D^T, \mathbf{W}_C^T, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції i -го тіла ($i = 1, 2, \dots, n$), дисипативних, пружних та інших активних сил системи відповідно; $\bar{r}_{C_i}, \bar{\omega}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас та кутова швидкість i -го тіла (радіус-вектор центру мас задається як функція узагальнених координат в абсолютній СК, а кутова швидкість як функція узагальнених координат та узагальнених швидкостей – у зв'язаній головній центральній СК i -го тіла; m_i, \mathbf{J}_{C_i} – маса та діагональний тензор інерції i -го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $[\mathbf{D}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами дисипації, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – матричний вектор, що об'єднує швидкості (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти в'язкого тертя; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами жорсткості, $\boldsymbol{\gamma}$ – матричний вектор, що об'єднує деформації (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти сил пружності; \mathbf{P} – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проєкції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Розв'язання оберненої задачі динаміки вказаних систем будується ССКА КіДиМ шляхом розв'язання рівнянь (15) відносно невідомих сил і моментів сил [15, 16], що входять в праву частину лінійно, і назначаються користувачем в вихідних даних. Параметри руху – залежності від часу узагальнених координат і, в нашому випадку, узагальнених швидкостей, також задаються в вихідних даних. Таким чином, шляхом розв'язання системи лінійних рівнянь відносно невідомих сил і моментів, що впливає з системи (15), розраховуються закони зміни в часі цих невідомих.

З наведених описів вирішення обернених задач кінематики і динаміки можна бачити, що рішення цих задач доволі легко можна об'єднати. Саме ця робота і була проведена в рамках розв'язання поставленої проблеми. За заданим рухом вихідної ланки – захвату описаним вище алгоритмом розв'язання оберненої задачі кінематики реалізується визначення кутів повороту ланок $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t)$, які є узагальненими координатами маніпулятора. Це знання дає змогу отримати розв'язання оберненої задачі динаміки (в даному випадку значення моментів $M_1(t), M_2(t), M_3(t), M_4(t), M_5(t), M_6(t)$, що необхідно прикласти в кінематичних парах для здійснення заданого руху).

Залишається тільки розрахувати роботи, що здійснює кожний момент в кінематичній парі, і накопичити загальну роботу їх усіх

$$A = \sum_{i=1}^m A_{M_i} = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_{i0}}^{\varphi_{i1}} M_i d\varphi_i = \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{t_1} M_i(t) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} dt = \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^{t_1} M_i(t) \omega_i(t) dt, \quad (16)$$

де m – кількість таких пар; M_i – рушійний крутний момент в i -ї парі; φ_i, ω_i – кут і кутова швидкість повороту i -ї ланки відносно $(i-1)$ -ї; $[\varphi_{i0}, \varphi_{i1}], [t_0, t_1]$ – межі зміни такого кута і часу.

З вищезазначеного можна побачити, що весь алгоритм розрахунку робіт рушійних моментів допускає одночасне розрахування конфігурацій маніпулятора. Для цього кожна конфігурація отримує номер, а необхідні параметри механічних моделей конфігурацій, перш за все, кути повороту ланок, рушійні моменти і їх роботи, індексуються відповідно номерам конфігурацій. Кожна конфігурація трактується в такому як деяка підсистема загальної системи, яка об'єднує всі конфігурації [18]. Тоді спеціальна інструкція у вихідних даних

РОЗМНОЖИТИ := i(1,2);

заставляє ССКА КіДиМ за однією записаною в вихідних даних механічною моделлю згенерувати в пам'яті комп'ютера необхідну кількість математичних моделей таких конфігурацій і обчислювати їх паралельно. Таким чином, до кінця діапазону часу розрахунку в пам'яті комп'ютера вже готові значення загальних робіт рушійних моментів для кожної конфігурації, котрі і дають можливість автоматично обрати за критерієм мінімуму загальної роботи оптимальну конфігурацію. Оскільки для кожної конфігурації вже будуть розраховані закони зміни узагальнених координат механізму і значення рушійних моментів, залишається їх тільки реалізувати для обраної конфігурації.

Приклад результатів розрахунку робота-маніпулятора (рис. 1). Для ілюстрації можливостей пропонованого алгоритму у межах підготовки цієї статті було розглянуто таке модельне завдання.

Рух інструменту являє собою прямолінійний вертикальний рух точки D і рух точок E і K траєкторіями, які в проекції на горизонтальну площину представляються спіралями Архімеда з полюсами на осі Dz (рис. 1), причому спіраль точки E згортається, а точки K – розгортається. Початкове положення характеризується вертикальним розташуванням точки K над точкою D , а кінцеве – вертикальним розташуванням точки E над точкою D . Початкова та кінцева швидкість руху інструмента дорівнює нулю. Треба забезпечити плавний відхід із початкового становища та плавний підхід у кінцеве.

Для забезпечення заданого руху інструменту підібрано такі функції координат точок D , E і K :

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\pi}{2} - \nu + \xi; & \eta_1 &= \frac{\pi}{2}; & \eta &= 0,5 \left((\eta_0 + \eta_1) + (\eta_0 - \eta_1) \cos \frac{\pi t}{t_1} \right); \\ r_E &= b \cos \eta; & z_E &= b \sin \eta; & r_K &= c \cos(\nu - \xi + \eta); & z_K &= c \sin(\nu - \xi + \eta); \\ X_D &= 1.4; & Y_D &= 0; & Z_D &= 0.5 Z_{D_1} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi t}{t_1} \right) \right]; & Z_{D_1} &= -0.4; \\ X_E &= X_D + r_E \cos \frac{2\pi t}{t_1}; & Y_E &= Y_D + r_E \sin \frac{2\pi t}{t_1}; & Z_E &= Z_D + z_K; \\ X_K &= X_D + r_K \cos \frac{2\pi t}{t_1}; & Y_K &= Y_D + r_K \sin \frac{2\pi t}{t_1}; & Z_K &= Z_D + z_K; & t &\in [0, t_1]. \end{aligned}$$

Тут ν – кут зламу інструмента, ξ – $\angle DKE$, $a = 0.35$ м та $b = 0.25$ м – розміри інструмента, η – кут прямої DE з вертикаллю, r_E , r_K – поточні відстані точки E та точки K від вертикалі, z_E , z_K – висоти цих точок над точкою D .

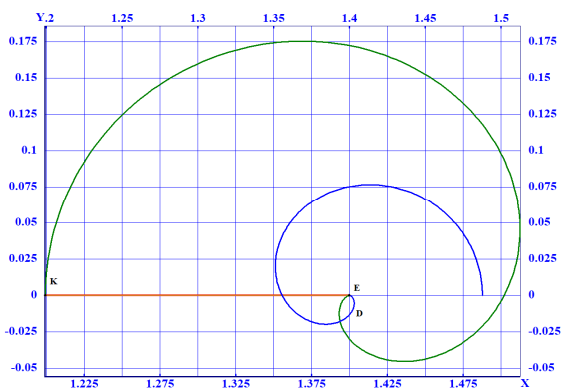


Рис. 4 – Рух точок E і K – вид зверху.

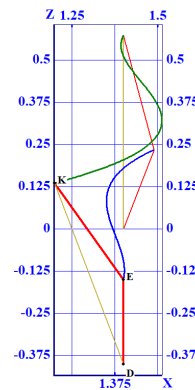


Рис. 5 – Рух точок E і K – вид збоку.

Такий рух було обрано тому, що він використовувався вже нами для тестування іншого алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики на базі матриць повороту. Там такий рух приводив до виродження кутів, що задавали орієнтацію вхідної СК. Було обрано складну траєкторію руху по спіралі, яка забезпечує змінне навантаження на вузли маніпулятора. Це дозволяє перевірити ефективність алгоритму в умовах, що максимально наближені до реальних динамічних задач. Крім того, на цьому прикладі видна велика різниця в значеннях робіт.

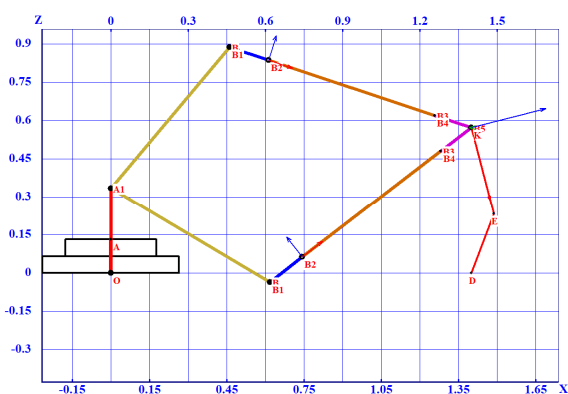


Рис. 6 – Початкове положення робота.

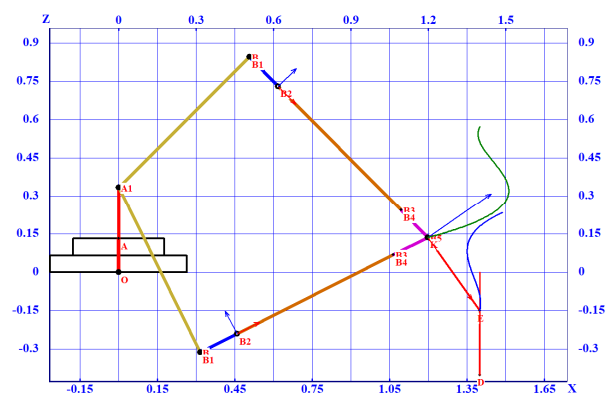


Рис. 7 – Кінцеве положення робота.

Обчислення проводилися для двох конфігурацій маніпулятора: верхньої та нижньої, що найбільш відрізняються одна відносно іншої. Для кожної конфігурації було проведено визначення енергетичних витрат на ви-

конання руху.

Наведемо деякі графіки для демонстрації результатів. На рис. 4 та 5 наведені проєкції траєкторій руху характерних точок робочого інструмента – точок K , E і D , що описують спіралі – точка E – синій колір – згортається, а точка K – зелений колір – розгортається, точка D – рухається вертикально зверху-донизу. На рис. 6 та 7 показано початкове і кінцеве положення механізму. Тут видно, що програма одночасно розраховує і виводить на екран анімацію верхньої та нижньої конфігурації.

Бачимо, що для верхньої конфігурації центри ваги якраз самих важких другого і третього елементів незначно змінюють свою висоту, а для нижньої конфігурації якраз центр ваги другого елемента суттєво знижується, тому в результаті отримується така суттєва різниця в роботах. Крім того, рушійним моментам ще треба долати сили і моменти сил інерції, які побачити на приведених кадрах неможливо.

В табл. 1 наведено числові дані розрахунків робіт окремих моментів і загальної роботи. Тут можна зробити висновок, що нижня конфігурація долає прагнення механізму рухатися донизу з прискоренням, а верхня більш зважена, тому обрати слід для заданого руху робочої ланки верхню конфігурацію – там абсолютне значення загальної роботи рушійних моментів менше.

Таблиця 1 – Робота активних моментів для верхньої та нижньої конфігурацій маніпулятора

Момент на ланці	Робота моменту на конфігурації, Дж		Момент на ланці	Робота моменту на конфігурації, Дж	
	Верхня	Нижня		Верхня	Нижня
M_1	0.688182	0.166543	M_4	10.191	0.184492
M_2	-4.94907	-29.7506	M_5	0.00405835	0.100829
M_3	-4.87331	6.22835	M_6	0.0447697	0.0315224
Загальна робота	1.10566	-23.0389			

Перспективи подальших досліджень. Запропонований в статті підхід представляє собою закінчене в теоретичному плані дослідження. Він реалізований і протестований за допомогою ССКА КіДиМ. Тому подальші роботи в цьому напрямку пов'язані з реалізацією на бортових комп'ютерах маніпуляторів розглянутого класу. Також можливе поширення алгоритму на інші класи робототехнічних систем, наприклад, на андроподібні крокуючі роботи.

Висновки. Принципово новим є запропонований в статті алгоритм аналітичного розв'язання оберненої задачі кінематики широкого кола просторових маніпуляторів з шістьма степенями свободи типу ПУМА з використанням кватерніонів. Аналітичне рішення спирається на поділення загального завдання на три простих, що мають аналітичний розв'язок. Спочатку за заданими координатами трьох точок робочого інструмента визначаються параметри його положення і орієнтації у просторі. Це дозволяє визначити положення вузлової точки і перейти до розв'язання транспортної задачі – визначення кутів перших трьох ланок механізму. Отримані кути задають крім положення вузлової точки орієнтацію в абсолютному просторі 3-ї ланки. Далі порівнюються результати двох послідовностей поворотів цієї ланки, що записуються через кватерніони. Перша послідовність – це повертатись назад до абсолютної СК, і, від неї – до робочої ланки, орієнтація якої в абсолютній СК визначена спочатку. Друга послідовність – це три повороти на три кути останніх ланок до збігання з орієнтацією робочого органу. Таким чином будується кватерніонне рівняння відносно невідомих трьох кутів в останніх кінематичних парах робота. Розв'язання такого рівняння завершує визначення всіх кутів повороту ланок механізму – його узагальнених координат.

Якщо припущення, прийняті вище, не цілком задовольняються в конкретній моделі, запропоноване рішення оберненого завдання кінематики маніпулятора уточнюється методом Ньютона з початковим наближенням, отриманим описаним аналітичним рішенням. В такому випадку аналітичне рішення буде достатньо близьким до точного і гарантовано буде належати обраній конфігурації.

Не зважаючи на те, що алгоритми тут викладено з метою їх реалізації в ССКА КіДиМ, вони мають значення і для реалізації в інших системах.

Список літератури

1. Андреев Ю. М. Алгоритм компенсации возмущений ходьбы двуногого робота решением обратной задачи кинематики // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – № 2 (2020). – С. 14 – 21. DOI: 10.20998/2078-9130.2020.1.219622.
2. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. – М. : Мир, 1989. – 621 с.
3. Шабанов Г. В., Андреев Ю. М. Аналітичне рішення оберненого і прямого завдання кінематики просторового кутового маніпулятора

- ABB з подальшим 3D – моделюванням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2 (2024). – С. 30 – 38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
4. Denavit J, Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices // *Journal of Applied Mechanics*. – 1955. – no. 22 (2). – pp. 215 – 221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 5. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry // *Mechanism and Machine Theory*. – 2021. – vol. 159. – p. 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
 6. Andreev Yu. M., Morachkovsky O. K. Dynamics of holonomic systems of rigid bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – Vol. 41. – pp. 817 – 824.
 7. Andrijev Y., Breslavsky D., Pashchenko S., Tatarinova O. Development the Algorithms of Anthropomorphic Robot's Motion Control by Use of AI Algorithms // 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2020 – Conference Proceedings. – 2020. – pp. 82 – 85. DOI: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250175.
 8. Andrijev Yu., Breslavsky D., Larin A., Mietielov V. Computer Modelling of UAV Flight // 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13-17 Sept. 2021. – Kharkiv : IEEE, 2021. – P. 455 – 459. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991.
 9. Andrieiev Yu., Breslavsky D., Chystilina H., Ivanchenko K. Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robots with a free foot walking control // 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek), October 3-7. – Kharkiv, Ukraine, 2022. – pp. 324 – 329. – (1-6). DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395.
 10. Liu H. S., Zhou W. N., Lai X. B., Zhu S. Q. An efficient inverse kinematic algorithm for a PUMA560-structured robot manipulator // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. – 2013. – vol. 10(5). DOI: 10.5772/56403.
 11. Liu H., Zhang Y., Zhu S. Novel inverse kinematic approaches for robot manipulators with Pieper-Criterion based geometry. // *Int. J. Control Autom. Syst.* – 2015. – vol. 13. – pp. 1242 – 1250. DOI: 10.1007/s12555-013-0440-y.
 12. Андреев Ю. М. Реализация и использование алгоритма Левенберга-Марквардта в задачах калибровки роботов-манипуляторов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
 13. Racz S-G., Crenganiş M., Breaz R-E., Bârsan A., Gîrjob C-E., Biriş C-M., Tera M. Integrating Trajectory Planning with Kinematic Analysis and Joint Torques Estimation for an Industrial Robot Used in Incremental Forming Operations // *Machines*. – 2022. – 10, 531. DOI: 10.3390/machines10070531.
 14. Iakovlev Roman, Sakuta Vladislav, Denisov Alexander, Prapakovich Ryhor. Improving energy efficiency of a robotic system based on multiple analytical solutions for inverse kinematics // MATEC Web of Conferences. – 2017. – 113, 02002. DOI: 10.1051/mateconf/201711302002.
 15. Андреев Ю. М. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – № 2/4 (26). – С. 10 – 13.
 16. Андреев Ю. М., Дзюба В. Л. Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв у ССКА Кі-Дім // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (2023). – С. 34 – 40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
 17. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. – К.: ИПП им. Писаренко Г.С. Ассос. «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
 18. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Метод подсистем для аналитического динамического анализа и синтеза // Физические и компьютерные технологии : 12-я Междунар. конф. : труды. – Харьков : ХНПК «ФЭД», 2006. – С. 123 – 131.

References (transliterated)

1. Andreev Yu. M. Algoritm kompensatsii vozmushheniy khod'by dvonogogo robota resheniem obratnoy zadachi kinematiki [The algorithm for compensating walking disturbances of a bipedal robot by solving the inverse kinematics problem]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 2 (2020), pp. 14–21. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2020.1.219622>.
2. Fu K., Gonsales R., Li K. *Robototekhnika* [Robotics]. Moscow, Mir Publ., 1989. 621 p.
3. Shabanov H. V., Andrieiev Yu. M. Analitichne rishennya obrnenogo i pryamogo zavdannya kinematyky prostorovogo kutovogo manipulyatora AVV z podal'shym 3D – modelyuvannyam [Analytical solution of the inverse and forward kinematics problem of a spatial angular ABB manipulator with subsequent 3D modeling]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2 (2024), pp. 30–38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
4. Denavit J, Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*. 1955, no. 22 (2), pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
5. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry. *Mechanism and Machine Theory*. 2021, vol. 159, p. 104265. DOI: 10.1016/j.Mechmachtheory.2021.104265.
6. Andreev Yu. M., Morachkovsky O. K. Dynamics of holonomic systems of rigid bodies. *Int. Appl. Mech.* 2005, Vol. 41, pp. 817–824.
7. Andrijev Y., Breslavsky D., Pashchenko S., Tatarinova O. Development the Algorithms of Anthropomorphic Robot's Motion Control by Use of AI Algorithms. 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2020 – Conference Proceedings. 2020, pp. 82–85. DOI: 10.1109/KhPIWeek51551.2020.9250175.
8. Andrijev Yu., Breslavsky D., Larin A., Mietielov V. Computer Modelling of UAV Flight. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13-17 Sept. 2021. Kharkiv, IEEE Publ., 2021. pp. 455–459. DOI: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991.
9. Andrieiev Yu., Breslavsky D., Chystilina H., Ivanchenko K. Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robots with a free foot walking control. 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek), October 3-7. Kharkiv, Ukraine, 2022, pp. 324–329, (1-6). DOI: 10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395.
10. Liu H. S., Zhou W. N., Lai X. B., Zhu S. Q. An efficient inverse kinematic algorithm for a PUMA560-structured robot manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2013, vol. 10(5). DOI: <https://doi.org/10.5772/56403>.
11. Liu H., Zhang Y., Zhu S. Novel inverse kinematic approaches for robot manipulators with Pieper-Criterion based geometry. *Int. J. Control Autom. Syst.* 2015, vol. 13, pp. 1242–1250. DOI: 10.1007/s12555-013-0440-y.
12. Andreev Yu. M. Realizatsiya i ispol'zovanie algoritma Levenberga-Markvardta v zadachakh kalibrovki robotov-manipulyatorov [Implementation and application of the Levenberg-Marquardt algorithm in robot manipulator calibration tasks]. *Visnik NTU «KhPI»*. Seriya : *Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2021, no. 2 (2021), pp. 86–93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.

10.20998/2078-9130.2021.2.249537.

13. Racz S-G., Crenganiş M., Breaz R-E., Bârsan A., Gîrjob C-E., Biriş C-M., Tera M. Integrating Trajectory Planning with Kinematic Analysis and Joint Torques Estimation for an Industrial Robot Used in Incremental Forming Operations. *Machines*. 2022, 10, 531. DOI: 10.3390/machines10070531.
14. Iakovlev Roman, Sakuta Vladislav, Denisov Alexander, Prapakovich Ryhor. Improving energy efficiency of a robotic system based on multiple analytical solutions for inverse kinematics. *MATEC Web of Conferences*. 2017, 113, 02002. DOI: 10.1051/mateconf/201711302002.
15. Andreev Yu. M. Chislennno-analiticheskoe reshenie obratnoy zadachi dinamiki diskretnykh sistem [Numerical-analytical solution of the inverse dynamics problem for discrete systems]. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Advanced Technologies]. Kharkov, 2007. no. 2/4 (26), pp. 10–13.
16. Andrieiev Yu. M., Dziuba V. L. Udoskonalenyi alhorytm rozvyazannya obratnykh zadach dynamiky robototekhnichnykh prystroyiv u SSKA KiDyM [An improved algorithm for solving inverse dynamics problems of robotic devices in the CSKA KiDyM]. *Visnik NTU «KhPI». Seriya : Dinamika ta mitsnist' mashin* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, vol. 2 (2023), pp. 34–40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
17. Andreev Yu. M., Morachkovskij O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebry dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [A new computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonomic and non-holonomic rigid body systems]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy : mezhd. nauch.-tekhn. sb. NAN Ukrainy* [Reliability and Durability of Machines and Structures: International Scientific and Technical Collection of the NAS of Ukraine]. Kyiv, IPP im. Pisarenko G.S. Assoc. «Nadezhnost' mashin i sooruzheniy» Publ., 2006, Vol. 26, pp. 11 – 18.
18. Andreev Yu. M., Morachkovskij O. K. Metod podsistem dlya analiticheskogo dinamicheskogo analiza i sinteza [The subsystem method for analytical dynamic analysis and synthesis]. *Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 12-ya Mezhdunar. konf. : trudy* [Physical and Computer Technologies: 12th International Conference: Proceedings]. Kharkiv, KhNPK "FED" Publ., 2006, pp. 123–131.

Надійшла (received) 30.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Головня Олексій Олександрович – магістрант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksii.holovnia@infiz.khpi.edu.ua.

Holovnia Oleksii Oleksandrovych – Master Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksii.holovnia@infiz.khpi.edu.ua.

Шабанов Геннадій Вікторович – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

Shabanov Hennadii Viktorovich – Graduate Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

А. Я. БОМБА, І. П. МОРОЗ, З. С. ЛІСТЬЄВ

ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗОВАНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧ

Представлено архітектуру програмної системи для автоматизованого розв'язання сингулярно збурених задач у напівпровідниковій електроніці, розроблену на основі принципів предметно-орієнтованого проєктування (DDD – Domain-Driven Design). Технологія DDD була застосована до математичної моделі технічної системи «плазмовий діод» з метою демонстрації її потенційних можливостей у контексті складних інженерних задач. Розширено коло задач програмного проєктування за допомогою методів DDD, що дозволило більш точно моделювати складні системи та процеси. Особливістю представленої архітектури програмної системи є інтеграція штучної нейронної мережі, яка призначена для розпізнавання типів рекурентних послідовностей підзадач. Ці підзадачі утворюються в результаті декомпозиції базової задачі за методом прилежових поправок теорії збурень. Нейронна мережа аналізує отримані підзадачі та класифікує їх за відомими типами, що дозволяє автоматизувати вибір найбільш ефективних методів їх розв'язання та оптимізувати обчислювальні ресурси. Застосування DDD у контексті розробки програмної системи для розв'язання сингулярно збурених задач дозволило досягти глибокого розуміння предметної області та відобразити її концепції у програмному коді. Це сприяє створенню гнучких та масштабованих систем, які легко адаптуються до змін вимог та умов експлуатації. Математична модель «плазмового діода» слугувала тематичним дослідженням, яке підтвердило ефективність застосованого підходу. Розроблена система відкриває нові перспективи в автоматизації та оптимізації процесів моделювання та аналізу в галузі напівпровідникової електроніки. Застосування DDD та інтеграція інтелектуальних компонентів, таких як штучні нейронні мережі, сприяють розширенню можливостей програмного забезпечення та підвищенню його ефективності. Подальший розвиток системи передбачає розширення бази даних підзадач та методів їх розв'язання, вдосконалення алгоритмів навчання нейронної мережі, а також адаптацію архітектури для інших типів технічних систем та задач. Це сприятиме більш широкому застосуванню розробленого підходу в різних галузях науки та техніки.

Ключові слова: сингулярно збурені задачі, предметно-орієнтоване проєктування, штучна нейронна мережа, автоматизоване моделювання, метод прилежових поправок, символічні обчислення.

A. YA. BOMBA, I. P. MOROZ, Z. S. LISTIEV

USE OF MODERN INFORMATION TECHNOLOGIES IN SYSTEMS FOR AUTOMATED SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS

The paper presents the architecture of a software system for automated solution of singularly perturbed problems of semiconductor electronics, developed based on the principles of domain-driven design (DDD). The DDD technology was applied to the mathematical model of the technical system "plasma diode" to demonstrate its potential in the context of complex engineering problems. The range of software design problems was expanded using DDD methods, which made it possible to model complex systems and processes more accurately. A special feature of the presented architecture of the software system is the integration of an artificial neural network designed to recognize the types of recurrent sequences of subproblems. These subproblems are formed as a result of decomposition of the basic problem using the method of boundary corrections of perturbation theory. The neural network analyzes the obtained subproblems and classifies them by known types, which allows automating the selection of the most effective methods for their solution and optimizing computing resources. The use of DDD in developing a software system for solving singularly perturbed problems allowed us to deeply understand the subject area and reflect its concepts in the program code. This contributes to creating flexible and scalable systems that can easily adapt to changing requirements and operating conditions. The "plasma diode" mathematical model served as a case study confirming the approach's effectiveness. The developed system opens up new prospects for automating and optimizing modeling and analysis processes in semiconductor electronics. The use of DDD and the integration of intelligent components, such as artificial neural networks, contribute to the expansion of software capabilities and increased efficiency. Further system development involves expanding the database of subtasks and methods for solving them, improving neural network training algorithms, and adapting the architecture to other technical systems and problems. This will contribute to a wider application of the developed approach in various fields of science and technology.

Key words: singularly perturbed problems, Domain-Driven Design, artificial neural network, automated modeling, method of boundary layer corrections, symbolic computations.

Вступ. Сингулярно збурені задачі теорії диференціальних рівнянь – це клас задач, які, зокрема, містять малі параметри при старших похідних чи частині старших похідних (для рівнянь у частинних похідних). Сингулярні збурення (доданки, що містять малий параметр) суттєво впливають на поведінку розв'язків цих задач, зокрема, на їх структуру та асимптотичні властивості. Відповідні постановки задач, які зазвичай є нелінійними, виникають в різноманітних прикладних задачах фізики (зокрема електроніки), хімії, біології і використовуються для опису математичних моделей процесів дифузії, фільтрації рідин в пористих середовищах, тепло- и масо-переносу та багатьох інших областях [1 – 3].

Проблема розв'язання сингулярно збурених задач обумовлена тим, що, зокрема, стандартні чисельні методи часто виявляються неефективними при спробі їх вирішення, оскільки не можуть адекватно відтворити різкі перепади розв'язку без значного збільшення обчислювальних витрат. Для вивчення сингулярно збурених нелінійних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних розроблені спеціалізовані асимптотичні методи: метод ВКБ [5], метод Люстернака – Вішика [6] та, зокрема, метод прилежових поправок [7 – 10], які дозволяють отримати наближені розв'язки задач, виражені степеневими рядами за малими параметрами. Відповідно, процедура розв'язання сингулярно збурених задач характеризується високим рівнем складності.

Слід відзначити, що сучасні прикладні задачі (у тому числі і сингулярно збурені), як правило, мають комплексну постановку, тобто в них поєднуються математичні моделі низки фізичних процесів, що протікають у технічній системі. Наприклад, у технічній системі «плазмовий діод» є необхідність контролю процесу формування електронно-діркової плазми та процесу нагріву плазми [9] тощо. Ця обставина додатково підвищує рівень склад-

© А. Я. Бомба, І. П. Мороз, З. С. Лістьєв, 2024

ності проблем, що містять особливості (сингулярності).

Логічним рішенням, що знижує рівень складності початкової задачі, є проведення її *декомпозиції*. Цей підхід природно реалізується в низці асимптотичних методів, зокрема в методі примезових поправок [7].

Поряд із цим поява перспективних сучасних інформаційних технологій, таких, як *розпаралелювання*, використання віддалених серверів для виконання обчислень, використання символьних перетворень, штучного інтелекту під час обчислювального процесу, разом із збільшеними ресурсами комп'ютерних систем надають можливість підійти до розробки алгоритмів вирішення сингулярно збурених задач на новому якісному рівні. Такого типу обчислювальні алгоритми традиційно складають основу ядра *систем автоматизованого проектування (САПР)* [11 – 13]. Зауважимо і те, що математичні моделі різноманітних технічних систем, зокрема електронних напівпровідникових пристроїв, постійно удосконалюються, і, відповідно, виникає необхідність у поновленні ядра алгоритмів САПР.

З огляду на специфіку задач, що вирішуються на сучасному етапі розвитку математичного моделювання, та складність процесів моделювання, виникає необхідність залучення певних підходів до організації обчислювальної програмної системи і відповідних обчислювальних процесів. На даному етапі розвитку інструментарію розробки інформаційних систем популярною є *технологія предметно-орієнтованого проектування (DDD – Domain-Driven Design)* [14, 15]. DDD є підходом до створення та удосконалення складних програмних систем, який ґрунтується на модельній інформації про певну предметну область.

Метою роботи є розробка концепції архітектури програмного забезпечення для автоматизованого розв'язання сингулярно збурених задач з використанням методу примезових поправок, а також її реалізація для базової задачі напівпровідникової електроніки із залученням сучасних інформаційних технологій.

Постановка модельної задачі і проблематика розв'язання нелінійних сингулярно збурених задач. В *надвисокочастотній електроніці* широкого застосування набув напівпровідниковий $p-i-n$ діод (*плазмовий діод*) [16]. Пристрій утворюють формуванням контактів відповідних матеріалів з різними типами провідності (між напівпровідниками p – діркового) та n – (електронного) типів розміщують шар власного напівпровідника – матеріал i – типу). Робота напівпровідникового $p-i-n$ діода ґрунтується на можливості керування провідністю електронно-діркової плазми, що утворюється в активній області (i – області) такого пристрою.

Для дослідження електропровідних характеристик i – області $p-i-n$ –діодів широко використовується *дифузійно-дрейфова модель*, яка базується на рівняннях неперервності електронного і діркового струмів і *рівнянні Пуассона* з відповідними *граничними умовами*. Для одновимірного стаціонарного випадку, доцільність розгляду якого зумовлена особливостями геометричної структури пристрою та типовими режимами його роботи, постановка *модельної задачі* має такий вигляд [17 – 19]:

$$\begin{cases} -\mu^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = (p - n + N_d), \\ \frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{dn}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - n \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_n n = 0, \\ \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + p \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - A_p p = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(\frac{dn}{dx} - n \frac{d\varphi}{dx} - \gamma_n n \right) \Big|_{x=0} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left(-\frac{dp}{dx} - p \frac{d\varphi}{dx} - \gamma_p p \right) \Big|_{x=0} = 0; \quad (2)$$

$$\left(\frac{dn}{dx} - n \frac{d\varphi}{dx} - \gamma_n n \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad \left(-\frac{dp}{dx} - p \frac{d\varphi}{dx} - \gamma_p p \right) \Big|_{x=1} = \frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i}, \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=1} = U, \quad (3)$$

де $\varphi(x)$, $n(x)$, $p(x)$ – шукані функції розподілів потенціалу, концентрацій електронів і дірок в активній області $p-i-n$ –діода відповідно (використовується нормування $\tilde{x} = \frac{x}{w}$, $\tilde{\varphi} = \frac{e\varphi}{kT}$, $\tilde{n} = \frac{n}{N_i}$, $\tilde{p} = \frac{p}{N_i}$; у подальших викладах символ « \sim » опускається); $\mu^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 w^2 N_i}$ (малий параметр $\mu \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$); ε – відносна діелектрична стала; ε_0 – діелектрична стала; w – характерний розмір активної області діода; e – заряд електрона; N_i – концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику; k – стала Больцмана; T – температура ($^{\circ}K$);

$$A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}, \quad A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*} - \text{сталі};$$

D_n, D_p – коефіцієнти дифузії дірок та електронів відповідно; τ_n^*, τ_p^* – характерні часи рекомбінації носіїв заряду в об'ємі активної області (у даній математичній моделі є сталими, які залежать, як і коефіцієнти дифузії, від обраного матеріалу напівпровідника); $N_d(x)$ – профіль легування активної області домішками (задана функція); J – густина струму інжекції; U – різниця потенціалів на активній області; γ_n, γ_p – коефіцієнти рекомбінації носіїв заряду на контактах.

Задача (1) – (3) є сингулярно збуреною. Розв'язки таких задач, згідно з [3, 7], шукаємо у вигляді асимптотичних рядів за малим параметром задачі наступного виду:

$$\begin{pmatrix} n(x) \\ p(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(x) + \underline{N}(\underline{\xi}) + \overline{N}(\overline{\xi}) \\ P(x) + \underline{P}(\underline{\xi}) + \overline{P}(\overline{\xi}) \\ \Phi(x) + \underline{\Phi}(\underline{\xi}) + \overline{\Phi}(\overline{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^s \mu^i n_i(x) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i p_i(x) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i \varphi_i(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^s \mu^i \underline{N}_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i \underline{P}_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i \underline{\Phi}_i(\underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^s \mu^i \overline{N}_i(\overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i \overline{P}_i(\overline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^s \mu^i \overline{\Phi}_i(\overline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{n(s)}(x, \mu) \\ R_{p(s)}(x, \mu) \\ R_{\Phi(s)}(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де $N(x), P(x), \Phi(x)$ – регулярні складові розв'язку, які подаємо у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра; $\underline{N}(\underline{\xi}), \underline{P}(\underline{\xi}), \underline{\Phi}(\underline{\xi}), \overline{N}(\overline{\xi}), \overline{P}(\overline{\xi}), \overline{\Phi}(\overline{\xi})$ – примежові поправки відповідно в околах точок $x=0$ та $x=1$, які також подаємо у вигляді відповідних асимптотичних рядів ($\underline{\xi} = \frac{x}{\mu}, \overline{\xi} = \frac{1-x}{\mu}$ – відповідні регуляризуючі розтяги); $R_{\Phi(s)}(x, \mu), R_{n(s)}(x, \mu), R_{p(s)}(x, \mu)$ – залишкові члени.

Шляхом виконання стандартної процедури декомпозиції вихідної задачі (1) – (3) (на основі «прирівнювання») приходимо до постановок рекурентної послідовності задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з відповідними граничними умовами (за аналогією до [3, 4], де можна ознайомитись із детальним описом відповідного алгоритму).

Наведемо приклади елементів такої послідовності задач (для випадку, коли домішки у досліджуваній області відсутні: $N_d = 0$):

$$\begin{cases} p_0(x) - n_0(x) = 0, \\ \frac{d^2 n_0(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(n_0(x) \frac{d\varphi_0(x)}{dx} \right) - A_n n_0(x) = 0, \\ \frac{d^2 p_0(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(p_0(x) \frac{d\varphi_0(x)}{dx} \right) - A_p p_0(x) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{dn_0(x)}{dx} - n_0 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - \gamma_n w n_0(x) \right) \Big|_{x=0} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left(-\frac{dp_0}{dx} - p_0 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - \gamma_p w p_0 \right) \Big|_{x=0} = 0, \\ \left(-\frac{dp_0(x)}{dx} - p_0 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - \gamma_p w p_0(x) \right) \Big|_{x=1} = \frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i}, \quad \left(\frac{dn_0}{dx} - n_0 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - \gamma_n w n_0 \right) \Big|_{x=1} = 0; \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \underline{\Phi}_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0(\underline{\xi}) - \underline{N}_0(\underline{\xi})), \\ \frac{d^2 \underline{N}_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = \frac{d}{d\underline{\xi}} \left(\left(n_0(0) + \underline{N}_0(\underline{\xi}) \right) \frac{d\underline{\Phi}_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right), \\ \frac{d^2 \underline{P}_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = -\frac{d}{d\underline{\xi}} \left(\left(p_0(0) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) \right) \frac{d\underline{\Phi}_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right), \end{cases}$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial \underline{\xi}} - N_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \underline{\xi}} - n_0(0) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad -\frac{\partial P_0}{\partial \underline{\xi}} - P_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \underline{\xi}} - p_0(0) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \underline{\xi}} \Big|_{\underline{\xi}=0} = 0,$$

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} N_0(\underline{\xi}) = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} P_0(\underline{\xi}) = 0, \quad \varphi_0 + \Phi_0 \Big|_{\underline{\xi}=0} = 0; \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} = -(\bar{P}_0(\bar{\xi}) - \bar{N}_0(\bar{\xi})), \\ \frac{d^2 \bar{N}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} = \frac{d}{d\bar{\xi}} \left((n_0(1) + \bar{N}_0(\bar{\xi})) \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \right), \\ \frac{d^2 \bar{P}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} = -\frac{d}{d\bar{\xi}} \left((p_0(1) + \bar{P}_0(\bar{\xi})) \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \right), \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{N}_0}{\partial \bar{\xi}} - \bar{N}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} - n_0(1) \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \Big|_{\bar{\xi}=0} = 0, \quad -\frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}} - \bar{P}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} - p_0(1) \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \Big|_{\bar{\xi}=0} = 0,$$

$$\lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{N}_0(\bar{\xi}) = 0, \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{P}_0(\bar{\xi}) = 0, \quad \varphi_0 + \bar{\Phi}_0 \Big|_{x=1} = U; \tag{5.3}$$

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \frac{x}{\mu}} \Phi_0(\underline{\xi}) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \frac{1-x}{\mu}} \bar{\Phi}_0(\bar{\xi}), \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \frac{x}{\mu}} \frac{\partial \Phi_0(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \frac{1-x}{\mu}} \frac{\partial \bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}}. \tag{5.4}$$

При цьому зауважимо, що «надлишок» умов (а саме (5.4)) забезпечує можливість знайти ще й характерну точку $x = x^*$, в якій узгоджуються потенціальне та силове поля, породжені примежовими поправками до розподілів концентрацій електронів $n(x)$ та дірок $p(x)$ (відповідно в околах $x = 0$ та $x = 1$).

Аналогічно для поправок вищих порядків матимемо:

$$\begin{cases} p_1(x) - n_1(x) = 0, \\ \frac{d^2 n_1(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(n_1(x) \frac{d\varphi_0(x)}{dx} + n_0(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \right) - A_n n_1(x) = 0, \\ \frac{d^2 p_1(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(p_1(x) \frac{d\varphi_0(x)}{dx} + p_0(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \right) - A_p p_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\left(\frac{dn_1(x)}{dx} - n_0 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - n_1 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - \gamma_n w n_1(x) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(-\frac{dp_1(x)}{dx} - p_1 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - p_0 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \gamma_p w p_1(x) \right) \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\left(-\frac{dp_1(x)}{dx} - p_1 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - p_0 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \gamma_p w p_1(x) \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad \left(\frac{dn_1(x)}{dx} - n_1 \frac{d\varphi_0(x)}{dx} - n_0 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \gamma_n w n_1(x) \right) \Big|_{x=1} = 0; \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi_1(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = -(P_1(\underline{\xi}) - N_1(\underline{\xi})), \\ \frac{d^2 N_1(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = \frac{d}{d\underline{\xi}} \left(\varphi'_{0x}(0) N_0(\underline{\xi}) + \frac{d\Phi_1(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} (n_0(0) + N_0(\underline{\xi})) + \frac{d\Phi_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} (n_1(0) + \underline{\xi} n'_\varphi(0)) + N_1(\underline{\xi}) \frac{d\Phi_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right), \\ \frac{d^2 P_1(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = -\frac{d}{d\underline{\xi}} \left(\varphi'_{0x}(0) P_0(\underline{\xi}) + \frac{d\Phi_1(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} (p_0(0) + P_0(\underline{\xi})) + \frac{d\Phi_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} (p_1(0) + \underline{\xi} p'_\varphi(0)) + P_1(\underline{\xi}) \frac{d\Phi_0(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right), \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} - N_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - n_0(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - N_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - n_1(0) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - \varphi'_{0x}(0) N_0(\xi) - \gamma_n w N_0(\xi) \right|_{\xi=0} &= 0, \\ -\frac{\partial P_1}{\partial \xi} - P_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - p_0(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - P_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - p_1(0) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - \varphi'_{0x}(0) P_0(\xi) - \gamma_p w P_0(\xi) \right|_{\xi=0} &= 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} N_1(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_1(\xi) = 0, \quad \varphi_1 + \Phi_1|_{x=0} = 0; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\Phi}_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} &= -(\bar{P}_1(\bar{\xi}) - \bar{N}_1(\bar{\xi})), \\ \frac{d^2 \bar{N}_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} &= \frac{d}{d\bar{\xi}} \left(-\varphi'_{0x}(1) \bar{N}_0(\bar{\xi}) + \frac{d\bar{\Phi}_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} (n_0(1) + \bar{N}_0(\bar{\xi})) + \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} (n_1(1) - \bar{\xi} n'_\mu(1)) + \bar{N}_1(\bar{\xi}) \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \right), \\ \frac{d^2 \bar{P}_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}^2} &= -\frac{d}{d\bar{\xi}} \left(-\varphi'_{0x}(1) \bar{P}_0(\bar{\xi}) + \frac{d\bar{\Phi}_1(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} (p_0(1) + \bar{P}_0(\bar{\xi})) + \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} (p_1(1) - \bar{\xi} p'_\mu(1)) + \bar{P}_1(\bar{\xi}) \frac{d\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})}{d\bar{\xi}} \right), \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \bar{\xi}} - \bar{N}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}} - n_0(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}} - \bar{N}_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} - n_1(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} + \varphi'_{0x}(1) \bar{N}_0(\bar{\xi}) + \gamma_n w \bar{N}_0(\bar{\xi}) \right|_{\bar{\xi}=0} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{P}_1}{\partial \bar{\xi}} - \bar{P}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}} - p_0(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{\xi}} - \bar{P}_1 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} - p_1(0) \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} + \varphi'_{0x}(1) \bar{P}_0(\bar{\xi}) + \gamma_p w \bar{P}_0(\bar{\xi}) \right|_{\bar{\xi}=0} &= 0, \\ \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{N}_1(\bar{\xi}) = 0, \quad \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \infty} \bar{P}_1(\bar{\xi}) = 0, \quad \varphi_1 + \bar{\Phi}_1|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \frac{x}{\mu}}^* \Phi_1(\xi) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \frac{1-x}{\mu}}^* \bar{\Phi}_1(\bar{\xi}), \quad \lim_{\xi \rightarrow \frac{x}{\mu}}^* \frac{\partial \Phi_1(\xi)}{\partial \xi} = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow \frac{1-x}{\mu}}^* \frac{\partial \bar{\Phi}_1(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}}. \quad (6.4)$$

У постановках задач (5) – (6): $\varphi_0(x)$, $n_0(x)$, $p_0(x)$ – головні члени регулярної частини асимптотики; $N_0(\xi)$, $P_0(\xi)$, $\Phi_0(\xi)$, $\bar{N}_0(\bar{\xi})$, $\bar{P}_0(\bar{\xi})$, $\bar{\Phi}_0(\bar{\xi})$ – головні члени прилежових поправок відповідно в околах точок $x=0$ та $x=1$; $\varphi_1(x)$, $n_1(x)$, $p_1(x)$, $N_1(\xi)$, $P_1(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, $\bar{N}_1(\bar{\xi})$, $\bar{P}_1(\bar{\xi})$, $\bar{\Phi}_1(\bar{\xi})$ – наступні члени асимптотики. Відмітимо, що для пошуку членів асимптотики з індексом $i \geq 2$ ($i \geq 1$ для прилежових складових електростатичного поля) будуться задачі, які аналогічні (5) – (6) [3, 4].

Застосування методу прилежових поправок для розв'язання нелінійної задачі (1) – (3) (нагадаємо, що задача (1) – (3) є типовою задачею напівпровідникової електроніки) має свої переваги. Застосування відповідних обчислювальних схем до розв'язання такої задачі супроводжується витратами значних обчислювальних ресурсів, виникають проблеми із стійкістю побудованих обчислювальних схем [20]. Задачі (5) – (6) на відміну від (1) – (3) є значно простішими, у даному випадку – лінійними, основна частина з яких є неоднорідними, із змінними коефіцієнтами. Такого типу задачі є добре вивченими. Все ж процедура розчеплення сингулярно збурених задач з використанням, наприклад, методу прилежових поправок є громіздкою, як показує частина схеми розпаралелювання (5) – (6). Вона пов'язана із розчепленням (зокрема, введенням регуляризуючого розтягу) та розв'язанням відповідних задач (зокрема, для пошуку прилежових поправок).

Зауважимо, що постановка задачі (1) – (3) є базовою. Як було зазначено вище, додатково ускладнює модель врахування, наприклад, ефектів розігріву електронно-діркової плазми; ефектів, що пов'язані із впливом зовнішніх фізичних полів, неоднорідностями досліджуваної структури; необхідністю врахування складної геометрії області розв'язання задачі, поверхневих ефектів тощо. Особливої уваги заслуговують відповідні нестационарні задачі. Зокрема, у напівпровідникових матеріалах на динаміку носіїв заряду впливає розігрів кристалу та електронно-діркової плазми внаслідок виділення в об'ємі $p-i-n$ -діода *Джосулевого тепла* та вивільнення енергії внаслідок рекомбінації носіїв заряду [9, 21]. Ці процеси приводять до зміни значення малого параметра задачі μ ($\mu(T)$) та значення коефіцієнтів дифузії носіїв заряду D_n ($D_n(T)$), D_p ($D_p(T)$). Для опису температурного поля використовується рівняння теплопровідності (7) з відповідними граничними умовами виду (8) (у одновимірному випадку):

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) = (j_n + j_p) \cdot E + (R - G) \left(E_g - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} \right), \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = k(T - T_0), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = -k(T - T_0), \quad T(t, x)|_{t=0} = T^*(x), \quad (8)$$

де c_p – питома теплоємність напівпровідникового матеріалу; ρ – густина речовини; λ_t – коефіцієнт теплопровідності; E_g – ширина забороненої зони напівпровідника; $R = R_n + R_p$ – швидкість рекомбінації носіїв заряду; $G = G_n + G_p$ – швидкість генерації електронів та дірок; α, β – феноменологічні сталі (наприклад, для кремнію (Si) – $E_g = 1.169 \text{ eV}$, $\alpha = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ eV/K}$, $\beta = 655 \text{ K}$ [18]); $k = \sigma / \lambda_t$, σ – коефіцієнти теплопередачі, $T^*(x)$ – задане температурне поле у початковий момент часу.

Доцільним вважаємо розробку програмного забезпечення для проведення автоматизованої декомпозиції модельної задачі та синтезу її розв’язків. Цей алгоритм був би корисною компонентою ядра не тільки спеціалізованих САПР, але й програм, які забезпечують виконання символічних перетворень для розв’язання сингулярно збурених задач математичної фізики у цілому. Відзначимо, що кількість задач відповідного типу та сфери застосування методів теорії збурень зростають. Розробці таких алгоритмів сприяє поява низки сучасних інформаційних технологій таких, як *штучний інтелект (AI)*, *машинне навчання (ML)*, хмарні обчислення, технології розпаралелювання, символічні обчислення тощо [22 – 25]. Зокрема, хмарні обчислення дозволяють використовувати обчислювальні ресурси у мережі інтернет, не вдаючись до власних фізичних серверів або обчислювальних машин, що забезпечує гнучкість, масштабованість та ефективність використання ресурсів. Технології розпаралелювання забезпечують можливість одночасного виконання кількох обчислювальних процесів, що значно збільшує швидкість обробки даних та ефективність вирішення складних науково-дослідницьких обчислювальних задач за рахунок розподілу виконання програм між декількома процесорами або комп’ютерами, що об’єднані в мережі, та оптимізації доступних ресурсів. Символьні обчислення на відміну від числових обчислень, що використовують апроксимацію для представлення чисел та виконання математичних операцій, дозволяють точно маніпулювати виразами, виконуючи алгебраїчні перетворення, інтегрування, диференціювання та інші математичні операції.

Розробка концепції архітектури програмного забезпечення для вирішення сингулярно збурених задач (ПЗ ВСЗЗ). Архітектура ПЗ ВСЗЗ, що проєктується, очевидно, визначається набором задач, на вирішення яких націлено ПЗ. Цілі ПЗ зрозумілі із контексту постановки та застосування математичних методів розв’язання відповідних задач моделювання математичних (наприклад, (1) – (3)) та інформаційних (наприклад, задач декомпозиції, агрегування). Спираючись на постановку нелінійної задачі моделювання (1) – (3) та керуючись загальною методикою розв’язання сингулярно збурених задач [7, 8], приходимо до розуміння того, що результат моделювання (набір функціональних залежностей між характеристиками досліджуваної технічної системи) досягається шляхом, по-перше, виконання символічних перетворень базових рівнянь та умов в постановці задачі (у базові рівняння здійснюється підстановка відповідних степеневих рядів, що побудовані за малим параметром задачі; проводиться групування членів рівнянь (умов) при однакових степенях малого параметра). Отримуємо рекурент-декомпозицію базової задачі (1) – (3) (рис. 1, **етап I**). По-друге, визначається тип кожної задачі із отриманої послідовності і приймається рішення про спосіб її розв’язання (рис. 1, **етап II**). Далі, у залежності від визначеного типу підзадачі, задіюється певний метод аналітичного чи чисельного розв’язання підзадачі (рис. 1, **етап III**). На останньому етапі проводиться агрегування отриманих даних у потрібному для користувача програмного продукту вигляді.

Згідно методології предметно-орієнтованого проєктування (DDD) на початковому етапі розробки програмної системи виділяємо компоненти предметної області, їх основні властивості [14, 26] та формуємо систему відповідних ідентифікаторів. В нашому випадку, оскільки в основу інформаційної системи закладено постановку певної математичної проблеми, доцільним (і очевидним) є використання математичних виразів різного виду (рівнянь, умов, постановок задач) у якості структурних одиниць та словника з переважанням математичних (математичної теорії збурень) і технічних (теорії пристроїв напівпровідникової електроніки) термінів.

Компоненти предметної області доцільно розділити на дві групи. Перша включає у себе елементи постановки базової математичної проблеми (постановку модельної задачі (1) – (3)), які є вхідними даними інформаційної системи. Друга містить об’єкти, що формуються у результаті перетворення первинної вхідної інформації за системою відповідних правил (обґрунтованих, наприклад, методом примежових поправок), і є фактично постановками конкретних математичних задач визначеного типу (наприклад, постановками задач Коші, крайових задач, наприклад (5) – (6)). Якщо елементами першої групи є текстова інформація, яка визначає опис математичного рівняння чи умови, то елементами другої групи є інформаційні об’єкти з наборами даних для пошуку аналітичних (якщо це можливо) чи чисельних розв’язків відповідними методами. Між елементами відповідних груп предметної області існує відповідність. Фактично елементи другої групи є результатами проведення декомпозиції початкової задачі асимптотичними методами (рис. 1).

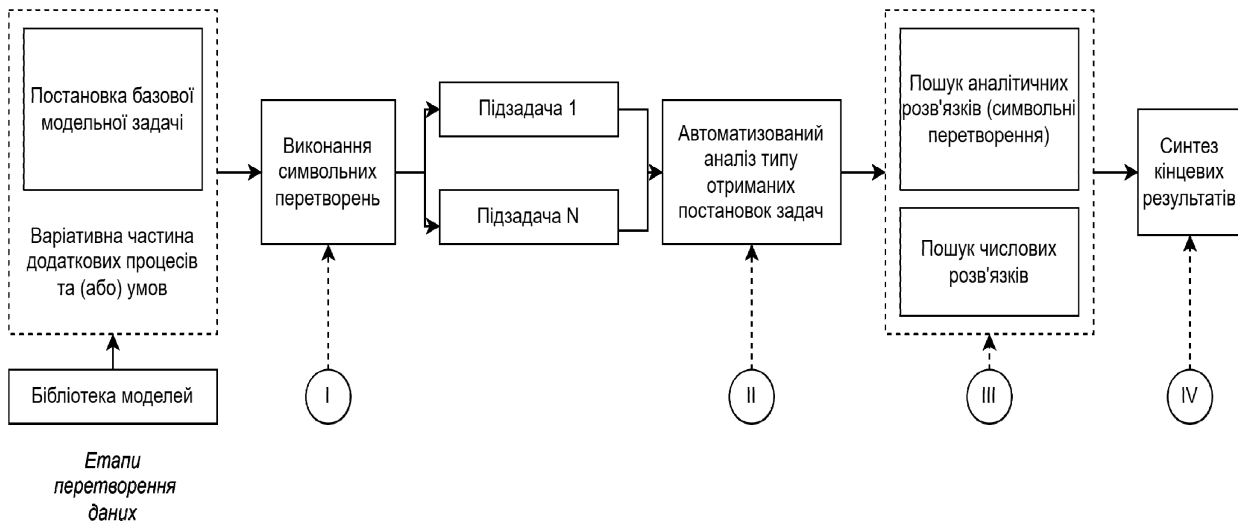


Рис. 1 – Структурна схема вирішення сингулярно збурених задач.

У результаті аналізу предметної області приходимо до висновку про те, що програмна реалізація моделі повинна включати блоки (домени) символічних перетворень; інтелектуального аналізу вхідної інформації, що включає етапи проведення декомпозиції вихідної задачі та визначення типу математичної підзадачі, яка є результатом декомпозиції; чисельного (або символічного) розв'язання математичних задач згідно отриманих постановок підзадач, блок синтезу кінцевих результатів, а також інтерфейсний блок. Зазначені блоки повинні включати в себе низку взаємопов'язаних алгоритмів. Наприклад, алгоритми роботи з текстом: пошук, об'єднання, вилучення (текстовий процесор); алгоритми розпізнавання типу математичної задачі (класифікації) і прийняття рішень про спосіб її розв'язання (аналіз даних відповідними нейронними мережами); алгоритми символічно-числового розв'язання математичних задач (числовий процесор); алгоритми синтезу кінцевого результату (агрегатор) тощо. Відзначимо, що на етапах пошуку розв'язків математичних задач (**етап III**, рис. 1) та агрегування кінцевих результатів (**етап IV**, рис. 1) з'являється можливість розпаралелювання обчислювальних процесів. Перелік основних структурних елементів програмної системи утворює її змістовне ядро.

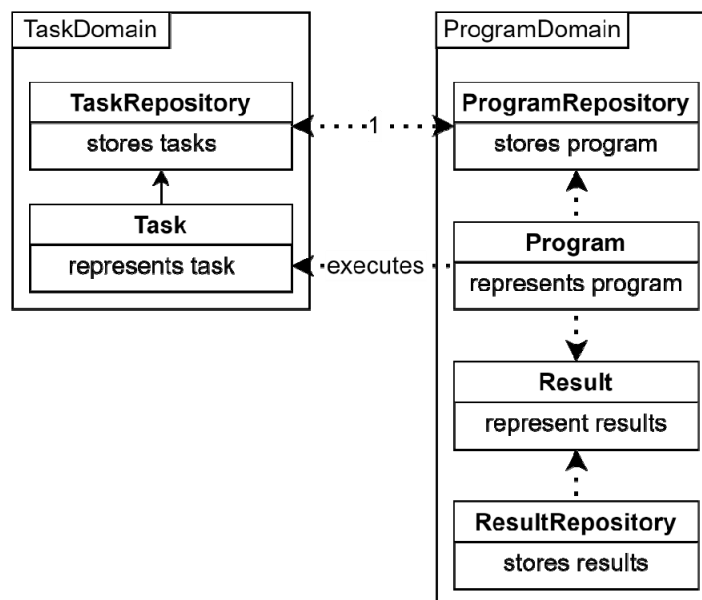


Рис. 2 – Діаграма контекстів (Context Map).

Діаграма контекстів (рис. 2) ілюструє взаємозв'язок між двома основними доменами (блоками): *TaskDomain* і *ProgramDomain*, що є ключовими елементами в розробці програмної системи згідно методології DDD [27]. У *TaskDomain* представлені *TaskRepository*, інтерфейсний блок якого відповідає за зберігання вхідних даних послідовності задач (наприклад, задач (4) – (5)), та *Task*, який містить набір методів реалізації алгоритмів розв'язання конкретних математичних задач і задач, що пов'язані з обробкою даних. *TaskRepository* взаємодіє з *Task*, забез-

печуючи управління їхнім життєвим циклом, що є критично важливим для символічних перетворень, інтелектуального аналізу вхідної інформації, чисельних перетворень та синтезу результатів. У ProgramDomain відображені ProgramRepository, що зберігає програми (Program), які визначають загальну логіку розв'язання задач, що структуруються на основі методів TaskRepository. Компонента ProgramDomain Result відображає результати виконання структурованого алгоритму, які передаються ResultRepository для збереження. ProgramRepository взаємодіє з Program, яка виконує задачі, отримані з TaskDomain, забезпечуючи ефективне чисельне або символічне розв'язання математичних задач, задач інтелектуального аналізу та синтезу результатів виконання структурованих алгоритмів. Взаємозв'язок між Task та Program демонструє, що Task виконується за допомогою Program, а результати виконання зберігаються в ResultRepository для подальшого аналізу та використання. Така структура підкреслює модульність і чітке розділення обов'язків між доменами, що полегшує управління задачами та програмами в системі, а також сприяє побудові ефективної системи символічних та числових перетворень, задач аналізу та синтезу.

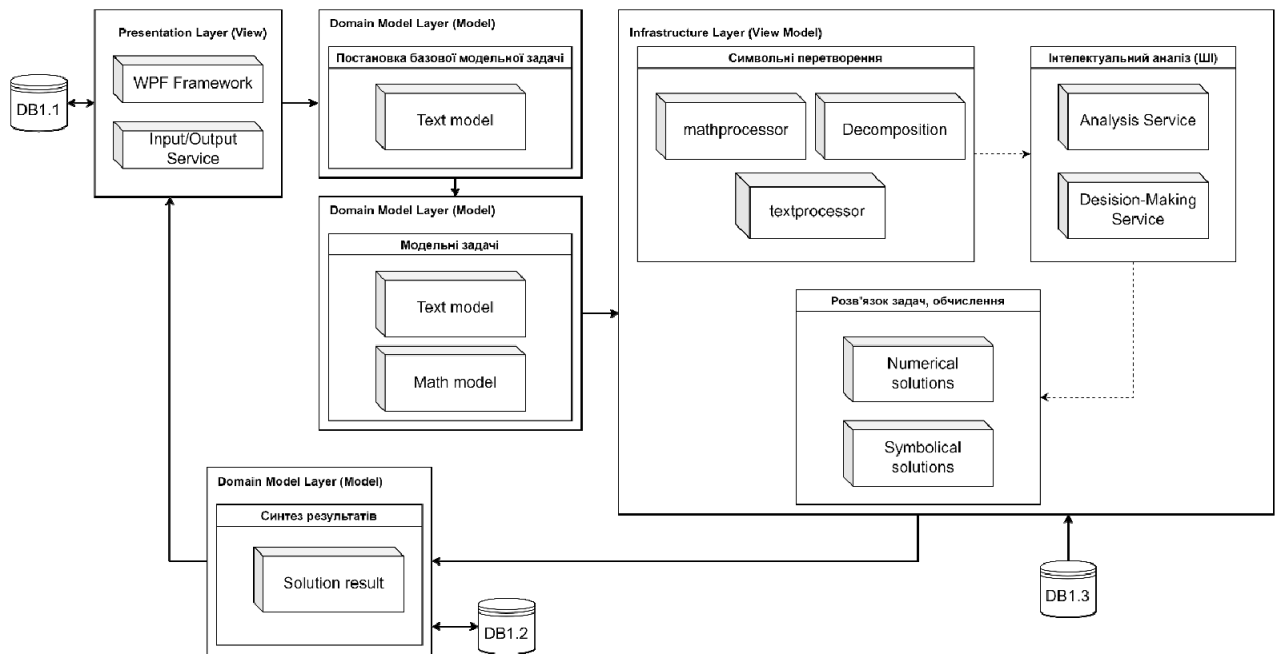


Рис. 3 – Архітектура програмного забезпечення моделювання та аналізу з використанням WPF, моделей домену та інфраструктурних сервісів.

Діаграма архітектури ПЗ (рис. 3) [28] демонструє багаторівневу архітектуру системи, що складається з чотирьох основних шарів: *Presentation Layer (View)*, *I/O Layer*, *Domain Model Layer (Model)* та *Infrastructure Layer (View Model)*. *Presentation Layer* відповідає за відображення даних користувачеві та взаємодію з ним за допомогою *WPF Framework*, що забезпечує зручний інтерфейс користувача. *I/O Layer* обробляє вхідні та вихідні дані через *Input/Output Service*, який є посередником між *Presentation Layer* та *Domain Model Layer*. Дані тут подаються у вигляді рядків, що відображають рівняння моделі та додаткові умови. При цьому існує можливість використовувати стандартні структури даних із бази даних *DB1.1* запропонованої програмної системи. Також тут потрібно передбачити зручний (дружній) інтерфейс користувача для формування остаточного вигляду модельної задачі. *Domain Model Layer* реалізує логіку домену та моделювання предметної області, включаючи *ER model*, *Text model* та *Math model*, що дозволяє проводити декомпозицію задачі (при цьому використовуються інструменти для символічних перетворень) та визначати типи математичних підзадач (методами інтелектуального аналізу). Нарешті, *Infrastructure Layer* забезпечує інфраструктурні сервіси для моделі представлення, включаючи *Analysis Service*, *Decision-Making Service*, *Decomposition*, *textprocessor*, *mathprocessor* та бази даних *DB1.3*. Особливістю компонентів аналізу в системі є процес прийняття рішень, для забезпечення якого пропонується використання *нейронних мереж*. Нейронні мережі здатні ефективно моделювати складні взаємозв'язки між вхідними даними та результатами [29 – 31], забезпечуючи належну точність і адаптивність при розв'язанні завдань. Вони дозволяють системі здійснювати інтелектуальний аналіз і автоматично приймати рішення на основі навчання на великих масивах даних. Завдяки їх здатності до самонавчання, нейронні мережі можуть покращувати результативність з часом, що робить їх ідеальними для задач, пов'язаних з аналізом, класифікацією, прогнозуванням і оптимізацією в рамках програмної системи. Бібліотеки (*textprocessor*, *mathprocessor*) зберігають алгоритми символічних перетворень (*textprocessor*) та чисельних перетворень (*mathprocessor*) і при цьому використовують дані про фізичні характеристики матеріалів з *DB1.3*. Взаємодія між цими шарами здійснюється через чітко визначені інтерфейси, що дозволяє підтримувати модульність та розширюваність системи, забезпечуючи ефективну реалізацію методів символічного та числового розв'язання задач та синтезу кінцевих результатів. Результати проміжних

перетворень агрегуються у кінцевий результат – розв’язок поставленої задачі, який подається у табличному (або графічному) вигляді і зберігається у базі даних *DBI.2*.

Зазначимо, що компоненти моделі архітектури програмної системи для розв’язання задач напівпровідникової електроніки (симуляції) можуть бути постійні (складають ядро програмної системи), варіабельні (входять у структуру алгоритму, але додаються в модель у залежності від потреб моделювання (наприклад, врахування різних зовнішніх впливів, врахування різної природи процесів у системі (процеси рекомбінації можуть мати різну природу), геометрія просторової області тощо, рис. 1 – бібліотека моделей)) та нові (що невідомі на момент розробки моделі і відповідної програмної системи) – ті, що розширюють можливості стандартної програмної системи.

На діаграмі варіантів (способів) використання (*Use Case*, рис. 4) [32] зображено послідовність дій, необхідних для розв’язання задач. Вона охоплює різноманітні етапи процесу моделювання, від створення математичної моделі до агрегування результатів, і включає взаємодію між кількома користувачами та варіантами використання, що представляють ключові кроки вирішення задачі.

Діаграма відображає етапи використання ПЗ. Початковим є етап створення математичної моделі (*Create Mathematical Model*), на якому здійснюється опис фізичних процесів у технічній системі та їх перетворення у відповідні математичні вирази чи систему диференціальних рівнянь. Цей крок є фундаментальним, оскільки точність і коректність подальших розрахунків залежать від якості сформульованої математичної моделі. Після створення моделі здійснюється декомпозиція задачі (*Decompose Task*), яка розбиває складну задачу на підзадачі, що можуть бути розв’язані незалежно. Взаємодія між створенням моделі та декомпозицією підкреслює, що остання залежить від коректності початкової моделі.

Наступним етапом є налаштування обчислювального середовища (*Setup Computational Environment*), що виконується іншим користувачем. Цей етап включає підготовку необхідних апаратних і програмних ресурсів для проведення чисельних чи аналітичних розрахунків. Взаємодія на цьому етапі відбувається через обмін даними про характеристики задачі та необхідні обчислювальні ресурси, що мають бути доступні для виконання процедури розв’язання задачі. Після налаштування середовища здійснюється вибір методу розв’язання (*Select Solution Method*), що передбачає визначення найбільш оптимального підходу для кожної підзадачі. Цей вибір базується на аналізі типу задачі, що дозволяє забезпечити максимальну ефективність і точність обчислень.

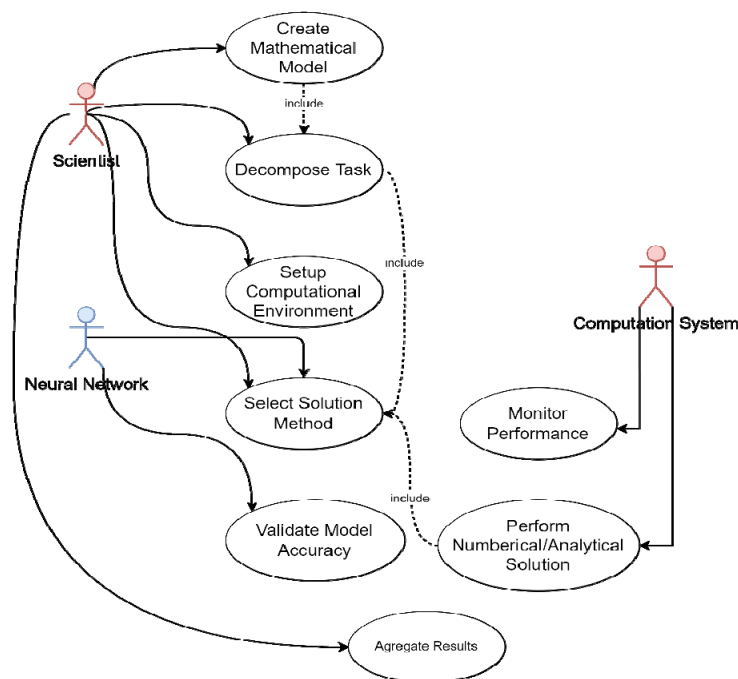


Рис. 4 – Діаграма варіантів (способів) використання (*Use Case*).

Виконання чисельного або аналітичного розв’язання (*Perform Numerical/Analytical Solution*) є наступним кроком після вибору методу. Тут реалізується застосування обраних методів до відповідних підзадач. Взаємодія з попереднім етапом (*Select Solution Method*) забезпечується використанням обраного методу розв’язання для кожної окремої підзадачі. Перевірка точності моделі (*Validate Model Accuracy*) проводиться на декількох етапах процесу, щоб упевнитися в коректності отриманих результатів і, за необхідності, здійснити коригування обчислювальних параметрів чи самого методу.

Останні етапи включають моніторинг продуктивності (*Monitor Performance*) і агрегування результатів (*Aggregate Results*), які забезпечують збір та аналіз та відображення результатів розрахунків для остаточної оцін-

ки моделі та її відповідності очікуваним фізичним і технічним характеристикам. Всі ці етапи тісно взаємопов'язані між собою, забезпечуючи інтегрований підхід до розв'язання складних задач моделювання в напівпровідниковій електроніці. Така структура підкреслює важливість комплексного підходу, що поєднує декомпозицію задачі, налаштування обчислювальних ресурсів, вибір методів розв'язання та їхню *валідацію*, що в сукупності забезпечує точність і ефективність математичного моделювання.

Основним інструментом розробки даного ПЗ є *система програмування C#*, яка забезпечує високу продуктивність та широкі можливості для реалізації складних обчислювальних алгоритмів [33]. Інтерфейс користувача створюється за допомогою *фреймворка WPF (Windows Presentation Foundation)*, що дозволяє розробляти сучасні графічні інтерфейси [34].

Реалізацію архітектури програмної системи, що розробляється, доцільно проводити на основі використання шаблонів проектування *Model-View-ViewModel (MVVM)* [35]. Даний архітектурний шаблон застосовується для відокремлення бізнес-логіки від візуальної частини програми. У цій архітектурі Model представляє бізнес-логіку та дані додатка, забезпечуючи *інкапсуляцію логіки* та доступ до даних. View відповідає за візуальне подання даних і взаємодію з користувачем, реалізуючи графічний інтерфейс. ViewModel слугує посередником між Model та View, забезпечуючи двосторонню прив'язку даних та обробку подій, що дозволяє автоматично оновлювати візуальне подання при зміні даних.

Для обробки математичних обчислень та символічних перетворень пропонується використання бібліотеки *Math.NET* [36], яка надає широкий спектр функцій для виконання числових та символічних операцій. Крім того, для розпаралелювання обчислювальних процесів застосовується технологія *Task Parallel Library (TPL)* [24], що входить до складу *.NET Framework*, дозволяючи ефективно розподіляти обчислення між декількома процесорами.

Один із варіантів реалізації штучної нейронної мережі полягає у використанні ресурсу *TensorFlow.NET* [23], який є інтерфейсом для популярної бібліотеки TensorFlow, адаптованої під *.NET середовище*. TensorFlow.NET надає широкі можливості для створення, тренування та застосування нейронних мереж, що забезпечує можливість виконання складних задач таких, як класифікація, розпізнавання та обробка великих масивів даних тощо. Крім того, його інтеграція з TPL надає можливість оптимізувати обчислювальні процеси та підвищити продуктивність системи, використовуючи багатоядерні ресурси.

Важливу роль у реалізації запропонованого рішення відіграють хмарні обчислення. Використання *Microsoft Azure* [22] надає можливість масштабування обчислювальних ресурсів та забезпечує високу доступність сервісів, що є критично важливим для виконання ресурсоемних обчислювальних задач.

Висновки. На основі детального вивчення предметної області «плазмовий діод» (відповідних засобів моделювання) запропоновано концепцію архітектури спеціалізованого програмного забезпечення для автоматизованого розв'язання відповідних сингулярно збурених задач напівпровідникової електроніки з використанням методу примежових поправок. Однією із особливостей запропонованої архітектури є наявність у ній такого компонента, як штучна нейронна мережа, яка моделює інтелектуальний процес аналізу та ідентифікації типу математичних задач, що отримані у результаті декомпозиції вихідної задачі і вибору найбільш ефективного методу розв'язання останніх. Також, як особливість запропонованої програмної системи, відзначимо можливість вивчення фізичних процесів у досліджуваній технічній системі на різних рівнях структурування (вклад у процес складових, які зв'язані із малими параметрами певного порядку і якими, у переважній більшості випадків, нехтують) з доступним функціоналом для спеціалістів різного рівня підготовки і кінцевих споживачів.

В архітектуру програмного забезпечення включено об'ємну варіативну складову, яка в перспективі забезпечить врахування алгоритмів розв'язання відповідних нестационарних задач, пошук розв'язків в областях складної геометрії, таких, що враховують низку фізичних процесів, які впливають на електропровідні характеристики досліджуваної технічної системи – явища розігріву, рекомбінаційні, інжекція тощо, вплив зовнішніх фізичних полів (електромагнітне (в різних діапазонах), теплове) тощо. Зауважимо, що програмна система є відкритою стосовно можливості її удосконалення для забезпечення автоматизованого розв'язання різного роду сингулярно збурених задач.

Список літератури

1. Koroliouk D., Lyashko S., Limnios N. Computational Methods and Mathematical Modeling in Cyberphysics and Engineering Applications. – London : Wiley, 2024. – 442 p. DOI:10.1002/9781394284344.
2. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. – Рівне : О. Зень, 2017. – 291 с.
3. Bomba A., Moroz I. Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods // 2023 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT-2023. – Wrocław, Poland. – P. 117 – 120.
4. Бомба А. Я., Мороз І. П. Математичне моделювання динамічних процесів у $p-i-n$ діоді методами теорії збурень // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – № 2(5). – С. 23 – 32. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).03.
5. Weinberg S. Lectures on Quantum Mechanics. – London : Cambridge University Press, 2015. – 419 p.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. – 1957. – №. 12(5). – С. 3 – 122.
7. Vasil'eva A. B., Butusov V. F., Kalachev L. V. The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. – SIAM, Philadelphia, 1995. – 212 p. DOI: 10.1137/1.9781611970784.

8. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. – 520 p.
9. Bomba A., Moroz I., Boichura M. Development and analysis of a mathematical model of plasma characteristics in the active region of integrated P-I-N-structures by the methods of perturbation theory and conformal mappings // *Східно-Європейський журнал передових технологій*. – 2021. – №5 (113). – С. 51 – 61. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.243097
10. Huifang Liu Perturbation method for differential control equations and its application in the analysis of dynamic characteristics of curved beam // *Alexandria Engineering Journal*. – 2020. – Vol. 59. – Iss. 4. – pp. 2583 –2590. DOI: 10.1016/j.aej.2020.04.022.
11. Dirk Jansen. *The Electronic Design Automation Handbook*. – NY : Springer, 2003. – 676 p.
12. Maxfield C., Goyal K. *EDA (Electronic Design Automation): Where Electronics Begins*. – TechBITES INTERactive, 2001. – 97 p.
13. Норенков И. П. *Основы автоматизированного проектирования : Учеб. для вузов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 448 с. (Norenkov I. P., No. 82. Fundamentals Of Computer-Aided Design: Textbook For Universities. 2nd Ed., Reprint. And Additional. – Moscow : Publishing House Of The Bauman Moscow State Technical University, 2002).*
14. Evans E. *Domain-Driven Design: Tackling Complexity in the Heart of Software*. – Boston:Addison-Wesley Professional, 2003. – 560 p.
15. Tkachuk M., Gamzaev R., Martinkus I. Towards Effectiveness Assessment of Domain Modeling Methods and Tools in Software Product Lines Development // *Enterprise Modelling and Information Systems Architecture – International Journal of Conceptual Modeling*. – 2018. – Vol. 13. – P. 190 – 206. DOI: 10.18471/emisa.hcm.14.
16. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. – New York: Wiley-Interscience, 2006. – 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
17. Adirovich E. I., Karageorgii-Alkalaev P. M., Leiderman A. Iu. *Currents Double Injection in Semiconductors*. – Moscow : Sov. radio, 1978. – 320 p.
18. Bomba A. Ya., Moroz I. P., Boichura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n$ structures on the base of using the conformal mapping method // *Radio Electronics, Computer Science, Control*. – 2021. – № 1. – pp. 14 – 28. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-1-2.
19. Baliga B. *Fundamentals of power semiconductor devices*. – NY : Springer, 2010. – 1086 p.
20. Polsky B. S., Rimshans J. S. Numerical simulation of transient processes in $2-D$ bipolar transistor // *Solid State Electron*. – 1981. – v. 24. – P. 1081 – 1085.
21. Бомба А. Я., Мороз І. П. Математичне моделювання дифузійно-дрейфового процесу в активній області $p-i-n$ діодів з врахуванням розігріву та рекомбінації методами теорії збурень // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2021. – №1 (135). – С. 29 – 35. DOI: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2021.1.03>.
22. Microsoft Azure Documentation. – Режим доступу : <https://docs.microsoft.com/en-us/azure/>. – Дата звертання : 15 жовтня 2024 р.
23. Abadi M., Barham P., Chen J. TensorFlow: A System for Large-Scale Machine Learning // *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI '16)*. – 2016. – P. 265 – 283.
24. Campbell C., Johnson R., Miller A., Toub S. *Parallel Programming with Microsoft® .NET: Design Patterns for Decomposition and Coordination on Multicore Architectures*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2010. – 224 p.
25. Wolfram S. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. – 2nd edition. – Redwood-City: Addison-Wesley, 1991. – 961 p.
26. Martinkus I. Evaluation of the Effectiveness of Domain Modeling Methods in Terms of Model Complexity // *International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications*. – 2019. – P. 2 – 4.
27. Evans E. *Domain-Driven Design Reference: Definitions and Pattern Summaries*. – Indianapolis : Dog Ear Publishing, 2014. – P. 7 – 8.
28. Vernon V. *Implementing Domain-Driven Design*. – Boston : Addison-Wesley Professional, 2013. – 656 p.
29. Добровська Л. М., Добровська І. А. *Теорія та практика нейронних мереж: навчальний посібник*. – Київ : НТУУ «КПІ», Видавництво «Політехніка», 2015. – 396 с.
30. Hardesty L. Explained: Neural Networks // MIT News Office. – April 14, 2017. – Режим доступу : <http://news.mit.edu/2017/explained-neural-networks-deep-learning-0414>. – Дата звертання : 16 жовтня 2024 р.
31. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. – 2nd ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. – 842 p.
32. Marinescu F., Avram A. *Domain-Driven Design Quickly*. – Lugano : InfoQ Enterprise Software Development Series, 2007. – 108 p.
33. Albahari J., Albahari B. *C# 7.0 in a Nutshell: The Definitive Reference*. – Sebastopol: O'Reilly Media, 2017. – 1088 p.
34. Nathan A. *WPF 4.5 Unleashed*. – Indianapolis : Sams Publishing, 2013. – 864 p.
35. Smith J. WPF Apps With The Model-View-ViewModel Design Pattern // *MSDN Magazine*. – 2009. – vol. 24. – № 2. – Режим доступу : https://jacobfilipp.com/MSDN/2018-2009/2009chm/msdnmagazine2009_02en-us/02/Smith.WPFPatterns.0209/chm.htm. – Дата звертання : 16 жовтня 2024 р.
36. Math.NET Numerics. – Режим доступу : <https://numerics.mathdotnet.com/>. – Дата звертання : 16 жовтня 2024 р.

References (transliterated)

1. Koroliouk D., Lyashko S., Limnios N. *Computational Methods and Mathematical Modeling in Cyberphysics and Engineering Applications*. London, Wiley, 2024. – 442 p. DOI:10.1002/9781394284344.
2. Bomba A. Ya., Prysiazhniuk I. M., Prysiazhniuk O. V. Metody teoriiy zburen' prognuzovannya protsesiv teplomasoperenesennya v porystykh ta mikroporystykh seredovyshhakh [Perturbation theory methods for predicting heat and mass transfer processes in porous and microporous media]. Rivne, O. Zen' Publ., 2017. – 291 p.
3. Bomba A., Moroz I. Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods // 2023 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT-2023. Wroclaw, Poland. pp. 117–120.
4. Bomba A., Moroz I. Matematychnе modeluvannya dynamichnykh protsesiv v $p-i-n$ diodi metodamy teoriiy zburen' [Simulation of Dynamic Processes in a $p-i-n$ Diode by the Methods of Perturbation Theory]. *Visnyk Natsional'nogo Tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Matematychnе modeluvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 2(5), pp. 23–32. DOI:10.1002/9781394284344.
5. Weinberg S. *Lectures on Quantum Mechanics*. London, Cambridge University Press, 2015. 419 p.
6. Vishik M. I., Lusternik L. A. Reguljarnoe vyrogdienie i pogranichnyy sloi dlya linejnyh differentsyal'nyh uravnenii s malym parametrom [Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter]. *UMN [Successes in mathematical sciences]*. 1957, Vol. 12, issue 5 (77), pp. 3–122.
7. Vasil'eva A. B., Butusov V. F., Kalachev L. V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. SIAM, Philadelphia, 1995. 212 p. DOI: 10.1137/1.9781611970784.
8. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
9. Bomba A., Moroz I., Boichura M. Development and analysis of a mathematical model of plasma characteristics in the active region of integrated $p-i-n$ structures by the methods of perturbation theory and conformal mappings. *Skhidno-evropeiskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Advanced Technologies]. 2021, no. 5 (113), pp. 51–61. DOI: 10.15587/1729-4061.2021.243097.
10. Huifang Liu. Perturbation method for differential control equations and its application in the analysis of dynamic characteristics of curved beam. *Alexandria Engineering Journal*. 2020, vol. 59, Iss. 4, pp. 2583–2590. DOI: 10.1016/j.aej.2020.04.022.

11. Dirk Jansen. *The Electronic Design Automation Handbook*. NY, Springer, 2003. 676 p.
12. Maxfield C., Goyal K. EDA (Electronic Design Automation): Where Electronics Begins. TechBITES INTERactive, 2001. 97 p.
13. Norenkov I. P. *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniya : Ucheb. dlya vuzov* [Fundamentals of computer-aided design : Textbook for universities]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2006. 448 p. (Norenkov I. P. no. 82. *Fundamentals of Computer-Aided Design : Textbook for Universities. 2nd Ed., Reprint. And Additional*. Moscow, Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University Publ., 2002.)
14. Evans E. *Domain-Driven Design : Tackling Complexity in the Heart of Software*. Boston, Addison-Wesley Professional, 2003. 560 p.
15. Tkachuk M., Gamzaev R., Martinkus I. Towards Effectiveness Assessment of Domain Modeling Methods and Tools in Software Product Lines Development. *Enterprise Modelling and Information Systems Architecture – International Journal of Conceptual Modeling*. Germany, 2018, Vol. 13 (2018), pp. 190–206. DOI: 10.18471/emisa.hcm.14.
16. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. New York, Wiley-Interscience, 2006. 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
17. Adirovich E. I., Karageorgii-Alkalaev P. M., Leiderman A. Iu. *Currents Double Injection in Semiconductors*. Moscow, Sov. Radio Publ., 1978. 320 p.
18. Bomba A. Ya., Moroz I. P., Bojchura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n$ structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2021, no. 1, pp. 14–28. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-1-2.
19. Baliga B. *Fundamentals of power semiconductor devices*. NY, Springer, 2010. 1086 p.
20. Polsky B. S., Rimshans J. S. Numerical simulation of transient processes in 2-D bipolar transistor. *Solid State Electron*. 1981, vol. 24, pp. 1081–1085.
21. Bomba A. Ya., Moroz I. P. Matematychno modeluvannya dyfuziyno-dreyfovogo protsesu v aktyvnyi oblasti $p-i-n$ diode z urakhuvanniam rozigrivu ta rekombinatsiyi metodamy teoriiy zburyn' [Mathematical modeling of the diffusion-drift process in the active region of p-i-n diodes taking into account heating and recombination using perturbation theory methods]. *Zhurnal obchyslival'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Numerical and Applied Mathematics]. 2021, no. 1 (135), pp. 29–35. DOI: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2021.1.03>.
22. *Microsoft Azure Documentation*. Available at : <https://docs.microsoft.com/en-us/azure/> (accessed 15 October 2024).
23. Abadi M., Barham P., Chen J. TensorFlow: A System for Large-Scale Machine Learning. *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI '16)*. 2016. pp. 265–283.
24. Campbell C., Johnson R., Miller A., Toub S. *Parallel Programming with Microsoft® .NET: Design Patterns for Decomposition and Coordination on Multicore Architectures*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 224 p.
25. Wolfram S. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer. 2nd edition*. Redwood-City, Addison-Wesley, 1991. 961 p.
26. Martinkus I. Evaluation of the Effectiveness of Domain Modeling Methods in Terms of Model Complexity. *International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications*. 2019. pp. 2–4.
27. Evans E. *Domain-Driven Design Reference: Definitions and Pattern Summaries*. Indianapolis: Dog Ear Publishing, 2014. pp. 7–8.
28. Vernon V. *Implementing Domain-Driven Design*. Boston, Addison-Wesley Professional, 2013. 656 p.
29. Dobrovska L. M., Dobrovska I. A. *Teoriya ta praktyka neironnykh merezh: Navchal'nyy posibnyk* [Theory and Practice of Neural Networks: A Tutorial]. Kyiv, NTUU "KPI", Vydavnytstvo "Politekhnika" Publ., 2015. 396 p.
30. Hardesty L. Explained : Neural Networks. *MIT News Office*. April, 2017, no. 14. Available at : <http://news.mit.edu/2017/explained-neural-networks-deep-learning-0414>. (accessed 16 October 2024).
31. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation. 2nd ed*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1999. 842 p.
32. Marinescu F., Avram A. *Domain-Driven Design Quickly*. Lugano, InfoQ Enterprise Software Development Series, 2007. 108 p.
33. Albahari J., Albahari B. *C# 7.0 in a Nutshell: The Definitive Reference*. Sebastopol, O'Reilly Media, 2017. 1088 p.
34. Nathan A. *WPF 4.5 Unleashed*. Indianapolis, Sams Publishing, 2013. 864 p.
35. Smith J. WPF Apps With The Model-View-ViewModel Design Pattern. *MSDN Magazine*. 2009, vol. 24, no. 2. Available at : https://jacobfilipp.com/MSDN/2018-2009/2009chm/msdnmagazine2009_02en-us/02/Smith.WPFPatterns.0209/chm.htm. (accessed 16 October 2024).
36. *Math.NET Numerics*. Available at : <https://numerics.mathdotnet.com/>. (accessed 16 October 2024).

Надійшла (received) 25.10.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5528-4192>; e-mail: abomba@ukr.net.

Bomba Andrii Yaroslavovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (097) 346-18-90; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5528-4192>; e-mail: abomba@ukr.net.

Мороз Ігор Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та моделювання, завідувач кафедри інформаційних технологій та моделювання, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (096) 721-91-24; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6381-2266>; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Moroz Igor Petrovych – PhD, Associate Professor of the Department of Information Technologies and Modeling, Head of the Department of Information Technologies and Modeling, Rivne State Humanities University, Rivne; tel.: (096) 721-91-24; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6381-2266>; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Лістєв Захар Сергійович – аспірант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, магістр, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (050) 220-51-60; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1846-4191>; e-mail: z.c.listiev@nuwm.edu.ua.

Listiev Zakhar Serhiyovych – Graduate student of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, Master of Science. National University of Water Management and Nature Management, Rivne; tel.: (050) 220-51-60; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1846-4191>; e-mail: z.c.listiev@nuwm.edu.ua.

В. Д. ДУШКІН

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНИХ ПОДАЇВ СИНГУЛЯРНИХ ТА ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

У роботі дається аналіз практики застосування методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів (PR-методу) для розв'язання задач електродинаміки. Цей метод був розроблений у дев'яностих роках двадцятого сторіччя Ю. В. Ганделем і є узагальненням методу парних суматорних та інтегральних рівнянь. Він ґрунтується на застосуванні властивостей псевдодиференціальних сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів. Застосування цього підходу дозволяє зводити розв'язання крайових задач для рівняння Гельмгольца з граничними умовами Дирихле, Неймана або Робена до систем граничних інтегральних рівнянь. В залежності від постановки початкових крайових задач отримані системи граничних рівнянь можуть містити інтегральні оператори, які потрібно розглядати у сенсі головного значення за Коші або скінченної частини за Адамаром. Також граничні інтегральні рівняння можуть містити інтеграли зі змінною верхньою межею, а підінтегральні вирази цих рівнянь, окрім регулярної частини, можуть містити доданки зі слабкою логарифмічною особливістю, доданки з неусувною особливістю першого роду. Для знаходження наближених розв'язків систем граничних інтегральних рівнянь використовувались алгоритми методу дискретних особливостей. Метод параметричних подань інтегральних операторів дозволив побудувати математичні моделі процесів збудження надрозмірних неперіодичних гребінок структур потоком електронів, розподілу поля власних мод у прямокутному хвилеводному каналі з гребінчастими канавками, електродинамічних процесів у гіротронах, поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах, дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання. Суттєві переваги цього підходу полягають у відсутності необхідності проведення додаткової аналітичної роботи при збільшенні подібних елементів структури та практичної нечутливості комп'ютерної реалізації моделі від розмірів елементів структури та їх взаємного розташування. Це робить перспективним застосування PR-методу для створення математичних моделей багатопарових квазіфрактальних структур.

Ключові слова: параметричні подання, сингулярні та гіперсингулярні інтегральні оператори, системи граничних інтегральних рівнянь, метод дискретних особливостей, математичні моделі, задачі електродинаміки.

V. D. DUSHKIN

APPLICATION OF THE METHOD OF PARAMETRIC REPRESENTATIONS OF SINGULAR AND HYPERSINGULAR OPERATORS FOR OBTAINING MATHEMATICAL MODELS OF ELECTRODYNAMICS PROBLEMS

This paper analyzes the practice of using the method of parametric representations of singular and hypersingular integral operators (PR-method) to solve electrodynamics problems. This method was developed in the nineties of the twentieth century by Y. V. Gandel and is a generalization of the method of coupled summation and integral equations. It is based on the use of the properties of pseudo-differential singular and hypersingular integral operators. The application of this approach allows us to reduce the solution of boundary value problems for the Helmholtz equation with Dirichlet, Neumann, or Robin boundary conditions to systems of boundary integral equations. Depending on the formulation of the initial boundary value problems, the resulting systems of boundary value equations may contain integral operators that should be considered in the sense of a Cauchy principal value or a finite part by Hadamard. Also, boundary integral equations may contain integrals with a variable upper bound. The integrand of these equations, in addition to the regular and singular part, may contain terms with a weak logarithmic singularity and terms with a step functions. To find approximate solutions of systems of boundary integral equations, algorithms of the discrete singularities method were used. The method of parametric representations of integral operators made it possible to construct mathematical models of the processes of excitation of superdimensional non-periodic structures with rectangular irregularities by the flow of electrons, processes of propagation of natural waves in waveguides, electrodynamic processes in gyrotrons, propagation of electromagnetic waves in axially symmetric waveguides, diffraction of an arbitrary electromagnetic wave on an arbitrary surface of rotation. Significant advantages of this approach are the absence of the need for additional analytical work when enlarging such structure elements and the practical non-sensitivity of the computer implementation of the model to the size of the structure elements and their relative position. This makes it promising to use the PR-method to create mathematical models of multilayer quasi-fractal structures.

Key words: parametric representations, singular and hypersingular integral operators, systems of boundary value integral equations, discrete singularities method, mathematical models, problems of electrodynamics.

Вступ. У цьому році виповнилось дев'яносто років з дня народження *Ю. В. Ганделя*. У його наукових роботах розроблено *спосіб чисельного розв'язання багатьох задач електродинаміки*. Він передбачає на першій стадії зведення початкових *крайових задач для рівнянь Гельмгольца* до систем *інтегральних рівнянь* різних типів, зокрема *сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь першого та другого роду*. Для отримання цих рівнянь використовувався створений Юрієм Володимировичем *метод параметричних подань* сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. На другій стадії отримання розв'язків задачі ці системи інтегральних рівнянь розв'язуються чисельно за допомогою обчислювальних схем *методу дискретних особливостей*. **Метою** цієї роботи було проведення огляду задач, для яких було застосовано цей підхід і визначення перспектив його застосування.

Аналіз проведених досліджень. Цей підхід розв'язання задач електродинаміки та електростатики виник у вісімдесятих роках двадцятого сторіччя. Ідеї методу дискретних особливостей були запропоновані *С. М. Білоцерківським* у п'ятдесятих роках 20 сторіччя [1]. Спочатку він використовувався як *евристичний метод чисельного розв'язання* завдань аеродинаміки і мав назву *«метод дискретних вихорів»*. Заснований на фізичних міркуваннях метод дискретних вихорів дозволив ефективно чисельно вирішувати стаціонарні та нестационарні

нарні, лінійні та нелінійні задачі аеродинаміки з використанням обчислювальних машин. Надалі цей підхід знайшов широке застосування при моделюванні взаємодії тіл із потоками рідини чи газу.

У сімдесятих роках двадцятого сторіччя Іван Кузьмич Ліфанов розробив теоретичні основи використання методу дискретних вихорів як чисельного методу розв'язання *сингулярних інтегральних рівнянь* (СІР) будь-якої природи [2], [3], [4]. Він отримав оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків до точних розв'язків задач. Цей метод, як метод чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь, отримав назву *метода дискретних особливостей* (МДО) [5]. У подальшому відбулось перенесення цього підходу на дослідження, розробку та математичне обґрунтування обчислювальних схем розв'язання нових типів інтегральних рівнянь [6] – [11].

Роботи Ю. В. Ганделя та І. К. Ліфанова продемонстрували можливість використання методу дискретних особливостей для вирішення широкого класу задач електростатики та електродинаміки [12] – [14]. Для застосування обчислювальних схем методу дискретних особливостей до розв'язання *задач дифракції* необхідно було знайти спосіб отримання сингулярних інтегральних рівнянь відповідних задач. У роботах [15], [16] були запропоновані способи отримання інтегральних двовимірних задач дифракції електромагнітних хвиль на періодичних решітках та решітках із скінченної кількості елементів. Ю. В. Гандель довів, що запропонований підхід дозволяє подібним чином, при виконанні певної аналітичної роботи пов'язаною зі специфікою задачі, отримувати граничні інтегральні рівняння багатьох задач дифракції хвиль, як на періодичних, так і на неперіодичних структурах. Цей метод отримав назву *метода парних суматорних та інтегральних рівнянь* [17].

Дослідження нових задач дифракції призвело до розгляду нових типів систем сингулярних і гіперсингулярних рівнянь та схем їх чисельного розв'язання. Зокрема розглядалися сингулярні інтегральні рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) \frac{V_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_q(\xi), \quad (1)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad K_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0;$$

рішення яких повинні були задовольняти одну з двох систем додаткових умов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi_q| \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{q,p}(\tau) \frac{V_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = C_q, \quad |\xi_q| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (2)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad Q_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0$$

або

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (3)$$

Математичне обґрунтування схем чисельного розв'язання таких рівнянь було дано у роботах Ю. В. Ганделя, С. В. Єрмоленко, І. К. Ліфанова та Т. С. Полянської [17] – [20]. Узагальнення результатів, отриманих у 80-х роках, за цим напрямком дано у роботах [21] – [23].

Популярність методу дискретних особливостей серед дослідників і бажання знайти форму обміну думками між науковцям, що працюють у цьому напрямку, сприяли виникненню ідеї проведення міжнародних наукових симпозіумів. Перший симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» відбувся у 1983 році, на цей час вже проведено двадцять один симпозіум з цього напрямку.

Протягом багатьох років проводився науковий семінар «Чисельне моделювання методами дискретних особливостей математичної фізики», науковим керівником якого був Ю. В. Гандель. На цьому семінарі заслуховувались наукові доповіді провідних фахівців України та світу, також він був школою для молодих вчених. У різні роки у його роботі приймали участь майбутні доктори наук: В. О. Міщенко, С. О. Стешенко, Г. Л. Сідельников та кандидати наук: В. С. Булигін, О. В. Гавриляко, А. В. Гахов, С. В. Духопельников, В. Д. Душкін, С. В. Жученко, О. С. Кононенко, О. В. Костенко, М. Б. Краснянський, Н. Н. Морозова, К. В. Несвіт, А. А. Носіч, М. Н. Самойленко та багато інших.

На механіко-математичному факультеті Харківського державного університету тривалий час викладались спеціальні курси, у яких викладались обчислювальні методи розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Матеріали цих курсів знайшли відображення в навчальних посібниках [24] – [26]. Незважаючи на навчальний характер цих видань, вони більше ста разів цитувались у наукових статтях.

Перші чисельні результати, отримані за допомогою методу парних суматорних та інтегральних рівнянь,

були отримані для задач дифракції, для яких існували алгоритми їх чисельного розв'язання за допомогою інших методів [27] – [31]. У подальшому ці результати послужили тестовими при чисельному моделюванні розсіювання електромагнітних хвиль на нових, більш складних електродинамічних структурах. Так, у роботах [32], [33] були представлені результати чисельного моделювання *дифракції плоскої монохроматичної хвилі на періодичній решітці*, що складається зі стрічок. Результати чисельного моделювання розсіювання електромагнітних хвиль дифракції на *неперіодичних системах стрічок та системах цилінрів* у нескінченних екранах наведені у роботах [34], [35].

Розрахунку основних параметрів *смушкових ліній передачі* методом дискретних особливостей присвячена робота [36]. У роботі [37] наведено метод отримання розв'язку СІР на всій осі з використанням МДО. Результати цього дослідження знайшли застосування в задачі дифракції на *системі замкнутих циліндрів* і під час розв'язування задач механіки деформованого твердого тіла.

Наступним етапом стало створення моделей дифракції на непласких структурах. Перші чисельні результати для непласких структур було отримано для випадку моделювання поширення хвилі в прямому хвилеводі зі ступінчастими перешкодами [38]. Ця структура розглядалася пізніше в роботі [39]. Моделі дифракції електромагнітних хвиль на періодичній гребінці та періодичній решітці, що складається з брусів, які ґрунтуються на чисельному розв'язанні за допомогою МДО, розглядалися в роботах [40], [41]. У роботах [42], [43] розглядається задача дифракції на ідеально провідному напівобмеженому хвилеводі з фланцем. Метод парних та суматорних інтегральних рівнянь дозволив також отримати граничні інтегральні рівняння розповсюдження електромагнітних хвиль у хвилеводах та провести чисельний експеримент по знаходженню власних частот деяких хвилеводів [44], [45].

У середині 90-х років стало зрозуміло, що спосіб отримання нових математичних моделей далеко виходить за рамки методу парних інтегральних і суматорних рівнянь. Аналізуючи і узагальнюючи способи зведення початкових крайових задач до систем сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь Ю. В. Гандель сформулював концепцію нового методу – *методу параметричного подання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних перетворень* [46] – [51]. У цей час лише в окремих роботах, заснованих на інших методах, розглядалися електродинамічні структури, що складаються з великої скінченної кількості неоднорідних елементів. Відсутність робіт за цим напрямом пояснювалася значним зростанням обсягу аналітичної роботи при збільшенні кількості елементів у решітці. Саме цього недоліку був позбавлений метод параметричних подань сингулярних інтегральних перетворень, що дає змогу без проведення додаткової аналітичної роботи використовувати математичний і програмний апарат для дослідження однотипних структур, які складаються з різного числа елементів.

Алгоритми розв'язання модельних задач та їх комп'ютерні реалізації дали змогу в досить короткий час отримати чисельні результати для моделювання нових електродинамічних систем, які або не були розглянуті за допомогою інших методів, або були недостатньо добре вивчені. Одним із таких напрямів стало моделювання *збудження надрозмірних електродинамічних структур потоком електронів*. Отримані результати чисельного експерименту викликали цікавість фахівців, що знайшло відображення у великій кількості публікацій [52] – [54].

Розроблений алгоритм розв'язання цієї задачі став основою для побудови математичних моделей електродинамічних процесів у хвилеводах [55]. У роботах Ю. В. Ганделя та В. В. Хорошуна розглядалися математичні моделі процесів поширення хвиль у неоднорідних середовищах [56] – [57].

Необхідність урахування неідеальної провідності елементів решіток призвела до розгляду крайових задач для *рівнянь Максвелла з узагальненими граничними умовами*. У випадку дослідження двовимірних задач початкові задачі зводились до крайових задач для *рівняння Гельмгольца з крайовими умовами третього роду (імпедансними граничними умовами)* [58] – [60]. Перехід до розгляду задач з граничними умовами третього роду (навіть у випадку тонких стрічкових структур) призвів до розгляду нових класів інтегральних рівнянь і розробки нових схем їхнього чисельного розв'язання [61] – [62]. Для знаходження розв'язків задач цього класу одночасно приходилось розглядати інтегральні рівняння різних типів. Так у роботах [61] – [62] розглядалися граничні інтегральні рівняння другого роду:

$$\frac{V_q^+(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau-\xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{1,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad (4)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{q,p}^+(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0$

та сингулярні інтегральні рівняння першого роду, що містили інтеграли зі змінною верхньою межею:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^-(\xi, \tau) \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} - \frac{h}{\pi} \int_{-1}^{\xi} \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{2,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0 \quad (q = 1, \dots, M). \quad (6)$$

Задача, у якій розглядалися електродинамічні системи з скінченної кількості стрічок, розташованих над пласким екраном [63], призвели до розгляду систем рівнянь, розв'язання яких вимагало сумісного розв'язання рівнянь різних типів.

Наступним етапом досліджень стало створення моделей, у яких граничні умови третього роду розглядалися на всій поверхні [64]. У роботі [65], яка з'явилася у 1999 році, запропоновано модель дифракції $E - i H$ - поляризованих хвиль на неперіодичній гребінці, яка повністю вкрита надпровідним матеріалом. У роботі [66] розглядалася задача дифракції плоскої монохроматичної хвилі на надпровідному товстому металевому екрані зі щілинами, на усій поверхні якої розглядалися імпедансні умови.

Пріоритетним напрямком досліджень, що проводилися на межі століть, було створення моделей пристроїв високих енергій, зокрема *гіротронів*. Отримані в роботах Ю. В. Ганделя, Г. І. Загинайлова, О. С. Кононенка і С. О. Стешенка моделі та результати чисельного експерименту, що викликали неабиякий інтерес у фахівців, були опубліковані в авторитетних міжнародних журналах і представлені на авторитетних міжнародних конференціях [67] – [71].

Створення математичних моделей пристроїв високих енергій призвело до розгляду гіперсингулярних інтегральних рівнянь більш загального вигляду, ніж ті, які розглядалися у роботах Ю. В. Ганделя та О. С. Кононенко:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{(\tau - \xi)^2} \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{\xi - \tau} \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{d_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi - \tau| u_q(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) u_p(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = f_q(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M); \quad (7)$$

розроблено та обґрунтовано методи їх чисельного розв'язання. Результати їх досліджень дано у роботі [72].

Одним з напрямків досліджень, що проводилися на початку 21-го століття, стало створення Ю. В. Ганделем і С. В. Духопельниковим моделей взаємодії електромагнітних хвиль зі структурами, які мали осьову симетрію. За допомогою методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів були створені математичні моделі процесів поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах, математичні моделі розсіювання $TE - i TM$ - хвиль на щілинах у прямому круговому циліндрі і моделі випромінювання з поздовжніх щілин у хвилеводі кругового перерізу [73], [74]. У подальшому ці роботи стали основою для проведення аналізу фізичних властивостей більш складних електродинамічних систем [75] – [78].

Дослідження, які проводили Ю. В. Гандель і О. О. Носіч, спочатку були пов'язані зі створенням *моделей рефлекторних антен* [79]. При цьому інтегральні рівняння, що були наслідками властивостей потенціалів першого та другого роду, розв'язувались чисельно за допомогою *методів Найстрема*. Надалі цей підхід привів до створення моделей електродинамічних лінз і відкритих хвилеводів, які дають змогу одержувати поля з необхідними фазовими й амплітудними характеристиками в заданих точках простору [79] – [83]. Проведені дослідження викликали великий інтерес у дослідників, про що свідчить велика кількість посилань на роботи [84], [85].

Ще один важливий напрямок досліджень був пов'язаний з розробкою методів розв'язання трьохвимірних задач, які не можна звести до розв'язання двовимірних задач. У роботах В. С. Булигіна і Ю. В. Ганделя розглядалася тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на плоскому екрані з ідеальною провідністю, розташованому на межі розділу двох середовищ [86], [87]. Взаємодію акустичних хвиль із плоскими і плоскопаралельними структурами було розглянуто в роботах В. О. Міщенко та А. В. Гахова [88] – [90].

Потужність методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів була продемонстрована Ю. В. Ганделем, В. С. Булигіним при створенні математичних моделей задач дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання [91] – [94]. При побудові цих моделей розв'язання задач були отримані *спарені системи сингулярних та гіперсингулярних рівнянь зі змінними коефіцієнтами*, які не зустрічались у роботах інших дослідників. В. С. Булигін вперше для систем гіперсингулярних і сингулярних інтегральних рівнянь із змінними коефіцієнтами довів теорему існування та єдиності рішення у відповідних гільбертових просторах, побудував алгоритми їх числового розв'язання.

Чисельні експерименти, що проводяться, поставили питання про межу застосовності методу, про надійність отриманих результатів за граничних значень параметрів і ускладнення геометрії дифракційних структур. Цьому напрямку присвячено низку робіт В. О. Міщенка та його учнів [95] – [97]. У цих роботах обговорюються також питання раціональної організації процесу обчислень.

У 2012 вийшла монографія [98], у якій було дано докладний опис способів відомих на той час задач дифракції, а також методів їх чисельного розв'язання. У першій та другій главі цієї монографії викладено способи отримання систем сингулярних інтегральних рівнянь двовимірних задач дифракції ідеально провідних плоских та плоскопаралельних систем рефлекторів. Третя та четверта глави цієї монографії присвячені побудові математичних моделей задач дифракції на непласких системах періодичних та неперіодичних системах відбивачів. Виклад процедури отримання систем СІР задач дифракції на неідеально провідних структурах дано у п'ятій главі цієї монографії. Математичні моделі на базі СІР процесів поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах із перешкодами дано у шостій главі. Методи чисельного розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь задач, що розглядались у перших п'яти главах, викладені у шостій та сьомій главах цієї монографії.

У подальшому один з напрямів досліджень був пов'язаний з побудовою математичних моделей взаємодії електромагнітних полів з багат шаровими неідеально провідними структурами зокрема при наявності діелектричних шарів між системами відбивачів [99], [100].

У роботі [100] розглядались моделі на основі систем інтегральних рівнянь, що мали вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{V_q^+(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau-\xi| \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{1,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{2,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{1,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \end{aligned} \quad (8)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{i,q,p}(\xi,\tau) \in C^{\mu,\alpha}([-1,1] \times [-1,1]), \quad \alpha > 0;$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau-\xi} \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{1,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{2,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \\ & - \frac{h}{\pi} \int_{-1}^{\xi} \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{2,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \end{aligned} \quad (9)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad Q_{i,q,p}(\xi,\tau) \in C^{\mu,\alpha}([-1,1] \times [-1,1]), \quad \alpha > 0;$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0 \quad (q=1, \dots, M). \quad (10)$$

Розв'язання цих систем рівнянь вимагало сумісного розв'язання інтегральних рівнянь різних типів.

Незважаючи на різницю класів інтегральних рівнянь, що розглядались при побудові більшості розглянутих моделей, усі вони мали одну спільну особливість: їх вигляд не залежав від кількості геометрично подібних елементів у структурі. Наслідком цього є можливість використовувати одну й ту ж комп'ютерну реалізацію цієї моделі для чисельного аналізу структур, кількість елементів яких суттєво розрізняється. Це дало можливість провести чисельний аналіз розсіювання електромагнітних хвиль на плоских імпедансних структурах, що складались з великої кількості стрічок, зокрема предфрактальної геометрії [101] – [104].

Також одна з переваг методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів полягає в існуванні декількох можливостей зведення розв'язання багатьох задач дифракції з періодичними умовами до систем інтегральних рівнянь. Отримані різними шляхами системи інтегральних рівнянь суттєво розрізняються за своєю структурою – вони містять рівняння різних типів: першого та другого роду, сингулярні або гіперсингулярні. Це дає змогу перевіряти отримані результати та доводити їх валідність. У роботах [105] – [107] наводяться результати комп'ютерного моделювання процесів розсіювання електромагнітних хвиль на періодичних системах неідеально провідних стрічок, що були проведені за допомогою різних підходів.

Так у цих роботах окрім комп'ютерної моделі, що базується на системі інтегральних рівнянь (4) – (6) розглядалась модель на основі граничних гіперсингулярних інтегралів другого роду:

$$hu_q(\xi) \sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{(\tau-\xi)^2} \sqrt{1-\tau^2} d\tau + \frac{d_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi-\tau| u_q(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) u_p(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = f_q(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad (11)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0.$$

Модель дифракції E – поляризованих електромагнітних хвиль на періодичній системі резистивних стрічок, розташованих над імпедансним екраном, розглядалась у роботі [108].

Системи інтегральних рівнянь (4) – (6), (8) – (10), (7) та інші системи, які виникали при побудові математичних моделей процесів у електродинамічних системах, що містять неідеально провідні елементи не належать до класів, що розглядались у роботах [21] – [23], [72], [98]. Тому виникла задача розробки алгоритмів числового розв’язання цих систем та математичного обґрунтування збіжності наближень до точних розв’язків задач. Цим питанням присвячені роботи [109] – [112].

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, запропонований Ю. В. Ганделем метод параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів є потужним засобом отримання математичних моделей електродинамічних процесів у різних структурах. Він дозволяє розглядати як періодичні, так і неперіодичні структури, одношарові та багатошарові структури, напівпрозорі та відбиваючі структури, відкриті та хвилепровідні структури. У двовимірному випадку він дозволяє створювати моделі електродинамічних систем, які містять у своєму складі системи рефлекторів нульової та ненульової товщини. Цей підхід можна застосовувати для опису як ідеальнопровідних структур, так і структур, на межі яких виконуються узагальнені граничні умови. Також він дозволяє розглядати структури, що мають аксіальну симетрію.

Цей підхід є узагальненням методу парних суматорних та інтегральних рівнянь, який дозволив отримати граничні інтегральні рівняння багатьох класичних задач дифракції, а саме задач дифракції E – поляризованих та H – поляризованих хвиль на періодичних системах стрічок та брусів, та циліндрів. Також цей підхід дозволяв розглядати неперіодичні структури, що складались зі скінченної кількості стрічок, нескінченних товстих та тонких екранів з обмеженою кількістю щілин та інші. Отримані за допомогою цього методу граничні сингулярні інтегральні рівняння дозволяли застосовувати процедури методу дискретних особливостей для їх чисельного розв’язання.

Аналіз отриманих результатів довів, що алгоритми отримання нових граничних інтегральних рівнянь базуються на властивостях псевдодиференціальних інтегральних операторів і мають однакову послідовність дій при виконанні аналітичних перетворень для отримання граничних інтегральних рівнянь задач. Формалізація цих алгоритмів призвела до виникнення методу параметричного подання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних перетворень. У різні роки за допомогою цього підходу були розроблені наступні моделі:

- збудження надрозмірних неперіодичних гребінок структур потоком електронів;
- розподілу поля власних мод у прямокутній хвилеводній каналі с гребінчастими канавками;
- електродинамічних процесів у пристроях високих енергій, зокрема гіротронів;
- процесів поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах;
- розсіювання TE – і TM – хвиль на щілинах у прямому круговому циліндрі;
- дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання;
- побудови електродинамічних лінз і відкритих хвилеводів з необхідними фазовими й амплітудними характеристиками в заданих точках простору;
- розсіювання та дифракції електромагнітних хвиль на періодичних та неперіодичних плоскопаралельних системах неідеальнопровідних стрічок;
- дифракції на системах щілин у товстому шарі, на границі якого задані імпедансні граничні умови;
- розсіювання електромагнітних хвиль на гребінках, на усій поверхні яких задані імпедансні граничні умови.

В процесі побудови цих моделей були отримані системи граничних інтегральних рівнянь різних типів. У різних моделях розглядались сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння першого та другого роду, які окрім головної особливості містили особливості і інших типів. Особливість структури систем граничних рівнянь призвела до необхідності побудови числових методів, які дозволяють сумісно розв’язувати граничні інтегральні рівняння різних типів. Для значної кількості систем таких рівнянь були доведені теореми існування та єдності розв’язку цих систем і була доведена збіжність наближених розв’язків до точних у відповідних гільбертових просторах.

Можливості методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів не вичерпані на цей час. Зокрема властивість незалежності аналітичного подання моделі та комп’ютерної реалізації моделі від кількості елементів подібних структур, їх геометричних розмірів і взаємного розташування дозволяє

використовувати переваги цього методу при розробці математичних моделей багаточастотних структур зі спеціальною геометрією рефлекторів, зокрема побудованими за принципами побудови квазіфрактальних структур. Досвід використання цього підходу при створенні математичних моделей деяких задач дифракції та розсіювання з узагальненими граничними умовами дозволяє зробити припущення про відсутність суттєвих обмежень у застосуванні цього підходу до розгляду моделей, що розглядають структури, виготовлені з матеріалів з специфічними електродинамічними властивостями.

Список літератури

1. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – Москва : Наука, 1965. – 239 с.
2. Лифанов И. К. О методе дискретных вихрей // ПММ. – 1979. – Т. 43. – № 1. – С. 184 – 188.
3. Лифанов И. К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // ДАН СССР. – 1980. – Т. 255. – № 5. – С. 1046 – 1050.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
6. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. Method of Discrete Vortices // CRC Press. – 1992. – 464 p.
7. Lifanov I. K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan : VSP, 1996. – 475 p.
8. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M. Hypersingular Integral Equations and their application. – London, New York, Washington : CRC Press, 2004. – 416 p.
9. Гутников В. А., Кирякин В. Ю., Лифанов И. К., Сетуха А. В. Математическое моделирование аэродинамики городской застройки. – М. : Пасьява, 2002. – 244 с.
10. Довгий С. О., Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных рівнянь. Теорія та застосування. – К. : Наукова думка, 2004 р. – 512 с.
11. Довгий С. А., Лифанов И. К., Черний Д. И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К. : Издательство «Юстион», 2016. – 380 с.
12. Гандель Ю. В., Лифанов И. К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики. В кн.: Научно-методические материалы по численным методам. – М. : ВВИА, 1985. – С. 3 – 13.
13. Гандель Ю. В., Лифанов И. К., Матвеев Л. Ф. Численное решение смешанных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. –Препринт / Институт Теоретической и Экспериментальной Физики. – Москва, 1984. – № 174. – 55 с.
14. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – Москва : Изд. АН СССР. – № 124. – 1986. – С. 166 – 183.
15. Гандель Ю. В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Вища школа, 1982. – Вып. 38. – С. 15 – 18.
16. Гандель Ю. В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Вища школа, 1983. – Вып. 40. – С. 33 – 36.
17. Гандель Ю. В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы : Дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.03 / Харьковский ун-т. – Харьков, 1994. – 359 с.
18. Полянская Т. С. К решению сингулярного интегрального уравнения на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1985. – Вып. 44. – С. 84 – 87.
19. Полянская Т. С. Численные методы решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с одномерными и кратными интегралами типа Коши и Гильберта. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 – вычислительная математика. – Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1988 г. – 138 с.
20. Еременко С. В. Исследование интегральных уравнений некоторых двумерных краевых задач и их численное решение. Дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1989. – 117 с.
21. Gandel Yu. V., Polyanskaya T. S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary-value Problems of Mathematical Physics // Journal of Soviet Mathematics. – New York, 1990. – Volume 48. – № 2. – P. 144 – 152.
22. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Polyanskaya T. S. On a justification of the method of discrete singularities in two-dimensional diffraction problems // Differ. Equ. – 31:9 (1995). – 1491 – 1497.
23. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems // Differ. Equ. – 39:9 (2003). – 1295 – 1307.
24. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов : учеб. пособие. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1991. – Ч. I. – 67 с.
25. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн : Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
26. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Ч. I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : учеб. пособие. – Харьков : Изд-во Харьк. нац. ун-та, 2001. – 92 с.
27. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Солозуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та. – 1973. – 278 с.
28. Petit R. Electromagnetic theory of gratings. – New York : Springer, 1980. – 284 p.
29. Colton D., Kress R. Integral equation methods in stringing. – Toronto, Singapore : Wiley Interscience Publication John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane, 1983.
30. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев : Наук. думка, 1984. – 344 с.
31. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – К. : Наук. думка, 1984. – 240 с.
32. Гандель Ю. В., Забуга Т. А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решетках. – Харьков, 1983. – 37 с. (Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в УкрНИИТИ 21 ноября 1983, № 1286 Ук-Д83).
33. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Численное решение сингулярного уравнения задач дифракции электромагнитных волн на решетке // Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1993. – 20 с. Деп. в УкрИНТЭИ № 208-УК93, 18.02.93.
34. Гандель Ю. В., Гавриляко О. В. Математическая модель дифракции на системе щелей в идеально проводящем слое // Интегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Зб. наук. праць. – Київ: Інститут математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 27 – 33.
35. Гавриляко О. В. Сингулярные интегральные уравнения задачи дифракции на ограниченной решётке, расположенной над импедансной

- плоскостью // В кн. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. – Минск. – 1996. – С. 50 – 57.
36. Гандель Ю. В. Математическое моделирование методом дискретных особенностей в теории полосковых линий передачи / В сб.: Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики". Ч. I. – Одесса, 1991. – С. 57 – 58.
 37. Гандель Ю. В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений на всей оси: В кн.: III Всесоюзный симпозиум "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента". – Тезисы докладов. – Харьков, 1987. – С. 49 – 51.
 38. Гандель Ю. В., Краснянский М. Б. Математическая модель на основе МДО для расчета ступенчатых неоднородностей в волноводах. // Тезисы докл. Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков, 1993. – С. 121 – 122.
 39. Гандель Ю. В., Краснянский М. Б. Математическая модель для расчета ступенчатой неоднородности в плоском волноводе // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ, 1998. – Вип. 1. – 1998. – С. 57 – 64.
 40. Dushkin V., Gandel Yu. V., Morozova N. Numerical realization for the diffraction problems on multielemental gratings // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ*94). – Kharkov, 1994. – pp. 95 – 98.
 41. Душкин В. Д. Алгоритмы численного решения двумерных краевых задач дифракции и численный эксперимент на их основе // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ : І-нт математики НАН України, 1998. – Вип. 2. – С. 71 – 87.
 42. Гандель Ю. В., Сидельников Г. Л. Математические модели для численного анализа дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем // Журнал Технической физики. – 1995. – Т. 65. – В. 7. – С. 143 – 153.
 43. Гандель Ю. В., Сидельников Г. Л. Об одном подходе к решению задачи дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем // Доповіді НАН України. – 1995. – № 11. – С. 18 – 20.
 44. Гандель Ю. В., Морозова Н. Н. Математическая модель для вычисления собственных частот круговой мембраны, закрепленной по части границы // Интегральные преобразования... Збірник наукових праць. – Київ : НАН України, 1995. – Вип. 10. – С. 25 – 31.
 45. Gavril'yako O. Diffraction by a thick diaphragm in parallel-plate waveguide // ММЕТ Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. ММЕТ 98 (Cat. No.98EX114). – Kharkov, Ukraine, 1998. – pp. 372 – 374. – vol. 1, DOI: 10.1109/MMET.1998.709954.
 46. Гандель Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66.
 47. Гандель Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований аксиально симметричных краевых задач математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1996. – С. 72 – 73.
 48. Gandel Yu. V. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems // X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P. 57 – 62.
 49. Gandel Y. V. The numerically analytic methods for solution diffraction problems on multi-element gratings // 5th International Conference on Antenna Theory and Techniques. – Kyiv, Ukraine, 2005. – pp. 42 – 45. DOI: 10.1109/ICATT.2005.1496880.
 50. Gandel' Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171. – № 1. – Springer Science+Business Media, Inc. – P. 74 – 88.
 51. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures // 2012 Proceedings of the International Conference Days on Diffraction. – St. Petersburg, Russia, 2012. – pp. 76 – 81. DOI: 10.1109/DD.2012.6402755.
 52. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Turbin P. V. Modeling of Plasma Effect on the Diffraction Radiation of Relativistic Beam Moving over a Grating Finite Extent // Microwave and Optical Technology Letters. – 1997. – Vol. 16. – N. 1. – P. 50 – 54.
 53. Zaginaylov G. I., Dushkin V. D., Korostyshevski V., Turbin P. V. Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities // ММЕТ Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. ММЕТ 98 (Cat. No.98EX114). – Kharkov, Ukraine, 1998. – pp. 409 – 410. – vol. 1. DOI: 10.1109/MMET.1998.709993.
 54. Gandel' Y. V., Dushkin V. D., Zaginailov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures // Telecommunications and Radio Engineering. – 2000. – Volume 54. – Issue 7. – pp. 36 – 48. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v54.i7.40.
 55. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Hirata A., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Shiozawa T., Thumvongskul T. Full-Wave Analysis of the Field Distribution of Natural Modes in the Rectangular Waveguide Grating Based on Singular Integral Equation // IEEE Transactions on Plasma Science. – A. – 2002. – Vol. 30. – № 3. – p.p. 1151 – 1157. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613.
 56. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. The Vortex Lattice Method in the Electromagnetic Wave diffraction on the on the method Grating with Gyrotropic Layer // VIII-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkov, 2000. – V. 2. – P. 578 – 580.
 57. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. Mathematical models of electromagnetic wave scattering by two-element strip grating with perpendicular magnetized gyrotropic medium // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kiev, 2002. – P. 429 – 431.
 58. Il'inskiy A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. – London, 1993, UK, The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Electromagnetic Waves, Series 36. – 275 p.
 59. Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets // IEEE Antennas Propag. Mag. – 1993. – vol. 36. – no. 6. – pp. 14 – 25.
 60. Zinenko T. L., Nosich A. I. Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – vol. 54. – no. 7. – pp. 2088 – 2095.
 61. Гандель Ю. В., Кравченко В. Ф., Морозова Н. Н. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные волны и электронные системы. – М., 1997. – Т. 2. – № 2. – С. 14 – 26.
 62. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoit V. I. Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band // Doklady Mathematics. – 1996. – № 54(3). – С. 959 – 961.
 63. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction by a bounded lattice over a plane screen // Differ. Equ. – 1999. – № 35:9 (1999). – P. 1169 – 1175.
 64. Gandel Yu. V., Morozova N. Mathematic models of diffraction and radiation problem for planar waveguide with impedance with impedance flange // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic theory. – Lviv, 1996. – P. 88 – 91. DOI: 10.1109/MMET.1996.565644.
 65. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // Доп. НАН України. – 1999. – № 9. – С. 11 – 15.
 66. Dushkin V. D. "Application of the singular integral transform method to the solution of the two-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves from a superconducting layer with rectangular waveguide channels // Telecommunications and Radio Engineering. – 2001. – vol. 56. – no. 2. – pp. 78 – 85. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v56.i2.80.
 67. Zaginaylov G. I., Gandel Yu. V., Steshenko. S. A. The method of singular integral equations in the eigenvalue analysis of a coaxial structure with a

- corrugated society digest // IEEE International Antennas and Propagation Symposium. – Columbus, OH, USA, 2003. – vol. 4. – P. 966 – 969. DOI: 10.1109/APS.2003.1220433.
68. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Steshenko S. A. "Singular integral equation approach in the theory of coaxial cavity gyrotrons" // The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves (IEEE Cat. No.04EX828). – Kharkov, Ukraine, 2004. – pp. 483 – 485. – Vol. 2. DOI: 10.1109/MSMW.2004.1345968.
 69. Dumbrajs O., Gandel Yu. V., Kononenko A. S., Schuenemann K., Zaginaylov G. I. Full wave analysis of coaxial cavity gyrotrons // Proceedings of the 10th Triennial ITG-Conference on Displays and Vacuum Electronics. – Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2004. – P. 75 – 80.
 70. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert. // Int J Infrared Milli Waves 28. – 2007. – pp. 267 – 274. DOI: 10.1007/s10762-007-9198-8.
 71. Kononenko A. S., Gandel Yu. V. Standing waves in a coaxial cavity gyrotron with a corrugated insert // Proceedings of the Asia Pacific Microwave Conference. – Yokohama, Japan, 2006. – P. 1300 – 1303. DOI: 10.1109/APMC.2006.4429644.
 72. Gandel' Y. V., Kononenko A. S. Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation // Diff. Equat. – 2006. – Vol. 42. – pp. 1326 – 1333. DOI: 10.1134/S0012266106090114.
 73. Гандель Ю. В., Духопельников С. В. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многоселевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264 – 293.
 74. Гандель Ю. В., Духопельников С. В. Математическая модель дифракции монохроматической волны на идеально проводящем кольцевом волноводе с продольными щелями, заполненным диэлектриком // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2008. – № 809. – Вып. 9. – С. 42 – 59.
 75. Dukhopelnykov S. V. "Scattering of H-polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Wire with Partial Graphene Cover" // 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 1 – 4, DOI: 10.1109/MMET.2018.8460384.
 76. Dukhopelnykov S. V. "Control of Backscattering of H-polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Rod with Partial Graphene Cover" // 2018 XXIIIrd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2018. – pp. 51 – 54. DOI: 10.1109/DIPED.2018.8543283.
 77. Yevtushenko D. O., Dukhopelnykov S. V. "Total Scattering Cross-Section of Twin Circular Silver Nanowires Excited by Electron Beam Moving between Them" // 2019 European Microwave Conference in Central Europe (EuMCE). – Prague, Czech Republic, 2019. – pp. 386 – 389.
 78. Dukhopelnykov S. V., Sauleau R. "Backward Scattering from a Circular Dielectric Rod with a Conformal Strip of Graphene" // 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). – Kyiv, Ukraine, 2020. – pp. 67 – 70. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088912.
 79. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Accurate 2-D design of parabola-cone antenna of quasioptical size" // 2006 First European Conference on Antennas and Propagation. – Nice, France, 2006. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/EUCAP.2006.4584534.
 80. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Method of discrete singularities in the accurate modeling of a reflector beam waveguide" // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest., 2005. – Long Beach, CA, USA, 2005. – pp. 1083 – 1086. DOI: 10.1109/MWSYM.2005.1516860.
 81. Nosich A. A., Gandel Y. V., Matsushima A., Sauleau R. "Collimation and focusing of wave beams with metal-plate lens antennas analyzed using nystrom-type MDS algorithm" // 2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – San Diego, CA, USA, 2008. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/APS.2008.4619381.
 82. Nosich A. A., Sauleau R., Matsushima A., Gandel Y. V. "Accurate modeling and optimization of metallic-plate waveguide lenses" // 2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation. – Berlin, Germany, 2009. – pp. 2167 – 2170.
 83. Nosich A. A., Sauleau R., Gandel Y. V. "Simulation and performance comparison of ADE and PACO dual-reflector antenna models in 2-D using Nystrom-type MDS algorithm" // 2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – North Charleston, SC, USA, 2009. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/APS.2009.5171623.
 84. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2007. – vol. 55. – no. 2. – pp. 399 – 406. DOI: 10.1109/TAP.2006.889811.
 85. Nosich A. A., Gandel Y. V. Thore Magath, and Ayhan Altintas, "Numerical analysis and synthesis of 2D quasi-optical reflectors and beam waveguides based on an integral-equation approach with Nystrom's discretization" // J. Opt. Soc. Am. – 2007. – A 24. – pp. 2831 – 2836. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002831.
 86. Бульгин В. С., Гандель Ю. В. Краевые задачи для 3D – уравнений Гельмгольца, граничные псевдодифференциальные уравнения и численный эксперимент // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 17. – С. 210 – 234.
 87. Бульгин В. С., Гандель Ю. В. Задача дифракции акустических волн на ковре Серпинского // Праці XIV Міжнародного симпозиуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» // МДОЗМФ-2009. – С. 27 – 30.
 88. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2006. – №733. – Вып. 6. – С. 58 – 75.
 89. Гахов А. В., Мищенко В. О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник Херсонского национального технического университета: 36. наук. праць. – Херсон, 2006. – № 2(25). – С. 135 – 140.
 90. Гахов А. В. Численное исследование рассеяния скалярных волн плоским экраном на границе слоя в полупространстве над жесткой плоскостью // Вісник Харківського національного університету: 36. наук. праць. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління – Харків, 2007. – Вип. 8. – № 780. – С. 79 – 93.
 91. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. "Fast and accurate numerical modeling of a TARA-like shielded paraboloidal reflector antenna" // 2011 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS). – Kiev, Ukraine, 2011. – pp. 86 – 88. DOI: 10.1109/MRRS.2011.6053607.
 92. Bulygin V. S., Gandel Y. V., Benson T. M., Nosich A. I. "Numerical optimization of a TARA-like shielded parabolic reflector" // 2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP). – Prague, Czech Republic, 2012. – pp. 3308 – 3312. DOI: 10.1109/EuCAP.2012.6206231.
 93. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. "Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – vol. 60. – no. 10. – pp. 4710 – 4718. DOI: 10.1109/TAP.2012.2209194.
 94. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. "Full-Wave Analysis and Optimization of a TARA-Like Shield-Assisted Paraboloidal Reflector Antenna Using a Nystrom-Type Method" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2013. – vol. 61. – no. 10. – pp. 4981 – 4989. DOI: 10.1109/TAP.2013.2275248.
 95. Мищенко В. О. Энергетический анализ программного обеспечения с примерами реализации для АДА программ. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 129 с.
 96. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Математические модели в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы // Математическое моделирование. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1996. – С. 70 – 74.
 97. Мищенко В. О., Скрыпник А. Ю., Труфен В. И. Математическое моделирование надежности информации в базе данных по приложениям

- методов параметрических представлений сингулярных интегральных уравнений // Математические модели и современные информационные технологии. Сб. научн. Тр. НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1998. – С. 135 – 138.
98. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Х. : АБВ МБСУ, 2012. – 544с.
 99. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Граничные интегральные уравнения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в R^2 + с плоскопараллельными разрезами // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 8. – С. 14 – 19.
 100. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. // J Math Sci. – 2016. – № 212. – pp. 156 – 166. DOI: 10.1007/s10958-015-2656-2.
 101. Nesvit K. "The diffraction problem of E polarized wave on the pre-cantor periodic grating with reflector and its discrete mathematical model" // 2013 7th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – Gothenburg, Sweden, 2013. – pp. 1072 – 1076.
 102. Nesvit K. "Scattering and diffraction of TM modes on a grating consisting of a finite number of pre-fractal thin impedance strips" // 2013 European Microwave Conference. – Nuremberg, Germany, 2013. – pp. 1143 – 1146. DOI: 10.23919/EuMC.2013.6686864.
 103. Kostenko O. V. Mathematical Model of Wave Scattering by an Impedance Grating // Cybern Syst Anal. – 2015. – № 51. – pp. 344 – 360. DOI: 10.1007/s10559-015-9727-8.
 104. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. // J Math Sci. – 2016. – vol. 212. – pp. 142 – 155. DOI: 10.1007/s10958-015-2655.
 105. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. "Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes" // 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Lviv, Ukraine, 2019. – pp. 112 – 116. DOI: 10.1109/DIPED.2019.8882633.
 106. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. "Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips" // 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). – Kharkiv, Ukraine, 2020. – pp. 625 – 629. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252606.
 107. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. "Modeling Wave Scattering by GC-liked Periodic Structures" // 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2021. – pp. 59 – 63. DOI: 10.1109/DIPED53165.2021.9552304.
 108. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V. "Mathematical Model of E-polarized Wave Diffraction on a Reflecting Non-PEC Stripe System Above the Screen" // 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2023. – pp. 8 – 13. DOI: 10.1109/DIPED59408.2023.10269489.
 109. Kostenko A. V. Numerical Method for the Solution of a Hypersingular Integral Equation of the Second Kind. // Ukr Math J. – 2014. – vol. 65. – pp. 1373 – 1383. DOI: 10.1007/s11253-014-0865-3.
 110. Kostenko O. V. A Numerical Method for Solving a System of Hypersingular Integral Equations of the Second Kind. // Cybern Syst Anal. – 2016. – vol. 52. – pp. 394 – 407. DOI: 10.1007/s10559-016-9840-3.
 111. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. // Журн. мат. фіз. анал. геом. – 2017. – vol. 13. – pp. 254 – 267.
 112. Kostenko O. V. A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. // Mathematical Modelling and Analysis. – 2023. – vol. 28(4). – pp. 689 – 714. DOI: 10.3846/mma.2023.14761.

References (transliterated)

1. Belotserkovsky S. M. *Tonkaya nesushchaya poverkhnost' v dozvukovom potoke gaza* [Thin bearing surface in subsonic gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 239 p.
2. Lifanov I. K. O metode diskretnykh vikhrey [On the discrete vortex method]. *PMM*. 1979, vol. 43, no. 1, pp. 184–188.
3. Lifanov I. K. O nekorrektnosti i regularizatsii chislennogo resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [On the incorrectness and regularization of the numerical solution of singular integral equations of the first kind]. *DAN USSR*. 1980, vol. 255, no. 5, pp. 1046–1050.
4. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primeneniye v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electro-dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 253 p.
5. Lifanov I. K. Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment v matematicheskoy fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln [Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment in Mathematical Physics, Aerodynamics, Theory of Elasticity and Wave Diffraction]. Moscow, TOO "Yanus", 1995. 520 p.
6. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Method of Discrete Vortices*. CRC Press, 1992. 464 p.
7. Lifanov I. K. *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan : VSP, 1996. 475 p.
8. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M. *Hypersingular Integral Equations and their application*. London, New York, Washington : CRC Press, 2004. 416 p.
9. Gutnikov V. A., Kiryakin V. Yu., Lifanov I. K., Setukha A. V. *Matematicheskoye modelirovaniye aerodinamiki gorodskoy zastroyki* [Mathematical modeling of the aerodynamics of urban development]. Moscow, Pas'va Publ., 2002. 244 p.
10. Dovgii S. O., Lifanov I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rivnyan'. Teoriya ta zastosuvannya* [Method of singular integral equations. Theory and application]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2004. 512 p.
11. Dovgii S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i vychislitel'nyye tekhnologii* [Method of singular integral equations and computing technologies]. Kyiv, Publishing House "Justion" Publ., 2016. 380 p.
12. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K. *O prilozhenii idey metoda diskretnykh vikhrey k zadacham elektrodinamiki. V kn. Nauchno-metodicheskie materialy po chislennym metodam* [On the application of the ideas of the discrete vortex method to problems of electrodynamics. In the book: Scientific and methodological materials on numerical methods]. Moscow, VVIA Publ., 1985. pp. 3–13.
13. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Matveev L. F. *Chislennyye resheniya smeshannykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki, svodyashhikhsya k singulyarnomu integral'nomu uravneniyu na otrezki sistemy. Preprint. Institut Teoreticheskoy I eksperimental'noy Fiziki* [Numerical solution of mixed boundary value problems of mathematical physics, reduced to a singular integral equation for segments of the system. Preprint. Institute of Theoretical and Experimental Physics]. Moscow, 1984, No. 174. 55 p.
14. Gandel' Yu. V. Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh elektrodinamiki [Method of discrete singularities in problems of electrodynamics]. *Voprosy kibernetiki* [Questions of cybernetics]. Moscow, Izd. AN USSR Publ., 1986, No. 124, pp. 166–183.
15. Gandel' Yu. V. O parnykh ryadakh Fur'ye nekotorykh smeshannykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki [On paired Fourier series of some mixed boundary value problems of mathematical physics]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz I ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Vishcha shkola, 1982, Vol. 38, pp. 15–18.
16. Gandel' Yu. V. O parnykh integral'nykh uravneniyakh, privodyashhikh k singulyarnomu integral'nomu uravneniyu na sisteme otrezkov [On paired integral equations leading to a singular integral equation on a system of segments]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz I ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Vyshha shkola, 1983, issue. 40, pp. 33–36.
17. Gandel' Yu. V. *Parnyye summatornyye i singulyarnyye integral'nyye uravneniya v zadachakh difraktsii: teoriya i chislennyye metody: dys. d-ra*

- phys.-mat. nauk 01.04.03* [Paired summation and singular integral equations in diffraction problems: theory and numerical methods: Dr. of Physics and Mathematics Sciences]. Kharkov, Kharkov University Publ., 1994. 359 p.
18. Polyanskaya T. S. K resheniyu singulyarnogo integral'nogo uravneniya na sisteme otrezkov [To the solution of a singular integral equation on a system of segments]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. 1985, issue 44, pp. 84–87.
 19. Polyanskaya T. S. *Chislennyye metody resheniya nekotorykh klassov singulyarnykh integral'nykh uravneniy s odnomernymi i kratnymi integralami tipa Koshi i Gil'berta. Dys. kand. Fiz.-mat. nauk: 01.01.07* [Numerical methods for solving some classes of singular integral equations with one-dimensional and multiple integrals of Cauchy and Hilbert type. dis. Ph.D. physics and mathematics Sciences: 01.01.07 – computational mathematics]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN USSR Publ., 1988. 138 p.
 20. Eremenko S. V. *Issledovaniye integral'nykh uravneniy nekotorykh dvumernykh krayevykh zadach i ikh chislennoye resheniye: dys. kand. Fiz.-mat. nauk* [Study of integral equations of some two-dimensional boundary value problems and their numerical solution: dis. Ph.D. physics and mathematics Sci]. Kharkov, 1989. 117 p.
 21. Gandel Yu. V., Polyanskaya T. S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary-value Problems of Mathematical Physics. *Journal of Soviet Mathematics*. New York, 1990, Volume 48, no. 2, pp. 144–152.
 22. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Polyanskaya T. S. On a justification of the method of discrete singularities in two-dimensional diffraction problems. *Differ. Equ.* 1995, 31:9 (1995), pp. 1491–1497.
 23. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems. *Differ. Equ.* 2003, 39:9 (2003), pp. 1295–1307.
 24. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnykh zaryadov : uchebnoe posobie* [Mathematical issues of the method of discrete charges : Textbook]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1991. Part I. 67 p.
 25. Gandel' Yu. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnykh tokov. Obosnovaniye chislennogo metoda diskretnykh osobennostey resheniya dvumernykh zadach difraktsii elektromagnitnykh voln : uchebnoe posobie. Chast' II* [Mathematical issues of the discrete current method. Justification of the numerical method of discrete features for solving two-dimensional problems of diffraction of electromagnetic waves : Textbook. Part II]. Kharkov, 1992. 145 p.
 26. Gandel' Yu. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Chast' I. Vvedeniye v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov : uchebnoe posobie* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Part I. Introduction to methods for calculating singular and hypersingular integrals : Textbook]. Kharkov, Izd-vo Khark. Un-ta Publ., 2001. 92 p.
 27. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Diffraction of waves by gratings]. Kharkov, Izd-vo Khark. Un-ta Publ., 1973. 278 p.
 28. Petit R. *Electromagnetic theory of gratings*. New York, Springer, 1980. 284 p.
 29. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in sitring*. Toronto, Singapore, Wiley Interscience Publication John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane, 1983.
 30. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Nauk. Dumka Publ., 1984. 344 p.
 31. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. *Spektral'nyye operatory rasseyaniya v zadachakh difraktsii voln na ploskikh ekranakh* [Spectral scattering operators in problems of wave diffraction on flat screens]. Kyiv, Nauk. dum-ka Publ., 1984. 240 p.
 32. Gandel' Yu. V., Zabuga T. A. *Chislennyy metod diskretnykh osobennostey v zadachakh difraktsii voln na reshotkakh* [Numerical method of discrete singularities in problems of wave diffraction by gratings]. Kharkov, 1983. 37 p. (Manuscript presented by Kharkiv University. Deposit in UkrNIINTI November 21, 1983, No. 1286 UK-D83).
 33. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. *Chislennoye resheniye singulyarnogo uravneniya zadachi difraktsii elektromagnitnykh voln na reshetke*. [Numerical solution of the singular equation of the problem of diffraction of electromagnetic waves on a grating]. Kharkov, Kharkov Gos. Un-t Publ., 1993. 20 p. Dep. in UkrINTEI No. 208-UK93 dated February 18, 1993.
 34. Gandel' Yu. V., Gavrilyako O. V. Matematycheskaya model' dyfraktsiyi na sisteme shheley v ideal'no provodyashhem sloe [Mathematical model of diffraction by a system of slits in an ideally conducting layer]. *Integral'ni peretvorenniya ta yikhzastosuvannya do krayovykh zadach. Zb. Nauk. prats'* [Integral transformations and their development to boundary value problems. Zb. Sci. fack off]. Kyiv, Instytut matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996, Vol. 12, pp. 27–33.
 35. Gavrilyako O. V. Singulyarnyye integral'nyye uravneniya zadachi difraktsii na ogranichennoy reshetye, raspolozhennoy nad impedansnoy ploskost'yu. [Singular integral equations of the diffraction problem on a bounded grating located above an impedance plane]. *V kn. Kraevye zadachi, spetsial'nye funktsii i drobnoe ischislenie* [In the book. Boundary value problems, special functions and fractional calculus]. Minsk, 1996. pp. 50–57.
 36. Gandel' Yu. V. Matematycheskoye modelirovaniye metodom diskretnykh osobennostey v teorii poloskovykh liniy peredachi. [Mathematical modeling by the method of discrete singularities in the theory of strip transmission lines]. *V sb. Tezisy dokladov V Vsesoyuznogo simpoziuma "Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki."* Ch. I [Abstracts of the V All-Union Symposium "Method of discrete singularities in problems of mathematical physics". Part. I]. Odessa, 1991, pp. 57–58.
 37. Gandel' Yu. V. Pryamoy chislennyy metod resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy na vsey osi [Direct numerical method for solving singular integral equations on the entire axis]. *V kn. : III Vsesoyuznyy simpozium "Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki I ego rol' v razvitiy chislennogo eksperimenta."* Tezisy dokladov [In the book: III All-Union Symposium "The method of discrete singularities in problems of mathematical physics and its role in the development of numerical experiment." Abstracts of reports]. Kharkov, 1987, pp. 49–51.
 38. Gandel' Yu. V., Krasnyansky M. B. Matematycheskaya model' na osnove MDO dlya rascheta stupenchatykh neodnorodnostey v volnovodakh [Mathematical model based on DSM for calculating step inhomogeneities in waveguides]. *Tezisy dokl. Mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki"* [Abstracts of the report. International Symposium "Methods of of discrete singularities in problems of mathematical physics"]. Kharkov, 1993, pp. 121–122.
 39. Gandel' Yu. V., Krasnyansky M. B. Matematycheskaya model' dlya raschyeta neodnorodnosti v ploskom volnovode [The mathematical model for calculating step inhomogeneity in a plane waveguide]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsiynykh rivnyan'* [Boundary value problems for differential equations]. Kyiv, 1998, vol. 1, 1998, pp. 57–64.
 40. Dushkin V., Gandel Yu. V., Morozova N. Numerical realization for the diffraction problems on multielemental gratings. *Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*94)*. Kharkov, 1994, pp. 95–98.
 41. Dushkin V. D. Algoritmy chyslennogo resheniya dvumernykh kraevykh zadach difraktsiyi i chyslennyy eksperyment na ikh osnove [Algorithms for the numerical solution of two-dimensional boundary value problems of diffraction and a numerical experiment based on them]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'* [Boundary value problems for differential equations]. Kyiv, In-t matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1998, Issue 2, pp. 71–87.
 42. Gandel Yu. V., Sidel'nikov G. L. Matematicheskiye modeli dlya chislennogo analiza difraktsii na ploskom volnovode s beskonechnym flants'em [Mathematical models for numerical analysis of diffraction on a flat waveguide with an infinite flange]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Technical Physics]. 1995, vol. 65, Issue 7, pp. 143–153.
 43. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. Ob odnom podkhode k resheniyu zadachi difraktsii na ploskom volnovode s beskonechnym flants'em [On one approach to solving the problem of diffraction on a flat waveguide with an infinite flange]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National

- Academy of Sciences of Ukraine]. 1995, No. 11, pp. 18–20.
44. Gandel' Yu. V., Morozova N. N. Matematicheskaya model' dlya vychisleniya sobstvennykh chastot krugovoy membrany, zakreplennoy po chasti granitsy [Mathematical model for calculating the natural frequencies of a circular membrane fixed along part of the boundary]. *Integral'ni peretvorenniya. Zbirnyk nauk. prats'* [Integral transformations... Collection of scientific works]. Kyiv, NAN Ukrayiny Publ., 1995, Issue.10, pp. 25–31.
 45. Gavrilyako O. Diffraction by a thick diaphragm in parallel-plate waveguide. *MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114)*. Kharkov, Ukraine, 1998, vol. 1, pp. 372–374. DOI: 10.1109/MMET.1998.709954.
 46. Gandel' Yu. V. Parametricheskiye predstavleniya singulyarnykh integral'nykh preobrazovaniy i krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki. [Parametric representations of singular integral transformations and boundary value problems of mathematical physics]. *Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki I ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1995, pp. 65–66.
 47. Gandel' Yu. V. Parametricheskiye predstavleniya singulyarnykh integral'nykh preobrazovaniy aksial'no simmetrichnykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki [Parametric representations of singular integral transformations of axially symmetric boundary value problems of mathematical physics]. *Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki I ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996, pp. 72–73.
 48. Gandel Yu. V. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. *X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. P. 57–62.
 49. Gandel Y. V. The numerically analytic methods for solution diffraction problems on multi-element gratings. *5th International Conference on Antenna Theory and Techniques*. Kyiv, Ukraine, 2005, pp. 42–45. DOI: 10.1109/ICATT.2005.1496880.
 50. Gandel' Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. *Journal of Mathematical Sciences*. Springer Science+Business Media, Inc., 2010, Vol. 171, no. 1, pp. 74–88.
 51. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. *2012 Proceedings of the International Conference Days on Diffraction*. St. Petersburg, Russia, 2012, pp. 76–81. DOI: 10.1109/DD.2012.6402755.
 52. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Turbin P. V. Modeling of Plasma Effect on the Diffraction Radiation of Relativistic Beam Moving over a Grating Finite Extent. *Microwave and Optical Technology Letters*. 1997, Vol. 16, no. 1, pp. 50–54.
 53. Zaginaylov G. I., Dushkin V. D., Korostyshevski V., Turbin P. V. Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities. *MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114)*. Kharkov, Ukraine, 1998, vol. 1, pp. 409–410. DOI: 10.1109/MMET.1998.709993.
 54. Gandel' Y. V., Dushkin V. D., Zaginailov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000, Volume 54, Issue 7, pp. 36–48. DOI: 10.1615/Telecom RadEng.v54.i7.40.
 55. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Hirata A., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Shiozawa T., Thumvongskul T. Full-Wave Analysis of the Field Distribution of Natural Modes in the Rectangular Waveguide Grating Based on Singular Integral Equation. *IEEE Transactions on Plasma Science*. A. 2002, Vol. 30, no. 3, pp. 1151–1157. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613.
 56. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. The Vortex Lattice Method in the Electromagnetic Wave diffraction on the on the method Grating with Gyrotropic Layer. *VIII-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kharkov, 2000, V. 2, pp. 578–580.
 57. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. Mathematical models of electromagnetic wave scattering by two-element strip grating with perpendicular magnetized gyrotropic medium. *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kyiv, 2002, pp. 429–431.
 58. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. *Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves*. London, 1993, UK, The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Electromagnetic Waves, Series 36. 275 p.
 59. Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets. *IEEE Antennas Propag. Mag.* 1993, vol. 36, no. 6, pp. 14–25.
 60. Zinenko T. L., Nosich A. I. Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2006, vol. 54, no. 7, pp. 2088–2095.
 61. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Morozova N. N. Difraktsiya elektromagnitnykh voln na reshotke iz tonkikh sverkhprovodyashchikh lent [Diffraction of electromagnetic waves by a grating of thin superconducting ribbons]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic waves and electronic systems]. Moscow, 1997, Vol. 2, No. 2, pp. 14–26.
 62. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoi V. I. Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band. *Doklady Mathematics*. 1996, no. 54(3), pp. 959–961.
 63. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction by a bounded lattice over a plane screen. *Differ. Equ.* 1999, no. 35:9 (1999), pp. 1169–1175.
 64. Gandel Yu. V., Morozova N. Mathematic models of diffraction and radiation problem for planar waveguide with impedance with impedance flange. *Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic theory*. Lviv, 1996, pp. 88–91. DOI: 10.1109/MMET.1996.565644.
 65. Dushkin V. D. Resheniye dvumernoy zadachi difraktsii s krayevymi usloviyami tret'yego roda na bokovoy poverkhnosti volnovodnykh kanalov [Solution of a two-dimensional diffraction problem with boundary conditions of the third kind on the side surface of waveguide channels]. *Dop. NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of the Ukraine]. 1999, no. 9, pp. 11–15.
 66. Dushkin V. D. Application of the singular integral transform method to the solution of the two-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves from a superconducting layer with rectangular waveguide channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001, vol. 56, no. 2, pp. 78–85. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v56.i2.80.
 67. Zaginaylov G. I., Gandel Yu. V., Steshenko S. A. The method of singular integral equations in the eigenvalue analysis of a coaxial structure with a corrugated society digest. *IEEE International Antennas and Propagation Symposium*. Columbus, OH, USA, 2003, vol. 4, pp. 966–969. DOI: 10.1109/APS.2003.1220433.
 68. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Steshenko S. A. Singular integral equation approach in the theory of coaxial cavity gyrotrons. *The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves (IEEE Cat. No.04EX828)*. Kharkov, Ukraine, 2004, Vol. 2, pp. 483–485. DOI: 10.1109/MSMW.2004.1345968.
 69. Dumbrajs O., Gandel Yu. V., Kononenko A. S., Schuenemann K., Zaginaylov G. I. Full wave analysis of coaxial cavity gyrotrons. *Proceedings of the 10th Triennial ITG-Conference on Displays and Vacuum Electronics*. Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2004, pp. 75–80.
 70. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert. *Int J Infrared Milli Waves* 28. 2007, pp. 267–274. DOI: 10.1007/s10762-007-9198-8.
 71. Kononenko A. S., Gandel Yu. V. Standing waves in a coaxial cavity gyrotron with a corrugated insert. *Proceedings of the Asia Pacific Microwave Conference*. Yokohama, Japan, 2006, pp. 1300–1303. DOI: 10.1109/APMC.2006.4429644.
 72. Gandel' Y. V., Kononenko A. S. Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation. *Diff. Equat.* 2006, vol. 42, pp. 1326–1333. DOI: 10.1134/S0012266106090114.

73. Gandel' Yu. V., Dukhopel'nikov S. V. Krayevyye zadachi dlya uravneniy Gel'mgol'tsa i Maksvella na mnogoshhelevykh tsilindricheskikh strukturakh i granichnyye integral'nyye uravneniya na sisteme otrezkov [Boundary value problems for the Helmholtz and Maxwell equations on multi-slot cylindrical structures and boundary integral equations on a system of segments]. Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan' [Boundary value problems for differential equations]. Chernivtsi, Prut, 2008, Vol. 16, pp. 264–293.
74. Gandel' Yu. V., Dukhopel'nikov S. V. Matematicheskaya model' difraktsii monokhromaticheskoy volny na ideal'no provodyashchem kol'tsevom volnovode s prodol'nymi shhelyami, zapolnennym dielektrikom [Mathematical model of diffraction of a monochromatic wave on a perfectly conducting ring waveguide with longitudinal slits filled with a dielectric]. *Vestnik Khar. Nats. Un-ta. Ser. "Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya"* [Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»]. 2008, no. 809, vol. 9, pp. 42–59.
75. Dukhopelnykov S. V. "Scattering of H – polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Wire with Partial Graphene Cover". *2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*. Kyiv, Ukraine, 2018. pp. 1–4, DOI: 10.1109/MMET.2018.8460384.
76. Dukhopelnykov S. V. "Control of Backscattering of H – polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Rod with Partial Graphene Cover". *2018 XXIIIrd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2018. pp. 51–54. DOI: 10.1109/DIPED.2018.8543283.
77. Yevtushenko D. O., Dukhopelnykov S. V. "Total Scattering Cross-Section of Twin Circular Silver Nanowires Excited by Electron Beam Moving between Them". *2019 European Microwave Conference in Central Europe (EuMCE)*. Prague, Czech Republic, 2019. pp. 386–389.
78. Dukhopelnykov S. V., Sauleau R. "Backward Scattering from a Circular Dielectric Rod with a Conformal Strip of Graphene". *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. Kyiv, Ukraine, 2020. pp. 67–70. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088912.
79. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Accurate 2 – D design of parabola-cone antenna of quasioptical size". *2006 First European Conference on Antennas and Propagation*. Nice, France, 2006. pp. 1–4. DOI: 10.1109/EUCAP.2006.4584534.
80. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Method of discrete singularities in the accurate modeling of a reflector beam waveguide". *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest., 2005*. Long Beach, CA, USA, 2005. pp. 1083–1086. DOI: 10.1109/MWSYM.2005.1516860.
81. Nosich A. A., Gandel Y. V., Matsushima A., Sauleau R. "Collimation and focusing of wave beams with metal-plate lens antennas analyzed using nystrom-type MDS algorithm". *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. San Diego, CA, USA, 2008. pp. 1–4. DOI: 10.1109/APS.2008.4619381.
82. Nosich A. A., Sauleau R., Matsushima A., Gandel Y. V. "Accurate modeling and optimization of metallic-plate waveguide lenses". *2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation*. Berlin, Germany, 2009. pp. 2167–2170.
83. Nosich A. A., Sauleau R., Gandel Y. V. "Simulation and performance comparison of ADE and PACO dual-reflector antenna models in 2 – D using Nystrom-type MDS algorithm". *2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. North Charleston, SC, USA, 2009. pp. 1–4. DOI: 10.1109/APS.2009.5171623.
84. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2 – D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case". *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007, vol. 55, no. 2, pp. 399–406. DOI: 10.1109/TAP.2006.889811.
85. Nosich A. A., Gandel Y. V. Thore Magath, and Ayhan Altintas, "Numerical analysis and synthesis of 2D quasi-optical reflectors and beam waveguides based on an integral-equation approach with Nystrom's discretization". *J. Opt. Soc. Am.* 2007, A 24, pp. 2831–2836. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002831.
86. Bulygin V. S., Gandel' Yu. V. Kraevyye zadachi dlya 3 – D uravneniy Hel'mhol'tsa, granichnyye psevdodifferentsial'nye uravneniya i chyslennyy éksperiment [Boundary-value problems for 3 – D Helmholtz equations, boundary pseudo-differential equations and a numerical experiment]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'.* *Zb. Nauk. pr.* [Boundary-value problems for differential equations: Collection. of science work]. Chernivtsi, Prut, 2008, Vol. 17, pp. 210–234.
87. Bulygin V. S., Gandel' Yu. V. Zadacha difraktsii akusticheskikh voln na kovre Serpinskogo [The problem of diffraction of acoustic waves on the Serpinsky carpet]. *Pratsi XIV Mizhnarodnogo sympozyumu "Metody dyskretnykh osoblyvostey v zadachakh matematychnoy fizyky" (MDOZMF – 2009)* [Proceedings of the XIV International Symposium "Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics." (DSMMPH-2009)]. 2009, pp. 27–30.
88. Gandel' Yu. V., Mishhenko V. O. Psevdodifferentsial'nyye uravneniya elektromagnitnoy difraktsii na ploskoparallel'noy strukture i ikh diskretnaya model' [Pseudodifferential equations of electromagnetic diffraction on a plane-parallel structure and their discrete model]. *Vestnik Khar. Nats. Un-ta. Ser. "Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya"* [Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»]. 2006, No. 733, issue. 6, pp. 58–75.
89. Gakhov A. V., Mishhenko V. O. Trekhmernaya model' metoda diskretnykh osobennostey rasseyaniya skalyarnykh voln ekranom na granitse razdela sred [Three-dimensional model of the method of discrete features of scattering of scalar waves by a screen at the interface between media]. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta.* *Zb. Nauk. prats'* [Bulletin of the Kherson National Technical University. Collection of Sciences works]. Kherson, 2006, no. 2(25), pp. 135–140.
90. Gakhov A. V. Chyslennoe issledovanie rasseyaniya skalyarnykh voln ploskim ékranom na granitse sloya v poluprostranstve nad zhestkoy ploskost'yu [Numerical study of the scattering of scalar waves by a flat screen at the boundary layer in the half-space above a rigid plane]. *Visnyk Karkiv'skogo natsional'nogo universytetu. Seriya: Matematychno modelyuvannya. Informatsiyi tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya.* *Zb. Nauk. prats'* [Bulletin of the Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems: Collection of Sciences works]. Kharkiv, 2007, No. 780, issue 8, pp.79–93.
91. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Fast and accurate numerical modeling of a TARA-like shielded paraboloidal reflector antenna. *2011 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS)*. Kyiv, Ukraine, 2011. pp. 86–88. DOI: 10.1109/MRRS.2011.6053607.
92. Bulygin V. S., Gandel Y. V., Benson T. M., Nosich A. I. Numerical optimization of a TARA-like shielded parabolic reflector. *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*. Prague, Czech Republic, 2012. pp. 3308–3312. DOI: 10.1109/EuCAP.2012.6206231.
93. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012, vol. 60, no. 10, pp. 4710–4718. DOI: 10.1109/TAP.2012.2209194.
94. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-Wave Analysis and Optimization of a TARA-Like Shield-Assisted Paraboloidal Reflector Antenna Using a Nystrom-Type Method. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4981–4989. DOI: 10.1109/TAP.2013.2275248.
95. Mishhenko V. O. *Energeticheskyy analiz programmnoy obespecheniya s primerami realizatsii dlya ADA programm* [Energy analysis of software with examples of implementation for ADA programs]. Kharkiv, KhNU im. V. N. Karazina Publ., 2007. 129 p.
96. Gandel' Yu. V., Mishhenko V. O. Matematicheskyye modeli v elektrodinamike na baze singulyarnykh integral'nykh uravneniy i proyekt programmnoy sistemy [Mathematical models in electrodynamicity based on singular integral equations and the design of a software system]. *Matematychno modelyuvannya* [Mathematical Modeling]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996. pp. 70–74.

97. Mishhenko V. O., Skrypnik A. Yu., Trufen V. I. Matematicheskoye modelirovaniye nadezhnosti informatsii v baze dannykh po prilozheniyam metodov parametricheskikh predstavleniy singulyarnykh integral'nykh uravneniy [Mathematical modeling of information reliability in a database on applications of methods of parametric representations of singular integral equations]. *Matematicheskie modeli i sovremennyye informatsionnyye tekhnologii*. Sb. nauchn. Tr. NAN Ukrainy [Mathematical models and modern information technologies, Collection of scientific works of the National Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Mathematics]. Kyiv, 1998, pp. 135–138.
98. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. Matematicheskiye modeli dvumernykh zadach difraktsii: Singulyarnyye integral'nyye uravneniya i chislennyye metody diskretnykh osobennostey [Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities]. Kharkov, ABB MBSU Publ., 2012. 544 p.
99. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. Granichnyye integral'nyye uravneniya tret'yey krayevoy zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v $R^2 + s$ ploskoparallelnymi razrezami [Boundary integral equations of the third boundary value problem for the Helmholtz equation in $R^2 + s$ with plane-parallel cuts]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, No. 8, pp. 14–19.
100. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *J Math Sci*. 2016, no. 212, pp. 156–166. DOI: 10.1007/s10958-015-2656-2.
101. Nesvit K. The diffraction problem of E polarized wave on the pre-cantor periodic grating with reflector and its discrete mathematical model. *2013 7th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*. Gothenburg, Sweden, 2013. pp. 1072–1076.
102. Nesvit K. Scattering and diffraction of TM modes on a grating consisting of a finite number of pre-fractal thin impedance strips. *2013 European Microwave Conference*. Nuremberg, Germany, 2013. pp. 1143–1146. DOI: 10.23919/EuMC.2013.6686864.
103. Kostenko O. V. Mathematical Model of Wave Scattering by an Impedance Grating. *Cybern Syst Anal*. 2015, no. 51, pp. 344–360. DOI: 10.1007/s10559-015-9727-8.
104. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. *J Math Sci*. 2016, vol. 212, pp. 142–155. DOI: 10.1007/s10958-015-2655-2.
105. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes. *2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Lviv, Ukraine, 2019. pp. 112–116. DOI: 10.1109/DIPED.2019.8882633.
106. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips. *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*. Kharkiv, Ukraine, 2020. pp. 625–629. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252606.
107. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. Modeling Wave Scattering by GC-liked Periodic Structures. *2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2021. pp. 59–63. DOI: 10.1109/DIPED53165.2021.9552304.
108. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V. Mathematical Model of E-polarized Wave Diffraction on a Reflecting Non-PEC Stripe System Above the Screen. *2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2023. pp. 8–13. DOI: 10.1109/DIPED59408.2023.10269489.
109. Kostenko A. V. Numerical Method for the Solution of a Hypersingular Integral Equation of the Second Kind. *Ukr Math J*. 2014, vol. 65, pp. 1373–1383. DOI: 10.1007/s11253-014-0865-3.
110. Kostenko O. V. A Numerical Method for Solving a System of Hypersingular Integral Equations of the Second Kind. *Cybern Syst Anal*. 2016, vol. 52, pp. 394–407. DOI: 10.1007/s10559-016-9840-3.
111. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Zhurn. Mat. fiz. Anal. Geom.* [J. Math. Phys. Anal. Geom.]. 2017, vol. 13, pp. 254–267.
112. Kostenko O. V. A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2023, vol. 28(4), pp. 689–714. DOI: 10.3846/ma.2023.14761.

Надійшла (received) 27.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Душкін Володимир Давидович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5143-7945>; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

Dushkin Volodymyr Davydovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, National Academy of National Guard of Ukraine, Kharkiv; tel.: (097) 386-64-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5143-7945>; e-mail: dushkinvdv@gmail.com

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

МАЖОРИТАРНІ НАНОСХЕМИ РЕГІСТРІВ

В статті наведені результати запровадження новітніх технологій автоматизованого моделювання тригерних наносхем з мажоритарною логікою для проєктування надшвидкодійних нанорегістрів. В створених послідовних пристроях використана технологія квантових коміркового автоматів. На відміну від мікроелектронних тригерів запропоновані в роботі нанотригери на базі універсальних мажоритарних елементів, як елементарних автоматів, поєднують виконання логічних функцій з функціями затримки. Таке поєднання дозволяє скоротити кількість квантових комірок до 25 проти 34 – 43 комірок у існуючих аналогів. Запропоновані унікальні чотириваріантні реалізації тригерних наносхем з роздільними входами, які стало можливо програмувати забороненими комбінаціями логічних одиниць для вхідних сигналів і які є недопустимими для мікроелектронних компонентів з пам'яттю. Це призводить до суттєвого прискорення комп'ютерного проєктування повного набору послідовних наносхем, особливо багатовходових нанорегістрів паралельної дії із записом та запам'ятовуванням коду бінарних чисел та нанорегістрів зі зсувом в бік старших чи молодших розрядів. Стаття присвячена впровадженню мажоритарної логіки функціонування модифікованих нанотригерів з роздільними входами, яка дає можливість реалізувати заборонені комбінації вхідних сигналів логічних одиниць. Це дозволяє суттєво прискорити комп'ютерне проєктування повного набору послідовних наносхем. Сучасна система автоматизованого проєктування QCA Designer синтезує схеми нанорегістрів та адекватно моделює часові діаграми їх працездатності.

Ключові слова: мажоритарна логіка, квантові комірково автомат, нанотригер, системи автоматизованого проєктування, наносхеми регістрів, часові діаграми, функції переходів.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH MAJORITY REGISTER NANOCIRCUITS

The article presents the results of the implementation of the latest technologies for automated modeling of trigger nanocircuits with majority logic for the design of ultra-fast nanoregisters. The created sequential devices use the technology of quantum cellular automata. Unlike microelectronic triggers, the nanotriggers proposed in the work are based on universal majority elements as elementary automata, combining the execution of logical functions with delay functions. This combination allows reducing the number of quantum cells to 25 versus (34 – 43) cells in existing analogues. Unique four-variant implementations of trigger nanocircuits with separate inputs are proposed, which have become possible to program with forbidden combinations of logical units for input signals and which are unacceptable for microelectronic components with memory. This leads to a significant acceleration of computer design of a full set of sequential nanocircuits. A feature of multi-input nano-registers of parallel action with recording and memorizing the code of binary numbers and nano-registers with a shift towards the senior or junior digits. The article is devoted to the implementation of the majority logic of the functioning of modified nano-triggers with separate inputs, which makes it possible to implement forbidden combinations of input signals of logical units. This allows significantly accelerating the computer design of a full set of sequential nanocircuits. The modern automated design system QCA Designer synthesizes nano-register schemes and adequately models the timing diagrams of their performance.

Key words: majority logic, quantum cellular automata, nanotriggers, systems of automated design, nanocircuits of registers, time diagrams, transition functions.

Вступ. Поняття *кінцевого автомата* виникло в середині ХХ століття у зв'язку зі спробами *математичного моделювання нейронних систем, електронних обчислювальних машин та інших технічних автоматів* [1]. Характерною особливістю цього класу *математичних моделей* є *дискретність*, отже, скінченність наборів елементів, що відтворюють математичну модель. Подальший розвиток *теорії автоматів* йшов шляхом розгляду нескінченних автоматів того чи іншого класу, введення *випадкових функцій та недетермінованих співвідношень* між входом і виходом автомата [2], тощо.

Моделі мажоритарних нанотригерів. Розглянемо основні принципи побудови та моделювання *мажоритарних тригерних наноелементів*. Тригер – послідовний пристрій, здатний формувати та запам'ятовувати два постійних значення вихідного сигналу і стрибкоподібно змінювати ці значення під впливом зовнішнього керуючого сигналу. У загальному випадку тригер містить сам *елемент пам'яті* і деяку вхідну комбінаційну схему, яка перетворює вхідні сигнали тригера в сигнали, необхідні для керування елементом пам'яті [3].

При синтезі мажоритарних нанотригерів з метою економії обчислювальних ресурсів використовуємо *універсальний мажоритарний елемент (УМЕ)* як елементарний автомат, що поєднує логічні функції з функціями затримки [4]. Мажоритарний нанотригер із роздільними входами має вхід x_1 для встановлення в стан «1» і вхід x_0 для встановлення в стан «0». Функції переходів і збудження нанотригера з роздільними входами наведені в табл. 1. Вона відповідає аналітичній формі запису [5]:

$$q(t_{i+1}) = \bar{x}_0(t_i)q(t_i) \vee x_1(t_i). \quad (1)$$

У разі заборонених комбінацій вхідних сигналів, зазначених у табл. 1 як одиниці з ризиками 1', функція збудження (1) може приймати довільне значення (a_1, a_2) . Залежно від конкретних значень невизначених коефіцієнтів a_1 і a_2 можна синтезувати чотири варіанта тригерних наносхем з роздільними входами: $(a_1 = 1, a_2 = 0)$, $(a_1 = a_2 = 1)$, $(a_1 = a_2 = 0)$ та $(a_1 = 0, a_2 = 1)$.

Четверта модифікація мажоритарної наносхеми тригера потребує найменших обчислювальних затрат і має мінімальну кількість квантових *коміркового автоматів (КА)*, а саме усього 25 КА у порівнянні з 34 – 43 КА для

попередніх модифікацій.

Таблиця 1 – Таблиця переходів мажоритарного нанотригера

x_1	x_0	Q_t	Q_{t+1}	q
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1'	1'	0	–	a_1
1'	1'	1	–	a_2

З рівняння (1) та табл. 1 отримують булеву логічну функцію при $a_1 = 0, a_2 = 1$:

$$q = \bar{x}_1\bar{x}_0Q_t \vee x_1\bar{x}_0\bar{Q}_t \vee x_1\bar{x}_0Q_t \vee x_1x_0Q_t = x_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_0Q_t \vee x_1Q_t. \quad (2)$$

Для еквівалентних перетворень булевих функцій до мажоритарних і навпаки використовують систему допоміжних рівносильностей [5]:

$$f_{x_1x_0} = \bar{x}_1Q_t \vee x_1Q_t = Q_t;$$

$$f_{x_1\bar{x}_0} = x_1 \vee x_1Q_t = x_1.$$

Якщо початкова булева функція (2) належить до класу мажоритарних, то її повністю можливо представити за допомогою УМЕ [3] без використання постійних рівнів напруги:

$$q = maj(maj(x_1, x_0, x_1), maj(\bar{x}_1, \bar{x}_0, x_1), Q_t) = maj(x_1, x_0, Q_t). \quad (3)$$

Мажоритарна наносхема тригера з роздільними входами, побудована за попереднім рівнянням (3), показана на рис. 1.

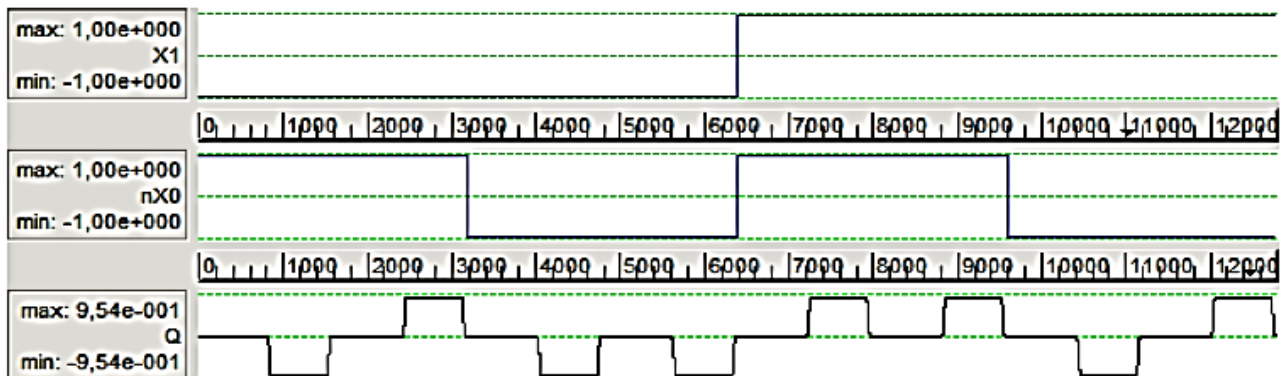
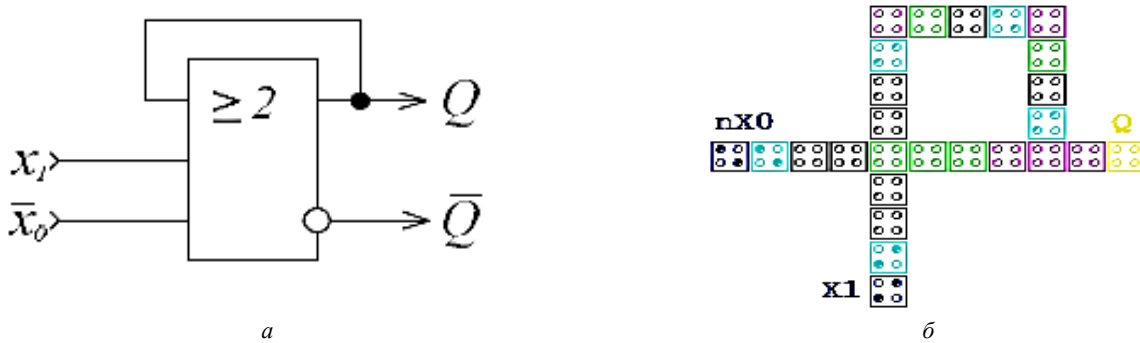
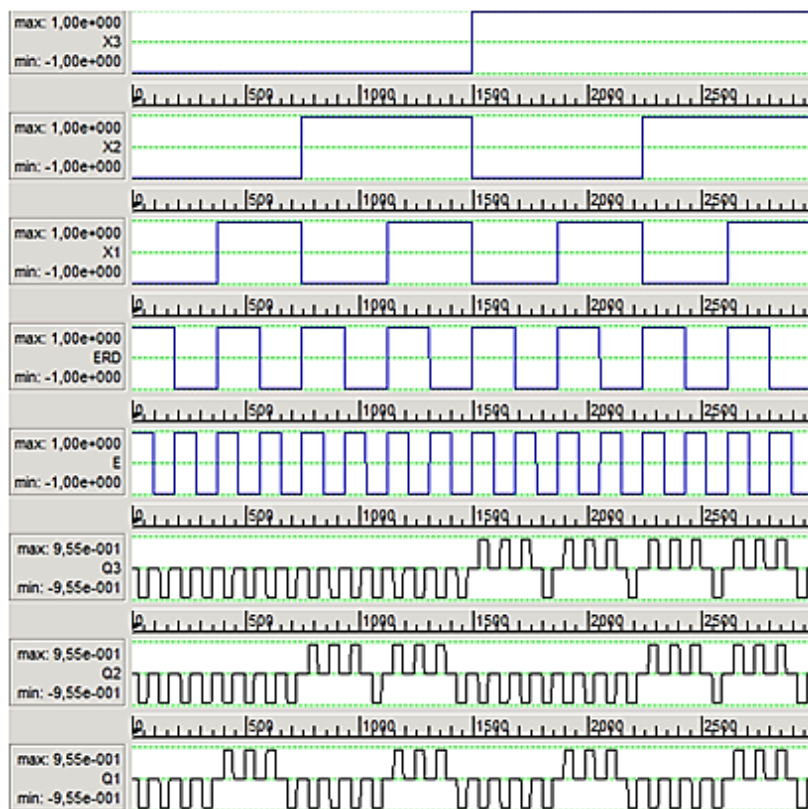
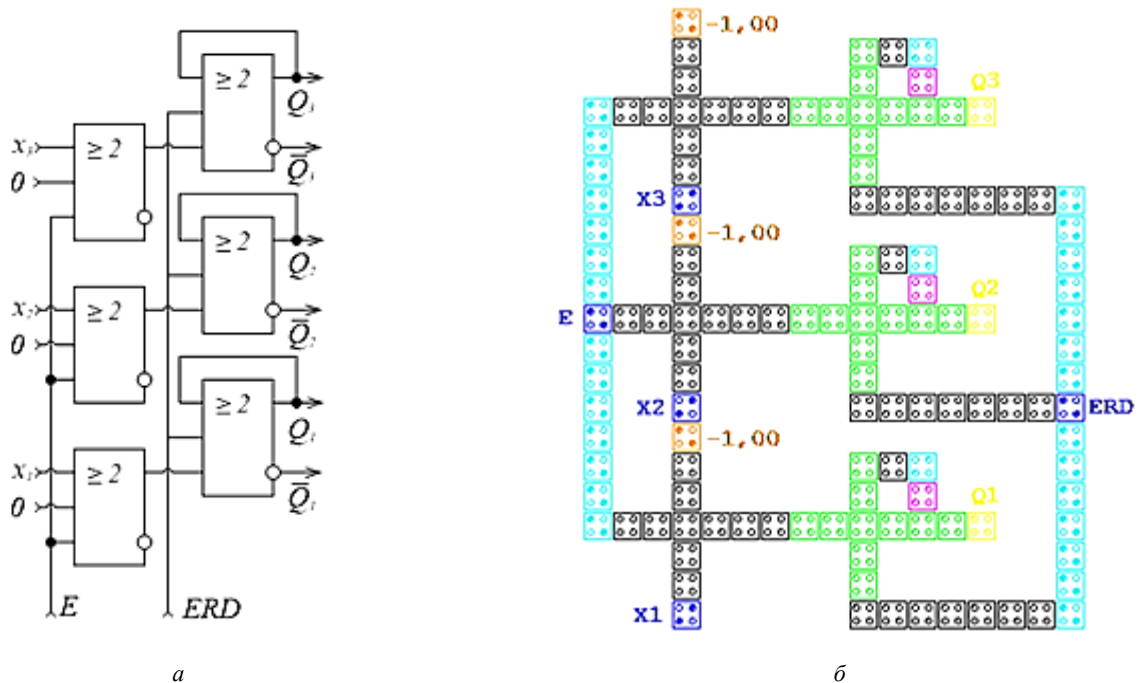


Рис. 1 – Нанотриггер (модифікація 4): а – структурна схема; б – наносхема на квантових автоматах; в – результати моделювання сигналів логічних станів в САПР QCA Designer [6].

Вочевидь, часові діаграми (рис. 1, в) повністю підтверджують адекватність моделі нанотригера на КА (рис. 1, б) і відтворюють стани його таблиці переходів (табл. 1).

Далі будемо використовувати мажоритарні нанотригери з розділними входами для моделювання одноелектронних паралельних нанореєстрів.

Трирозрядний нанореєстр паралельної дії без ланцюгів зсуву (рис. 2, а) призначений для прийому та зберігання паралельного коду двійкового числа і являє собою набір шести мажоритарних тригерів: трьох для паралельного запису інформації (E) і трьох для її зберігання (ERD).



в

Рис. 2 – Паралельний реєстр з одновходовим керуванням: а – структурна схема; б – тригерна наносхема на квантових автоматах; в – результати моделювання сигналів логічного стану в САПР QCADesigner.

На рис. 2, б та рис. 2, в приведені наносхема паралельного регістра та результати моделювання її часових діаграм на робочому планшети САПР QCADesigner [6].

Загальна кількість КА регістрової наносхеми становить 129. Розміри КА складають (18×18) нм. Відстань між їх центрами становить 20 нм. Діаметри квантових острівців становлять 5 нм. Габаритні розміри нанорегістра паралельної дії (340×420) нм.

На рис. 3 показаний регістр зі зсувом у бік старших розрядів. При синтезі регістрів зсуву як елементарного автомата використовується нанотригер четвертої модифікації (рис. 1, а, б) з роздільними входами.

Узагальнена табл. 2 переходів і функцій збудження для двох розрядів регістра зі зсувом числового коду в бік старших розрядів виглядає наступним чином [7].

Таблиця 2 – Функції переходів та збудження двох бітів регістра зі зсувом цифрового коду в бік старших розрядів

x_r	Q_t^{i+1}	Q_t^i	Q_{t+1}^{i+1}	Q_{t+1}^i	q_0^{i+1}	q_1^{i+1}
1	0	0	0	1	a_1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	a_2
1	1	0	0	0	1	0

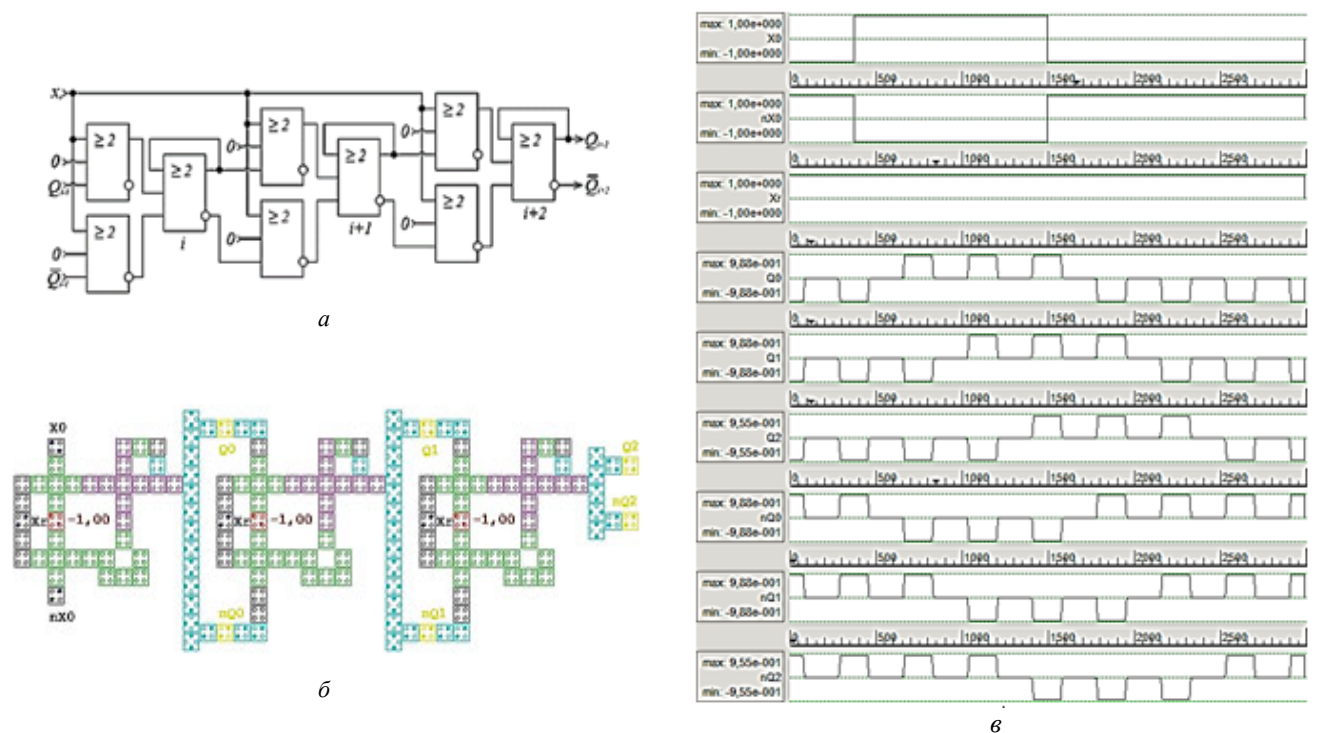


Рис. 3 – а – Структурна схема нанорегістра зі зсувом у бік старших розрядів; б – наносхема на квантових автоматах; в – результати моделювання сигналів в САПР QCADesigner.

Використовуючи матрицю переходів з табл. 1, дійсну для тригера з роздільними входами, заповнимо стовпці для функцій збудження (q_0^{i+1} і q_1^{i+1}). З отриманої таблиці випливає, що:

$$\begin{aligned} \text{при } a_1 = 0: q_0^{i+1} &= x_0 \bar{Q}_t^i, \text{ тоді } q_0^{i+1} = maj(x_0, \bar{Q}_t^i, 0); \\ \text{при } a_2 = 1: q_1^{i+1} &= x_1 Q_t^i, \text{ тоді } q_1^{i+1} = maj(x_1, Q_t^i, 0). \end{aligned}$$

Аналогічно визначаються функції збудження для інших розрядів регістра. Загальна кількість КА регістрової наносхеми зі зсувом у бік старших розрядів становить 167. Розміри КА (18×18) нм. Відстань між центрами КА становить 20 нм. Діаметри квантових острівців становлять 5 нм. Загальні розміри нанорегістра (740×260) нм.

Перспективи подальших досліджень. Отримані результати автоматизованого проектування одноелектронних нанорегістрів підтвердили їх переваги над мікроелектронними аналогами з точки зору мінімального енергоспоживання та щонайбільшої швидкодії. Тому автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням функціонально повної компонентної бази наноелектроніки. Актуальність розробок стимулюється їх подальшим розвитком для підвищення енергоефективності, надійності та скорочення часу виконання логічних операцій.

Висновки. Універсальні елементи з мажоритарною логікою є одними із найперспективніших напрямків підвищення надійності та завадостійкості, коли на їхні входи впливають випадкові флуктуації сигналів комутації комп'ютерних систем.

В статті реалізоване комп'ютерне моделювання мажоритарних нанопристроїв послідовного типу з використанням системи автоматизованого проектування QCADesigner. Досягнута мета мінімізації геометричних розмірів наносхем, щільності розміщення на кристали до рівня 120 КА на 10нм² та підвищення надійності виконання мажоритарних логічних операцій і функцій булевої алгебри.

Створена функціональна завершена мажоритарна система нанoeлементів для комп'ютерного проектування нанопристроїв послідовного типу, що включає нанотригери з роздільними входами та на їх основі – нанорегістри.

Список літератури

1. Niemier M. T. Designing Digital Systems in Quantum Cellular Automata // Master's Thesis. – University of Notre Dame, Indiana, 2004.
2. Melnyk O. S., Kravets M. M., Kravets V. M. Four-bit nanoadder controlled by five-inputs majority elements // International scientific journal «Electronics and control systems». – 2022. – № 4 (74). – P. 67 – 72.
3. Lent C. S., Tougaw P. D. A. Device Architecture for Computing with Quantum Dots // Proc. Of the IEEE. – 1997. – vol. 10. – no. 3. – pp. 73 – 83.
4. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Arithmetic-logic single-electron nanocircuits // International scientific journal «Electronics and control systems». – 2023. – № 2 (76). – P. 68 – 72.
5. Melnyk O. S., Kozarevych V. O., Butok M. V. Micro- and nanocircuits with configurable logic // International scientific journal Electronics and control systems. – 2023. – № 3 (76). – P. 47 – 52. DOI: 10.18372/1990-5548.77.18003.
6. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool to QCADII Int. // Journal of Nanotech and Appl. – 2005. – no. 1. – pp. 1 – 7.
7. Мельник О. С., Козаревич В. О., Пилипенко П. І. Комп'ютерне проектування арифметичних нанопристроїв // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 39 (1082). – С. 126 – 134. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vcpimm_2014_39_14. – Дата звертання : 26 вересня 2024 р.

References (transliterated)

1. Niemier M. T. Designing Digital Systems in Quantum Cellular Automata. *Master's Thesis*. University of Notre Dame, Indiana, 2004.
2. Melnyk O. S., Kravets M. M., Kravets V. M. Four-bit nanoadder controlled by five-inputs majority elements. *International scientific journal «Electronics and control systems»*. 2022, no. 4 (74), pp. 67–72.
3. Lent C. S., Tougaw P. D. A. Device Architecture for Computing with Quantum Dots. *Proc. Of the IEEE*. 1997, vol. 10, no. 3, pp. 73–83.
4. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Arithmetic-logic single-electron nanocircuits. *International scientific journal «Electronics and control systems»*. 2023, no. 2 (76), pp. 68–72.
5. Melnyk O. S., Kozarevych V. O., Butok M. V. Micro- and nanocircuits with configurable logic. *International scientific journal Electronics and control systems*. 2023, no. 3 (76), pp. 47–52. DOI: 10.18372/1990-5548.77.18003.
6. Walus K. QCA Designer : A Rapid Design and Simulation Tool to QCADII Int. *Journal of Nanotech and Appl*. 2005, no. 1, pp. 1–7.
7. Melnyk O. S., Kozarevych V. O., Pylypenko P. I. Komp'yuterne proektuvannya aryfimychnykh nanoprystroyiv [Computer-aided design of arithmetic nanodevices]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 39 (1082), pp. 126–134. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vcpimm_2014_39_14. (accessed 26 September 2024).

Надійшла (received) 30.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

O. G. NIKOLAEV, A. S. KRAINICHENKO

SOME PROBLEMS FOR TRANSVERSAL ISOTROPIC SPACE WITH PERIODIC ANTI-CRACK PACKAGES

In this paper, the stress state of a transversely isotropic space with periodic systems (packets) of plane circular anti-cracks, the centers of which are located on the anisotropy axis, and the planes are perpendicular to it, is investigated for the first time. It is assumed that the space is under a constant biaxial compressive stress applied at infinity. Each periodic system (packet) is determined by a representative layer whose planes are perpendicular to the anisotropy axis, containing a finite system of anti-cracks of different sizes. Such a system forms a certain configuration. Any odd number of anti-cracks of arbitrary size can be included in a specific configuration, but with certain restrictions: the anti-cracks are symmetrical relative to the middle plane of the layer, their sizes satisfy a certain convergence condition. The given restrictions provide practically uniform conditions with respect to tangential stresses and normal displacements on the boundaries of the representative layer (the order of values of these quantities is in the range $10^{-10} \div 10^{-14}$), which can be considered as infinity conditions. All problems were solved by the generalized Fourier method, which allowed them to be reduced to infinite systems of linear algebraic equations with Fredholm operators. The results of the study were also based on an extensive computer experiment, within the framework of which stress distributions were calculated not only in periodic problems, but also in non-periodic problems formed by several representative layers. Practical verification of the convergence of the reduction method showed high efficiency of the generalized Fourier method. Thus, doubling the reduction parameter from 10 to 20 led to stabilization of 8 – 14 significant digits in the obtained results. Comparison of stress intensity factors for different configurations showed that for anti-cracks of the same size they depend little on a specific configuration. A qualitative conclusion that follows from the calculation results is that normal stresses on the surface of a smaller anti-crack outside its boundary in a packet increase with an increase in the size of larger neighboring anti-cracks.

Key words: transverse-isotropic space, periodic systems of anti-cracks, compressed spheroidal coordinates, generalized Fourier method, representative layer, Fredholm operator, stress intensity factor.

O. Г. НИКОЛАЄВ, А. С. КРАЙНИЧЕНКО

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ З ПЕРІОДИЧНИМИ ПАКЕТАМИ АНТИТРИЩИН

У роботі вперше досліджено напружений стан трансверсально-ізотропного простору з розташованими в ньому періодичними системами (пакетами) плоских кругових антитріщин, центри яких знаходяться на осі анізотропії, а їх площини перпендикулярні до неї. Вважається, що простір знаходиться під сталим двовісним стискаючим напруженням, прикладеним на нескінченності. Кожна періодична система (пакет) антитріщин визначається представницьким шаром, площини якого перпендикулярні до осі анізотропії, і який містить скінченну кількість антитріщин різного розміру. Такий пакет формує певну конфігурацію. У конкретну конфігурацію можна включити будь-яку непарну кількість антитріщин довільного розміру, але з певними обмеженнями: антитріщини симетричні відносно середньої площини шару, їх розміри задовольняють певній умові збіжності. Наведені обмеження забезпечують практично однорідні умови відносно дотичних напружень і нормальних переміщень на межах представницького шару (порядок значень цих величин знаходиться в діапазоні $10^{-10} \div 10^{-14}$), які можна розглядати як умови на нескінченності. Усі задачі розв'язувалися узагальненим методом Фур'є, що дозволило звести їх до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь з фредгольмовими операторами. Результати дослідження також ґрунтувалися на широкому комп'ютерному експерименті, в рамках якого розраховувалися розподіли напружень не лише в періодичних задачах, а й у неперіодичних задачах, утворених кількома представницькими шарами. Практична перевірка збіжності методу редукції показала високу ефективність узагальненого методу Фур'є. Так, подвоєння параметра редукції з 10 до 20 призвело до стабілізації 8 – 14 значущих цифр в отриманих результатах. Порівняння коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних конфігурацій показує, що для антитріщин однакового розміру вони мало залежать від конкретної конфігурації. Якісний висновок, який випливає з результатів розрахунку, полягає в тому, що нормальні напруження на поверхні меншої за розміром антитріщини поза її межею в пакеті зростають із збільшенням розміру більших сусідніх антитріщин.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний простір, періодична система антитріщин, стиснуті сфероїдальні координати, узагальнений метод Фур'є, представницький шар, фредгольмів оператор, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Introduction. One of the key tasks of modern science is aimed at solving the problem of creating optimal materials in which certain physical and mechanical properties would be combined with a relatively simple technology and an acceptable cost of their production. An important class of such materials are composites, which have found wide use in various branches of technology. For them, it is the selection of the characteristics of the structural components that determines the features of the resulting material. For this reason, an important place in the mechanics of composite materials is occupied by mathematical modeling, which is aimed at accumulating facts about the behavior of the stress-strain state of bodies having a certain structure near various stress concentrators: inclusions, cavities, cracks, anti-cracks, etc. When assessing the strength characteristics of such materials, it is necessary to have an idea not only about the distribution of stresses near individual inhomogeneities, but also about the mutual influence of various concentrators on the overall stress state. One of the possibilities to take into account the structure of the composite is to model it by a periodic system of inhomogeneities. This work is devoted precisely to periodic systems of anti-cracks in transversely isotropic space.

Review of the results of recent research. Numerical and analytical methods in problems of crack and anti-crack theory are actually the same or similar, therefore the review of studies considers works devoted to both types of inhomogeneities, especially since, for obvious reasons, cracks are given more attention. Research in this direction was developed by several authors. In [1], an axisymmetric problem of a circular subsurface radial shear crack in a semi-infinite composite material with initial stresses was investigated using singular integral equations. The problem is reduced to a

system of Fredholm integral equations of the second kind. A representation of the stress intensity coefficients around the crack tip depending on the initial stresses was obtained. For two types of composite materials (layered composites with isotropic layers and composites stochastically reinforced with short ellipsoidal fibers), the stress intensity coefficients were calculated and their dependence on the initial stresses, physical and mechanical characteristics of the composites, and geometric parameters of the problem were investigated. In the article [2], the axisymmetric problem of the failure of a prestressed composite material with a periodic system of parallel coaxial cracks of normal separation is investigated. Using representations of general solutions of linearized equilibrium equations through harmonic potential functions and the apparatus of Hankel integral transformations, the problem is reduced to a system of paired integral equations, and then to a solvable Fredholm integral equation of the second kind. The work [3] is devoted to the asymptotic analysis of stress in an isotropic material near the boundary of circular cracks, anti-cracks, thin inclusions under different conditions on its surface. In the local coordinate system associated with the edge of inhomogeneity, asymptotic solutions are constructed in the form of expansions by eigenfunctions that depend on the angular coordinates and power series by the radial variable. Many approximate formulas for stress intensity factors have been obtained, but there are no numerical results. In the study [4], an exact solution to the problem of a circular interfacial crack in a piecewise homogeneous transversely isotropic space under the action of arbitrary loads applied to the crack boundary was constructed by the method of integral transformations. Formulas for the stress intensity coefficients at the crack boundary and the values of these coefficients for some combinations of transversely isotropic materials were obtained. In the article [5], the problems of the theory of cracks located near the surfaces of volumetric and thin-walled bodies under thermal and force static and dynamic loads are investigated using the method of thin inclusions proposed by the authors. The influence of body surfaces or the interface of its materials on static and dynamic coefficients of stress intensity around defects is described. The dissertation [6] uses the technique of separation of variables, integral transformations and methods of solving double and triple integral equations to solve a number of mixed problems of crack theory. The article [7] investigates the singularity of stresses and displacements near a crack within the limits of the simplified Gurtin-Murdoch linear model of surface elasticity. The technique of Mellin and Wiener-Hopf integral transformations is used. In some works, the Green's function apparatus is used to study the stress state around cracks. Thus, in the article [8], Green's functions for an infinite three-dimensional elastic body containing a circular crack were derived through integrals of elementary functions. A solid is considered to be either isotropic or transversely isotropic with a crack parallel to the plane of isotropy. In [9], integral equations of the problem of the interaction of parallel circular cracks under arbitrary loading in a transversely isotropic elastic space were derived using the Green's function. The theorem on the average value of the integral was used to highlight the singularities associated with the crack tips. After that, the equations lose their singularity and can be solved numerically. Numerical results are given only for stress intensity coefficients. The potential theory method was applied in [10] to solve the problem of thermoelasticity for an isotropic space with an anti-crack under the influence of a temperature field. The singular integral equations for an anti-crack of arbitrary shape are derived in terms of unknown thermal shear stress jumps. A similar approach was used in [11] to obtain an analytical solution to a three-dimensional transversely isotropic thermoelastic problem in which a uniform heat flow acts on a space with a circular anti-crack. The problems of constructing numerical and analytical solutions in problems with cracks arbitrarily oriented in relation to the axis of anisotropy led to the creation of approximate models for the stress state of such bodies. Thus, in work [12] an approximate analytical model of the inclusion of an arbitrarily oriented circular crack in the effective elastic compliance of a transversely isotropic material is considered. The application of the hypothesis that the change in the elastic potential due to an arbitrarily oriented circular crack in a transversely isotropic material can be approximated by the change calculated for a certain isotropic medium is investigated. The article [13] focuses on the calculation of the general elastic properties of a transversely isotropic material containing several randomly oriented circular cracks. A new methodology is proposed for estimating the contribution of one arbitrarily oriented crack in an infinite transversely isotropic medium to the overall modulus of elasticity. The paper uses the Mori-Tanaka-Benveniste scheme, which coincides with the interaction-free approximation for the case of crack-like inhomogeneities. The Fourier method in problems of the theory of elasticity for transversely isotropic bodies with one canonical inclusion or cavity was considered in works [14 – 16]. The development and application of the generalized Fourier method for transversely isotropic doubly connected bodies, the centers of whose boundary surfaces coincide, were considered in works [17, 18]. Two parallel cracks in the transversely isotropic space were considered in the article [19], where the basicity of the constructed solutions was also shown.

The given review of literary sources devoted to research in the theory of cracks and anti-cracks shows the importance and relevance of further study of the stress state of interacting cracks, as well as the development of a mathematical apparatus for its implementation. It also demonstrates the lack of research on periodic packages of cracks and anti-cracks.

This paper considers problems for periodic systems of plane parallel circular anti-cracks in transversally isotropic space. Each system is defined by a specific set of anti-cracks located in a representative layer of space, the planes of which are parallel to the crack planes and the isotropy plane. It is assumed that such a layer periodically extends over the entire space. The choice of the number of anti-cracks, the distances between them and their sizes in the representative layer can be arbitrary if the conditions of symmetry of the anti-cracks relative to the median plane of the representative layer and convergence of the method are met. Next, three options are considered: one anti-crack in the representative layer, three anti-cracks with two different sizes, five anti-cracks with three sizes.

General formulation of the problem. Consider an elastic transversely isotropic space with an infinite system of uniaxial parallel plane circular cracks $\{\Gamma_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$. Let's mark the centers of the anti-cracks $\{O_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$, the distance between them h ($h > 0$), anti-crack radii a_l . We will assume that the axis of anisotropy of the transversely isotropic space passes through the centers of the cracks. Let's fix in space the Cartesian coordinate system (x, y, z) and the cylindrical system (ρ, φ, z) associated with it so that the point O_0 is the common origin, and the axis Oz has a directional vector $\overline{O_0O_1}$. The elastic steels of the space material are denoted by constants $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^3$. We will consider these constants to be positive. For basic transversally isotropic materials, this condition is fulfilled. Consider the problem of determining the stress state of the space indicated above in the case when a constant compressive biaxial stress is applied at infinity. The problem boils down to the solution of the boundary value problem for the system of equations of equilibrium of a transversely isotropic body, which in the axisymmetric formulation can be written as follows:

$$\left[c_{11} \left(\Delta_2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_\rho + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho \partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\left[c_{44} \Delta_2 + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_z + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) = 0, \tag{2}$$

$$(x, y, z) \in \Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_l.$$

The boundary conditions on the anti-crack surfaces and at infinity have the form:

$$\vec{V}(x, y, z)_{(x,y,z) \in \Gamma_l} = 0, \quad l = -\infty, \infty, \quad \sigma_\rho^\infty = -\sigma, \quad \tau_{\rho\varphi}^\infty = 0, \quad \tau_{\rho z}^\infty = 0. \tag{3}$$

Above (V_ρ, V_z) , $(\sigma_z, \tau_{\rho z}, \tau_{\varphi z})$ – are the components of the axisymmetric displacement vector and stress tensor in cylindrical coordinates, $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ – an axisymmetric variant of the two-dimensional Laplace operator in polar coordinates.

To construct partial solutions of the system of equations (1), (2), which correspond to the geometry of the domain Ω , with each point O_l we will connect the equally directed with the coordinate system $Oxyz$ local Cartesian coordinate system (x_l, y_l, z_l) , and also two Cartesian $\{(x_{ls}, y_{ls}, z_{ls})\}_{s=1}^2$ and two oblate spheroidal $\{(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}, \varphi)\}_{s=1}^2$ coordinate systems such that:

$$x = x_j = x_{js} = a_j \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \cos \varphi, \quad y = y_j = y_{js} = a_j \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{js} \sin \tilde{\eta}_{js} \sin \varphi, \quad \frac{z_j}{\sqrt{\nu_s}} = z_{js} = a_j \mathbf{sh} \tilde{\xi}_{js} \cos \tilde{\eta}_{js}.$$

Here a_l is the parameter of the spheroidal system, which coincides with the radius of the corresponding anti-crack, $\tilde{\xi}_{ls} \in [0, \infty)$, $\tilde{\eta}_{ls} \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, the equation of the l -th crack surface is $\tilde{\xi}_{ls} = 0$. The parameter ν_s is the root of the equation

$$c_{11}c_{44}\nu^2 - (c_{11}c_{33} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2)\nu + c_{33}c_{44} = 0. \tag{4}$$

In the following, we will consider the case when the roots of equation (4) are real, positive and different. It follows from the relations between the coordinates that equalities $\tilde{\eta}_{l1} = \tilde{\eta}_{l2} = \tilde{\eta}_l$ are fulfilled on the surface of the l -th anti-crack.

In [17], the sets of linearly independent partial solutions of the general system of equilibrium equations in displacements in an oblate spheroidal coordinate system were constructed in the form of basis vector functions. In the case of an axisymmetric stress state, we obtain from those solutions:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = \frac{-ia_j}{2n+1} \vec{\nabla}_s [u_{n-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) - u_{n+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js})], \quad n = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \tag{5}$$

where

$$u_n^{\pm(6)}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} Q_n(\mathbf{ish} \xi) \\ P_n(\mathbf{ish} \xi) \end{Bmatrix} P_n(\cos \eta); \quad \vec{\nabla}_s = \bar{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k_s \bar{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad k_s = \frac{c_{11}\nu_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad s = 1, 2,$$

$P_n(x), Q_n(x)$ – Legendre functions of the first and second kind; $\{\bar{e}_\rho, \bar{e}_z\}$ – unit base vectors of the cylindrical coordinate system. The displacements (5) in coordinates have the following form:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_\rho - \frac{k_s}{\sqrt{\nu_s}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \bar{e}_z, \quad s = 1, 2, \tag{6}$$

where

$$u_n^{\pm(6)l}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \begin{Bmatrix} Q_n^l(\text{ish } \tilde{\xi}) \\ P_n^l(\text{ish } \tilde{\xi}) \end{Bmatrix} P_n^{-1}(\cos \tilde{\eta}).$$

Building a solution to the problem in a general setting. We will look for a solution to problem (1) – (3) with conditions at $\rho \rightarrow \infty$ in the form

$$\vec{V}(x, y, z) = \vec{V}_0(x, y, z) + \sum_{s=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}), \quad (7)$$

where $A_{s,n}^{(l)}$ are unknown coefficients that must be found in the process of solving the problem, $\vec{V}_0(x, y, z)$ – displacement that meets the conditions at infinity.

We find the vector function \vec{V}_0 as a solution to the system of equations (1), (2) in the form $\vec{V}_0 = B\rho\vec{e}_\rho$. Then, at $B = -\sigma / (c_{11} + c_{12})$, the displacement \vec{V}_0 sets a uniform stress state in space, which corresponds to the boundary conditions at infinity (3)

We will use the result proved in [19].

Theorem 1. Under condition $\sqrt{V_s} a_{ls} + \sqrt{V_s} a_{ms} \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{ms} < |m-l| h$, $l, m = -\infty \div \infty$, $l \neq m$, the following addition theorem holds:

$$V_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{ms}, \tilde{\eta}_{ms}) \omega_{n,k}^{l,m} \sum_{j=n}^{\infty} g_{n,m-l}^{(64)j}(a_{ls}) f_{j,m-l}^{(46)k}(a_{ms}), \quad (8)$$

where

$$g_{n,m-l}^{(64)j}(a_{ls}) = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon_{j,n}}{\Gamma(j/2 - n/2 + 1) \Gamma(j/2 + n/2 + 3/2)} \left(-\frac{i \sqrt{V_s} a_{ls}}{2|m-l|h} \right)^{j+1},$$

$$f_{j,m-l}^{(46)k}(a_{ms}) = \sum_{p=k}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} (k+1/2) \varepsilon_{p,k} (p+j)!}{\Gamma(p/2 - k/2 + 1) \Gamma(p/2 + k/2 + 3/2)} \left(\frac{i \sqrt{V_s} a_{ms}}{2|m-l|h} \right)^p,$$

$$\varepsilon_{n,k} = \begin{cases} 1, & n-k = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}; \\ 0, & n-k = 2p+1, \quad p \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \omega_{n,k}^{l,m} = [\mathbf{sign}(m-l)]^{n+k},$$

$\Gamma(x)$ – Euler's gamma function.

Let's transform the displacement vector (7) using formula (8) to each individual coordinate system. As a result, we have:

$$\vec{V}(x_l, y_l, z_l) = B a_l \mathbf{ch} \tilde{\xi}_{l,s} \sin \tilde{\eta}_{l,s} \vec{e}_\rho + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(l)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{ls}, \tilde{\eta}_{ls}) \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{n,k}^{m,l} A_{s,k}^{(m)} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}). \quad (9)$$

Passing to the coordinate form of displacements in (9) and satisfying the boundary conditions (3) on the surface Γ_l , we obtain a resolving system

$$\sum_{s=1}^2 \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{0,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 0 \div \infty, \quad l = -\infty \div \infty, \quad (10)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{V_s}} \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{m \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} t_{1,n,k}^{s,m,l} \tilde{A}_{s,k}^{(m)} \right] = 0, \quad n = 0 \div \infty, \quad l = -\infty \div \infty, \quad (11)$$

where

$$t_{0,n,k}^{s,m,l} = i^n \frac{2 a_m}{\pi a_l} \sin(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s}, \quad t_{1,n,k}^{s,m,l} = i^{n+1} \frac{2 a_m}{\pi a_l} \cos(\pi n / 2) h_{m,l,n,k}^{(66)s};$$

$$A_{s,n}^{(l)} = B a_l \tilde{A}_{s,n}^{(l)}, \quad h_{m,l,n,k}^{(66)s} = \omega_{n,k}^{m,l} \sum_{j=k}^{\infty} g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms}) f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls}),$$

$\delta_{n,k}$ – Kronecker delta symbol.

Note that at $n = 0$, system (10) – (11) is satisfied at $\tilde{A}_{s,n}^{(l)} = 0$ ($s = 1, 2$), which is a necessary condition for the regularity of solution (7).

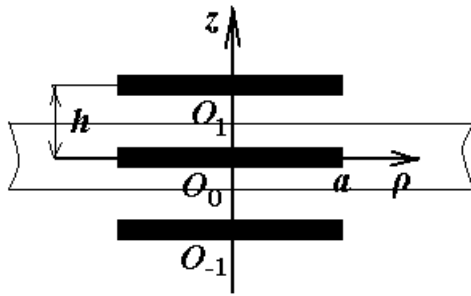


Fig. 1 – Representative layer. Configuration 1.

Solving problems with a periodic system of anti-cracks. In order to formulate a periodic problem, it is necessary to clarify what is meant by such a problem. Note that not for every system of anti-cracks that is periodically repeated can be correctly formulated a periodic problem. In [20], the idea of a representative layer in a thermoelastic problem for a periodic system of spherical inclusions was proposed, on the boundaries of which conditions were chosen that allowed periodic continuation to infinity. Usually, these are some homogeneous conditions that can be realized at infinity. However, if in the article [20] the periodic problem was replaced by an equivalent problem for a representative layer, then in this work, periodic problems are solved directly, and the conditions on the boundaries of the representative layer are verified numerically (their fulfillment follows from a certain symmetry of the problems under consideration).

Configuration 1. Consider a system of identical anti-cracks (configuration 1). A representative layer for such a system is shown in Fig. 1. Since the problem is periodic, the unknown coefficients $\tilde{A}_{s,n}^{(l)}$ should not depend on the index l . Then the system (10), (11) can be rewritten in the following form:

$$\sum_{s=1}^2 \left[\tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{0,n,k}^{s,m,0} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \tag{12}$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} \left[\tilde{A}_{s,n} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k} \sum_{m \neq 0} t_{1,n,k}^{s,m,0} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty. \tag{13}$$

Theorem 2. When the condition $a_{ls} + a_{ms} < h / \sqrt{v_s}$, $l \neq m$, $s = 1, 2$ is met the operator of system (12), (13) is a Fredholm operator in Hilbert space $l_2 \times l_2$.

Proof. To prove the theorem, it is enough to show the absolute convergence of the series

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{m \neq l} t_{r,n,k}^{s,m,l} \quad r = 0, 1; \quad s = 1, 2; \quad l = -\infty \div \infty.$$

Let's mark

$$Z_{s,m,l} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{|m-l|h}.$$

Consider a series

$$\sum_{m \neq l} \sum_{n,k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} |g_{k,m-l}^{(64)j}(a_{ms})| |f_{j,m-l}^{(46)n}(a_{ls})|.$$

It can be transformed by replacing the summation orders and subscripts with a series of form

$$\sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} (p+j)! Z_{l,m}^{j+1} Z_{m,l}^p \sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{\sqrt{\pi}}{s! \Gamma(j-s+3/2)} \sum_{r=1}^{[p/2]} \frac{\sqrt{\pi} (p-2r+1/2)}{r! \Gamma(p-r+3/2)}.$$

We will use estimates

$$\sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{1}{s! \Gamma(j-s+3/2)} \leq \sum_{s=1}^{[j/2]} \frac{1}{s! \Gamma(j-s+1)} \leq \sum_{s=0}^j \frac{1}{s! (j-s)!} = \frac{2^j}{j!},$$

$$\sum_{r=1}^{[p/2]} \frac{(p-2r+1/2)}{r! \Gamma(p-r+3/2)} \leq \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{r! (p-1-r)!} \leq \frac{2^{p-1}}{(p-1)!}.$$

As a result, the original series is majorized by the series

$$\sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} (p+j)! \frac{2^j}{j!} Z_{l,m}^{j+1} \frac{2^{p-1}}{(p-1)!} Z_{m,l}^p = \frac{1}{4} \sum_{m \neq l} \sum_{j,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j!(p-1)!} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{|m-l|h} \right)^{j+1} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{|m-l|h} \right)^p =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j!(p-1)!} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p \sum_{m \neq l} \frac{1}{|m-l|^{j+p+1}} < \frac{1}{4} \sum_{j=0,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j!(p-1)!} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} \sum_{j=0,p=1}^{\infty} \frac{(p+j)!}{j!(p-1)!} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ms}}{h} \right)^{j+1} \left(\frac{\sqrt{v_s} a_{ls}}{h} \right)^p.$$

The last series converges for $a_{ls} + a_{ms} < h / \sqrt{v_s}$.

The solution of the system was used to determine the distribution of stress in the region of its maximum concentration – in the plane of the anti-crack outside its boundary. The following formulas were obtained for the stress σ_z and stress intensity factor (SIF) K_{Iz} :

$$\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44}) = -2 \frac{c_{13}}{c_{44}} - \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,n} \left\{ \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(\text{sh}^2 \tilde{\xi}_{sm} + \cos^2 \tilde{\eta}_{sm})} \times \right.$$

$$\times \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\text{sh} \tilde{\xi}_{sm} \sin \tilde{\eta}_{sm} Q_n(i \text{sh} \tilde{\xi}_{sm}) P_n^1(\cos \tilde{\eta}_{sm}) - \text{ch} \tilde{\xi}_{sm} \cos \tilde{\eta}_{sm} Q_n^1(i \text{sh} \tilde{\xi}_{sm}) P_n(\cos \tilde{\eta}_{sm}) \right] + \frac{1}{\text{sh} \tilde{\xi}_{s0}} Q_n(i \text{sh} \tilde{\xi}_{s0}) P_n^1(0) \left. \right\},$$

$$K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44} \sigma \sqrt{a}) = -\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{s,2n+1}.$$

Numerical results for all considered configurations were obtained for the material of the space, which is sandstone with elastic constants $c_{11} = 5.8576 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_{12} = 2.5019 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_{13} = 2.0793 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_{33} = 6.1105 \cdot 10^{10}$ Pa, $c_{44} = 1.6584 \cdot 10^{10}$ Pa. For it, the roots of equation (4) are equal $\nu_1 = 0.52$, $\nu_2 = 2.01$.

In Fig. 3 shows the stress distribution in the plane of the anti-crack outside its boundary depending on the relative size of the anti-crack in the representative layer. With a decrease in the relative size of the anti-crack, the magnitude of the stress decreases, and in the vicinity of the anti-crack boundary, a change in the sign of the stress is observed (the point of sign change is not shown on the graph due to its proximity to the boundary $\rho = a$). In this figure and in all others, it is indicated by σ^* the stress distribution for one anti-crack in the entire space. It is given for comparison, since the problem for one anti-crack has an exact solution in closed form

$$\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12}) / (\sigma c_{44}) = -2 \frac{c_{13}}{c_{44}} - \frac{4}{\pi} \frac{k_1(k_2 + 1)\sqrt{\nu_2} - k_2(k_1 + 1)\sqrt{\nu_1}}{k_2\sqrt{\nu_1} - k_1\sqrt{\nu_2}} \left[\frac{1}{\sqrt{(\rho/a)^2 - 1}} - \arcsin(a/\rho) \right],$$

$$K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44} \sigma) = -\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \frac{k_1(k_2 + 1)\sqrt{\nu_2} - k_2(k_1 + 1)\sqrt{\nu_1}}{k_2\sqrt{\nu_1} - k_1\sqrt{\nu_2}}.$$

Table 1 – Dependence of SIF on crack sizes. Configuration 1

a/h	0.0	0.1	0.2	0.3
$K_{Iz}(c_{11} + c_{12}) / (c_{44} \sigma)$	1.1529	1.1534	1.564	1.1609

The smallest stress value corresponds to one anti-crack in space. This is natural, since one anti-crack is the limiting case of configuration 1, when a is fixed and $h \rightarrow \infty$. The stress intensity factor has a similar nature of change. Table 1

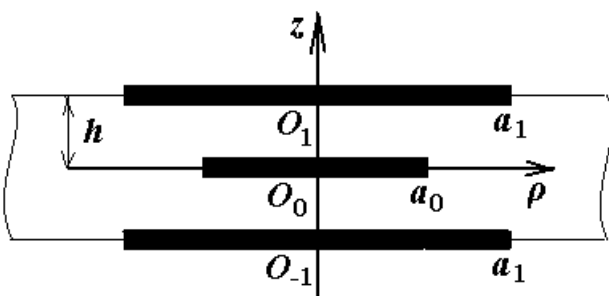


Fig. 2 – Representative layer. Configuration 2.

shows the dependence of stress intensity coefficients (SIN) on the parameter a/h . Here, the value $a/h = 0.0$ corresponds to the limiting case $h \rightarrow \infty$, that is, one crack in space.

Configuration 2. Consider another configuration of cracks in the representative layer (Fig. 2). We denote it as $a_0 - a_1 - a_0 - a_1$.

The solution of problem (1) – (3) for configuration 2 has the form (7), in which

$$A_{s,n}^{(2l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{2l+j} = a_j, \quad j = 0, 1; \quad l = -\infty \div \infty.$$

The resolving system here is written as follows:

$$\sum_{s=1}^2 \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1, \tag{14}$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{\nu_s}} \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 2m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,2m+j,l} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0, 1. \tag{15}$$

The proof of the Fredholm property of the system operator for (14), (15) is similar to the proof of Theorem 2, so it is not given here. The results of the calculations are shown in Fig. 4 and Table 2.

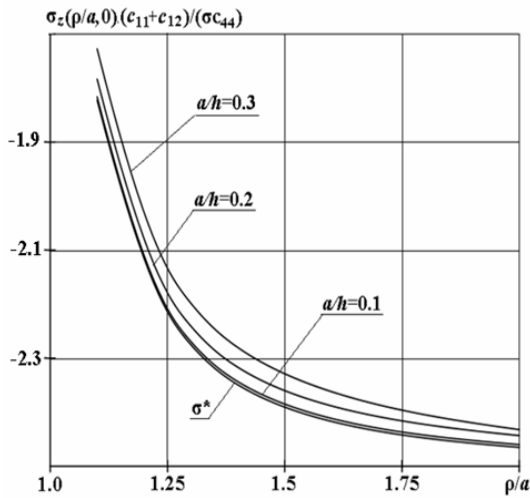


Fig. 3 – Stress distribution $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12})/(\sigma c_{44})$ depending on relative crack size. Configuration 1.

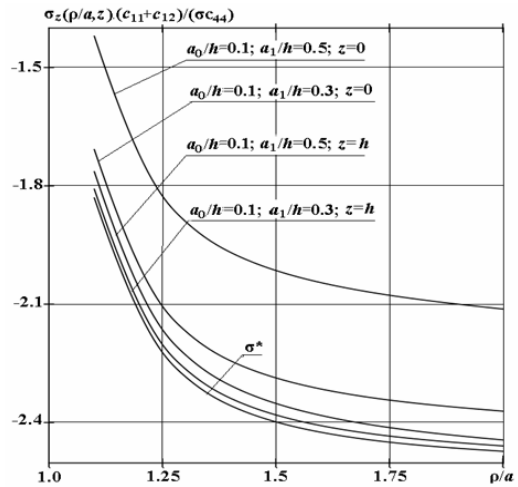


Fig. 4 – Stress distribution $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12})/(\sigma c_{44})$ depending on relative crack size. Configuration 2.

The proof of the Fredholm property of the system operator for (14), (15) is similar to the proof of Theorem 2, so it is not given here. The results of the calculations are shown in Fig. 4 and Table 2.

Anti-cracks of different sizes in the representative layer already influence each other when calculating the intensity factors and the distribution of stresses near the boundaries of anti-cracks. An increase in the size of a larger anti-crack with a fixed size of a smaller one leads to an increase in the SIF at the boundary of a smaller anti-crack. Conversely, an increase in the size of a smaller anti-crack with a fixed size of a larger one leads to a decrease in the SIF at the boundary of a larger anti-crack. The same patterns are observed in the distributions of normal stresses in the planes of anti-cracks outside their boundaries.

Table 2 – Dependence of SIF on crack sizes. Configuration 2

$(a_0/h, a_1/h)$	(0.1, 0.3)	(0.2, 0.4)	(0.1, 0.5)
$K_{1z}(c_{11} + c_{12})/(c_{44}\sigma), z = 0$	1.1630	1.1692	1.1785
$K_{1z}(c_{11} + c_{12})/(c_{44}\sigma), z = h$	1.1549	1.1577	1.1587

Configuration 3. Now consider configurations with three different cracks. The representative layer for the first of them is shown in Fig. 5. Let's denote it as $a_0 - a_1 - a_2 - a_1 - a_0$.

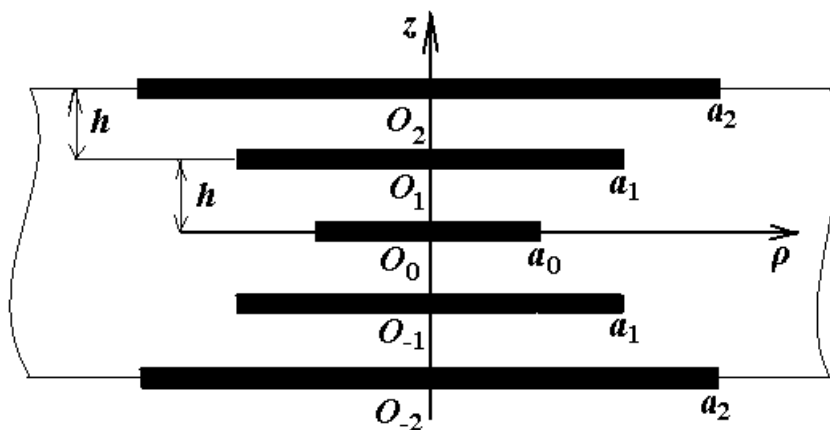


Fig. 5 – Representative layer. Configuration 3.

The solution of problem (1) – (3) for configuration 4 has the form (7), in which

$$A_{s,n}^{(4l+j)} = A_{s,n}^{(j)}, \quad a_{4l+j} = a_j, \quad j = 0 \div 3, \quad l = -\infty \div \infty, \quad a_1 = a_{-1}, \quad a_2 = a_{-2}.$$

The resolving system for this problem is as follows:

$$\sum_{s=1}^2 \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{0,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = -\frac{4}{\pi} \delta_{n,1}, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0 \div 3, \quad (16)$$

$$\sum_{s=1}^2 \frac{k_s}{\sqrt{V_s}} \left[\tilde{A}_{s,n}^{(l)} + \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,k}^{(j)} \sum_{m: 4m+j \neq l} t_{1,n,k}^{s,4m+j,l} \right] = 0, \quad n = 1 \div \infty, \quad l = 0 \div 3. \quad (17)$$

The results of the calculations are shown in Fig. 6, Fig. 7 and Table 3.

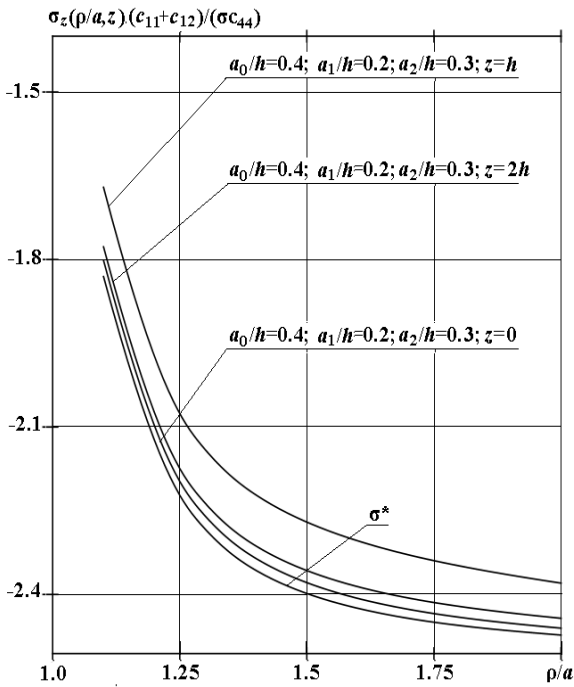


Fig. 6 – Stress distribution $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12})/(\sigma c_{44})$ depending on relative crack size. Configuration 3.

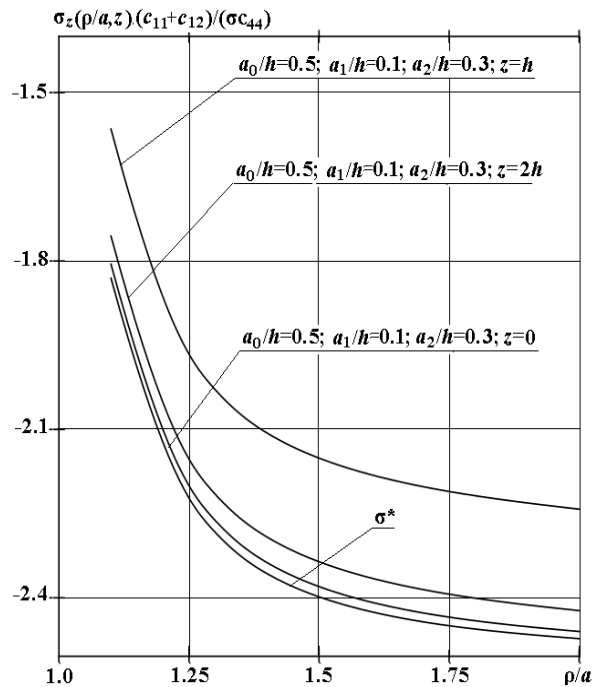


Fig. 7 – Stress distribution $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12})/(\sigma c_{44})$ depending on relative crack size. Configuration 2.

For each package of anti-cracks of configuration 3, the highest SIF is observed at the boundary of the smallest anti-crack, and with an increase in the size of neighboring anti-cracks, this SIF increases. Similar patterns were obtained in the distribution of stresses $\sigma_z(\rho, 0)(c_{11} + c_{12})/(\sigma c_{44})$ in the planes of smaller anti-cracks outside their boundaries in a package with large anti-cracks.

Table 3 – Dependence of SIF on crack sizes. Configuration 3

$(a_0/h, a_1/h, a_2/h)$	(0.2, 0.1, 0.3)	(0.4, 0.2, 0.3)	(0.5, 0.1, 0.3)
$K_{1z}(c_{11} + c_{12})/(c_{44}\sigma), z = 0$	1.1549	1.1561	1.1551
$K_{1z}(c_{11} + c_{12})/(c_{44}\sigma), z = h$	1.1597	1.1656	1.1707
$K_{1z}(c_{11} + c_{12})/(c_{44}\sigma), z = 2h$	1.1539	1.1586	1.1594

Conclusions. In this paper, the stress-strain state of a transversely isotropic space with periodic packets of flat circular anti-cracks with their centers located on the anisotropy axis and their planes perpendicular to it is investigated for the first time. It is assumed that the space is under the action of a constant biaxial compressive stress applied at infinity. The periodic system (packet) of anti-cracks is determined by a representative layer with planes perpendicular to the anisotropy axis and containing anti-cracks of various sizes. Such a package forms a certain configuration. Any odd number of anti-cracks of arbitrary size can be included in a specific configuration, subject to the following restrictions: the anti-cracks are symmetrical with respect to the median plane of the layer, their sizes satisfy the convergence conditions of the method. The established restrictions provide practically uniform conditions for tangential stresses and normal displacements.

ments on the boundary of the representative layer (the order of these quantities is in the range $10^{-10} \div 10^{-14}$), which can be considered as conditions at infinity. All problems were solved using the generalized Fourier method, which allowed them to be reduced to infinite systems of linear algebraic equations with Fredholm operators. Practical verification of the reduction method efficiency showed high efficiency of the generalized Fourier method. Thus, increasing the reduction parameter from 10 to 20 led to stabilization of 8 – 14 significant digits in the obtained results. Comparison of stress intensity factors for different configurations shows that for anti-cracks of the same size, their values depend little on a specific configuration. One of the parallel lines of research of similar problems is connected with periodic packets of cracks in transversely isotropic space. Recently the authors of this article have carried out such researches and their results are in print. Another promising direction of research is the class of non-axisymmetric problems with periodic systems of cracks and anti-cracks.

Bibliography

1. Bogdanov V. L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // *Materials Science*. – 2007. – Vol. 43. – P. 321 – 330. DOI: 10.1007/s11003-007-0037-9.
2. Bohdanov V. L. Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // *J. Math. Sci.* – 2012. – vol. 186. – No. 1. – pp. 1 – 13.
3. Chaudhuri R. A. Three-dimensional asymptotic stress field in the vicinity of the circumference of a penny shaped discontinuity // *International Journal of Solids and Structures*. – 2003. – Vol. 40. – No. 13 – 14. – pp. 3787 – 3805. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00017-9.
4. Kryvyi O. F. Circular interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // *Materials Science*. – 2012. – vol. 47. – no. 6. – pp. 726 – 736. DOI: 10.1007/s11003-012-9450-9.
5. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolysyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with subsurface cracks // *Mater Sci.* – 2011. – vol. 47. – pp. 177 – 187. DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
6. Davidson S. *Boundary Value Problems in Elasticity and Thermoelasticity*. Doctor of Philosophy (PhD). Dissertation, Mathematics & Statistics. Old Dominion University, 1990. – 105 p. DOI: 10.25777/wzrb-7781.
7. Gorbushin N., Eremeyev V., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses // *International Journal of Engineering Science*. – 2020. – vol. 146. – 103183. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103183.
8. Karapetian E., Kachanov M. Green's functions for the isotropic or transversely isotropic space containing a circular crack // *Acta Mechanica*. – 1998. – vol. 126. – pp. 169 – 187. DOI: 10.1007/BF01172806.
9. Fabrikant V. I. Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space // *Applicable Analysis*. – 1997. – vol. 66. – no. 3 – 4. – pp. 273 – 290. DOI: 10.1080/00036819708840587.
10. Kaczyński A. On 3D symmetrical thermoelastic anticrack problems // *Arch. Mech.* – 2016. – Vol. 68. – No. 2. – P. 99 – 112.
11. Kaczyński A., Monastyrskyi B. The thermoelastic problem for a penny-shaped anticrack with heat conductivity in a transversely isotropic space. *Journal of theoretical and applied mechanics*. – 2016. – Vol. 54. – no. 2. – p. 593 – 600. DOI: 10.15632/jtam-pl.54.2.593.
12. Guerrero F., Sevostianov I., Giraud A. On a Possible Approximation of Changes in Elastic Properties of a Transversely Isotropic Material due to an Arbitrarily Oriented Crack // *Int J Fract.* – 2008. – vol. 153. – pp. 169 – 176. DOI: 10.1007/s10704-009-9311-1.
13. Seyedkavoosi S., Vilchevskaya E., Sevostianov I. Randomly oriented cracks in a transversely isotropic material // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – vol. 150. – pp. 222 – 229.
14. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium // *Journal Of Thermal Stresses*. – 2002. – vol. 25. – no. 7. – pp. 691 – 702.
15. Wang X., Wang C., Lu G., Zhou B. M. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere // *Journal Of Thermal Stresses*. – 2002. – vol. 25. – no. 1. – pp. 31 – 44.
16. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // *Int. Journal of Solids and Structures*. – 2002. – vol. 39. – no. 23. – pp. 5753 – 5765.
17. Николаев А. Г. Теоремы сложения перемещений трансверсально-изотропных канонических тел // Харьковский авиац. ин-т. – Харьков, 1996. – 52 с. – Деп. В ГНТБ Украины 10.07.96, № 1569 – Ук96.
18. Николаев А. Г., Щербак Ю. А. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки // *Георетическая и прикладная механика*. – 2003. – Вып. 38. – С. 9 – 14.
19. Николаев О. Г., Крайниченко А. С. Пружний трансверсально-ізотропний простір з двома одновісними паралельними круговими тріщинами і супутні проблеми безсності // *Вісник Національного технічного у-ту «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2022. – № 1. – С. 92 – 105. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11.
20. Николаев А. Г., Куреннов С. С. Термоупругие напряжения в пространстве с периодически расположенными упругими шаровыми включениями // *Проблемы машиностроения*. – 2004. – № 1. – С. 35 – 48.

References (transliterated)

1. Bogdanov V. L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses. *Materials Science*. 2007, Vol. 43, pp. 321–330. DOI: 10.1007/s11003-007-0037-9.
2. Bohdanov V. L. Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 186, no. 1, pp. 1–13.
3. Chaudhuri R. A. Three-dimensional asymptotic stress field in the vicinity of the circumference of a penny shaped discontinuity. *International Journal of Solids and Structures*. 2003, Vol. 40, No. 13–14, pp. 3787–3805. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00017-9.
4. Kryvyi O. F. Circular interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space. *Materials Science*. 2012, vol. 47, no. 6, pp. 726–736. DOI: 10.1007/s11003-012-9450-9.
5. Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolysyn M. M. Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with subsurface cracks. *Mater Sci*. 2011, vol. 47, pp. 177–187. DOI: 10.1007/s11003-011-9382-9.
6. Davidson S. *Boundary Value Problems in Elasticity and Thermoelasticity*. Doctor of Philosophy (PhD), Dissertation, Mathematics & Statistics. Old Dominion University, 1990. 105 p. DOI: 10.25777/wzrb-7781.
7. Gorbushin N., Eremeyev V., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*. 2020, vol. 146, 103183. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103183.
8. Karapetian E., Kachanov M. Green's functions for the isotropic or transversely isotropic space containing a circular crack. *Acta Mechanica*. 1998, vol. 126, pp. 169–187. DOI: 10.1007/BF01172806.

9. Fabrikant V. I. Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space. *Applicable Analysis*. 1997, vol. 66, no. 3 – 4, pp. 273–290. DOI: 10.1080/00036819708840587.
10. Kaczyński A. On 3D symmetrical thermoelastic anticrack problems. *Arch. Mech.* 2016, Vol. 68, No. 2, pp. 99–112.
11. Kaczyński A., Monastyrskyy B. The thermoelastic problem for a penny-shaped anticrack with heat conductivity in a transversely isotropic space. *Journal of theoretical and applied mechanics*. 2016, Vol. 54, no. 2, pp. 593–600. DOI: 10.15632/jtam-pl.54.2.593.
12. Guerrero F., Sevostianov I., Giraud A. On a Possible Approximation of Changes in Elastic Properties of a Transversely Isotropic Material due to an Arbitrarily Oriented Crack. *Int J Fract.* 2008, vol. 153, pp. 169–176. DOI:10.1007/s10704-009-9311-1.
13. Seyedkavoosi S., Vilchevskaya E., Sevostianov I. Randomly oriented cracks in a transversely isotropic material. *International Journal of Solids and Structures*. 2018, vol. 150, pp. 222–229.
14. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium. *Journal Of Thermal Stresses*. 2002, vol. 25, no. 7, pp. 691–702.
15. Wang X., Wang C., Lu G., Zhou B. M. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere. *Journal Of Thermal Stresses*. 2002, vol. 25, no. 1, pp. 31–44.
16. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains. *Int. Journal of Solids and Structures*. 2002, vol. 39, no. 23, pp. 5753–5765.
17. Nikolaev A. G. *Teoremy slozheniya peremeshheniy transversal'no-izotropnykh kanonicheskikh tel* [Theorems for addition of displacements of transversally isotropic canonical bodies]. Kharkov, Khar'kovskiy aviac. in-t. Publ., 1996, 52 p. Dep. in the National Scientific and Technical Library of Ukraine, 10.07.96, no. 1569 – Uk96.
18. Nikolaev A. G., Shherbakova Ju. A. Krugovaya treshhina v transversal'no-izotropnom sferoide pod deystviem normal'noy nagruzki [Circular crack in a transversely isotropic spheroid under normal load]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and Applied Mechanics]. 2003, vol. 38, pp. 9–14.
19. Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Pruzhnyy transversal'no-izotropnyy prostir z dvoma odnovisnymi paralel'nymy krugovymy trishhynamy i sputni problemy bazynosti [Elastic transversal-isotropic space with two uniaxial parallel circular cracks and associated problems of basicity]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyak* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 92–105. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11.
20. Nikolaev A. G., Kurenov S. S. Termoprugie napryazheniya v prostranstve s periodicheski raspolozhennymi uprugimi sharovymi vkluchcheniyami [Thermoelastic stresses in space with periodically located elastic spherical inclusions]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2004, № 1, pp. 35–48.

Надійшла (received) 29.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Ніколаєв Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Oleksii Georgiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Крайниченко Аліна Сергіївна – аспірант кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (099) 152-15-69; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5881-4143>; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

Krainychenko Alina Sergiivna – postgraduate student at the Department of Higher Mathematics and System Analysis, M. Y. Zhukovsky National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (099) 152-15-69; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5881-4143>; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

Я. П. ТРОЦЕНКО

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ РІДИНИ У ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ, ЩО МІСТИТЬ ДВІ ДІАФРАГМИ ЗІ ЗМІННИМ ДІАМЕТРОМ ОТВОРІВ

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини у циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами зі змінним діаметром отворів на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є – Стокса. Алгоритм розв'язання базувався на методі скінченних об'ємів з використанням різницевої схеми другого порядку точності за простором та часом. Для інтерполяції конвективних членів використовувалася TVD (Total-Variation Diminishing) форма центрально-різницевої схеми з обмежувачем потоку. Зв'язаний розрахунок полів швидкості та тиску проводився за допомогою процедури PISO (Pressure Implicit Split Operator). Показано, що при відносно низьких числах Рейнольдса течія в області між діафрагмами є стаціонарною незалежно від діаметра отворів діафрагм. З передньої кромки першої діафрагми зривається поверхневий шар та утворює кільцевий зсувний шар. Всередині порожнини, утвореної діафрагмами, встановлюється циркуляційний рух. За більш високих числах Рейнольдса течія стає нестационарною. При наближенні до другої діафрагми у зсувному шарі утворюється послідовність кільцевих вихорів, що взаємодіють із поверхнею діафрагми та можуть призводити до виникнення тонального звуку. Зі збільшенням діаметра отворів діафрагм збільшується кут відриву примежового шару від передньої кромки першої діафрагми, внаслідок чого зменшується частка кінетичної енергії струменя, що бере участь у циркуляційному русі всередині порожнини між діафрагмами. При цьому значення критичного числа Рейнольдса, при якому починає збуджуватися тональний звук, а також число Струхалія збільшуються, тоді як частота генерованого звуку зменшується. При досягненні критичного значення діаметра отворів діафрагм циркуляційний рух дестабілізується, через що процес утворення кільцевих вихорів у зсувному шарі втрачає періодичність, і генерований звук набуває характеру шуму.

Ключові слова: пряме чисельне моделювання, метод скінченних об'ємів, нестационарна течія, канал з перешкодами, циліндрична порожнина, зсувний шар, вихрові структури, циркуляційний рух, автоколивання, число Струхалія.

YA. P. TROTSENKO

NUMERICAL SIMULATION OF FLUID FLOW IN A CYLINDRICAL DUCT WITH TWO DIAPHRAGMS OF VARIABLE ORIFICE DIAMETERS

The flow of a viscous incompressible fluid in a cylindrical duct containing two serial diaphragms with variable orifice diameters was studied based on the numerical solution of the unsteady Navier-Stokes equations. The solution algorithm was based on the finite volume method using second-order accurate difference schemes in both space and time. The TVD (Total-Variation Diminishing) form of a central-difference scheme with a flux limiter was used to interpolate the convective terms. The combined evaluation of the velocity and pressure fields was performed using the PISO (Pressure Implicit Split Operator) procedure. It was shown that at relatively low Reynolds numbers, the flow in the region between the diaphragms remains stationary regardless of the diameter of the diaphragm orifice. The surface layer separates from the leading edge of the first diaphragm, forming an annular shear layer. A circulation motion is established inside the cavity formed by the diaphragms. At higher Reynolds numbers, the flow becomes unsteady. As the flow approaches the second diaphragm, a sequence of ring vortices forms in the shear layer, interacting with the diaphragm surface and potentially leading to the emergence of tonal sound. When the diameter of the diaphragm orifice increases, the separation angle of the boundary layer at the leading edge of the first diaphragm increases. As a result, the share of the jet's kinetic energy participating in the circulation motion inside the cavity between the diaphragms decreases. Simultaneously, the critical Reynolds number at which the tonal sound begins to excite increases, as does the Strouhal number, while the frequency of the generated sound decreases. When the diameter of the diaphragm orifice reaches a critical value, the circulation motion becomes destabilized, causing the formation of ring vortices in the shear layer to lose periodicity, and the generated sound acquires a noisy character.

Key words: direct numerical simulation, finite volume method, unsteady flow, duct with baffles, cylindrical cavity, shear layer, eddy structures, circulation motion, self-sustained oscillations, Strouhal number.

Вступ. Необхідність дослідження течій у нерегулярних каналах зумовлена як теоретичними, так і прикладними проблемами в різних галузях науки і техніки. За певних умов наявність перешкод або порожнин у каналі призводить до виникнення автоколивань середовища і, як наслідок, до появи тонального звуку. Спричинений коливаннями потоку акустичний резонанс у трубопровідних системах часто виникає на електростанціях, хімічних заводах, компресорних установках, газотранспортних системах тощо [1]. Зокрема, небажані осциляції можуть виникати в регулюючих клапанах [2] або при транспортуванні рідини чи газу по гофрованих трубах, що може бути причиною серйозних структурних несправностей на морських газових платформах, повітропроводах та системах кондиціонування [3]. Утворення звужень у респіраторному тракті людини при його патологіях також може спричинити генерацію шумів, що потребують виявлення та класифікації [4]. Крім цього, визначення особливостей потоку крові у артеріях допомагає оцінити тяжкість коронарних стенозів (звужень поперечного перерізу), що є важливим фактором для призначення лікування кардіологічних хвороб [5].

У попередній роботі [6] було досліджено механізм зародження автоколивань у циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами за фіксованих значень діаметра отворів діафрагм та швидкості потоку. Метою цієї роботи є дослідження особливостей потоку рідини в даній динамічній системі залежно від діаметра отворів діафрагм та швидкості течії, а саме: моделювання даного процесу та чисельний розрахунок; аналіз структури потоку в області між діафрагмами; визначення характеристик автоколивальних рухів середовища, що можуть призводити до появи акустичних коливань.

В задачах про генерацію звуку потоками досліджуються величини, які безпосередньо залежать від часу. Тому розв'язання задач гідроаеродинамічної акустики потребує розвитку та застосування більш складних та специфічних методів [7]. Сьогодні для чисельного моделювання потоків в нерегулярних каналах використовуються як двовимірні вихрові методи [8], так і техніки прямого чисельного моделювання (DNS) [9] та моделюван-

ня великих вихорів (LES) [10]. В даній роботі чисельне моделювання проводиться за допомогою підходу DNS, який дозволяє отримати найбільш точні результати. Запропонований алгоритм розв'язання був застосований до подібних задач у роботі [11]. Отримані там результати узгоджуються із експериментальними та чисельними результатами інших авторів.

Постановка задачі. Розглядається течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі, що містить дві однакові осесиметричні діафрагми з отворами змінного діаметра. На рис. 1 зображено поздовжній переріз каналу в області діафрагм. Контури діафрагм у перерізі мають прямокутну форму. Вважається, що поверхні каналу та діафрагм нерухомі та абсолютно жорсткі. Потік рідини з густиною ρ потрапляє в розрахункову область з рівномірною швидкістю V_1 через ліву межу ($x = 0$) та покидає її через праву ($x = L$). Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку c в середовищі.

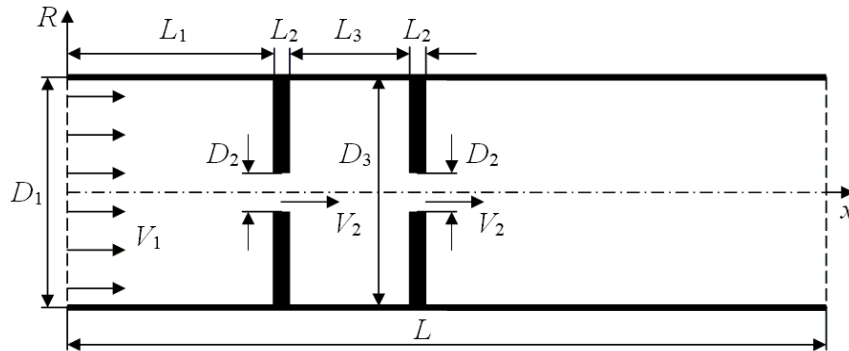


Рис. 1. Поздовжній переріз каналу.

Для проведення обчислень було обрано три варіанти діаметра отворів діафрагм $D_2 = \{2 \cdot 10^{-3}, 3 \cdot 10^{-3}, 4.62 \cdot 10^{-3}\}$ м. Решта геометричних параметрів розрахункової області обиралися такими: $D_1 = D_3 = 1.8 \cdot 10^{-2}$ м, $L_2 = 10^{-3}$ м, $L_3 = 5.8 \cdot 10^{-3}$ м. Розмір області вгору за потоком від першої діафрагми $L_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, загальна довжина розрахункової області $L = 0.15$ м. Кінематична в'язкість середовища $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с відповідає в'язкості повітря при температурі 20°С.

Згідно з підходом Лайтхілла вважається, що акустичне поле не впливає на гідродинамічне поле течії [12]. У зв'язку з цим задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини. Основним параметром задачі є число Рейнольдса, яке можна визначити як $Re = V_2 D_2 / \nu$, де V_2 – швидкість потоку в отворі першої діафрагми, усереднена за поперечним перерізом. В межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є – Стокса, що в безрозмірних величинах у векторній формі мають вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = \frac{1}{Re} \Delta U - \nabla p, \quad \nabla \cdot U = 0,$$

де p – скалярне поле тиску; U – векторне поле швидкості. Тут D_2 – масштаб довжини, V_2 – швидкості, D_2 / V_2 – часу, ρV_2^2 – тиску.

Крайові умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область, умова прилипання на твердих поверхнях Σ та м'яка крайова умова типу лінійної екстраполяції на виході з розрахункової області:

$$U|_{x=0} = (V_1, 0, 0), \quad U|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=L} = 0.$$

Для тиску задавалася рівність нулю нормального градієнту на всій межі області окрім виходу з неї, де обирався постійний тиск рівний нулю:

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Sigma} = 0, \quad p|_{x=L} = 0.$$

В початковий момент середовище знаходилося у стані спокою:

$$U(t=0) = 0, \quad p(t=0) = 0.$$

Чисельний алгоритм розв'язання. Розв'язання поставленої задачі проводилося чисельно за методом скінченних об'ємів з використанням бібліотек інструментарію з відкритим кодом OpenFOAM. Дискретизація здійснювалася за допомогою скінченно-елементного генератора сіток Gmsh. Припускалося, що рух рідини в області

між діафрагмами є близьким до осесиметричного. У зв'язку з цим за розрахункову область обирався циліндричний сектор (клин) з кутом розкриття 4° та одним елементом в азимутальному напрямку. У роботі [11] з метою верифікації отриманих результатів для подібних задач проводились тестові розрахунки при незмінних крайових умовах з використанням сіток з різною кількістю контрольних об'ємів та різними значеннями коефіцієнтів згущення вузлів.

На рис. 2 схематично зображено дискретизаційну сітку розрахункової області в околі отворів діафрагм в половині поздовжнього перерізу каналу. Використовувалася ортогональна блочно-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах діафрагм та при наближенні до їх поверхонь. Кількість контрольних об'ємів в радіальному напрямку в отворі діафрагм становила 69, 82 та 98 залежно від діаметра отворів діафрагм з найменшим кроком біля кутових точок – 10^5 м. Загальна кількість контрольних об'ємів змінювалась в межах від 203519 до 220094 відповідно.

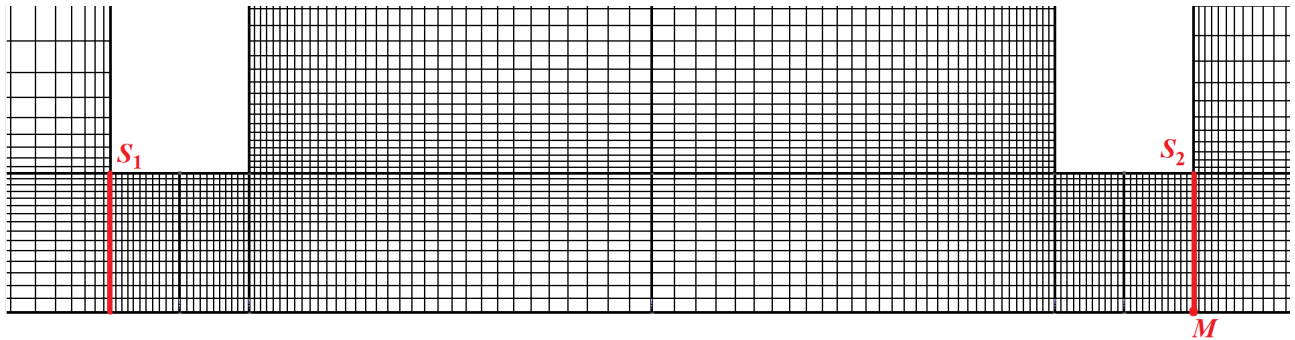


Рис. 2 – Схематичне зображення дискретизаційної сітки в околі отворів діафрагм.

Для обчислення об'ємних інтегралів за контрольним об'ємом застосовувалася *узгаальнена процедура Гауса*. Для інтерполяції конвективних членів застосовувалася імплементована у OpenFOAM TVD форма *центрально-різницевої схеми* для векторного поля з обмежувачем потоку $\Psi(q)$, що відповідає *узгаальненій кусково-лінійній схемі Chakravarthy – Osher*:

$$U_F = (U_F)_{UD} + \Psi \left[(U_F)_{CD} - (U_F)_{UD} \right].$$

Тут $(U_F)_{UD}$ – значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане за *протипоточною схемою першого порядку*, $(U_F)_{CD}$ – значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане за *центрально-різницевою схемою другого порядку*, $\Psi(q)$ – нелінійний обмежувач потоку, який є функцією відношення градієнтів швидкості на межах між даною коміркою та її сусідами вгору і вниз за потоком:

$$\Psi(q) = \max \left(\min \left(\frac{2}{k} q, 1 \right), 0 \right), \quad q = 2 \frac{(U_M - U_K)(U_N - U_M)}{(U_N - U_M)^2} - 1,$$

де K, M, N – три *центроїди*, послідовно розташовані в напрямку потоку [13]. В даній роботі обирався коефіцієнт $k = 1$, що відповідає більш високій стійкості розрахунку.

За схему дискретизації похідної за часом обиралася *неявна триточкова несиметрична схема другого порядку з різницями назад*. Зв'язаний розрахунок поля швидкості і тиску проводився за допомогою *процедури PISO* [14]. Щоб покращити якість матриці отриманої *системи лінеаризованих алгебраїчних рівнянь* використовувався *метод відкладеної корекції для конвективного члена DCM (Deferred Correction Method)* [15]. Для розв'язання систем із симетричними матрицями застосовувався *метод спряжених градієнтів PCG (Preconditioned Conjugate Gradient)* з передобумовленням типу *неповної факторизації Холецького DIC (Diagonal-based Incomplete Cholesky preconditioner)* [16], з асиметричними матрицями – *стабілізований метод біспряжених градієнтів PBiCGStab (Preconditioned Biconjugate Gradient Stabilized)* з передобумовленням типу *неповної LU-факторизації DILU (Diagonal-based Incomplete Lower-Upper preconditioner)* [17]. Задача розв'язувалася з використанням *обчислювальних потужностей комплексу СКІТ Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова Національної академії наук України* [18]. Більш детально алгоритм розв'язання та обґрунтування вибору відповідних методів розглянуто у роботі [11].

З метою контролю точності обчислень поле швидкості чисельно інтегрувалося за *поперечними перерізами отворів діафрагм S_1 ($x = L_1$) та S_2 ($x = L_1 + 2L_2 + L_3$)* (рис. 2). Це дозволяло контролювати точність виконання *умови нестисливості середовища*, яку можна подати у вигляді:

$$\left| \frac{4 \int_{S_i} U_x ds - \pi D_1^2 V_1}{\pi D_1^2 V_1} \right| < \delta, \quad i = 1, 2.$$

Для результатів, представлених у даній роботі, відносна похибка δ не перевищувала $7.2 \cdot 10^{-3}$.

Аналіз результатів. Розглянемо спочатку випадок найменшого діаметра отворів діафрагм $D_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Відношення діаметра та довжини порожнини між діафрагмами до діаметра отворів становлять відповідно $D_3 / D_2 = 9$ та $L_3 / D_2 = 2.9$. При відносно низькому значенні числа Рейнольдса $Re = 1296$, що відповідає швидкості течії $V_1 = 0.12$ м/с ($V_2 = 9.72$ м/с), течія в області між діафрагмами є стаціонарною. На рис. 3, а зображено поле завихреності в половині поздовжнього перерізу хвилевода після закінчення перехідних процесів. З передньої кромки першої діафрагми зривається ламінарний примежовий шар та утворює на межі струменя та порожнини між діафрагмами кільцевий зсувний шар. Цей шар розрізається передньою кромкою другої діафрагми на дві частини, одна з яких проходить далі у отвір другої діафрагми, а друга втягується у циркуляційний рух всередині області між діафрагмами. У такий спосіб в глибині порожнини між діафрагмами утворюється великий кільцевий вихор, який добре видно на рис. 3, б, де зображено лінії течії. Отже, в даному випадку коливання в системі не виникають.

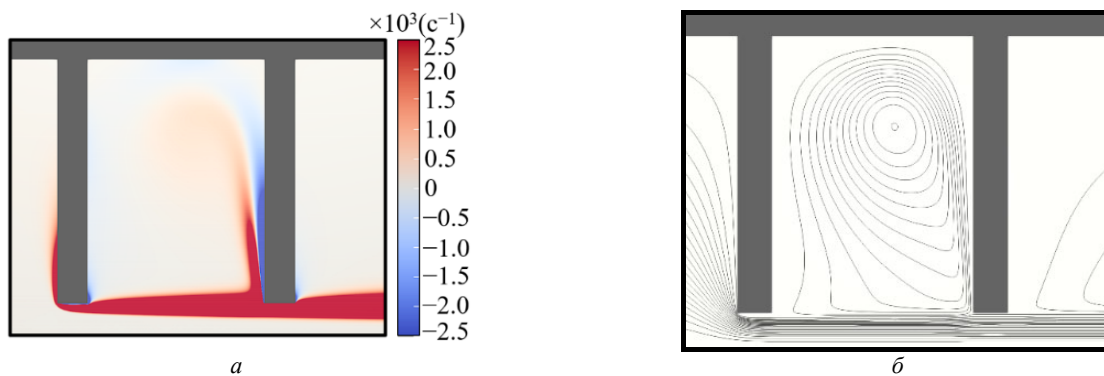


Рис. 3 – В області між діафрагмами при $D_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м та $Re = 1296$: а – поле завихреності; б – лінії течії.

При збільшенні числа Рейнольдса до $Re = 2700$ ($V_1 = 0.25$ м/с, $V_2 = 20.25$ м/с) течія в області між діафрагмами стає нестационарною (рис. 4, а). При наближенні до другої діафрагми у зсувному шарі послідовно утворюються кільцеві вихори, які набігають на поверхню діафрагми та розрізаються нею на дві частини. Як і в попередньому випадку, одна частина проходить далі за течією, а друга втягується у циркуляційний рух. Внаслідок взаємодії вихорів з діафрагмою виникають коливання полів швидкості та тиску в околі її отвору. Ці коливання мають періодичний характер та дають змогу оцінити частоту збуджених потоком акустичних коливань. Отже, в даному випадку, на відміну від попереднього, кількість енергії у зворотному зв'язку є достатньою для збудження автоколивань.

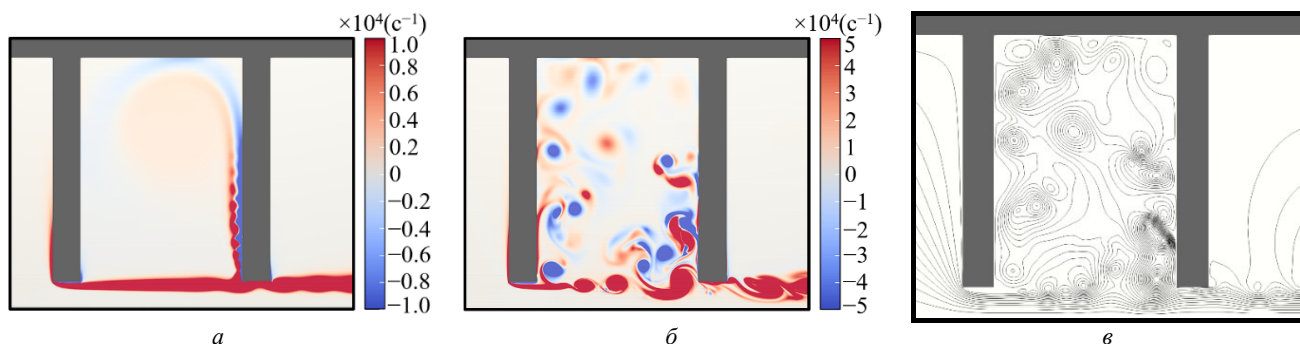


Рис. 4 – В області між діафрагмами при $D_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м: а – б – поле завихреності, а – $Re = 2700$; в – лінії течії, б, в – $Re = 6480$.

При збільшенні числа Рейнольдса до $Re = 6480$ ($V_1 = 0.6$ м/с, $V_2 = 48.6$ м/с) течія в області між діафрагмами значно ускладнюється. Великий вихор біля другої діафрагми вже не утворюється, через що зворотний

зв'язок стає нерегулярним (рис. 4, б). У зсувному шарі також утворюються кільцеві вихори і набігають на поверхню другої діафрагми, проте цей процес вже не є періодичним. При цьому місце формування цих вихорів зсувається ближче до першої діафрагми. При взаємодії вихорів у зсувному шарі з діафрагмою та її примезовим шаром утворюються вихори *додатної* та *від'ємної завихреності*, які рухаються проти течії та вглибину порожнини (рис. 4, в).

На рис. 5, а зображено амплітудно-частотний спектр коливань поздовжньої швидкості потоку в точці M на осі каналу в перетині отвору другої діафрагми S_2 ($x = L_1 + 2L_2 + L_3$, $R = 0$) при $D_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $Re = 2700$. В даному випадку чітко виділяється основна частота коливань $f = 1.14 \cdot 10^4$ Гц, що відповідає числу Струхаля, яке можна визначити як $St = fD_2/V_2$, рівному $St \approx 1.13$. Проте при $Re = 6480$ амплітудно-частотний спектр коливань поздовжньої швидкості у отворі другої діафрагми має характер, властивий шуму (рис. 5, б). Варто зазначити, що властивості спектру не залежать від вибору точки в отворі діафрагми як в першому, так і в другому випадку. Отже, при обраних параметрах тональний звук збуджується лише в обмеженому діапазоні чисел Рейнольдса $1296 < Re < 6480$.

Розглянемо тепер випадок більшого діаметра отворів діафрагм $D_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м ($D_3/D_2 = 6$, $L_3/D_2 \approx 1.93$). При значенні числа Рейнольдса $Re = 2880$ ($V_1 = 0.4$ м/с, $V_2 = 14.4$ м/с) течія в області між діафрагмами є стаціонарною, і вихори у зсувному шарі не утворюються (рис. 6, а). Отже, критичне значення числа Рейнольдса, при якому починають збуджуватись автоколивання, збільшилось у порівнянні з попереднім випадком ($Re_{кр} > 2880$).

При більшому значенні числа Рейнольдса $Re = 3240$ ($V_1 = 0.45$ м/с, $V_2 = 16.2$ м/с) вже відбувається періодичне утворення вихорів (рис. 6, б). Значних змін у структурі поля завихреності не спостерігається: товщина зсувного шару залишається незмінною; кільцеві вихори, що утворюються при наближенні до другої діафрагми, зберігають свій розмір. Проте збільшується кут відриву примезового шару від передньої кромки першої діафрагми, через що кільцеві вихори у зсувному шарі дещо віддаляються від поверхні другої діафрагми, що призводить до зменшення поверхні контакту. Внаслідок цього зменшується частка кінетичної енергії струменя, яка втягується у циркуляційний рух.

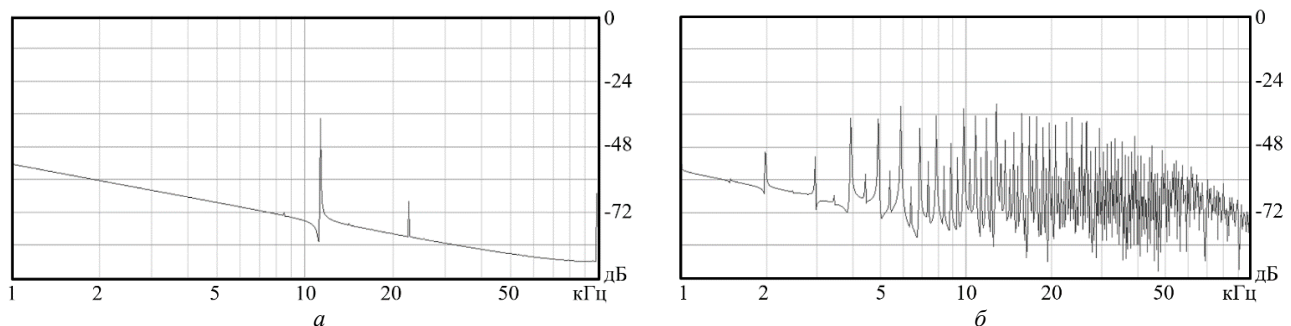


Рис. 5 – Амплітудно-частотні спектри коливань поздовжньої швидкості потоку в перерізі S_2 отвору другої діафрагми в точці M на осі каналу при $D_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м : а – $Re = 2700$; б – $Re = 6480$.

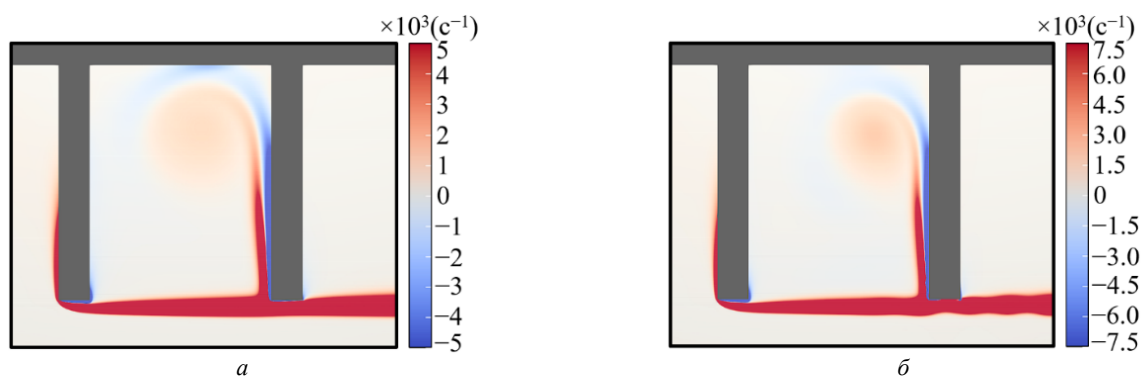


Рис. 6 – Поле завихреності в області між діафрагмами при $D_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м : а – $Re = 2880$; б – $Re = 3240$.

При подальшому збільшенні розмірів отворів діафрагм до $D_2 \approx 4.62 \cdot 10^{-3}$ м ($D_3 / D_2 = 3.9$, $L_3 / D_2 \approx 1.26$) вже спостерігається зміна у поведінці даної динамічної системи. При $Re \approx 3748$ ($V_1 = 0.8$ м/с, $V_2 = 12.17$ м/с) течія в області між діафрагмами є стаціонарною (рис. 7, а). Критичне значення числа Рейнольдса, при якому починають збуджуватись автоколивання, знову збільшилось ($Re_{кр} > 3748$). Кут відриву примежового шару також зростає у порівнянні з попереднім випадком, завдяки чому зсувний шар повністю проходить крізь отвір другої діафрагми. В даному випадку частина енергії струменя втягується у циркуляційний рух всередині порожнини між діафрагмами завдяки взаємодії зсувного шару з примежовим шаром другої діафрагми.

При збільшенні числа Рейнольдса до $Re \approx 4685$ ($V_1 = 1$ м/с, $V_2 = 15.21$ м/с) відбувається утворення вихорів у зсувному шарі, але через подальше збільшення кута відриву примежового шару від першої діафрагми кільцеві вихори у зсувному шарі ще більше віддаляються від поверхні діафрагми. У даному випадку великий кільцевий вихор біля другої діафрагми стає нестійким. На рис. 7 зображено відповідне поле завихреності в два моменти часу $t \approx 0.2872$ с (б) та $t \approx 0.3019$ с (в). Не досягаючи глибини порожнини між діафрагмами, вихор руйнується, і процес його формування починається заново. Через це утворення вихорів у зсувному шарі не є регулярним.

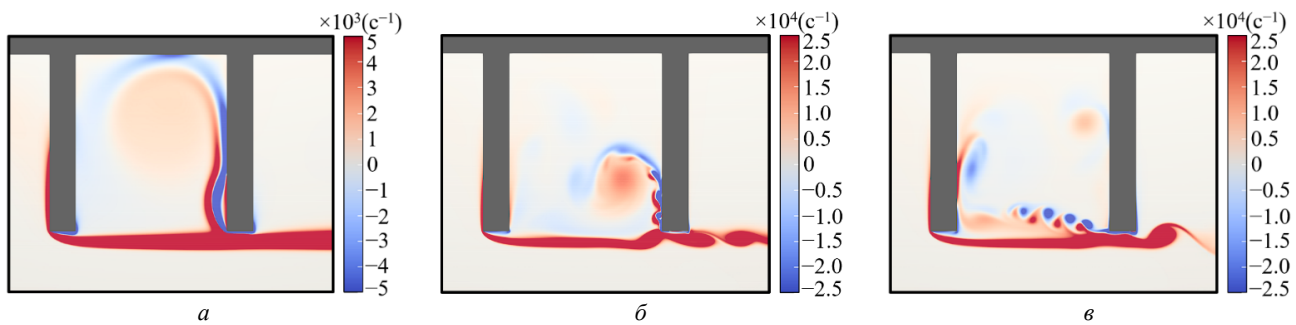


Рис. 7 – Поле завихреності в області між діафрагмами при $D_2 = 4.62 \cdot 10^{-3}$ м:

а – $Re \approx 3748$; б – $Re \approx 4685$, $t \approx 0.2872$ с; в – $Re \approx 4685$, $t = 0.3019$ с.

Основна частота коливань поздовжньої швидкості в отворі другої діафрагми при $D_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $Re = 3240$ становить $f \approx 8.93 \cdot 10^3$ Гц, що відповідає числу Струхаля $St \approx 1.65$ (рис. 8, а). Тобто частота коливань знизилась у порівнянні з попереднім випадком меншого діаметра отвору діафрагми, а число Струхаля збільшилось. На рис. 8, б зображено амплітудно-частотний спектр коливань поздовжньої швидкості у отворі другої діафрагми при $D_2 = 4.62 \cdot 10^{-3}$ м, $Re \approx 4685$ до моменту руйнування великого вихору. Спектр є багаточастотним, що також характерно для шуму. Отже, для утворення стійких автоколивань значення діаметра отворів діафрагм має бути меншим за критичне $D_3 / D_2 \approx 3.9$, при якому дестабілізується циркуляційний рух в області між діафрагмами.

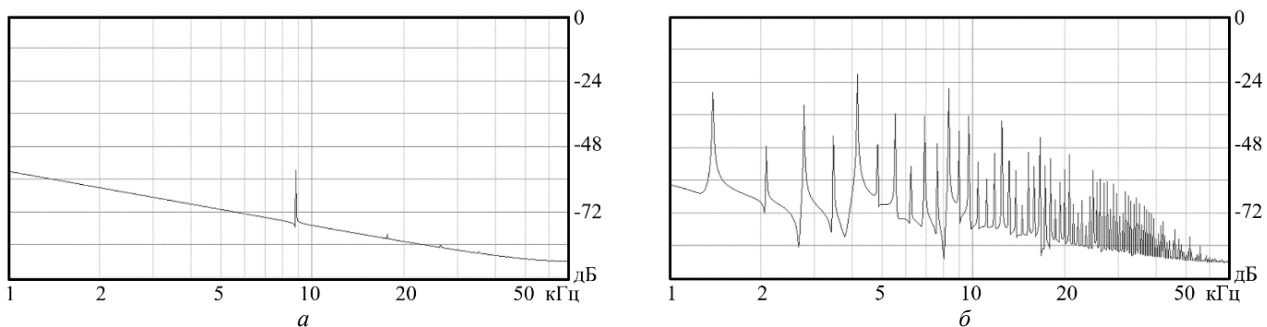


Рис. 8 – Амплітудно-частотні спектри коливань поздовжньої швидкості потоку в перерізі S_2 отвору другої діафрагми в точці M на осі каналу при: а – $D_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $Re = 3240$; б – $D_2 = 4.62 \cdot 10^{-3}$ м, $Re = 4685$.

Отримані результати узгоджуються з результатами інших авторів. Наприклад, у роботі [19] досліджувалась течія крові у артерії з одним та двома стенозами за допомогою методу скінченних елементів та $k-\varepsilon$ моделі турбулентності. Потік крові вважався ньютонівським та нестисливим. Результати дослідження показали, що при стенозах до 70 % площі поперечного перерізу артерії потік залишався ламінарним, а при 80 % – ставав турбуле-

нтним. Також автори роботи [4] показали, що підгортанний стеноз (SGS) практично не викликає генерацію тональних звуків, доки його ступінь тяжкості не досягнув 75 %. Спостерігалися слабкі низькочастотні шуми, починаючи з середнього ступеня тяжкості (> 50 %), за низьких швидкостей потоку. Проте рівень генерації тонального звуку швидко зростає, коли ступінь тяжкості стенозу наближався до 100 %. Це також супроводжувалося підвищенням частоти звуку.

Висновки. Отже, проведено чисельне моделювання течії рідини у циліндричному каналі з двома послідовними діафрагмами для трьох значень діаметра отворів діафрагм. У зв'язку з прийнятими припущеннями поставлена гідродинамічна задача розв'язувалася в межах моделі в'язкої нестисливої рідини. Розв'язання здійснювалося за методом скінченних об'ємів з використанням схем дискретизації другого порядку точності за простором та часом.

Проведено аналіз особливостей руху середовища в області між діафрагмами в залежності від діаметра отворів діафрагм. Показано, що при достатньо низьких числах Рейнольдса потік в області між діафрагмами є стаціонарним незалежно від діаметра отворів. У порожнині між діафрагмами встановлюється циркуляційний рух, а з передньої кромки першої діафрагми зривається поверхневий шар та утворює кільцевий зсувний шар в області між діафрагмами. При досягненні критичного значення числа Рейнольдса, яке залежить від діаметра отворів діафрагм, потік стає нестационарним. При наближенні до другої діафрагми у зсувному шарі утворюється послідовність кільцевих вихорів, що взаємодіють із поверхнею діафрагми та призводять до виникнення тонального звуку. При збільшенні діаметра отворів діафрагм відповідне критичне число Рейнольдса збільшується, частота генерованого звуку знижується, а число Струхала зростає. Крім того, збільшується кут відриву примежового шару від передньої кромки першої діафрагми, через що зменшується частка кінетичної енергії струменя, яка бере участь у циркуляційному русі всередині порожнини між діафрагмами. При досягненні критичної величини діаметра отворів діафрагм ($D_3 / D_2 \approx 3.9$ при $D_3 / L_3 \approx 3.1$) циркуляційний рух всередині порожнини дестабілізується, внаслідок чого генерований звук набуває характеру шуму.

Для дослідження у наступних роботах залишається питання визначення залежності інтервалів значень числа Рейнольдса, при яких генерується тональний звук, від діаметра отворів діафрагм, а також питання залежності критичного значення діаметра отворів для збудження стійких автоколивань течії від відстані між діафрагмами.

Список літератури

1. Aly K., Ziada S. Review of flow-excited resonance of acoustic trapped modes in ducted shallow cavities // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2016. – Vol. 138. – № 4. – 040803. DOI: 10.1115/1.4032251.
2. Tamura A., Takahashi S., Sato S., Hori S. Numerical analysis of sound in the main steam stop valve, and a sound suppression method // Journal of Fluid Science and Technology. – 2013. – Vol. 8. – № 1. – P. 120 – 135. DOI: 10.1299/jfst.8.120.
3. Rajavel B., Prasad M. G. Acoustics of corrugated pipes: a review // Applied Mechanics Reviews. – 2013. – Vol. 65. – № 5. – 050801. DOI: 10.1115/1.4025302.
4. Geng B., Xue Q., Thomson S., Zheng X. Effect of Subglottic Stenosis on Expiratory Sound Using Direct Noise Calculation // Appl. Sci. – 2023. – Vol. 13. – 13197. DOI: 10.3390/app132413197.
5. Alsemiry R. D., Sarifuddin, Mandal P. K., Sayed H. M., Amin N. Numerical solution of blood flow and mass transport in an elastic tube with multiple stenoses // BioMed Research International. – 2020. – Vol. 2020. – 7609562. DOI: 10.1155/2020/7609562.
6. Вовк І. В., Троценко Я. П. Особливості потоку рідини в циліндричному каналі зі стенозами // Доповіді НАН України. – 2017. – № 9. – С. 33 – 40. DOI: 10.15407/dopovidi2017.09.033.
7. Малуго В. С. Нестационарні задачі обтікання з урахуванням ефектів випромінювання звуку: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.02.05. – Київ. – 2018. – 324 с.
8. Langthjem M. A., Nakano M. Asymptotic and numerical analysis of resonance and lock-in by flow-acoustic interaction in an expansion chamber-pipe system // J. Fluid Sci. Tech. – 2016. – Vol. 11. – № 4. – JFST0030. DOI: 10.1299/jfst.2016jfst0030.
9. Nakiboglu G., Manders H. B. M., Hirschberg A. Aeroacoustic power generated by a compact axisymmetric cavity: prediction of self-sustained oscillation and influence of the depth // J. Fluid Mech. – 2012. – Vol. 703. – P. 163 – 191. DOI: 10.1017/jfm.2012.203.
10. Khaoua N., Khezzer L., Alshehhi M. Flow dynamics of a plane jet impinging on a slotted plate: large eddy simulation // J. Applied Fluid Mech. – 2017. – Vol. 10. – № 4. – P. 1211 – 1222. DOI: 10.18869/acadpub.jafm.73.241.27518.
11. Троценко Я. П. Динамічні характеристики течії рідини в каналах змінного перерізу: дис. ... д-ра філософії : 113 Прикладна математика. – Київ. – 2020. – 183 с.
12. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1952. – Vol. 211. – P. 564 – 587. DOI: 10.1098/rspa.1952.0060.
13. Chakravarthy S. R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // Proc. AIAA Comp. Fluid Dyn. Conf. – Danvers, MA., 1983. – P. 363 – 372.
14. Issa R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys. – 1986. – Vol. 62. – № 1. – P. 40 – 65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
15. Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme // Computers and Fluids. – 1974. – Vol. 2. – № 2. – P. 207 – 209. DOI: 10.1016/0045-7930(74)90014-0.
16. Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, 2nd edition. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.
17. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1992. – Vol. 13. – № 2. – P. 631 – 644. DOI: 10.1137/0913035.

18. Головинський А. Л., Маленко А. Л., Сергієнко І. В., Тульчинський В. Г. Енергоефективний суперкомп'ютер СКІТ-4 // Вісник НАН України. – 2013. – № 2. – С. 50 – 59. DOI: 10.15407/vsn2013.02.050.
19. Jahangiri M., Saghaian M., Sadeghi M. R. Numerical simulation of hemodynamic parameters of turbulent and pulsatile blood flow in flexible artery with single and double stenoses // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2015. – Vol. 29. – № 8. – P. 3549 – 3560. DOI: 10.1007/s12206-015-0752-3.

References (transliterated)

1. Aly K., Ziada S. Review of flow-excited resonance of acoustic trapped modes in ducted shallow cavities. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2016, vol. 138, no. 4, 040803. DOI: 10.1115/1.4032251.
2. Tamura A., Takahashi S., Sato S., Hori S. Numerical analysis of sound in the main steam stop valve, and a sound suppression method. *Journal of Fluid Science and Technology*. 2013, vol. 8, no. 1, pp. 120–135. DOI: 10.1299/jfst.8.120.
3. Rajavel B., Prasad M. G. Acoustics of corrugated pipes: a review. *Applied Mechanics Reviews*. 2013, vol. 65, no. 5, 050801. DOI: 10.1115/1.4025302.
4. Geng B., Xue Q., Thomson S., Zheng X. Effect of Subglottic Stenosis on Expiratory Sound Using Direct Noise Calculation. *Appl. Sci*. 2023, vol. 13, 13197. DOI: 10.3390/app132413197.
5. Alsemiry R. D., Sarifuddin, Mandal P. K., Sayed H. M., Amin N. Numerical solution of blood flow and mass transport in an elastic tube with multiple stenoses. *BioMed Research International*. 2020, vol. 2020, 7609562. DOI: 10.1155/2020/7609562.
6. Vovk I. V., Trotsenko Ya. P. Osoblyvosti potoku ridyny v tsylindrychnomu kanali zi stenozamy [Properties of the fluid flow in a cylindrical duct with stenoses]. *Dopovidi NAN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2017, no. 9, pp. 33–40. DOI: 10.15407/dopovidi2017.09.033.
7. Malyuga V. S. *Nestatsionarni zadachi obtikannia z urakhuvanniam efektyv vyprominiuvannia zvuku* [Unsteady flow problems with allowance for effects of sound radiation]. Thesis for the doctor's degree in physical and mathematical sciences. Kyiv, 2018. 324 p.
8. Langthjem M. A., Nakano M. Asymptotic and numerical analysis of resonance and lock-in by flow-acoustic interaction in an expansion chamber-pipe system. *J. Fluid Sci. Tech.* 2016, vol. 11, no. 4, JFST0030. DOI: 10.1299/jfst.2016jfst0030.
9. Nakiboglu G., Manders H. B. M., Hirschberg A. Aeroacoustic power generated by a compact axisymmetric cavity: prediction of self-sustained oscillation and influence of the depth. *J. Fluid Mech.* 2012, vol. 703, pp. 163–191. DOI: 10.1017/jfm.2012.203.
10. Khaoua N., Khezzer L., Alshehhi M. Flow dynamics of a plane jet impinging on a slotted plate: large eddy simulation. *J. Applied Fluid Mech.* 2017, vol. 10, no. 4, pp. 1211–1222. DOI: 10.18869/acadpub.jafm.73.241.27518.
11. Trotsenko Ya. P. *Dynamichni charakterystyky tekhii ridyny v kanalakh zminnoho pererizu* [Dynamic characteristics of a fluid flow in variable cross-section ducts]. Doctor of Philosophy thesis. Kyiv, 2020. 183 p.
12. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1952, vol. 211, pp. 564–587. DOI: 10.1098/rspa.1952.0060.
13. Chakravarthy S. R., Osher S. High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation. *Proc. AIAA Comp. Fluid Dyn. Conf.* 1983, Danvers, MA, pp. 363–372.
14. Issa R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.* 1986, vol. 62, no. 1, pp. 40–65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
15. Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers and Fluids*. 1974, vol. 2, no. 2, pp. 207–209. DOI: 10.1016/0045-7930(74)90014-0.
16. Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H. *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, 2nd edition*. Philadelphia: SIAM, 1994. 107 p.
17. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992, vol. 13, no. 2, pp. 631–644. DOI: 10.1137/0913035.
18. Golovynskiy A. L., Malenko A. L., Sergienko I. V., Tulchinsky V. G. Enerhoefektyvnyi superkompiuter SKIT-4. [Power efficient supercomputer SCIT-4]. *Visn Nac. Acad. Nauk Ukr.* 2013, no. 2, pp. 50–59. DOI: 10.15407/vsn2013.02.050.
19. Jahangiri M., Saghaian M., Sadeghi M. R. Numerical simulation of hemodynamic parameters of turbulent and pulsatile blood flow in flexible artery with single and double stenoses. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2015, vol. 29, no. 8, pp. 3549–3560.

Надійшла (received) 23.10.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Троценко Ярослав Павлович – доктор філософії з галузі математики та статистики, асистент кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.

Trotsenko Yaroslav Pavlovych – Philosophy Doctor in Mathematics and Statistics, Assistant Professor at the Department of Complex Systems Modeling, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.

Г. Я. ТУЛУЧЕНКО

НОВІ ПІДХОДИ ДО АПРОКСИМАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ СТАТИСТИК ДЛЯ РІЗНИХ МОДИФІКАЦІЙ ОДНОВИБІРКОВОГО ТЕСТУ АНДЕРСОНА-ДАРЛІНГА

Одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга є потужним інструментом для перевірки гіпотези про відповідність вибірки теоретичному розподілу. Однак, обчислення критичних точок для цього тесту є досить ресурсомістким завданням, враховуючи складність виразів для інтегральних функцій розподілу статистик для всіх модифікацій цього тесту з різними ваговими функціями. Мета даної роботи полягає в розробці ефективних способів апроксимації інтегральних функцій розподілу статистики тесту Андерсона – Дарлінга. Зокрема, дослідження спрямоване на знаходження функціональних залежностей, які асимптотично збігаються з заданими розподілами, забезпечуючи при цьому високу точність наближення в області відхилень від нульової гіпотези. У статті запропоновано два нових способи апроксимації інтегральних функцій для статистик цього тесту. Запропоновані способи дозволяють зберегти точність обчислення критичних значень критерію при менших обчислювальних витратах. Перший спосіб полягає в представленні статистики з тесту Андерсона – Дарлінга як складної випадкової величини, яка є лінійною комбінацією двох випадкових величин: з експоненціальним та з лінійним розподілами відповідно. Другий спосіб полягає у використанні узагальненого ймовірнісного розподілу, до складу якого запропоновано ввести розподіл Вейбулла. Параметри кожної з вказаних моделей апроксимації були оцінені методом найменших квадратів. Для вибору оптимальної моделі було проведено порівняння моделей за допомогою інформаційного критерію Акаїке (AIC). Критерій AIC дозволив оцінити відносну якість моделей з урахуванням кількості параметрів та величини залишкової суми квадратів. На основі отриманих значень AIC було визначено модель, яка забезпечує найкраще співвідношення між адекватністю та складністю. Отримані апроксимації забезпечують високу точність і можуть бути використані для швидкого обчислення критичних значень. Результати дослідження дозволяють розширити можливості застосування тесту Андерсона – Дарлінга в практичних задачах статистичного аналізу.

Ключові слова: одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга, ймовірнісний розподіл, інтегральна функція розподілу, критичні точки, апроксимація функціональних залежностей, інформаційний критерій Акаїке.

H. YA. TULUCHENKO

NEW APPROACHES TO APPROXIMATION OF CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF STATISTICS FOR DIFFERENT MODIFICATIONS OF THE ONE-SAMPLE ANDERSON-DARLING TEST

The one-sample Anderson-Darling test is a powerful tool for testing the hypothesis that a sample corresponds to a theoretical distribution. However, the calculation of critical points for this test is a rather resource-intensive task, given the complexity of expressions for the integral functions of the distribution of statistics for all modifications of this test with different weight functions. The purpose of this paper is to develop effectual methods to approximate the integral distribution functions of the Anderson-Darling test statistics. In particular, the study is aimed at finding functional dependencies that would asymptotically coincide with the given distributions, while ensuring high accuracy of approximation in the area of deviations from the null hypothesis. The paper proposes two new methods for approximating integral functions for the statistics of this test. The proposed methods allow preserving the accuracy of calculating the critical values of the criterion at lower computational costs. The first method is to represent the statistics from the Anderson-Darling test as a complex random variable, which is a linear combination of two random variables: with exponential and linear distributions, respectively. The second method is to use a generalized probability distribution, which is proposed to include the Weibull distribution. The parameters of each of these approximation models were estimated using the least squares method. To select the optimal model, the models were compared using the Akaike's Information Criterion (AIC). The AIC criterion allowed us to compare the models' relative quality based on account the number of parameters and the value of the residual sum of squares. Based on the obtained AIC values, the model that provides the best balance between adequacy and complexity was identified. The obtained approximations provide high accuracy and can be used to quickly calculate critical values. The results of the study allow us to expand the possibilities of applying the Anderson-Darling test in practical tasks of statistical analysis.

Key words: one-sample Anderson-Darling test, probability distribution, cumulative distribution function, significance points, approximation of functional dependencies, Akaike information criterion.

Вступ. Одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга – це потужний інструмент для оцінки відповідності експериментальних даних заданому теоретичному розподілу. Але не всі програмні реалізації тесту Андерсона – Дарлінга підтримують перевірку відповідності довільному теоретичному розподілу. У програмних пакетах цей тест найчастіше використовується для перевірки відповідності даних нормальному закону розподілу. Наприклад: пакет *R* (бібліотека `nortest`, команда `ad.test`), *Python* (бібліотека `scipy.stats`, команда `stats.anderson`) та *SPSS* (процедура `Explore` з інтерактивним вибором відповідної опції), *MATLAB* (пакети `Statistics and Machine Learning Toolbox`, команда `adtest`) та інші.

Для вибірок великих об'ємів обчислення статистики тесту є досить ресурсомісткими, тому доцільно використовувати оптимізовані алгоритми її обчислення.

Аналіз останніх досліджень. Для оцінки величини відхилення емпіричного розподілу від заданого розподілу одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга використовує статистику:

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 \cdot \psi(F(x)) dF(x), \quad (1)$$

де $u = F(x)$ – інтегральна функція відомого теоретичного розподілу; $F_n(x)$ – інтегральна функція емпіричного розподілу; $\psi(u)$ – вагова функція; n – об'єм вибірки [1].

Статистика W_n^2 є випадковою величиною. Будемо позначати цю випадкову величину Z_1 , коли вагова функція з формули (1) $\psi(u) \equiv 1$, та Z_2 , коли вагова функція $\psi(u) \equiv \frac{1}{u(1-u)}$.

Вагова функція в тесті Андерсона – Дарлінга дозволяє зосередити увагу на певних областях розподілу. Коли використовується вагова функція $\psi(u) \equiv \frac{1}{u(1-u)}$ більша вага надається відхиленням у «хвостах» розподілу.

Це робить тест Андерсона – Дарлінга більш чутливим до відхилень саме в цих областях.

Коли вагова функція тотожно дорівнює 1, тоді всі відхилення між емпіричною та теоретичною функціями розподілу отримують однакову вагу, тобто в цьому випадку тест є *рівномірно чутливим* до відхилень по всій області розподілу, а не саме в «хвостах». Також відзначимо, що тест Андерсона – Дарлінга з ваговою функцією $\psi(u) \equiv 1$ за своїми властивостями наближається до *тесту Крамера – фон Мізеса*.

Для випадкових величин Z_1 та Z_2 Андерсон і Дарлінг отримали такі вирази інтегральних функцій для вибірок великих об'ємів:

$$A_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{4j+1} \cdot \exp\left(-\frac{(4j+1)^2}{16z}\right) \cdot K\left(\frac{1}{4}, \frac{(4j+1)^2}{16z}\right), \quad (2)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція; $K(\mu, x)$ – модифікована функція Бесселя другого роду [1];

$$A_2(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot (4j+1) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2(4j+1)^2}{16z}\right) \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{z}{8(\omega^2+1)} - \frac{\pi^2(4j+1)^2\omega^2}{8z}\right) d\omega. \quad (3)$$

Постановка задачі. При реалізації різних модифікацій тесту Андерсона – Дарлінга інтегральні функції розподілів відповідних статистик використовуються для визначення критичних точок. Ресурсомісткість аналітичного обчислення інтегральних функцій розподілу статистик тесту Андерсона – Дарлінга обмежує його застосування в практичних задачах.

Метою дослідження є розробка ефективних способів *апроксимації* інтегральних функцій розподілу статистики названого тесту. Для досягнення цієї мети необхідно з'ясувати можливість апроксимації інтегральних функцій розподілу статистик тесту лінійними комбінаціями відомих класичних розподілів або узагальненими розподілами, що дозволить суттєво спростити алгоритми обчислення критичних точок критерію.

Зокрема, дослідження спрямоване на знаходження *функціональних залежностей*, які б асимптотично збіглися з точними розподілами, забезпечуючи при цьому високу точність наближення в області відхилень від нульової гіпотези.

Основні результати. Для висунення гіпотез про можливі наближення законів розподілу випадкових величин Z_1 та Z_2 використаємо графіки їх інтегральних функцій розподілу (рис. 3 – 4) та диференціальних функцій розподілу (рис. 5 – 6). Графіки інтегральних функцій розподілу (рис. 3 – 4) є малоінформативним для висунення гіпотези про можливі розподіли випадкових величин.

За зовнішнім виглядом графіків диференціальних функцій розподілу (рис. 5 – 6) логічно висунути гіпотезу, що досліджувані розподіли випадкових величин Z_1 та Z_2 з задовільною точністю можна наблизити за допомогою *розподілу Вейбулла* або *Гамма-розподілу*. Але проведені розрахунки показали, що досягнути прийнятної точності наближення при цьому не вдається. Крім того, встановлено, що точність наближення погіршується асимптотично, коли здійснюються заходи з підвищення точності на ділянці в околі нуля.

При перевірці статистичних гіпотез рівень значущості α традиційно обирають таким, що $\alpha \leq 0.05$. Для знаходження критичних точок розв'язують рівняння:

$$F(z) = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Очевидно, що розв'язками рівняння (4) є значення $z \gg 0$.

Запропонуємо різні способи апроксимації інтегральних та диференціальних функцій розподілу статистик тесту Андерсона – Дарлінга.

Перший спосіб: лінійна комбінація класичних розподілів. Розглянемо випадкову величину, яка є зваженою сумою двох випадкових величин $U = \alpha X + (1-\alpha)Y$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Нехай випадкова величина X має експоненціальний розподіл:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

а випадкова величина Y має лінійний розподіл:

$$h(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{2}{a} \cdot \frac{ky+l}{ka+2l}, & 0 \leq y \leq a, \\ 0, & y > a. \end{cases} \quad (6)$$

Побудуємо інтегральну функцію розподілу складної випадкової величини $U = \alpha X + (1-\alpha)Y$:

$$F(u) = P(U \leq u) \quad (7)$$

за допомогою методів інтегрального числення з використанням диференціальних функцій розподілу (5) і (6).

Область Ω всіх можливих значень випадкової величини U показана на рис. 1 і рис. 2.

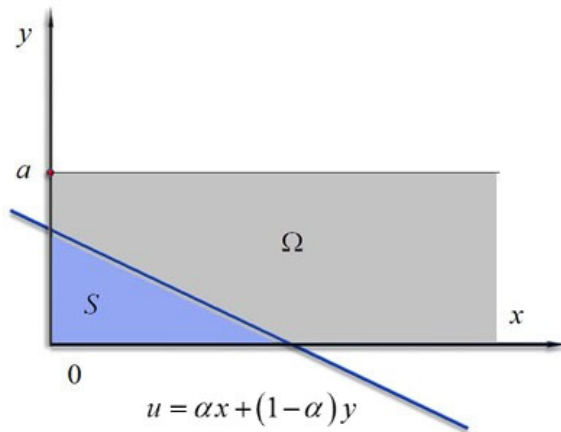


Рис. 1 – До обчислення інтегральної функції розподілу $F(u)$ на відрізку $0 \leq u < a$.

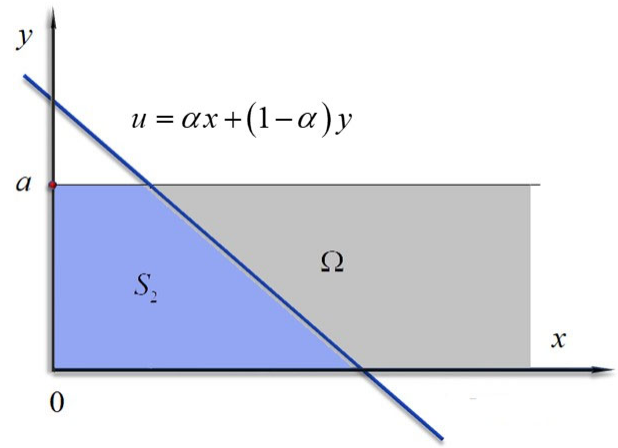


Рис. 2 – До обчислення інтегральної функції розподілу $F(u)$ на проміжку $u \geq a$.

Коли $0 \leq u < a$, тоді $F(u)$ дорівнює площі S_1 трикутника, який показаний на рис. 1:

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \int_0^u dy \int_{x=0}^{x=\frac{1}{\alpha}(u-(1-\alpha)y)} h(y)g(x) dx = \\ &= \int_0^u h(y)G\left(\frac{1}{\alpha} \cdot (u-(1-\alpha)y)\right) dy = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{ka+2l} \cdot \int_0^u (ky+l) \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} \cdot (u-(1-\alpha)y)\right)\right) dy = \\ &= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{ka+2l} \cdot \left(\frac{u}{2} \cdot (ku+2l) - \left(\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\lambda \cdot (1-\alpha)}{\alpha} \cdot (ku+l) - k\right) \cdot \exp(-\lambda u) - \left(\frac{\lambda \cdot (1-\alpha)}{\alpha} \cdot l - k\right) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} u\right) \right) \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Коли $u \geq a$, тоді $F(u)$ дорівнює площі S_2 трапеції, яка показана на рис. 2:

$$\begin{aligned} S_2(u) &= \int_0^a dy \int_{x=0}^{x=\frac{1}{\alpha}(u-(1-\alpha)y)} h(y)g(x) dx = \\ &= \int_0^a h(y)G\left(\frac{1}{\alpha} \cdot (u-(1-\alpha)y)\right) dy = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{ka+2l} \cdot \int_0^a (ky+l) \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha} \cdot (u-(1-\alpha)y)\right)\right) dy = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{ka+2l} \times \\ &\quad \times \left(\frac{a}{2} \cdot (ka+2l) - \left(\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\right)^2 \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left(\left(\frac{\lambda \cdot (1-\alpha)}{\alpha} \cdot (ka+l) - k \right) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\alpha} \cdot (u - (1-\alpha)a) \right) - \left(\frac{\lambda \cdot (1-\alpha)}{\alpha} \cdot l - k \right) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\alpha} u \right) \right) \quad (9)$$

Отже, інтегральна функція розподілу (7) складної випадкової величини $U = \alpha X + (1-\alpha)Y$ має вигляд:

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ S_1(u), & 0 \leq u \leq a, \\ S_2(u), & u > a, \end{cases} \quad (10)$$

де функції $S_1(u)$ та $S_2(u)$ визначаються за формулами (8) і (9) відповідно.

Для кожної з випадкових величин Z_1 та Z_2 виконаємо підгонку розподілу. Знайдемо значення параметрів розподілу (10) шляхом мінімізації суми квадратів відхилень значень інтегральної функції розподілу (10) від:

- 1) інтегральної функції розподілу (2),
- 2) інтегральної функції розподілу (3) –

в точках штучно згенерованих експериментальних послідовностей. Відзначимо, що точка a також підлягає встановленню.

Для проведення обчислювального експерименту були згенеровані послідовності точок:

$$u_j = jh, \quad j = \overline{0, 40},$$

де $h = 0.05$ для випадкової величини Z_1 ; $h = 0.1$ для випадкової величини Z_2 .

Значення параметрів розподілу (10) знайдемо завдяки розв'язанню задачі оптимізації:

$$Q(\lambda, k, l, a, \alpha) = \sum_{j=1}^N (F_i(u_j) - A_i(u_j))^2 \rightarrow \min, \quad (11)$$

з обмеженнями:

$$\lambda > 0, \quad h(0) \geq 0, \quad h(a) \geq 0, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (12)$$

Оптимізаційна задача (11 – 12) розв'язувалася для кожної інтегральної функції $A_1(z)$ та $A_2(z)$ окремо ($i = 1, 2$). Розрахунки виконувалися з подвійною точністю в системі комп'ютерної математики Maple. Для компактного подання в табл. 1 здійснено округлення до другого знаку після коми.

Таблиця 1 – Оптимальні значення параметрів розподілу (10) для апроксимації інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$

Параметри	$A_1(z)$	$A_2(z)$
λ	4.00	0.09
k	-1.54	-0.38
l	$-1.45 \cdot 10^{12}$	0.00
a	0.10	0.45
α	0.55	0.07
Q_{\min}	$8.00 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$

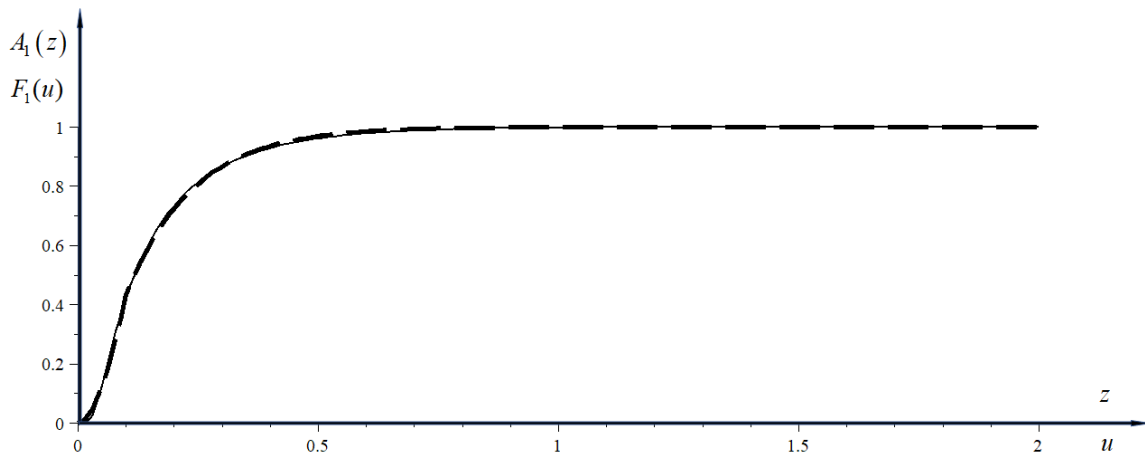


Рис. 3 – Графіки інтегральної функції розподілу $A_1(z)$ (суцільна лінія) та функції (10) (пунктирна лінія).

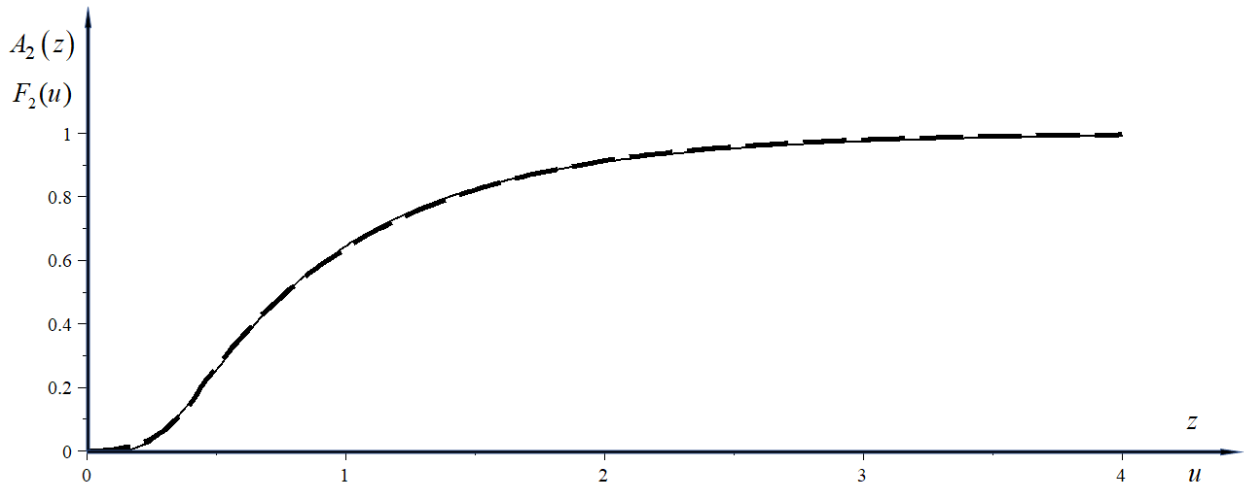


Рис. 4 – Графіки інтегральної функції розподілу $A_2(z)$ (суцільна лінія) та функції (10) (пунктирна лінія).

З мінімального значення суми квадратів відхилень Q_{\min} (табл. 1) та з рис. 3 – 4 очевидно, що точність апроксимації є прийнятною.

Другий спосіб: узагальнені розподіли. У роботі [2] запропонований новий узагальнений ймовірнісний розподіл та досліджено деякі його властивості. Сім'я інтегральних функцій цього розподілу має вигляд:

$$F(z) = (1 + \nu)^\omega \cdot \left(\frac{G(z)}{\nu + G(z)} \right)^\omega, \quad (13)$$

де $\nu > 0$, $\omega > 0$, $G(z)$ – інтегральна функція будь-якого неперервного розподілу.

У даній статті пропонується для наближення інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$ за функцію $G(z)$ у формулі (13) обирати інтегральну функцію розподілу Вейбулла:

$$G(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{\theta}\right)^c\right], \quad (14)$$

де $z \geq 0$, $\theta > 0$, $c > 0$.

Для проведення обчислювального експерименту були згенеровані послідовності точок:

$$u_j = jh, \quad h = 0.01,$$

де $j = \overline{0, 200}$ для випадкової величини Z_1 ; $j = \overline{0, 600}$ для випадкової величини Z_2 .

Оцінка точності наближення також визначалася за формулою (11) та враховувалися обмеження на значення коефіцієнтів у розподілі Вейбулла (14). Отримані результати підгонки інтегральних кривих $A_1(z)$ та $A_2(z)$ представлено в табл. 2 та на рис. 5 – 6.

Таблиця 2 – Оптимальні значення параметрів розподілу (13 – 14) для апроксимації інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$

Параметри	$A_1(z)$	$A_2(z)$
c	1.14	1.62
θ	0.23	1.87
ν	0.02	0.05
ω	20.50	4.53
Q_{\min}	$1.74 \cdot 10^{-7}$	$6.06 \cdot 10^{-6}$

Числові значення в табл. 2 також округлені для компактного представлення. Графіки отриманих кривих підгонки з параметрами з табл. 2 візуально не відрізняються від представлених на рис. 3 – 4, тому наведемо графіки відповідних диференціальних функцій розподілів.

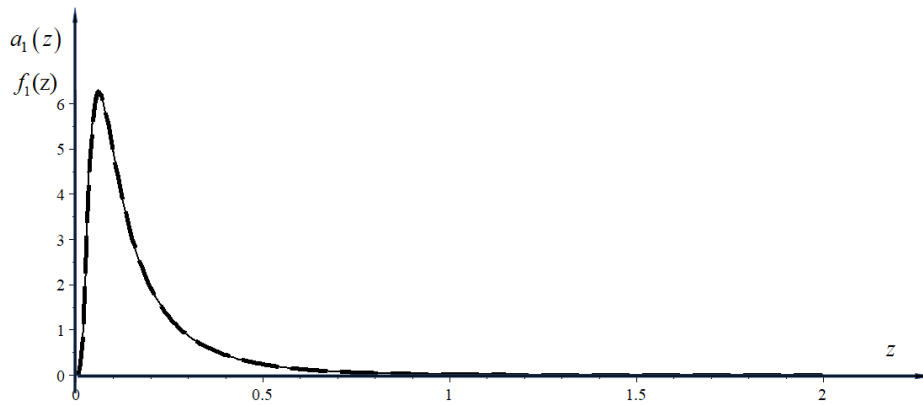


Рис. 5 – Графіки диференціальної функції розподілу $a_1(z) = \frac{d}{dz} A_1(z)$ (суцільна лінія) та функції $f_1(z) = \frac{d}{dz} F_1(z)$ відповідно до формули (13) і значень параметрів з табл. 2 (пунктирна лінія).

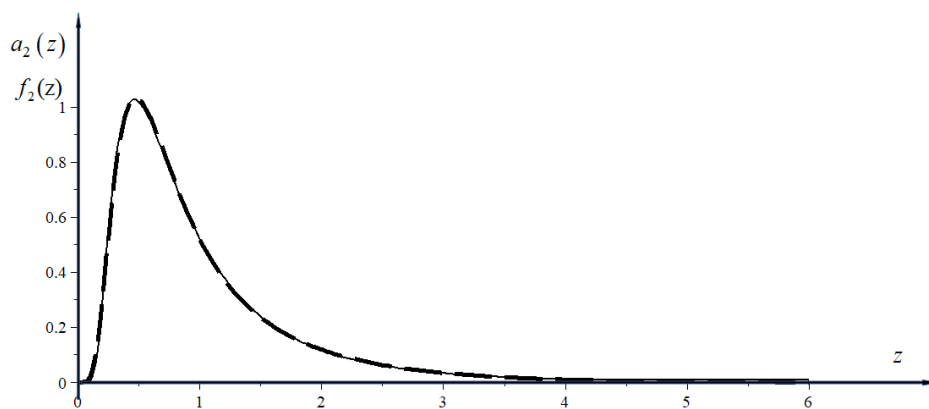


Рис. 6 – Графіки диференціальної функції розподілу $a_2(z) = \frac{d}{dz} A_2(z)$ (суцільна лінія) та функції $f_2(z) = \frac{d}{dz} F_2(z)$ відповідно до формули (13) і значень параметрів з табл. 2 (пунктирна лінія).

Окремі питання застосування другого способу до підгонки інтегральної функції розподілу $A_1(z)$ статистики критерію Андерсона – Дарлінга розглядалися в роботі [3] автора даної статті.

Перспективи подальших досліджень. Автор вважає перспективним проведення досліджень, пов'язаних з вивченням властивостей інших модифікацій тесту Андерсона – Дарлінга.

Висновки. Оцінимо якість запропонованих моделей на основі їх складності та точності апроксимації, яка досягається при їх використанні. Оскільки для кожної апроксимаційної моделі інтегральної функції розподілу сума квадратів відхилень від значень в експериментальних точках від значень інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$ вже відомі (табл. 1 та табл. 2), тому для вказаної оцінки можемо залучити *модифіковану формулу інформаційного критерію Акаїке (AIC)* [4], що використовує відповідну суму квадратів відхилень (RSS – Residual Sum of Squares):

$$AIC = n \cdot \ln \frac{RSS}{n} + 2p + n(1 + \ln(2\pi)) \quad (15)$$

або формулу критерію, що модифікована до вибірок малих об'ємів:

$$AICc = AIC + \frac{2p(p+1)}{n-p-1}. \quad (16)$$

Модель (10) містить 5 параметрів: λ , k , l , a , α , тому для неї $p = 6$. Модель (13 – 14) містить 4 параметри: c , θ , v , ω , тому для неї $p = 5$.

Для обчислення значення критерію Акаїке для вибірок об'ємом $n = 40$ будемо використовувати формулу (16), для вибірок більших об'ємів – формулу (15).

У тексті статті RSS позначена як Q_{\min} .

Очевидно (табл. 3), що за критерієм Акаїке до практичного використання слід рекомендувати модель (10) при наближенні інтегральних функцій $A_1(z)$ та $A_2(z)$ як більш просту. Проте критерій Акаїке не враховує того факту, що модель (10) в загальному випадку є кусково-гладкою функцією, що може створювати специфічні ускладнення при її використанні. Зокрема, відповідна диференціальна функція розподілу, отримана на основі моделі (10), може бути кусково-неперервною.

Таблиця 3 – Значення критерію АІС для моделі (10) та для моделі (13 – 14)

Моделі	$A_1(z)$	$A_2(z)$
Модель (10)	-305	-295
Модель (13-14)	-3600	-9330

Зважаючи на малі значення RSS для обох моделей ці моделі можуть бути рекомендовані до практичного використання з врахуванням їх властивостей.

Список літератури

1. D'Agostino R. B., Stephens M. A. (Eds.) Goodness-Of-Fit-Techniques. In Series: Statistics, textbooks and monographs. – New York and Basel: Marcel Dekker, Ink., 1986. – Vol. 68. – 584 p.
2. Laxmi Prasad Sapkota, Nirajan Bam, Vijay Kumar. A New Exponential Family of Distribution with Applications to Engineering and Medical Data. Preprints. – 2024. – 19 p. DOI:10.21203/rs.3.rs-4522315/v1.
3. Tuluchenko H. Ya. Fitting of the cumulative function for a distribution of statistic from the one-sample Anderson – Darling test // Bogolyubov Kyiv Conference Problems of Theoretical and Mathematical Physics dedicated to the 115th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909–1992). – Ukraine, Kyiv : National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, September 24–26, 2024.
4. Burnham K. P., Anderson D. R. (2004), Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection // Sociological Methods & Research. – 2004. – Vol. 33. – Issue 2. – P. 261 – 304. DOI:10.1177/0049124104268644.

References (transliterated)

1. D'Agostino R. B., Stephens M. A. (Eds.) Goodness-Of-Fit-Techniques. In Series: Statistics, textbooks and monographs. – New York and Basel: Marcel Dekker, Ink., 1986, Vol. 68, 584 p.
2. Laxmi Prasad Sapkota, Nirajan Bam, Vijay Kumar. A New Exponential Family of Distribution with Applications to Engineering and Medical Data. Preprints. 2024, 19 p. DOI:10.21203/rs.3.rs-4522315/v1.
3. Tuluchenko H. Ya. Fitting of the cumulative function for a distribution of statistic from the one-sample Anderson – Darling test. *Bogolyubov Kyiv Conference Problems of Theoretical and Mathematical Physics dedicated to the 115th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909–1992)*. Ukraine, Kyiv : National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, September 24–26, 2024.
4. Burnham K. P., Anderson D. R. Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection. *Sociological Methods & Research*. 2004, Vol. 33, Issue 2, pp. 261–304. DOI:10.1177/0049124104268644.

Надійшла (received) 17.11.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Тулученко Галина Яківна – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-70-60; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6196-540X>; e-mail: tuluchenko@ukr.net.

Tuluchenko Halyna Yakivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 465-70-60; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6196-540X>; e-mail: tuluchenko@ukr.net.

ЗМІСТ

<i>Абрамов Г. С., Макарчук Д. В.</i> Математичне моделювання надійності навігаційного комплексу методами теорії масового обслуговування	3
<i>Андрєєв Ю. М., Головня О. О., Шабанов Г. В.</i> Автоматичний вибір конфігурації просторового маніпулятора з шістьма степенями свободи на підставі енергетичних витрат на заданому русі.....	13
<i>Бомба А. Я., Мороз І. П., Лістьєв З. С.</i> Використання сучасних інформаційних технологій в системах автоматизованого розв'язання сингулярно збурених задач	24
<i>Душкін В. Д.</i> Застосування методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів для отримання математичних моделей задач електродинаміки	36
<i>Мельник О. С., Козаревич В. О.</i> Мажоритарні наносхеми регістрів	50
<i>Nikolaev O. G., Krainichenko A. S.</i> Some problems for transversal isotropic space with periodic anti-crack packages	55
<i>Троценко Я. П.</i> Чисельне моделювання течії рідини у циліндричному каналі, що містить дві діафрагми зі змінним діаметром отворів	65
<i>Тулученко Г. Я.</i> Нові підходи до апроксимації інтегральних функцій розподілу статистик для різних модифікацій одновибіркового тесту Андерсона-Дарлінга	73

CONTENTS

Abramov G. S., Makarchuk D. V. Mathematical modeling of the reliability of the navigation complex using queuing systems theory	3
Andriev YU. M., Holovnia O. O., Shabanov H. V. Automatic selection of a spatial manipulator configuration with six degrees of freedom based on energy consumption for a given motion	13
Bomba A. YA., Moroz I. P., Listiev Z. S. Use of modern information technologies in systems for automated solution of singularly perturbed problems.....	24
Dushkin V. D. Application of the method of parametric representations of singular and hypersingular operators for obtaining mathematical models of electrodynamics problems	36
Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Majority register nanocircuits.....	50
Nikolaev O. G., Krainichenko A. S. Some problems for transversal isotropic space with periodic anti-crack packages.....	55
Trotsenko YA. P. Numerical simulation of fluid flow in a cylindrical duct with two diaphragms of variable orifice diameters	65
Tuluchenko H. YA. New approaches to approximation of cumulative distribution functions of statistics for different modifications of the one-sample ANDERSON-DARLING TEST	73

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 2 (7) ' 2024

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.
Мовний рецензент української мови асистент Католик І. М.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 25.12.2024 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 1025. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.