УДК 519.2 DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02(7).08

Г. Я. ТУЛУЧЕНКО

НОВІ ПІДХОДИ ДО АПРОКСИМАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ СТАТИСТИК ДЛЯ РІЗНИХ МОДИФІКАЦІЙ ОДНОВИБІРКОВОГО ТЕСТУ АНДЕРСОНА-ДАРЛІНГА

Одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга є потужним інструментом для перевірки гіпотези про відповідність вибірки теоретичному розподілу. Однак, обчислення критичних точок для цього тесту є досить ресурсомістким завданням, враховуючи складність виразів для інтегральних функцій розподілу статистик для всіх модифікацій цього тесту з різними ваговими функціями. Мета даної роботи полягає в розробці ефективних способів апроксимації інтегральних функцій розподілу статистики тесту Андерсона – Дарлінга. Зокрема, дослідження спрямоване на знаходження функціональних залежностей, які б асимптотично збігалися з заданими розподілами, забезпечуючи при цьому високу точність наближення в області відхилень від нульової гіпотези. У статті запропоновано два нових способи апроксимації інтегральних функцій для статистик цього тесту. Запропоновані способи дозволяють зберегти точність обчислення критичних значень критерію при менших обчислювальних витратах. Перший спосіб полягає в представленні статистики з тесту Андерсона – Дарлінга як складної випадкової величини, яка є лінійною комбінацією двох випадкових величин: з експоненціальним та з лінійним розподілами відповідно. Другий спосіб полягає у використанні узагальненого ймовірнісного розподілу, до складу якого запропоновано ввести розподіл Вейбулла. Параметри кожної з вказаних моделей апроксимації були оцінені методом найменших квадратів. Для вибору оптимальної моделі було проведено порівняння моделей за допомогою інформаційного критерію Акаіке (AIC). Критерій AIC дозволив оцінити відносну якість моделей з урахуванням кількості параметрів та величини залишкової суми квадратів. На основі отриманих значень AIC було визначено модель, яка забезпечує найкраще співвідношення між адекватністю та складністю. Отримані апроксимації забезпечують високу точність і можуть бути використані для швидкого обчислення критичних значень. Результати дослідження дозволяють розширити можливості застосування тесту Андерсона – Дарлінга в практичних задачах статистичного аналізу.

Ключові слова: одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга, ймовірнісний розподіл, інтегральна функція розподілу, критичні точки, апроксимація функціональних залежностей, інформаційний критерій Акаіке.

H. YA. TULUCHENKO

NEW APPROACHES TO APPROXIMATION OF CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF STATISTICS FOR DIFFERENT MODIFICATIONS OF THE ONE-SAMPLE ANDERSON-DARLING TEST

The one-sample Anderson-Darling test is a powerful tool for testing the hypothesis that a sample corresponds to a theoretical distribution. However, the calculation of critical points for this test is a rather resource-intensive task, given the complexity of expressions for the integral functions of the distribution of statistics for all modifications of this test with different weight functions. The purpose of this paper is to develop effectual methods to approximate the integral distribution functions of the Anderson-Darling test statistics. In particular, the study is aimed at finding functional dependencies that would asymptotically coincide with the given distributions, while ensuring high accuracy of approximation in the area of deviations from the null hypothesis. The paper proposes two new methods for approximating integral functions for the statistics of this test. The proposed methods allow preserving the accuracy of calculating the critical values of the criterion at lower computational costs. The first method is to represent the statistics from the Anderson-Darling test as a complex random variable, which is a linear combination of two random variables: with exponential and linear distributions, respectively. The second method is to use a generalized probability distribution, which is proposed to include the Weibull distribution. The parameters of each of these approximation models were estimated using the least squares method. To select the optimal model, the models were compared using the Akaike's Information Criterion (AIC). The AIC criterion allowed us to compare the models' relative quality based on account the number of parameters and the value of the residual sum of squares. Based on the obtained AIC values, the model that provides the best balance between adequacy and complexity was identified. The obtained approximations provide high accuracy and can be used to quickly calculate critical values. The results of the study allow us to expand the possibilities of applying the Anderson-Darling test in practical tasks of statistical analysis.

Key words: one-sample Anderson-Darling test, probability distribution, cumulative distribution function, significance points, approximation of functional dependencies, Akaike information criterion.

Вступ. *Одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга* – це потужний інструмент для оцінки відповідності експериментальних даних заданому *теоретичному розподілу*. Але не всі програмні реалізації тесту Андерсона – Дарлінга підтримують перевірку відповідності довільному теоретичному розподілу. У програмних пакетах цей тест найчастіше використовується для перевірки відповідності даних нормальному закону розподілу. Наприклад: пакет *R* (бібліотека nortest, команда ad.test), *Python* (бібліотека scipy.stats, команда stats.anderson) та *SPSS* (процедура Explore з інтерактивним вибором відповідної опції), *MATLAB* (пакети Statistics and Machine Learning Toolbox, команда adtest) та інші.

Для вибірок великих об’ємів обчислення *статистики* тесту є досить *ресурсомісткими*, тому доцільно використовувати *оптимізовані алгоритми* її обчислення.

Аналіз останніх досліджень. Для оцінки величини відхилення *емпіричного розподілу* від заданого розподілу одновибірковий тест Андерсона – Дарлінга використовує статистику:

$$W_n^2 = n\int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n(x) - F(x)\right)^2 \cdot \psi\left(F(x)\right) dF(x), \tag{1}$$

де $u = F(x)$ – інтегральна функція відомого теоретичного розподілу; $F_n(x)$ – інтегральна функція емпіричного розподілу; $\psi(u)$ – вагова функція; n – об’єм вибірки [1].

Статистика W_n^2 є випадковою величиною. Будемо позначати цю випадкову величину Z_1, коли вагова функція з формули (1) $\psi(u) \equiv 1$, та Z_2, коли вагова функція $\psi(u) \equiv \dfrac{1}{u(1-u)}$.

Вагова функція в тесті Андерсона – Дарлінга дозволяє зосередити увагу на певних областях розподілу. Коли використовується вагова функція $\psi(u) \equiv \dfrac{1}{u(1-u)}$ більша вага надається відхиленням у «хвостах» розподілу. Це робить тест Андерсона – Дарлінга більш чутливим до відхилень саме в цих областях.

Коли вагова функція тотожно дорівнює 1, тоді всі відхилення між емпіричною та теоретичною функціями розподілу отримують однакову вагу, тобто в цьому випадку тест є *рівномірно чутливим* до відхилень по всій області розподілу, а не саме в «хвостах». Також відзначимо, що тест Андерсона – Дарлінга з ваговою функцією $\psi(u) \equiv 1$ за своїми властивостями наближається до *тесту Крамера – фон Мізеса*.

Для випадкових величин Z_1 та Z_2 Андерсон і Дарлінг отримали такі вирази інтегральних функцій для вибірок великих об'ємів:

$$A_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j!\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{4j+1} \cdot \exp\left(-\frac{(4j+1)^2}{16z}\right) \cdot K\left(\frac{1}{4}, \frac{(4j+1)^2}{16z}\right), \tag{2}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція; $K(\mu, x)$ – *модифікована функція Бесселя* другого роду [1];

$$A_2(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j!\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot (4j+1) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 (4j+1)^2}{16z}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{z}{8\left(\omega^2+1\right)} - \frac{\pi^2 (4j+1)^2 \omega^2}{8z}\right) d\omega. \tag{3}$$

Постановка задачі. При реалізації різних модифікацій тесту Андерсона – Дарлінга інтегральні функції розподілів відповідних статистик використовуються для визначення критичних точок. Ресурсомісткість аналітичного обчислення інтегральних функцій розподілу статистик тесту Андерсона – Дарлінга обмежує його застосування в практичних задачах.

Метою дослідження є розробка ефективних способів *апроксимації* інтегральних функцій розподілу статистики названого тесту. Для досягнення цієї мети необхідно з'ясувати можливість апроксимації інтегральних функцій розподілу статистик тесту лінійними комбінаціями відомих класичних розподілів або узагальненими розподілами, що дозволить суттєво спростити алгоритми обчислення критичних точок критерію.

Зокрема, дослідження спрямоване на знаходження *функціональних залежностей*, які б асимптотично збігалися з точними розподілами, забезпечуючи при цьому високу точність наближення в області відхилень від нульової гіпотези.

Основні результати. Для висунення гіпотез про можливі наближення законів розподілу випадкових величин Z_1 та Z_2 використаємо графіки їх інтегральних функцій розподілу (рис. 3 – 4) та диференціальних функцій розподілу (рис. 5 – 6). Графіки інтегральних функцій розподілу (рис. 3 – 4) є малоінформативним для висунення гіпотези про можливі розподіли випадкових величин.

За зовнішнім виглядом графіків диференціальних функцій розподілу (рис. 5 – 6) логічно висунути гіпотезу, що досліджувані розподіли випадкових величин Z_1 та Z_2 з задовільною точністю можна наблизити за допомогою *розподілу Вейбулла* або *Гамма-розподілу*. Але проведені розрахунки показали, що досягнути прийнятної точності наближення при цьому не вдається. Крім того, встановлено, що точність наближення погіршується асимптотична, коли здійснюються заходи з підвищення точності на ділянці в околі нуля.

При перевірці статистичних гіпотез рівень значущості α традиційно обирають таким, що $\alpha \le 0.05$. Для знаходження критичних точок розв'язують рівняння:

$$F(z) = 1 - \alpha. \tag{4}$$

Очевидно, що розв'язками рівняння (4) є значення $z \gg 0$.

Запропонуємо різні способи апроксимації інтегральних та диференціальних функцій розподілу статистик тесту Андерсона – Дарлінга.

Перший спосіб: ***лінійна комбінація класичних розподілів.*** Розглянемо випадкову величину, яка є зваженою сумою двох випадкових величин $U = \alpha X + (1-\alpha)Y$, $0 \le \alpha \le 1$. Нехай випадкова величина X має експоненціальний розподіл:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \exp(-\lambda x), & x \ge 0, \end{cases} \tag{5}$$

а випадкова величина Y має лінійний розподіл:

$$h(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{ky+l}{ka+2l}, & 0 \le y \le a, \\ 0, & y > a. \end{cases} \tag{6}$$

Побудуємо інтегральну функцію розподілу складної випадкової величини $U = \alpha X + (1-\alpha)Y$:

$$F(u) = P(U \le u) \tag{7}$$

за допомогою методів інтегрального числення з використанням диференціальних функцій розподілу (5) і (6).

Область Ω всіх можливих значень випадкової величини U показана на рис. 1 і рис. 2.

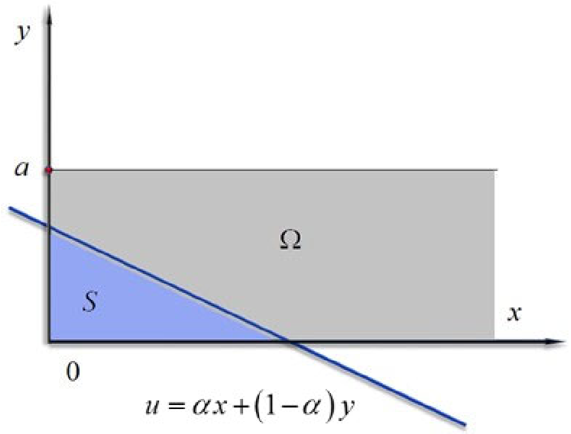

Рис. 1 – До обчислення інтегральної функції розподілу $F(u)$ на відрізку $0 \le u < a$.

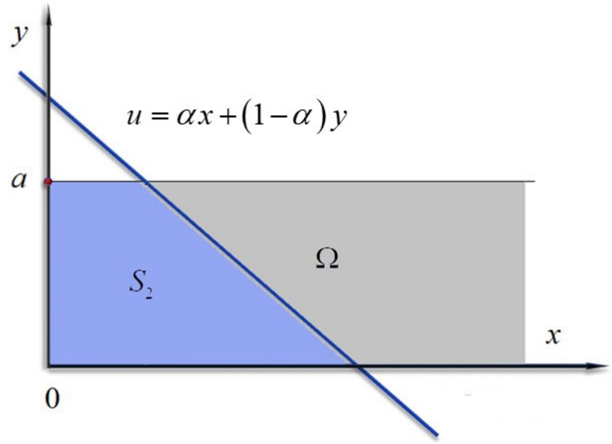

Рис. 2 – До обчислення інтегральної функції розподілу $F(u)$ на проміжку $u \ge a$.

Коли $0 \le u < a$, тоді $F(u)$ дорівнює площі S_1 трикутника, який показаний на рис. 1:

$$S_1(u) = \int_0^u dy \int_{x=0}^{x=\frac{1}{\alpha}\cdot(u-(1-\alpha)y)} h(y) g(x)\, dx =$$

$$= \int_0^u h(y) G\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\left(u-(1-\alpha)y\right)\right) dy = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{ka+2l}\cdot\int_0^u (ky+l)\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\left(u-(1-\alpha)y\right)\right)\right) dy =$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{ka+2l}\cdot\left(\frac{u}{2}\cdot(ku+2l) - \left(\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\lambda\cdot(1-\alpha)}{\alpha}\cdot(ku+l)-k\right)\cdot\exp(-\lambda u) - \left(\frac{\lambda\cdot(1-\alpha)}{\alpha}\cdot l - k\right)\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}u\right)\right)\right). \tag{8}$$

Коли $u \ge a$, тоді $F(u)$ дорівнює площі S_2 трапеції, яка показана на рис. 2:

$$S_2(u) = \int_0^a dy \int_{x=0}^{x=\frac{1}{\alpha}\cdot(u-(1-\alpha)y)} h(y) g(x)\, dx =$$

$$= \int_0^a h(y) G\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\left(u-(1-\alpha)y\right)\right) dy = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{ka+2l}\cdot\int_0^a (ky+l)\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\left(u-(1-\alpha)y\right)\right)\right) dy = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{ka+2l}\times$$

$$\times\left(\frac{a}{2}\cdot(ka+2l) - \left(\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\right)^2 \times\right.$$

$$\times\left(\left(\frac{\lambda\cdot(1-\alpha)}{\alpha}\cdot(ka+l)-k\right)\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\cdot\left(u-(1-\alpha)a\right)\right)-\left(\frac{\lambda\cdot(1-\alpha)}{\alpha}\cdot l-k\right)\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}u\right)\right)\right). \tag{9}$$

Отже, інтегральна функція розподілу (7) складної випадкової величини $U=\alpha X+(1-\alpha)Y$ має вигляд:

$$F(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ S_1(u), & 0\le u\le a,\\ S_2(u), & u>a,\end{cases} \tag{10}$$

де функції $S_1(u)$ та $S_2(u)$ визначаються за формулами (8) і (9) відповідно.

Для кожної з випадкових величин Z_1 та Z_2 виконаємо підгонку розподілу. Знайдемо значення параметрів розподілу (10) шляхом мінімізації суми квадратів відхилень значень інтегральної функції розподілу (10) від:

1) інтегральної функції розподілу (2),
2) інтегральної функції розподілу (3) –

в точках штучно згенерованих експериментальних послідовностей. Відзначимо, що точка $\boldsymbol{a}$ також підлягає встановленню.

Для проведення обчислювального експерименту були згенеровані послідовності точок:

$$u_j = jh\,,\quad j=\overline{0,40}\,,$$

де $h=0.05$ для випадкової величини Z_1; $h=0.1$ для випадкової величини Z_2.

Значення параметрів розподілу (10) знайдемо завдяки розв'язанню задачі оптимізації:

$$Q(\lambda,\,k,\,l,\,a,\,\alpha)=\sum_{j=1}^{N}\left(F_i\left(u_j\right)-A_i\left(u_j\right)\right)^2\to\min\,, \tag{11}$$

з обмеженнями:

$$\lambda>0\,,\ h(0)\ge 0\,,\ h(a)\ge 0\,,a>0\,,\ 0<\alpha<1\,. \tag{12}$$

Оптимізаційна задача (11 – 12) розв'язувалася для кожної інтегральної функції $A_1(z)$ та $A_2(z)$ окремо ($i=1,\ 2$). Розрахунки виконувалися з подвійною точністю в *системі комп'ютерної математики Maple*. Для компактного подання в табл. 1 здійснено округлення до другого знаку після коми.

Таблиця 1 – Оптимальні значення параметрів розподілу (10) для апроксимації інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$

Параметри	$A_1(z)$	$A_2(z)$
λ	4.00	0.09
k	–1.54	–0.38
l	$-1.45\cdot10^{12}$	0.00
a	0.10	0.45
α	0.55	0.07
$Q_{\min}$	$8.00\cdot10^{-4}$	$1.02\cdot10^{-3}$

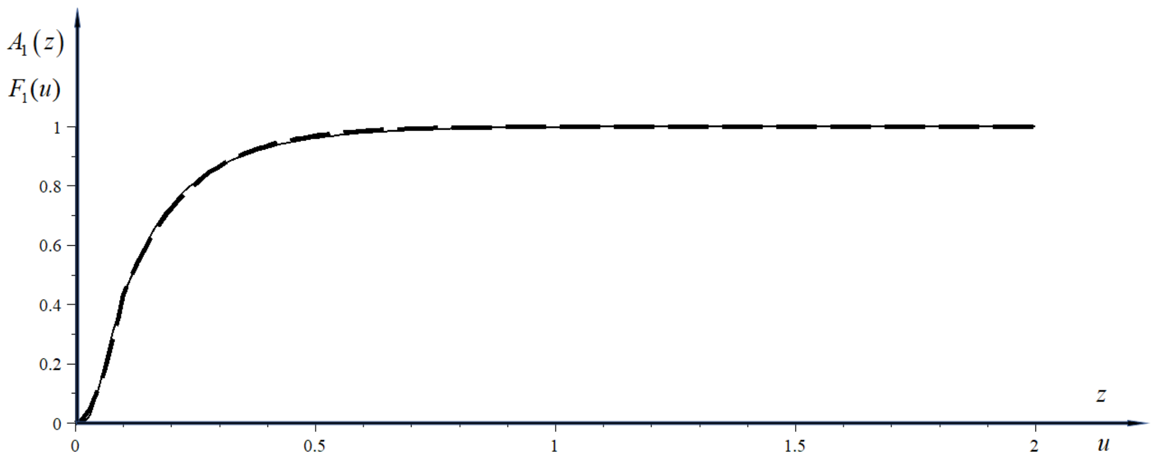

Рис. 3 – Графіки інтегральної функції розподілу $A_1(z)$ (суцільна лінія) та функції (10) (пунктирна лінія).

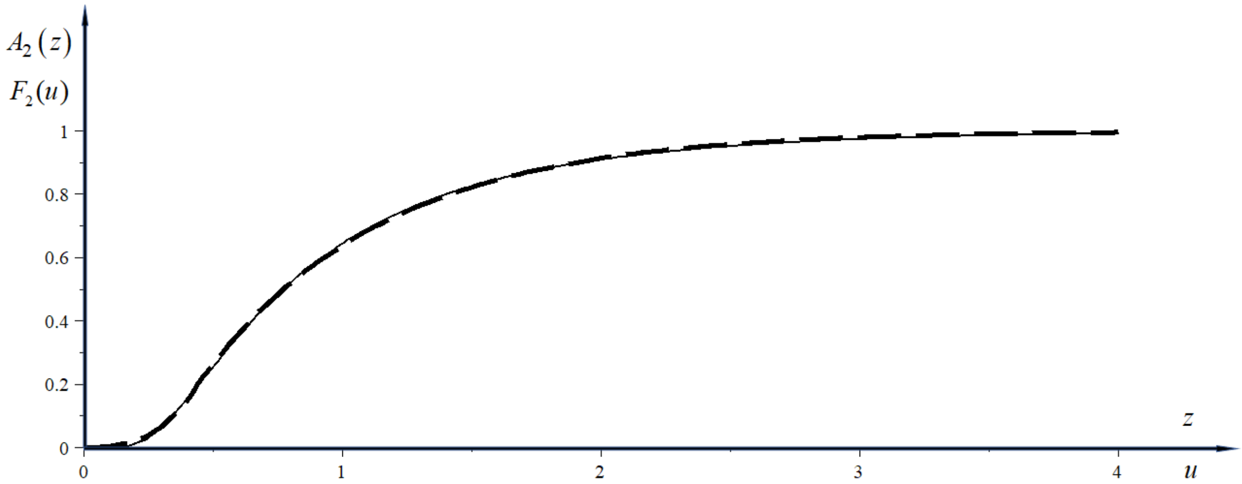

Рис. 4 – Графіки інтегральної функції розподілу $A_2(z)$ (суцільна лінія) та функції (10) (пунктирна лінія).

З мінімального значення суми квадратів відхилень $Q_{\min}$ (табл. 1) та з рис. 3 – 4 очевидно, що точність апроксимації є прийнятною.

Другий спосіб: ***узагальнені розподіли.*** У роботі [2] запропонований новий *узагальнений ймовірнісний розподіл* та досліджено деякі його властивості. Сім'я інтегральних функцій цього розподілу має вигляд:

$$F(z) = (1+v)^{\omega} \cdot \left(\frac{G(z)}{v+G(z)} \right)^{\omega}, \tag{13}$$

де $v > 0$, $\omega > 0$, $G(z)$ – інтегральна функція будь-якого неперервного розподілу.

У даній статті пропонується для наближення інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$ за функцію $G(z)$ у формулі (13) обирати інтегральну функцію розподілу Вейбулла:

$$G(z) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{z}{\theta} \right)^{c} \right), \tag{14}$$

де $z \ge 0$, $\theta > 0$, $c > 0$.

Для проведення обчислювального експерименту були згенеровані послідовності точок:

$$u_j = jh, \; h = 0.01,$$

де $j = \overline{0,200}$ для випадкової величини Z_1; $j = \overline{0,600}$ для випадкової величини Z_2.

Оцінка точності наближення також визначалася за формулою (11) та враховувалися обмеження на значення коефіцієнтів у розподілі Вейбулла (14). Отримані результати підгонки інтегральних кривих $A_1(z)$ та $A_2(z)$ представлено в табл. 2 та на рис. 5 – 6.

Таблиця 2 – Оптимальні значення параметрів розподілу (13 – 14) для апроксимації інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$

Параметри	$A_1(z)$	$A_2(z)$
c	1.14	1.62
θ	0.23	1.87
v	0.02	0.05
ω	20.50	4.53
$Q_{\min}$	$1.74 \cdot 10^{-7}$	$6.06 \cdot 10^{-6}$

Числові значення в табл. 2 також округлені для компактного представлення. Графіки отриманих кривих підгонки з параметрами з табл. 2 візуально не відрізняються від представлених на рис. 3 – 4, тому наведемо графіки відповідних диференціальних функцій розподілів.

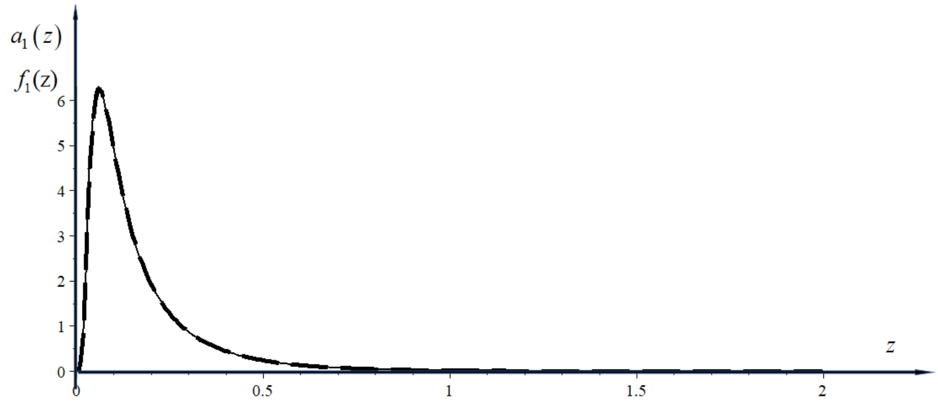

Рис. 5 – Графіки диференціальної функції розподілу $a_1(z)=\frac{d}{dz}A_1(z)$ (суцільна лінія) та функції $f_1(z)=\frac{d}{dz}F_1(z)$ відповідно до формули (13) і значень параметрів з табл. 2 (пунктирна лінія).

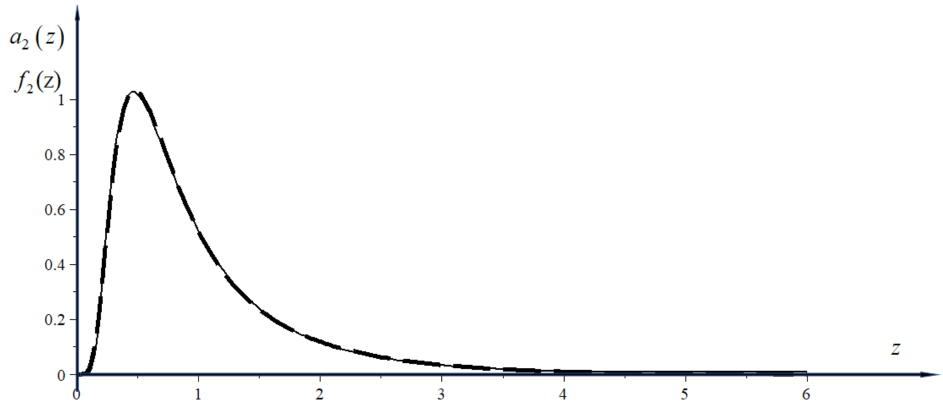

Рис. 6 – Графіки диференціальної функції розподілу $a_2(z)=\frac{d}{dz}A_2(z)$ (суцільна лінія) та функції $f_2(z)=\frac{d}{dz}F_2(z)$ відповідно до формули (13) і значень параметрів з табл. 2 (пунктирна лінія).

Окремі питання застосування другого способу до підгонки інтегральної функції розподілу $A_1(z)$ статистики критерію Андерсона – Дарлінга розглядалися в роботі [3] автора даної статті.

Перспективи подальших досліджень. Автор вважає перспективним проведення досліджень, пов’язаних з вивченням властивостей інших модифікацій тесту Андерсена – Дарлінга.

Висновки. Оцінимо якість запропонованих моделей на основі їх складності та точності апроксимації, яка досягається при їх використанні. Оскільки для кожної апроксимаційної моделі інтегральної функції розподілу сума квадратів відхилень від значень в експериментальних точках від значень інтегральних функцій розподілу $A_1(z)$ та $A_2(z)$ вже відомі (табл. 1 та табл. 2), тому для вказаної оцінки можемо залучити *модифіковану формулу інформаційного критерію Акаіке (AIC)* [4], що використовує відповідну суму квадратів відхилень (*RSS* – Residual Sum of Squares):

$$AIC = n\cdot\ln\frac{RSS}{n}+2p+n\big(1+\ln(2\pi)\big) \qquad (15)$$

або формулу критерію, що модифікована до вибірок малих об’ємів:

$$AICc = AIC+\frac{2p(p+1)}{n-p-1}. \qquad (16)$$

Модель (10) містить 5 параметрів: λ, k, l, a, α, тому для неї $p=6$. Модель (13 – 14) містить 4 параметри: c, θ, v, ω, тому для неї $p=5$.

Для обчислення значення критерію Акаіке для вибірок об’ємом $n=40$ будемо використовувати формулу (16), для вибірок більших об’ємів – формулу (15).

У тексті статті *RSS* позначена як $Q_{\min}$.

Очевидно (табл. 3), що за критерієм Акаіке до практичного використання слід рекомендувати модель (10) при наближенні інтегральних функцій $A_1(z)$ та $A_2(z)$ як більш просту. Проте критерій Акаіке не враховує того факту, що модель (10) в загальному випадку є кусково-гладкою функцією, що може створювати специфічні ускладнення при її використанні. Зокрема, відповідна диференціальна функція розподілу, отримана на основі моделі (10), може бути кусково-неперервною.

Таблиця 3 – Значення критерію AIC для моделі (10) та для моделі (13 – 14)

Моделі	$A_1(z)$	$A_2(z)$
Модель (10)	–305	–295
Модель (13-14)	–3600	–9330

Зважаючи на малі значення *RSS* для обох моделей ці моделі можуть бути рекомендовані до практичного використання з врахуванням їх властивостей.

Список літератури

1. *D'Agostino R. B.*, *Stephens M. A.* (Eds.) Goodness-Of-Fit-Techniques. In Series: Statistics, textbooks and monographs. – New York and Basel: Marcel Dekker, Ink., 1986. – Vol. 68. – 584 p.
2. *Laxmi Prasad Sapkota*, *Nirajan Bam*, *Vijay Kumar*. A New Exponential Family of Distribution with Applications to Engineering and Medical Data. Preprints. – 2024. – 19 p. DOI:10.21203/rs.3.rs-4522315/v1.
3. *Tuluchenko H. Ya*. Fitting of the cumulative function for a distribution of statistic from the one-sample Anderson – Darling test // Bogolyubov Kyiv Conference Problems of Theoretical and Mathematical Physics dedicated to the 115th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909–1992). – Ukraine, Kyiv : National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, September 24–26, 2024.
4. *Burnham K. P.*, *Anderson D. R.* (2004), Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection // Sociological Methods & Research. – 2004. – Vol. 33. – Issue 2. – P. 261 – 304. DOI:10.1177/0049124104268644.

References (transliterated)

1. D'Agostino R. B., Stephens M. A. (Eds.) Goodness-Of-Fit-Techniques. In Series: Statistics, textbooks and monographs. – New York and Basel: Marcel Dekker, Ink., 1986, Vol. 68, 584 p.
2. Laxmi Prasad Sapkota, Nirajan Bam, Vijay Kumar. A New Exponential Family of Distribution with Applications to Engineering and Medical Data. Preprints. 2024, 19 p. DOI:10.21203/rs.3.rs-4522315/v1.
3. Tuluchenko H. Ya. Fitting of the cumulative function for a distribution of statistic from the one-sample Anderson – Darling test. *Bogolyubov Kyiv Conference Problems of Theoretical and Mathematical Physics dedicated to the 115th anniversary of M.M. Bogolyubov (1909–1992)*. Ukraine, Kyiv : National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, September 24–26, 2024.
4. Burnham K. P., Anderson D. R. Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection. *Sociological Methods & Research*. 2004, Vol. 33, Issue 2, pp. 261–304. DOI:10.1177/0049124104268644.

Надійшла (received) 17.11.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Тулученко Галина Яківна – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 465-70-60; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6196-540X; e-mail: tuluchenko@ukr.net.

Tuluchenko Halyna Yakivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 465-70-60; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6196-540X; e-mail: tuluchenko@ukr.net.