

В. Д. ДУШКІН

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНИХ ПОДАЇВ СИНГУЛЯРНИХ ТА ГІПЕРСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ОТРИМАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

У роботі дається аналіз практики застосування методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів (PR-методу) для розв'язання задач електродинаміки. Цей метод був розроблений у дев'яностих роках двадцятого сторіччя Ю. В. Ганделем і є узагальненням методу парних суматорних та інтегральних рівнянь. Він ґрунтується на застосуванні властивостей псевдодиференціальних сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів. Застосування цього підходу дозволяє зводити розв'язання крайових задач для рівняння Гельмгольца з граничними умовами Дирихле, Неймана або Робена до систем граничних інтегральних рівнянь. В залежності від постановки початкових крайових задач отримані системи граничних рівнянь можуть містити інтегральні оператори, які потрібно розглядати у сенсі головного значення за Коші або скінченної частини за Адамаром. Також граничні інтегральні рівняння можуть містити інтеграли зі змінною верхньою межею, а підінтегральні вирази цих рівнянь, окрім регулярної частини, можуть містити доданки зі слабкою логарифмічною особливістю, доданки з неусувною особливістю першого роду. Для знаходження наближених розв'язків систем граничних інтегральних рівнянь використовувались алгоритми методу дискретних особливостей. Метод параметричних подань інтегральних операторів дозволив побудувати математичні моделі процесів збудження надрозмірних неперіодичних гребінок структур потоком електронів, розподілу поля власних мод у прямокутному хвилеводному каналі з гребінчастими канавками, електродинамічних процесів у гіротронах, поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах, дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання. Суттєві переваги цього підходу полягають у відсутності необхідності проведення додаткової аналітичної роботи при збільшенні подібних елементів структури та практичної нечутливості комп'ютерної реалізації моделі від розмірів елементів структури та їх взаємного розташування. Це робить перспективним застосування PR-методу для створення математичних моделей багатопарових квазіфрактальних структур.

Ключові слова: параметричні подання, сингулярні та гіперсингулярні інтегральні оператори, системи граничних інтегральних рівнянь, метод дискретних особливостей, математичні моделі, задачі електродинаміки.

V. D. DUSHKIN

APPLICATION OF THE METHOD OF PARAMETRIC REPRESENTATIONS OF SINGULAR AND HYPERSINGULAR OPERATORS FOR OBTAINING MATHEMATICAL MODELS OF ELECTRODYNAMICS PROBLEMS

This paper analyzes the practice of using the method of parametric representations of singular and hypersingular integral operators (PR-method) to solve electrodynamics problems. This method was developed in the nineties of the twentieth century by Y. V. Gandel and is a generalization of the method of coupled summation and integral equations. It is based on the use of the properties of pseudo-differential singular and hypersingular integral operators. The application of this approach allows us to reduce the solution of boundary value problems for the Helmholtz equation with Dirichlet, Neumann, or Robin boundary conditions to systems of boundary integral equations. Depending on the formulation of the initial boundary value problems, the resulting systems of boundary value equations may contain integral operators that should be considered in the sense of a Cauchy principal value or a finite part by Hadamard. Also, boundary integral equations may contain integrals with a variable upper bound. The integrand of these equations, in addition to the regular and singular part, may contain terms with a weak logarithmic singularity and terms with a step functions. To find approximate solutions of systems of boundary integral equations, algorithms of the discrete singularities method were used. The method of parametric representations of integral operators made it possible to construct mathematical models of the processes of excitation of superdimensional non-periodic structures with rectangular irregularities by the flow of electrons, processes of propagation of natural waves in waveguides, electrodynamic processes in gyrotrons, propagation of electromagnetic waves in axially symmetric waveguides, diffraction of an arbitrary electromagnetic wave on an arbitrary surface of rotation. Significant advantages of this approach are the absence of the need for additional analytical work when enlarging such structure elements and the practical non-sensitivity of the computer implementation of the model to the size of the structure elements and their relative position. This makes it promising to use the PR-method to create mathematical models of multilayer quasi-fractal structures.

Key words: parametric representations, singular and hypersingular integral operators, systems of boundary value integral equations, discrete singularities method, mathematical models, problems of electrodynamics.

Вступ. У цьому році виповнилось дев'яносто років з дня народження *Ю. В. Ганделя*. У його наукових роботах розроблено *спосіб чисельного розв'язання багатьох задач електродинаміки*. Він передбачає на першій стадії зведення початкових *крайових задач для рівнянь Гельмгольца* до систем *інтегральних рівнянь* різних типів, зокрема *сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь першого та другого роду*. Для отримання цих рівнянь використовувався створений Юрієм Володимировичем *метод параметричних подань* сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. На другій стадії отримання розв'язків задачі ці системи інтегральних рівнянь розв'язуються чисельно за допомогою обчислювальних схем *методу дискретних особливостей*. **Метою** цієї роботи було проведення огляду задач, для яких було застосовано цей підхід і визначення перспектив його застосування.

Аналіз проведених досліджень. Цей підхід розв'язання задач електродинаміки та електростатики виник у вісімдесятих роках двадцятого сторіччя. Ідеї методу дискретних особливостей були запропоновані *С. М. Білоцерківським* у п'ятдесятих роках 20 сторіччя [1]. Спочатку він використовувався як *евристичний метод чисельного розв'язання* завдань аеродинаміки і мав назву *«метод дискретних вихорів»*. Заснований на фізичних міркуваннях метод дискретних вихорів дозволив ефективно чисельно вирішувати стаціонарні та нестационарні

нарні, лінійні та нелінійні задачі аеродинаміки з використанням обчислювальних машин. Надалі цей підхід знайшов широке застосування при моделюванні взаємодії тіл із потоками рідини чи газу.

У сімдесятих роках двадцятого сторіччя *Іван Кузьмич Ліфанов* розробив теоретичні основи використання методу дискретних вихорів як чисельного методу розв'язання *сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)* будь-якої природи [2], [3], [4]. Він отримав оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків до точних розв'язків задач. Цей метод, як метод чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь, отримав назву *метода дискретних особливостей (МДО)* [5]. У подальшому відбулось перенесення цього підходу на дослідження, розробку та математичне обґрунтування обчислювальних схем розв'язання нових типів інтегральних рівнянь [6] – [11].

Роботи Ю. В. Ганделя та І. К. Ліфанова продемонстрували можливість використання методу дискретних особливостей для вирішення широкого класу задач електростатики та електродинаміки [12] – [14]. Для застосування обчислювальних схем методу дискретних особливостей до розв'язання *задач дифракції* необхідно було знайти спосіб отримання сингулярних інтегральних рівнянь відповідних задач. У роботах [15], [16] були запропоновані способи отримання інтегральних двовимірних задач дифракції електромагнітних хвиль на періодичних решітках та решітках із скінченної кількості елементів. Ю. В. Гандель довів, що запропонований підхід дозволяє подібним чином, при виконанні певної аналітичної роботи пов'язаною зі специфікою задачі, отримувати граничні інтегральні рівняння багатьох задач дифракції хвиль, як на періодичних, так і на неперіодичних структурах. Цей метод отримав назву *метода парних суматорних та інтегральних рівнянь* [17].

Дослідження нових задач дифракції призвело до розгляду нових типів систем сингулярних і гіперсингулярних рівнянь та схем їх чисельного розв'язання. Зокрема розглядалися сингулярні інтегральні рівняння першого роду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) \frac{V_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_q(\xi), \quad (1)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad K_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0;$$

рішення яких повинні були задовольняти одну з двох систем додаткових умов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi_q| \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{q,p}(\tau) \frac{V_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = C_q, \quad |\xi_q| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad (2)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M), \quad Q_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0$$

або

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{V_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (3)$$

Математичне обґрунтування схем чисельного розв'язання таких рівнянь було дано у роботах Ю. В. Ганделя, С. В. Єрмоленко, І. К. Ліфанова та Т. С. Полянської [17] – [20]. Узагальнення результатів, отриманих у 80-х роках, за цим напрямком дано у роботах [21] – [23].

Популярність методу дискретних особливостей серед дослідників і бажання знайти форму обміну думками між науковцям, що працюють у цьому напрямку, сприяли виникненню ідеї проведення міжнародних наукових симпозіумів. Перший симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» відбувся у 1983 році, на цей час вже проведено двадцять один симпозіум з цього напрямку.

Протягом багатьох років проводився науковий семінар «Чисельне моделювання методами дискретних особливостей математичної фізики», науковим керівником якого був Ю. В. Гандель. На цьому семінарі заслуховувались наукові доповіді провідних фахівців України та світу, також він був школою для молодих вчених. У різні роки у його роботі приймали участь майбутні доктори наук: В. О. Міщенко, С. О. Стешенко, Г. Л. Сідельніков та кандидати наук: В. С. Булигін, О. В. Гавриляко, А. В. Гахов, С. В. Духопельніков, В. Д. Душкін, С. В. Жученко, О. С. Кононенко, О. В. Костенко, М. Б. Краснянський, Н. Н. Морозова, К. В. Несвіт, А. А. Носіч, М. Н. Самойленко та багато інших.

На механіко-математичному факультеті Харківського державного університету тривалий час викладались спеціальні курси, у яких викладались обчислювальні методи розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Матеріали цих курсів знайшли відображення в навчальних посібниках [24] – [26]. Незважаючи на навчальний характер цих видань, вони більше ста разів цитувались у наукових статтях.

Перші чисельні результати, отримані за допомогою методу парних суматорних та інтегральних рівнянь,

були отримані для задач дифракції, для яких існували алгоритми їх чисельного розв'язання за допомогою інших методів [27] – [31]. У подальшому ці результати послужили тестовими при чисельному моделюванні розсіювання електромагнітних хвиль на нових, більш складних електродинамічних структурах. Так, у роботах [32], [33] були представлені результати чисельного моделювання *дифракції плоскої монохроматичної хвилі на періодичній решітці*, що складається зі стрічок. Результати чисельного моделювання розсіювання електромагнітних хвиль дифракції на *неперіодичних системах стрічок та системах цилінрів* у нескінченних екранах наведені у роботах [34], [35].

Розрахунку основних параметрів *смушкових ліній передачі* методом дискретних особливостей присвячена робота [36]. У роботі [37] наведено метод отримання розв'язку СІР на всій осі з використанням МДО. Результати цього дослідження знайшли застосування в задачі дифракції на *системі замкнутих циліндрів* і під час розв'язування задач механіки деформованого твердого тіла.

Наступним етапом стало створення моделей дифракції на непласких структурах. Перші чисельні результати для непласких структур було отримано для випадку моделювання поширення хвилі в прямому хвилеводі зі ступінчастими перешкодами [38]. Ця структура розглядалася пізніше в роботі [39]. Моделі дифракції електромагнітних хвиль на періодичній гребінці та періодичній решітці, що складається з брусів, які ґрунтуються на чисельному розв'язанні за допомогою МДО, розглядалися в роботах [40], [41]. У роботах [42], [43] розглядається задача дифракції на ідеально провідному напівобмеженому хвилеводі з фланцем. Метод парних та суматорних інтегральних рівнянь дозволив також отримати граничні інтегральні рівняння розповсюдження електромагнітних хвиль у хвилеводах та провести чисельний експеримент по знаходженню власних частот деяких хвилеводів [44], [45].

У середині 90-х років стало зрозуміло, що спосіб отримання нових математичних моделей далеко виходить за рамки методу парних інтегральних і суматорних рівнянь. Аналізуючи і узагальнюючи способи зведення початкових крайових задач до систем сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь Ю. В. Гандель сформулював концепцію нового методу – *методу параметричного подання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних перетворень* [46] – [51]. У цей час лише в окремих роботах, заснованих на інших методах, розглядалися електродинамічні структури, що складаються з великої скінченної кількості неоднорідних елементів. Відсутність робіт за цим напрямом пояснювалася значним зростанням обсягу аналітичної роботи при збільшенні кількості елементів у решітці. Саме цього недоліку був позбавлений метод параметричних подань сингулярних інтегральних перетворень, що дає змогу без проведення додаткової аналітичної роботи використовувати математичний і програмний апарат для дослідження однотипних структур, які складаються з різного числа елементів.

Алгоритми розв'язання модельних задач та їх комп'ютерні реалізації дали змогу в досить короткий час отримати чисельні результати для моделювання нових електродинамічних систем, які або не були розглянуті за допомогою інших методів, або були недостатньо добре вивчені. Одним із таких напрямів стало моделювання *збудження надрозмірних електродинамічних структур потоком електронів*. Отримані результати чисельного експерименту викликали цікавість фахівців, що знайшло відображення у великій кількості публікацій [52] – [54].

Розроблений алгоритм розв'язання цієї задачі став основою для побудови математичних моделей електродинамічних процесів у хвилеводах [55]. У роботах Ю. В. Ганделя та В. В. Хорошуна розглядалися математичні моделі процесів поширення хвиль у неоднорідних середовищах [56] – [57].

Необхідність урахування неідеальної провідності елементів решіток призвела до розгляду крайових задач для *рівнянь Максвелла з узагальненими граничними умовами*. У випадку дослідження двовимірних задач початкові задачі зводились до крайових задач для *рівняння Гельмгольца з крайовими умовами третього роду (імпедансними граничними умовами)* [58] – [60]. Перехід до розгляду задач з граничними умовами третього роду (навіть у випадку тонких стрічкових структур) призвів до розгляду нових класів інтегральних рівнянь і розробки нових схем їхнього чисельного розв'язання [61] – [62]. Для знаходження розв'язків задач цього класу одночасно приходилось розглядати інтегральні рівняння різних типів. Так у роботах [61] – [62] розглядалися граничні інтегральні рівняння другого роду:

$$\frac{V_q^+(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau-\xi| \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^+(\xi, \tau) \frac{V_q^+(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{1,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad (4)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{q,p}^+(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0$

та сингулярні інтегральні рівняння першого роду, що містили інтеграли зі змінною верхньою межею:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi} \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}^-(\xi, \tau) \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} - \frac{h}{\pi} \int_{-1}^{\xi} \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = f_{2,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M). \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_q^-(\tau) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = 0 \quad (q = 1, \dots, M). \quad (6)$$

Задача, у якій розглядалися електродинамічні системи з скінченної кількості стрічок, розташованих над пласким екраном [63], призвели до розгляду систем рівнянь, розв'язання яких вимагало сумісного розв'язання рівнянь різних типів.

Наступним етапом досліджень стало створення моделей, у яких граничні умови третього роду розглядалися на всій поверхні [64]. У роботі [65], яка з'явилася у 1999 році, запропоновано модель дифракції $E - i H$ - поляризованих хвиль на неперіодичній гребінці, яка повністю вкрита надпровідним матеріалом. У роботі [66] розглядалася задача дифракції плоскої монохроматичної хвилі на надпровідному товстому металевому екрані зі щілинами, на усій поверхні якої розглядалися імпедансні умови.

Пріоритетним напрямком досліджень, що проводилися на межі століть, було створення моделей пристроїв високих енергій, зокрема *гіротронів*. Отримані в роботах Ю. В. Ганделя, Г. І. Загинайлова, О. С. Кононенка і С. О. Стешенка моделі та результати чисельного експерименту, що викликали неабиякий інтерес у фахівців, були опубліковані в авторитетних міжнародних журналах і представлені на авторитетних міжнародних конференціях [67] – [71].

Створення математичних моделей пристроїв високих енергій призвело до розгляду гіперсингулярних інтегральних рівнянь більш загального вигляду, ніж ті, які розглядалися у роботах Ю. В. Ганделя та О. С. Кононенка:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{(\tau - \xi)^2} \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{\xi - \tau} \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{d_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi - \tau| u_q(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) u_p(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = f_q(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q = 1, \dots, M); \quad (7)$$

розроблено та обґрунтовано методи їх чисельного розв'язання. Результати їх досліджень дано у роботі [72].

Одним з напрямків досліджень, що проводилися на початку 21-го століття, стало створення Ю. В. Ганделем і С. В. Духопельниковим моделей взаємодії електромагнітних хвиль зі структурами, які мали осьову симетрію. За допомогою методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів були створені математичні моделі процесів поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах, математичні моделі розсіювання $TE - i TM$ - хвиль на щілинах у прямому круговому циліндрі і моделі випромінювання з поздовжніх щілин у хвилеводі кругового перерізу [73], [74]. У подальшому ці роботи стали основою для проведення аналізу фізичних властивостей більш складних електродинамічних систем [75] – [78].

Дослідження, які проводили Ю. В. Гандель і О. О. Носіч, спочатку були пов'язані зі створенням *моделей рефлекторних антен* [79]. При цьому інтегральні рівняння, що були наслідками властивостей потенціалів першого та другого роду, розв'язувались чисельно за допомогою *методів Найстрема*. Надалі цей підхід привів до створення моделей електродинамічних лінз і відкритих хвилеводів, які дають змогу одержувати поля з необхідними фазовими й амплітудними характеристиками в заданих точках простору [79] – [83]. Проведені дослідження викликали великий інтерес у дослідників, про що свідчить велика кількість посилань на роботи [84], [85].

Ще один важливий напрямок досліджень був пов'язаний з розробкою методів розв'язання трьохвимірних задач, які не можна звести до розв'язання двовимірних задач. У роботах В. С. Булигіна і Ю. В. Ганделя розглядалася тривимірна задача дифракції електромагнітної хвилі на плоскому екрані з ідеальною провідністю, розташованому на межі розділу двох середовищ [86], [87]. Взаємодію акустичних хвиль із плоскими і плоскопаралельними структурами було розглянуто в роботах В. О. Міщенко та А. В. Гахова [88] – [90].

Потужність методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів була продемонстрована Ю. В. Ганделем, В. С. Булигіним при створенні математичних моделей задач дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання [91] – [94]. При побудові цих моделей розв'язання задач були отримані *спарені системи сингулярних та гіперсингулярних рівнянь зі змінними коефіцієнтами*, які не зустрічались у роботах інших дослідників. В. С. Булигін вперше для систем гіперсингулярних і сингулярних інтегральних рівнянь із змінними коефіцієнтами довів теорему існування та єдиності рішення у відповідних гільбертових просторах, побудував алгоритми їх числового розв'язання.

Чисельні експерименти, що проводяться, поставили питання про межу застосовності методу, про надійність отриманих результатів за граничних значень параметрів і ускладнення геометрії дифракційних структур. Цьому напрямку присвячено низку робіт В. О. Міщенка та його учнів [95] – [97]. У цих роботах обговорюються також питання раціональної організації процесу обчислень.

У 2012 вийшла монографія [98], у якій було дано докладний опис способів відомих на той час задач дифракції, а також методів їх чисельного розв'язання. У першій та другій главі цієї монографії викладено способи отримання систем сингулярних інтегральних рівнянь двовимірних задач дифракції ідеально провідних плоских та плоскопаралельних систем рефлекторів. Третя та четверта глави цієї монографії присвячені побудові математичних моделей задач дифракції на непласких системах періодичних та неперіодичних системах відбивачів. Виклад процедури отримання систем СІР задач дифракції на неідеально провідних структурах дано у п'ятій главі цієї монографії. Математичні моделі на базі СІР процесів поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах із перешкодами дано у шостій главі. Методи чисельного розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь задач, що розглядались у перших п'яти главах, викладені у шостій та сьомій главах цієї монографії.

У подальшому один з напрямів досліджень був пов'язаний з побудовою математичних моделей взаємодії електромагнітних полів з багат шаровими неідеально провідними структурами зокрема при наявності діелектричних шарів між системами відбивачів [99], [100].

У роботі [100] розглядались моделі на основі систем інтегральних рівнянь, що мали вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{V_q^+(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{c_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau-\xi| \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{1,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{2,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{1,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \end{aligned} \quad (8)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{i,q,p}(\xi,\tau) \in C^{\mu,\alpha}([-1,1] \times [-1,1]), \quad \alpha > 0;$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau-\xi} \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{1,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^+(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 Q_{2,q,p}(\xi,\tau) \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \\ & - \frac{h}{\pi} \int_{-1}^{\xi} \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_{2,q}(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \end{aligned} \quad (9)$$

$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad Q_{i,q,p}(\xi,\tau) \in C^{\mu,\alpha}([-1,1] \times [-1,1]), \quad \alpha > 0;$

$$\int_{-1}^1 \frac{V_q^-(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0 \quad (q=1, \dots, M). \quad (10)$$

Розв'язання цих систем рівнянь вимагало сумісного розв'язання інтегральних рівнянь різних типів.

Незважаючи на різницю класів інтегральних рівнянь, що розглядались при побудові більшості розглянутих моделей, усі вони мали одну спільну особливість: їх вигляд не залежав від кількості геометрично подібних елементів у структурі. Наслідком цього є можливість використовувати одну й ту ж комп'ютерну реалізацію цієї моделі для чисельного аналізу структур, кількість елементів яких суттєво розрізняється. Це дало можливість провести чисельний аналіз розсіювання електромагнітних хвиль на плоских імпедансних структурах, що складались з великої кількості стрічок, зокрема предфрактальної геометрії [101] – [104].

Також одна з переваг методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів полягає в існуванні декількох можливостей зведення розв'язання багатьох задач дифракції з періодичними умовами до систем інтегральних рівнянь. Отримані різними шляхами системи інтегральних рівнянь суттєво розрізняються за своєю структурою – вони містять рівняння різних типів: першого та другого роду, сингулярні або гіперсингулярні. Це дає змогу перевіряти отримані результати та доводити їх валідність. У роботах [105] – [107] наводяться результати комп'ютерного моделювання процесів розсіювання електромагнітних хвиль на періодичних системах неідеально провідних стрічок, що були проведені за допомогою різних підходів.

Так у цих роботах окрім комп'ютерної моделі, що базується на системі інтегральних рівнянь (4) – (6) розглядалась модель на основі граничних гіперсингулярних інтегралів другого роду:

$$hu_q(\xi) \sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_q(\tau)}{(\tau-\xi)^2} \sqrt{1-\tau^2} d\tau + \frac{d_q}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi-\tau| u_q(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{q,p}(\xi, \tau) u_p(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = f_q(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad (11)$$

$$|\xi| < 1, \quad (q=1, \dots, M), \quad K_{q,p}(\xi, \tau) \in C^{\mu, \alpha}([-1, 1] \times [-1, 1]), \quad \alpha > 0.$$

Модель дифракції E – поляризованих електромагнітних хвиль на періодичній системі резистивних стрічок, розташованих над імпедансним екраном, розглядалась у роботі [108].

Системи інтегральних рівнянь (4) – (6), (8) – (10), (7) та інші системи, які виникали при побудові математичних моделей процесів у електродинамічних системах, що містять неідеально провідні елементи не належать до класів, що розглядались у роботах [21] – [23], [72], [98]. Тому виникла задача розробки алгоритмів числового розв’язання цих систем та математичного обґрунтування збіжності наближень до точних розв’язків задач. Цим питанням присвячені роботи [109] – [112].

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, запропонований Ю. В. Ганделем метод параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів є потужним засобом отримання математичних моделей електродинамічних процесів у різних структурах. Він дозволяє розглядати як періодичні, так і неперіодичні структури, одношарові та багатошарові структури, напівпрозорі та відбиваючі структури, відкриті та хвилепровідні структури. У двовимірному випадку він дозволяє створювати моделі електродинамічних систем, які містять у своєму складі системи рефлекторів нульової та ненульової товщини. Цей підхід можна застосовувати для опису як ідеальнопровідних структур, так і структур, на межі яких виконуються узагальнені граничні умови. Також він дозволяє розглядати структури, що мають аксіальну симетрію.

Цей підхід є узагальненням методу парних суматорних та інтегральних рівнянь, який дозволив отримати граничні інтегральні рівняння багатьох класичних задач дифракції, а саме задач дифракції E – поляризованих та H – поляризованих хвиль на періодичних системах стрічок та брусів, та циліндрів. Також цей підхід дозволяв розглядати неперіодичні структури, що складались зі скінченної кількості стрічок, нескінченних товстих та тонких екранів з обмеженою кількістю щілин та інші. Отримані за допомогою цього методу граничні сингулярні інтегральні рівняння дозволяли застосовувати процедури методу дискретних особливостей для їх чисельного розв’язання.

Аналіз отриманих результатів довів, що алгоритми отримання нових граничних інтегральних рівнянь базуються на властивостях псевдодиференціальних інтегральних операторів і мають однакову послідовність дій при виконанні аналітичних перетворень для отримання граничних інтегральних рівнянь задач. Формалізація цих алгоритмів призвела до виникнення методу параметричного подання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних перетворень. У різні роки за допомогою цього підходу були розроблені наступні моделі:

- збудження надрозмірних неперіодичних гребінок структур потоком електронів;
- розподілу поля власних мод у прямокутній хвилеводній каналі с гребінчастими канавками;
- електродинамічних процесів у пристроях високих енергій, зокрема гіротронів;
- процесів поширення електромагнітних хвиль в аксіально-симетричних хвилеводах;
- розсіювання TE – і TM – хвиль на щілинах у прямому круговому циліндрі;
- дифракції довільної електромагнітної хвилі на довільній поверхні обертання;
- побудови електродинамічних лінз і відкритих хвилеводів з необхідними фазовими й амплітудними характеристиками в заданих точках простору;
- розсіювання та дифракції електромагнітних хвиль на періодичних та неперіодичних плоскопаралельних системах неідеальнопровідних стрічок;
- дифракції на системах щілин у товстому шарі, на границі якого задані імпедансні граничні умови;
- розсіювання електромагнітних хвиль на гребінках, на усій поверхні яких задані імпедансні граничні умови.

В процесі побудови цих моделей були отримані системи граничних інтегральних рівнянь різних типів. У різних моделях розглядались сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння першого та другого роду, які окрім головної особливості містили особливості і інших типів. Особливість структури систем граничних рівнянь призвела до необхідності побудови числових методів, які дозволяють сумісно розв’язувати граничні інтегральні рівняння різних типів. Для значної кількості систем таких рівнянь були доведені теореми існування та єдності розв’язку цих систем і була доведена збіжність наближених розв’язків до точних у відповідних гільбертових просторах.

Можливості методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів не вичерпані на цей час. Зокрема властивість незалежності аналітичного подання моделі та комп’ютерної реалізації моделі від кількості елементів подібних структур, їх геометричних розмірів і взаємного розташування дозволяє

використовувати переваги цього методу при розробці математичних моделей багатозарядних структур зі спеціальною геометрією рефлекторів, зокрема побудованими за принципами побудови квазіфрактальних структур. Досвід використання цього підходу при створенні математичних моделей деяких задач дифракції та розсіювання з узагальненими граничними умовами дозволяє зробити припущення про відсутність суттєвих обмежень у застосуванні цього підходу до розгляду моделей, що розглядають структури, виготовлені з матеріалів з специфічними електродинамічними властивостями.

Список літератури

1. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – Москва : Наука, 1965. – 239 с.
2. Лифанов И. К. О методе дискретных вихрей // ПММ. – 1979. – Т. 43. – № 1. – С. 184 – 188.
3. Лифанов И. К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // ДАН СССР. – 1980. – Т. 255. – № 5. – С. 1046 – 1050.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
6. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. Method of Discrete Vortices // CRC Press. – 1992. – 464 p.
7. Lifanov I. K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan : VSP, 1996. – 475 p.
8. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M. Hypersingular Integral Equations and their application. – London, New York, Washington : CRC Press, 2004. – 416 p.
9. Гутников В. А., Кирякин В. Ю., Лифанов И. К., Сетуха А. В. Математическое моделирование аэродинамики городской застройки. – М. : Пасьява, 2002. – 244 с.
10. Довгий С. О., Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных рівнянь. Теорія та застосування. – К. : Наукова думка, 2004 р. – 512 с.
11. Довгий С. А., Лифанов И. К., Черний Д. И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К. : Издательство «Юстион», 2016. – 380 с.
12. Гандель Ю. В., Лифанов И. К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики. В кн.: Научно-методические материалы по численным методам. – М. : ВВИА, 1985. – С. 3 – 13.
13. Гандель Ю. В., Лифанов И. К., Матвеев Л. Ф. Численное решение смешанных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. –Препринт / Институт Теоретической и Экспериментальной Физики. – Москва, 1984. – № 174. – 55 с.
14. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – Москва : Изд. АН СССР. – № 124. – 1986. – С. 166 – 183.
15. Гандель Ю. В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Вища школа, 1982. – Вып. 38. – С. 15 – 18.
16. Гандель Ю. В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Вища школа, 1983. – Вып. 40. – С. 33 – 36.
17. Гандель Ю. В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы : Дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.03 / Харьковский ун-т. – Харьков, 1994. – 359 с.
18. Полянская Т. С. К решению сингулярного интегрального уравнения на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1985. – Вып. 44. – С. 84 – 87.
19. Полянская Т. С. Численные методы решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с одномерными и кратными интегралами типа Коши и Гильберта. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 – вычислительная математика. – Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1988 г. – 138 с.
20. Еременко С. В. Исследование интегральных уравнений некоторых двумерных краевых задач и их численное решение. Дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1989. – 117 с.
21. Gandel Yu. V., Polyanskaya T. S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary-value Problems of Mathematical Physics // Journal of Soviet Mathematics. – New York, 1990. – Volume 48. – № 2. – P. 144 – 152.
22. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Polyanskaya T. S. On a justification of the method of discrete singularities in two-dimensional diffraction problems // Differ. Equ. – 31:9 (1995). – 1491 – 1497.
23. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems // Differ. Equ. – 39:9 (2003). – 1295 – 1307.
24. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов : учеб. пособие. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1991. – Ч. I. – 67 с.
25. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн : Учеб. пособие. Ч. II. – Харьков, 1992. – 145 с.
26. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Ч. I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : учеб. пособие. – Харьков : Изд-во Харьк. нац. ун-та, 2001. – 92 с.
27. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Солозуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков : Изд-во Харьк. ун-та. – 1973. – 278 с.
28. Petit R. Electromagnetic theory of gratings. – New York : Springer, 1980. – 284 p.
29. Colton D., Kress R. Integral equation methods in stringing. – Toronto, Singapore : Wiley Interscience Publication John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane, 1983.
30. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев : Наук. думка, 1984. – 344 с.
31. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – К. : Наук. думка, 1984. – 240 с.
32. Гандель Ю. В., Забуга Т. А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решетках. – Харьков, 1983. – 37 с. (Рукопись представлена Харьк. ун-том. Деп. в УкрНИИТИ 21 ноября 1983, № 1286 Ук-Д83).
33. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Численное решение сингулярного уравнения задач дифракции электромагнитных волн на решетке // Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1993. – 20 с. Деп. в УкрИНТЭИ № 208-УК93, 18.02.93.
34. Гандель Ю. В., Гавриляко О. В. Математическая модель дифракции на системе щелей в идеально проводящем слое // Интегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Зб. наук. праць. – Київ: Інститут математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 27 – 33.
35. Гавриляко О. В. Сингулярные интегральные уравнения задачи дифракции на ограниченной решётке, расположенной над импедансной

- плоскостью // В кн. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. – Минск. – 1996. – С. 50 – 57.
36. Гандель Ю. В. Математическое моделирование методом дискретных особенностей в теории полосковых линий передачи / В сб.: Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики". Ч. I. – Одесса, 1991. – С. 57 – 58.
 37. Гандель Ю. В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений на всей оси: В кн.: III Всесоюзный симпозиум "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента". – Тезисы докладов. – Харьков, 1987. – С. 49 – 51.
 38. Гандель Ю. В., Краснянский М. Б. Математическая модель на основе МДО для расчета ступенчатых неоднородностей в волноводах. // Тезисы докл. Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков, 1993. – С. 121 – 122.
 39. Гандель Ю. В., Краснянский М. Б. Математическая модель для расчета ступенчатой неоднородности в плоском волноводе // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ, 1998. – Вип. 1. – 1998. – С. 57 – 64.
 40. Dushkin V., Gandel Yu. V., Morozova N. Numerical realization for the diffraction problems on multielemental gratings // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ*94). – Kharkov, 1994. – pp. 95 – 98.
 41. Душкин В. Д. Алгоритмы численного решения двумерных краевых задач дифракции и численный эксперимент на их основе // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ : І-нт математики НАН України, 1998. – Вип. 2. – С. 71 – 87.
 42. Гандель Ю. В., Сидельников Г. Л. Математические модели для численного анализа дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем // Журнал Технической физики. – 1995. – Т. 65. – В. 7. – С. 143 – 153.
 43. Гандель Ю. В., Сидельников Г. Л. Об одном подходе к решению задачи дифракции на плоском волноводе с бесконечным фланцем // Доповіді НАН України. – 1995. – № 11. – С. 18 – 20.
 44. Гандель Ю. В., Морозова Н. Н. Математическая модель для вычисления собственных частот круговой мембраны, закрепленной по части границы // Интегральные преобразования... Збірник наукових праць. – Київ : НАН України, 1995. – Вип. 10. – С. 25 – 31.
 45. Gavril'yako O. Diffraction by a thick diaphragm in parallel-plate waveguide // MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114). – Kharkov, Ukraine, 1998. – pp. 372 – 374. – vol. 1, DOI: 10.1109/MMET.1998.709954.
 46. Гандель Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66.
 47. Гандель Ю. В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований аксиально симметричных краевых задач математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1996. – С. 72 – 73.
 48. Gandel Yu. V. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems // X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P.57 – 62.
 49. Gandel Y. V. The numerically analytic methods for solution diffraction problems on multi-element gratings // 5th International Conference on Antenna Theory and Techniques. – Kyiv, Ukraine, 2005. – pp. 42 – 45. DOI: 10.1109/ICATT.2005.1496880.
 50. Gandel' Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171. – № 1. – Springer Science+Business Media, Inc. – P. 74 – 88.
 51. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures // 2012 Proceedings of the International Conference Days on Diffraction. – St. Petersburg, Russia, 2012. – pp. 76 – 81. DOI: 10.1109/DD.2012.6402755.
 52. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Turbin P. V. Modeling of Plasma Effect on the Diffraction Radiation of Relativistic Beam Moving over a Grating Finite Extent // Microwave and Optical Technology Letters. – 1997. – Vol. 16. – N. 1. – P. 50 – 54.
 53. Zaginaylov G. I., Dushkin V. D., Korostyshevski V., Turbin P. V. Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities // MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114). – Kharkov, Ukraine, 1998. – pp. 409 – 410. – vol. 1. DOI: 10.1109/MMET.1998.709993.
 54. Gandel' Y. V., Dushkin V. D., Zaginailov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures // Telecommunications and Radio Engineering. – 2000. – Volume 54. – Issue 7. – pp. 36 – 48. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v54.i7.40.
 55. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Hirata A., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Shiozawa T., Thumvongskul T. Full-Wave Analysis of the Field Distribution of Natural Modes in the Rectangular Waveguide Grating Based on Singular Integral Equation // IEEE Transactions on Plasma Science. – A. – 2002. – Vol. 30. – № 3. – p.p. 1151 – 1157. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613.
 56. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. The Vortex Lattice Method in the Electromagnetic Wave diffraction on the on the method Grading with Gyrotropic Layer // VIII-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkov, 2000. – V. 2. – P. 578 – 580.
 57. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. Mathematical models of electromagnetic wave scattering by two-element strip grating with perpendicular magnetized gyrotropic medium // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kiev, 2002. – P. 429 – 431.
 58. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves. – London, 1993, UK, The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Electromagnetic Waves, Series 36. – 275 p.
 59. Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets // IEEE Antennas Propag. Mag. – 1993. – vol. 36. – no. 6. – pp. 14 – 25.
 60. Zinenko T. L., Nosich A. I. Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2006. – vol. 54. – no. 7. – pp. 2088 – 2095.
 61. Гандель Ю. В., Кравченко В. Ф., Морозова Н. Н. Дифракция электромагнитных волн на решётке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные волны и электронные системы. – М., 1997. – Т. 2. – № 2. – С. 14 – 26.
 62. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoit V. I. Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band // Doklady Mathematics. – 1996. – № 54(3). – С. 959 – 961.
 63. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction by a bounded lattice over a plane screen // Differ. Equ. – 1999. – № 35:9 (1999). – P. 1169 – 1175.
 64. Gandel Yu. V., Morozova N. Mathematic models of diffraction and radiation problem for planar waveguide with impedance with impedance flange // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic theory. – Lviv, 1996. – P. 88 – 91. DOI: 10.1109/MMET.1996.565644.
 65. Душкин В. Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // Доп. НАН України. – 1999. – №9. – С. 11 – 15.
 66. Dushkin V. D. "Application of the singular integral transform method to the solution of the two-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves from a superconducting layer with rectangular waveguide channels // Telecommunications and Radio Engineering. – 2001. – vol. 56. – no. 2. – pp. 78 – 85. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v56.i2.80.
 67. Zaginaylov G. I., Gandel Yu. V., Steshenko. S. A. The method of singular integral equations in the eigenvalue analysis of a coaxial structure with a

- corrugated society digest // IEEE International Antennas and Propagation Symposium. – Columbus, OH, USA, 2003. – vol. 4. – P. 966 – 969. DOI: 10.1109/APS.2003.1220433.
68. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Steshenko S. A. "Singular integral equation approach in the theory of coaxial cavity gyrotrons" // The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves (IEEE Cat. No.04EX828). – Kharkov, Ukraine, 2004. – pp. 483 – 485. – Vol. 2. DOI: 10.1109/MSMW.2004.1345968.
 69. Dumbrajs O., Gandel Yu. V., Kononenko A. S., Schuenemann K., Zaginaylov G. I. Full wave analysis of coaxial cavity gyrotrons // Proceedings of the 10th Triennial ITG-Conference on Displays and Vacuum Electronics. – Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2004. – P. 75 – 80.
 70. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert. // Int J Infrared Milli Waves 28. – 2007. – pp. 267 – 274. DOI: 10.1007/s10762-007-9198-8.
 71. Kononenko A. S., Gandel Yu. V. Standing waves in a coaxial cavity gyrotron with a corrugated insert // Proceedings of the Asia Pacific Microwave Conference. – Yokohama, Japan, 2006. – P. 1300 – 1303. DOI: 10.1109/APMC.2006.4429644.
 72. Gandel' Y. V., Kononenko A. S. Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation // Diff. Equat. – 2006. – Vol. 42. – pp. 1326 – 1333. DOI: 10.1134/S0012266106090114.
 73. Гандель Ю. В., Духопельников С. В. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многоселевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264 – 293.
 74. Гандель Ю. В., Духопельников С. В. Математическая модель дифракции монохроматической волны на идеально проводящем кольцевом волноводе с продольными щелями, заполненным диэлектриком // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2008. – № 809. – Вып. 9. – С. 42 – 59.
 75. Dukhopelnykov S. V. "Scattering of H-polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Wire with Partial Graphene Cover" // 2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 1 – 4, DOI: 10.1109/MMET.2018.8460384.
 76. Dukhopelnykov S. V. "Control of Backscattering of H-polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Rod with Partial Graphene Cover" // 2018 XXIIIrd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2018. – pp. 51 – 54. DOI: 10.1109/DIPED.2018.8543283.
 77. Yevtushenko D. O., Dukhopelnykov S. V. "Total Scattering Cross-Section of Twin Circular Silver Nanowires Excited by Electron Beam Moving between Them" // 2019 European Microwave Conference in Central Europe (EuMCE). – Prague, Czech Republic, 2019. – pp. 386 – 389.
 78. Dukhopelnykov S. V., Sauleau R. "Backward Scattering from a Circular Dielectric Rod with a Conformal Strip of Graphene" // 2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). – Kyiv, Ukraine, 2020. – pp. 67 – 70. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088912.
 79. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Accurate 2-D design of parabola-cone antenna of quasioptical size" // 2006 First European Conference on Antennas and Propagation. – Nice, France, 2006. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/EUCAP.2006.4584534.
 80. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Method of discrete singularities in the accurate modeling of a reflector beam waveguide" // IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest., 2005. – Long Beach, CA, USA, 2005. – pp. 1083 – 1086. DOI: 10.1109/MWSYM.2005.1516860.
 81. Nosich A. A., Gandel Y. V., Matsushima A., Sauleau R. "Collimation and focusing of wave beams with metal-plate lens antennas analyzed using nystrom-type MDS algorithm" // 2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – San Diego, CA, USA, 2008. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/APS.2008.4619381.
 82. Nosich A. A., Sauleau R., Matsushima A., Gandel Y. V. "Accurate modeling and optimization of metallic-plate waveguide lenses" // 2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation. – Berlin, Germany, 2009. – pp. 2167 – 2170.
 83. Nosich A. A., Sauleau R., Gandel Y. V. "Simulation and performance comparison of ADE and PACO dual-reflector antenna models in 2-D using Nystrom-type MDS algorithm" // 2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. – North Charleston, SC, USA, 2009. – pp. 1 – 4. DOI: 10.1109/APS.2009.5171623.
 84. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2007. – vol. 55. – no. 2. – pp. 399 – 406. DOI: 10.1109/TAP.2006.889811.
 85. Nosich A. A., Gandel Y. V. Thore Magath, and Ayhan Altintas, "Numerical analysis and synthesis of 2D quasi-optical reflectors and beam waveguides based on an integral-equation approach with Nystrom's discretization" // J. Opt. Soc. Am. – 2007. – A 24. – pp. 2831 – 2836. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002831.
 86. Бульгин В. С., Гандель Ю. В. Краевые задачи для 3D – уравнений Гельмгольца, граничные псевдодифференциальные уравнения и численный эксперимент // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: 36. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 17. – С. 210 – 234.
 87. Бульгин В. С., Гандель Ю. В. Задача дифракции акустических волн на ковре Серпинского // Праці XIV Міжнародного симпозіуму «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» // МДОЗМФ-2009. – С. 27 – 30.
 88. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". – 2006. – №733. – Вып. 6. – С. 58 – 75.
 89. Гахов А. В., Мищенко В. О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник Херсонского национального технического университета: 36. наук. праць. – Херсон, 2006. – № 2(25). – С. 135 – 140.
 90. Гахов А. В. Численное исследование рассеяния скалярных волн плоским экраном на границе слоя в полупространстве над жесткой плоскостью // Вісник Харківського національного університету: 36. наук. праць. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління – Харків, 2007. – Вип. 8. – № 780. – С. 79 – 93.
 91. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. "Fast and accurate numerical modeling of a TARA-like shielded paraboloidal reflector antenna" // 2011 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS). – Kiev, Ukraine, 2011. – pp. 86 – 88. DOI: 10.1109/MRRS.2011.6053607.
 92. Bulygin V. S., Gandel Y. V., Benson T. M., Nosich A. I. "Numerical optimization of a TARA-like shielded parabolic reflector" // 2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP). – Prague, Czech Republic, 2012. – pp. 3308 – 3312. DOI: 10.1109/EuCAP.2012.6206231.
 93. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. "Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – vol. 60. – no. 10. – pp. 4710 – 4718. DOI: 10.1109/TAP.2012.2209194.
 94. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. "Full-Wave Analysis and Optimization of a TARA-Like Shield-Assisted Paraboloidal Reflector Antenna Using a Nystrom-Type Method" // in IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2013. – vol. 61. – no. 10. – pp. 4981 – 4989. DOI: 10.1109/TAP.2013.2275248.
 95. Мищенко В. О. Энергетический анализ программного обеспечения с примерами реализации для АДА программ. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2007. – 129 с.
 96. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Математические модели в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы // Математическое моделирование. – Киев : Институт математики НАН Украины, 1996. – С. 70 – 74.
 97. Мищенко В. О., Скрыпник А. Ю., Труфен В. И. Математическое моделирование надежности информации в базе данных по приложениям

- методов параметрических представлений сингулярных интегральных уравнений // Математические модели и современные информационные технологии. Сб. научн. Тр. НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1998. – С. 135 – 138.
98. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Х. : АБВ МБСУ, 2012. – 544с.
 99. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Граничные интегральные уравнения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в R^2 + с плоскопараллельными разрезами // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 8. – С. 14 – 19.
 100. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. // J Math Sci. – 2016. – № 212. – pp. 156 – 166. DOI: 10.1007/s10958-015-2656-2.
 101. Nesvit K. "The diffraction problem of E polarized wave on the pre-cantor periodic grating with reflector and its discrete mathematical model" // 2013 7th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – Gothenburg, Sweden, 2013. – pp. 1072 – 1076.
 102. Nesvit K. "Scattering and diffraction of TM modes on a grating consisting of a finite number of pre-fractal thin impedance strips" // 2013 European Microwave Conference. – Nuremberg, Germany, 2013. – pp. 1143 – 1146. DOI: 10.23919/EuMC.2013.6686864.
 103. Kostenko O. V. Mathematical Model of Wave Scattering by an Impedance Grating // Cybern Syst Anal. – 2015. – № 51. – pp. 344 – 360. DOI: 10.1007/s10559-015-9727-8.
 104. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. // J Math Sci. – 2016. – vol. 212. – pp. 142 – 155. DOI: 10.1007/s10958-015-2655-5.
 105. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. "Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes" // 2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Lviv, Ukraine, 2019. – pp. 112 – 116. DOI: 10.1109/DIPED.2019.8882633.
 106. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. "Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips" // 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). – Kharkiv, Ukraine, 2020. – pp. 625 – 629. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252606.
 107. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. "Modeling Wave Scattering by GC-liked Periodic Structures" // 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2021. – pp. 59 – 63. DOI: 10.1109/DIPED53165.2021.9552304.
 108. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V. "Mathematical Model of E-polarized Wave Diffraction on a Reflecting Non-PEC Stripe System Above the Screen" // 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). – Tbilisi, Georgia, 2023. – pp. 8 – 13. DOI: 10.1109/DIPED59408.2023.10269489.
 109. Kostenko A. V. Numerical Method for the Solution of a Hypersingular Integral Equation of the Second Kind. // Ukr Math J. – 2014. – vol. 65. – pp. 1373 – 1383. DOI: 10.1007/s11253-014-0865-3.
 110. Kostenko O. V. A Numerical Method for Solving a System of Hypersingular Integral Equations of the Second Kind. // Cybern Syst Anal. – 2016. – vol. 52. – pp. 394 – 407. DOI: 10.1007/s10559-016-9840-3.
 111. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. // Журн. мат. фіз. анал. геом. – 2017. – vol. 13. – pp. 254 – 267.
 112. Kostenko O. V. A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. // Mathematical Modelling and Analysis. – 2023. – vol. 28(4). – pp. 689 – 714. DOI: 10.3846/mma.2023.14761.

References (transliterated)

1. Belotserkovsky S. M. *Tonkaya nesushchaya poverkhnost' v dozvukovom potoke gaza* [Thin bearing surface in subsonic gas flow]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 239 p.
2. Lifanov I. K. O metode diskretnykh vikhrey [On the discrete vortex method]. *PMM*. 1979, vol. 43, no. 1, pp. 184–188.
3. Lifanov I. K. O nekorrektnosti i regularizatsii chislennogo resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [On the incorrectness and regularization of the numerical solution of singular integral equations of the first kind]. *DAN USSR*. 1980, vol. 255, no. 5, pp. 1046–1050.
4. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primeneniye v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electro-dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 253 p.
5. Lifanov I. K. Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment v matematicheskoy fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln [Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment in Mathematical Physics, Aerodynamics, Theory of Elasticity and Wave Diffraction]. Moscow, TOO "Yanus", 1995. 520 p.
6. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Method of Discrete Vortices*. CRC Press, 1992. 464 p.
7. Lifanov I. K. *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan : VSP, 1996. 475 p.
8. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M. *Hypersingular Integral Equations and their application*. London, New York, Washington : CRC Press, 2004. 416 p.
9. Gutnikov V. A., Kiryakin V. Yu., Lifanov I. K., Setukha A. V. *Matematicheskoye modelirovaniye aerodinamiki gorodskoy zastroyki* [Mathematical modeling of the aerodynamics of urban development]. Moscow, Pas'va Publ., 2002. 244 p.
10. Dovgii S. O., Lifanov I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rivnyan'. Teoriya ta zastosuvannya* [Method of singular integral equations. Theory and application]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2004. 512 p.
11. Dovgii S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i vychislitel'nyye tekhnologii* [Method of singular integral equations and computing technologies]. Kyiv, Publishing House "Justion" Publ., 2016. 380 p.
12. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K. *O prilozhenii idey metoda diskretnykh vikhrey k zadacham elektrodinamiki. V kn. Nauchno-metodicheskie materialy po chislennym metodam* [On the application of the ideas of the discrete vortex method to problems of electrodynamics. In the book: Scientific and methodological materials on numerical methods]. Moscow, VVIA Publ., 1985. pp. 3–13.
13. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Matveev L. F. *Chislennyye resheniya smeshannykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki, svodyashhikhsya k singulyarnomu integral'nomu uravneniyu na otrezki sistemy. Preprint. Institut Teoreticheskoy I eksperimental'noy Fiziki* [Numerical solution of mixed boundary value problems of mathematical physics, reduced to a singular integral equation for segments of the system. Preprint. Institute of Theoretical and Experimental Physics]. Moscow, 1984, No. 174. 55 p.
14. Gandel' Yu. V. Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh elektrodinamiki [Method of discrete singularities in problems of electrodynamics]. *Voprosy kibernetiki* [Questions of cybernetics]. Moscow, Izd. AN USSR Publ., 1986, No. 124, pp. 166–183.
15. Gandel' Yu. V. O parnykh ryadakh Fur'ye nekotorykh smeshannykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki [On paired Fourier series of some mixed boundary value problems of mathematical physics]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz I ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Vishcha shkola, 1982, Vol. 38, pp. 15–18.
16. Gandel' Yu. V. O parnykh integral'nykh uravneniyakh, privodyashhikh k singulyarnomu integral'nomu uravneniyu na sisteme otrezkov [On paired integral equations leading to a singular integral equation on a system of segments]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz I ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. Kharkov, Vyshha shkola, 1983, issue. 40, pp. 33–36.
17. Gandel' Yu. V. *Parnyye summatornyye i singulyarnyye integral'nyye uravneniya v zadachakh difraktsii: teoriya i chislennyye metody: dys. d-ra*

- phys.-mat. nauk 01.04.03* [Paired summation and singular integral equations in diffraction problems: theory and numerical methods: Dr. of Physics and Mathematics Sciences]. Kharkov, Kharkov University Publ., 1994. 359 p.
18. Polyanskaya T. S. K resheniyu singulyarnogo integral'nogo uravneniya na sisteme otrezkov [To the solution of a singular integral equation on a system of segments]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis and their applications]. 1985, issue 44, pp. 84–87.
 19. Polyanskaya T. S. *Chislennyye metody resheniya nekotorykh klassov singulyarnykh integral'nykh uravneniy s odnomernymi i kratnymi integralami tipa Koshi i Gil'berta. Dys. kand. Fiz.-mat. nauk: 01.01.07* [Numerical methods for solving some classes of singular integral equations with one-dimensional and multiple integrals of Cauchy and Hilbert type. dis. Ph.D. physics and mathematics Sciences: 01.01.07 – computational mathematics]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN USSR Publ., 1988. 138 p.
 20. Eremenko S. V. *Issledovaniye integral'nykh uravneniy nekotorykh dvumernykh krayevykh zadach i ikh chislennoye resheniye: dys. kand. Fiz.-mat. nauk* [Study of integral equations of some two-dimensional boundary value problems and their numerical solution: dis. Ph.D. physics and mathematics Sci]. Kharkov, 1989. 117 p.
 21. Gandel Yu. V., Polyanskaya T. S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary-value Problems of Mathematical Physics. *Journal of Soviet Mathematics*. New York, 1990, Volume 48, no. 2, pp. 144–152.
 22. Gandel' Yu. V., Lifanov I. K., Polyanskaya T. S. On a justification of the method of discrete singularities in two-dimensional diffraction problems. *Differ. Equ.* 1995, 31:9 (1995), pp. 1491–1497.
 23. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems. *Differ. Equ.* 2003, 39:9 (2003), pp. 1295–1307.
 24. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnykh zaryadov : uchebnoe posobie* [Mathematical issues of the method of discrete charges : Textbook]. Kharkov, Izd-vo KhGU Publ., 1991. Part I. 67 p.
 25. Gandel' Yu. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnykh tokov. Obosnovaniye chislennogo metoda diskretnykh osobennostey resheniya dvumernykh zadach difraktsii elektromagnitnykh voln : uchebnoe posobie. Chast' II* [Mathematical issues of the discrete current method. Justification of the numerical method of discrete features for solving two-dimensional problems of diffraction of electromagnetic waves : Textbook. Part II]. Kharkov, 1992. 145 p.
 26. Gandel' Yu. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy. Chast' I. Vvedeniye v metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov : uchebnoe posobie* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Part I. Introduction to methods for calculating singular and hypersingular integrals : Textbook]. Kharkov, Izd-vo Khark. Un-ta Publ., 2001. 92 p.
 27. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Diffraction of waves by gratings]. Kharkov, Izd-vo Khark. Un-ta Publ., 1973. 278 p.
 28. Petit R. *Electromagnetic theory of gratings*. New York, Springer, 1980. 284 p.
 29. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in sitring*. Toronto, Singapore, Wiley Interscience Publication John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane, 1983.
 30. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Nauk. Dumka Publ., 1984. 344 p.
 31. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. *Spektral'nyye operatory rasseyaniya v zadachakh difraktsii voln na ploskikh ekranakh* [Spectral scattering operators in problems of wave diffraction on flat screens]. Kyiv, Nauk. dum-ka Publ., 1984. 240 p.
 32. Gandel' Yu. V., Zabuga T. A. *Chislennyy metod diskretnykh osobennostey v zadachakh difraktsii voln na reshotkakh* [Numerical method of discrete singularities in problems of wave diffraction by gratings]. Kharkov, 1983. 37 p. (Manuscript presented by Kharkiv University. Deposit in UkrNIINTI November 21, 1983, No. 1286 UK-D83).
 33. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. *Chislennoye resheniye singulyarnogo uravneniya zadachi difraktsii elektromagnitnykh voln na reshetke*. [Numerical solution of the singular equation of the problem of diffraction of electromagnetic waves on a grating]. Kharkov, Kharkov Gos. Un-t Publ., 1993. 20 p. Dep. in UkrINTEI No. 208-UK93 dated February 18, 1993.
 34. Gandel' Yu. V., Gavrilyako O. V. Matematycheskaya model' dyfraktsiyi na sisteme shheley v ideal'no provodyashhem sloe [Mathematical model of diffraction by a system of slits in an ideally conducting layer]. *Integral'ni peretvorenniya ta yikhzastosuvannya do krayovykh zadach. Zb. Nauk. prats'* [Integral transformations and their development to boundary value problems. Zb. Sci. fucck off]. Kyiv, Instytut matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996, Vol. 12, pp. 27–33.
 35. Gavrilyako O. V. Singulyarnyye integral'nyye uravneniya zadachi difraktsii na ogranichennoy reshetye, raspolozhennoy nad impedansnoy ploskost'yu. [Singular integral equations of the diffraction problem on a bounded grating located above an impedance plane]. *V kn. Kraevye zadachi, spetsial'nye funktsii i drobnoe ischislenie* [In the book. Boundary value problems, special functions and fractional calculus]. Minsk, 1996. pp. 50–57.
 36. Gandel' Yu. V. Matematicheskoye modelirovaniye metodom diskretnykh osobennostey v teorii poloskovykh liniy peredachi. [Mathematical modeling by the method of discrete singularities in the theory of strip transmission lines]. *V sb. Tezisy dokladov V Vsesoyuznogo simpoziuma "Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki."* Ch. I [Abstracts of the V All-Union Symposium "Method of discrete singularities in problems of mathematical physics". Part. I]. Odessa, 1991, pp. 57–58.
 37. Gandel' Yu. V. Pryamoy chislennyy metod resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy na vsey osi [Direct numerical method for solving singular integral equations on the entire axis]. *V kn. : III Vsesoyuznyy simpozium "Metod diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki I ego rol' v razvitiy chislennogo eksperimenta."* Tezisy dokladov [In the book: III All-Union Symposium "The method of discrete singularities in problems of mathematical physics and its role in the development of numerical experiment." Abstracts of reports]. Kharkov, 1987, pp. 49–51.
 38. Gandel' Yu. V., Krasnyansky M. B. Matematicheskaya model' na osnove MDO dlya rascheta stupenchatykh neodnorodnostey v volnovodakh [Mathematical model based on DSM for calculating step inhomogeneities in waveguides]. *Tezisy dokl. Mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobennostey v zadachakh matematicheskoy fiziki"* [Abstracts of the report. International Symposium "Methods of of discrete singularities in problems of mathematical physics"]. Kharkov, 1993, pp. 121–122.
 39. Gandel' Yu. V., Krasnyansky M. B. Matematicheskaya model' dlya raschyeta neodnorodnosti v ploskom volnovode [The mathematical model for calculating step inhomogeneity in a plane waveguide]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsiynykh rivnyan'* [Boundary value problems for differential equations]. Kyiv, 1998, vol. 1, 1998, pp. 57–64.
 40. Dushkin V., Gandel Yu. V., Morozova N. Numerical realization for the diffraction problems on multielemental gratings. *Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET*94)*. Kharkov, 1994, pp. 95–98.
 41. Dushkin V. D. Algoritmy chyslennogo resheniya dvumernykh kraevykh zadach difraktsiyi i chyslennyy eksperyment na ikh osnove [Algorithms for the numerical solution of two-dimensional boundary value problems of diffraction and a numerical experiment based on them]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'* [Boundary value problems for differential equations]. Kyiv, In-t matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1998, Issue 2, pp. 71–87.
 42. Gandel Yu. V., Sidel'nikov G. L. Matematicheskiye modeli dlya chislennogo analiza difraktsii na ploskom volnovode s beskonechnym flantsem [Mathematical models for numerical analysis of diffraction on a flat waveguide with an infinite flange]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Journal of Technical Physics]. 1995, vol. 65, Issue 7, pp. 143–153.
 43. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. Ob odnom podkhode k resheniyu zadachi difraktsii na ploskom volnovode s beskonechnym flantsem [On one approach to solving the problem of diffraction on a flat waveguide with an infinite flange]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National

- Academy of Sciences of Ukraine]. 1995, No. 11, pp. 18–20.
44. Gandel' Yu. V., Morozova N. N. Matematicheskaya model' dlya vychisleniya sobstvennykh chastot krugovoy membrany, zakreplennoy po chasti granitsy [Mathematical model for calculating the natural frequencies of a circular membrane fixed along part of the boundary]. *Integral'ni peretvorenniya. Zbirnyk nauk. prats'* [Integral transformations... Collection of scientific works]. Kyiv, NAN Ukrayiny Publ., 1995, Issue.10, pp. 25–31.
 45. Gavrilyako O. Diffraction by a thick diaphragm in parallel-plate waveguide. *MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114)*. Kharkov, Ukraine, 1998, vol. 1, pp. 372–374. DOI: 10.1109/MMET.1998.709954.
 46. Gandel' Yu. V. Parametricheskiye predstavleniya singulyarnykh integral'nykh preobrazovaniy i krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki. [Parametric representations of singular integral transformations and boundary value problems of mathematical physics]. *Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki I ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1995, pp. 65–66.
 47. Gandel' Yu. V. Parametricheskiye predstavleniya singulyarnykh integral'nykh preobrazovaniy aksial'no simmetrichnykh krayevykh zadach matematicheskoy fiziki [Parametric representations of singular integral transformations of axially symmetric boundary value problems of mathematical physics]. *Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki I ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996, pp. 72–73.
 48. Gandel Yu. V. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. *X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. P. 57–62.
 49. Gandel Y. V. The numerically analytic methods for solution diffraction problems on multi-element gratings. *5th International Conference on Antenna Theory and Techniques*. Kyiv, Ukraine, 2005, pp. 42–45. DOI: 10.1109/ICATT.2005.1496880.
 50. Gandel' Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. *Journal of Mathematical Sciences*. Springer Science+Business Media, Inc., 2010, Vol. 171, no. 1, pp. 74–88.
 51. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. *2012 Proceedings of the International Conference Days on Diffraction*. St. Petersburg, Russia, 2012, pp. 76–81. DOI: 10.1109/DD.2012.6402755.
 52. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Turbin P. V. Modeling of Plasma Effect on the Diffraction Radiation of Relativistic Beam Moving over a Grating Finite Extent. *Microwave and Optical Technology Letters*. 1997, Vol. 16, no. 1, pp. 50–54.
 53. Zaginaylov G. I., Dushkin V. D., Korostyshevski V., Turbin P. V. Modeling the beam excitation of planar waveguide with rectangular irregularities. *MMET Conference Proceedings. 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. MMET 98 (Cat. No.98EX114)*. Kharkov, Ukraine, 1998, vol. 1, pp. 409–410. DOI: 10.1109/MMET.1998.709993.
 54. Gandel' Y. V., Dushkin V. D., Zaginailov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000, Volume 54, Issue 7, pp. 36–48. DOI: 10.1615/Telecom RadEng.v54.i7.40.
 55. Zaginailov G. I., Gandel Yu. V., Hirata A., Kamyshan O. P., Kamyshan V. V., Shiozawa T., Thumvongskul T. Full-Wave Analysis of the Field Distribution of Natural Modes in the Rectangular Waveguide Grating Based on Singular Integral Equation. *IEEE Transactions on Plasma Science*. A, 2002, Vol. 30, no. 3, pp. 1151–1157. DOI: 10.1109/TPS.2002.801613.
 56. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. The Vortex Lattice Method in the Electromagnetic Wave diffraction on the on the method Grating with Gyrotropic Layer. *VIII-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kharkov, 2000, V. 2, pp. 578–580.
 57. Gandel Yu. V., Khoroshun V. V. Mathematical models of electromagnetic wave scattering by two-element strip grating with perpendicular magnetized gyrotropic medium. *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kyiv, 2002, pp. 429–431.
 58. Il'insky A. S., Slepjan A. Ja., Slepjan G. Ja. *Propagation, diffraction and dissipation of electromagnetic waves*. London, 1993, UK, The IEE and Peter Peregrinus Ltd. Electromagnetic Waves, Series 36. 275 p.
 59. Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets. *IEEE Antennas Propag. Mag.* 1993, vol. 36, no. 6, pp. 14–25.
 60. Zinenko T. L., Nosich A. I. Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2006, vol. 54, no. 7, pp. 2088–2095.
 61. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Morozova N. N. Difraktsiya elektromagnitnykh voln na reshotke iz tonkikh sverkhprovodyashchikh lent [Diffraction of electromagnetic waves by a grating of thin superconducting ribbons]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy* [Electromagnetic waves and electronic systems]. Moscow, 1997, Vol. 2, No. 2, pp. 14–26.
 62. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Pustovoi V. I. Scattering of electromagnetic waves by a thin superconducting band. *Doklady Mathematics*. 1996, no. 54(3), pp. 959–961.
 63. Gandel' Yu. V., Sidel'nikov G. L. The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction by a bounded lattice over a plane screen. *Differ. Equ.* 1999, no. 35:9 (1999), pp. 1169–1175.
 64. Gandel Yu. V., Morozova N. Mathematic models of diffraction and radiation problem for planar waveguide with impedance with impedance flange. *Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic theory*. Lviv, 1996, pp. 88–91. DOI: 10.1109/MMET.1996.565644.
 65. Dushkin V. D. Resheniye dvumernoy zadachi difraktsii s krayevymi usloviyami tret'yego roda na bokovoy poverkhnosti volnovodnykh kanalov [Solution of a two-dimensional diffraction problem with boundary conditions of the third kind on the side surface of waveguide channels]. *Dop. NAN Ukrayiny* [Reports of the NAS of the Ukraine]. 1999, no. 9, pp. 11–15.
 66. Dushkin V. D. Application of the singular integral transform method to the solution of the two-dimensional problem of diffraction of electromagnetic waves from a superconducting layer with rectangular waveguide channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001, vol. 56, no. 2, pp. 78–85. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v56.i2.80.
 67. Zaginaylov G. I., Gandel Yu. V., Steshenko S. A. The method of singular integral equations in the eigenvalue analysis of a coaxial structure with a corrugated society digest. *IEEE International Antennas and Propagation Symposium*. Columbus, OH, USA, 2003, vol. 4, pp. 966–969. DOI: 10.1109/APS.2003.1220433.
 68. Zaginaylov G. I., Gandel Y. V., Steshenko S. A. Singular integral equation approach in the theory of coaxial cavity gyrotrons. *The Fifth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter, and Submillimeter Waves (IEEE Cat. No.04EX828)*. Kharkov, Ukraine, 2004, Vol. 2, pp. 483–485. DOI: 10.1109/MSMW.2004.1345968.
 69. Dumbrajs O., Gandel Yu. V., Kononenko A. S., Schuenemann K., Zaginaylov G. I. Full wave analysis of coaxial cavity gyrotrons. *Proceedings of the 10th Triennial ITG-Conference on Displays and Vacuum Electronics*. Garmisch-Partenkirchen, Germany, 2004, pp. 75–80.
 70. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert. *Int J Infrared Milli Waves* 28. 2007, pp. 267–274. DOI: 10.1007/s10762-007-9198-8.
 71. Kononenko A. S., Gandel Yu. V. Standing waves in a coaxial cavity gyrotron with a corrugated insert. *Proceedings of the Asia Pacific Microwave Conference*. Yokohama, Japan, 2006, pp. 1300–1303. DOI: 10.1109/APMC.2006.4429644.
 72. Gandel' Y. V., Kononenko A. S. Justification of the numerical solution of a hypersingular integral equation. *Diff. Equat.* 2006, vol. 42, pp. 1326–1333. DOI: 10.1134/S0012266106090114.

73. Gandel' Yu. V., Dukhopel'nikov S. V. Krayevyye zadachi dlya uravneniy Gel'mgol'tsa i Maksvella na mnogoshhelevykh tsilindricheskikh strukturakh i granichnyye integral'nyye uravneniya na sisteme otrezkov [Boundary value problems for the Helmholtz and Maxwell equations on multi-slot cylindrical structures and boundary integral equations on a system of segments]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'* [Boundary value problems for differential equations]. Chernivtsi, Prut, 2008, Vol. 16, pp. 264–293.
74. Gandel' Yu. V., Dukhopel'nikov S. V. Matematicheskaya model' difraktsii monokhromaticheskoy volny na ideal'no provodyashchem kol'tsevom volnovode s prodol'nymi shhel'yami, zapolnennym dielektrikom [Mathematical model of diffraction of a monochromatic wave on a perfectly conducting ring waveguide with longitudinal slits filled with a dielectric]. *Vestnik Khar. Nats. Un-ta. Ser. "Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya"* [Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»]. 2008, no. 809, vol. 9, pp. 42–59.
75. Dukhopelnykov S. V. "Scattering of H – polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Wire with Partial Graphene Cover". *2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*. Kyiv, Ukraine, 2018. pp. 1–4, DOI: 10.1109/MMET.2018.8460384.
76. Dukhopelnykov S. V. "Control of Backscattering of H – polarized Plane Wave by a Circular Dielectric Rod with Partial Graphene Cover". *2018 XXIIIrd International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2018. pp. 51–54. DOI: 10.1109/DIPED.2018.8543283.
77. Yevtushenko D. O., Dukhopelnykov S. V. "Total Scattering Cross-Section of Twin Circular Silver Nanowires Excited by Electron Beam Moving between Them". *2019 European Microwave Conference in Central Europe (EuMCE)*. Prague, Czech Republic, 2019. pp. 386–389.
78. Dukhopelnykov S. V., Sauleau R. "Backward Scattering from a Circular Dielectric Rod with a Conformal Strip of Graphene". *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. Kyiv, Ukraine, 2020. pp. 67–70. DOI: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088912.
79. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Accurate 2 – D design of parabola-cone antenna of quasioptical size". *2006 First European Conference on Antennas and Propagation*. Nice, France, 2006. pp. 1–4. DOI: 10.1109/EUCAP.2006.4584534.
80. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Method of discrete singularities in the accurate modeling of a reflector beam waveguide". *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, 2005. Long Beach, CA, USA, 2005. pp. 1083–1086. DOI: 10.1109/MWSYM.2005.1516860.
81. Nosich A. A., Gandel Y. V., Matsushima A., Sauleau R. "Collimation and focusing of wave beams with metal-plate lens antennas analyzed using nystrom-type MDS algorithm". *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. San Diego, CA, USA, 2008. pp. 1–4. DOI: 10.1109/APS.2008.4619381.
82. Nosich A. A., Sauleau R., Matsushima A., Gandel Y. V. "Accurate modeling and optimization of metallic-plate waveguide lenses". *2009 3rd European Conference on Antennas and Propagation*. Berlin, Germany, 2009. pp. 2167–2170.
83. Nosich A. A., Sauleau R., Gandel Y. V. "Simulation and performance comparison of ADE and PACO dual-reflector antenna models in 2 – D using Nystrom-type MDS algorithm". *2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. North Charleston, SC, USA, 2009. pp. 1–4. DOI: 10.1109/APS.2009.5171623.
84. Nosich A. A., Gandel Y. V. "Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2 – D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case". *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007, vol. 55, no. 2, pp. 399–406. DOI: 10.1109/TAP.2006.889811.
85. Nosich A. A., Gandel Y. V. Thore Magath, and Ayhan Altintas, "Numerical analysis and synthesis of 2D quasi-optical reflectors and beam waveguides based on an integral-equation approach with Nystrom's discretization". *J. Opt. Soc. Am.* 2007, A 24, pp. 2831–2836. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002831.
86. Bulygin V. S., Gandel' Yu. V. Kraevyye zadachi dlya 3 – D uravneniy Hel'mhol'tsa, granichnyye psevdodifferentsial'nye uravneniya i chyslennyy éksperiment [Boundary-value problems for 3 – D Helmholtz equations, boundary pseudo-differential equations and a numerical experiment]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan'*. *Zb. Nauk. pr.* [Boundary-value problems for differential equations: Collection. of science work]. Chernivtsi, Prut, 2008, Vol. 17, pp. 210–234.
87. Bulygin V. S., Gandel' Yu. V. Zadacha difraktsii akusticheskikh voln na kovre Serpinskogo [The problem of diffraction of acoustic waves on the Serpinsky carpet]. *Pratsi XIV Mizhnarodnogo sympozyumu "Metody dyskretnykh osoblyvostey v zadachakh matematychnoy fizyky" (MDOZMF – 2009)* [Proceedings of the XIV International Symposium "Methods of discrete singularities in problems of mathematical physics." (DSMMPH-2009)]. 2009, pp. 27–30.
88. Gandel' Yu. V., Mishhenko V. O. Psevdodifferentsial'nyye uravneniya elektromagnitnoy difraktsii na ploskoparallel'noy strukture i ikh diskretnaya model' [Pseudodifferential equations of electromagnetic diffraction on a plane-parallel structure and their discrete model]. *Vestnik Khar. Nats. Un-ta. Ser. "Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya"* [Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»]. 2006, No. 733, issue. 6, pp. 58–75.
89. Gakhov A. V., Mishhenko V. O. Trekhmernaya model' metoda diskretnykh osobennostey rasseyaniya skalyarnykh voln ekranom na granitse razdela sred [Three-dimensional model of the method of discrete features of scattering of scalar waves by a screen at the interface between media]. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta*. *Zb. Nauk. prats'* [Bulletin of the Kherson National Technical University. Collection of Sciences works]. Kherson, 2006, no. 2(25), pp. 135–140.
90. Gakhov A. V. Chyslennoe issledovanie rasseyaniya skalyarnykh voln ploskim ékranom na granitse sloya v poluprostranstve nad zhestkoy ploskost'yu [Numerical study of the scattering of scalar waves by a flat screen at the boundary layer in the half-space above a rigid plane]. *Visnyk Karkiv'skogo natsional'nogo universytetu. Seriya: Matematychno modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya*. *Zb. Nauk. prats'* [Bulletin of the Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems: Collection of Sciences works]. Kharkiv, 2007, No. 780, issue 8, pp.79–93.
91. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Fast and accurate numerical modeling of a TARA-like shielded paraboloidal reflector antenna. *2011 Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS)*. Kyiv, Ukraine, 2011. pp. 86–88. DOI: 10.1109/MRRS.2011.6053607.
92. Bulygin V. S., Gandel Y. V., Benson T. M., Nosich A. I. Numerical optimization of a TARA-like shielded parabolic reflector. *2012 6th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*. Prague, Czech Republic, 2012. pp. 3308–3312. DOI: 10.1109/EuCAP.2012.6206231.
93. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012, vol. 60, no. 10, pp. 4710–4718. DOI: 10.1109/TAP.2012.2209194.
94. Bulygin V. S., Benson T. M., Gandel Y. V., Nosich A. I. Full-Wave Analysis and Optimization of a TARA-Like Shield-Assisted Paraboloidal Reflector Antenna Using a Nystrom-Type Method. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2013, vol. 61, no. 10, pp. 4981–4989. DOI: 10.1109/TAP.2013.2275248.
95. Mishhenko V. O. *Energeticheskyy analiz programmnoy obespecheniya s primerami realizatsii dlya ADA programm* [Energy analysis of software with examples of implementation for ADA programs]. Kharkiv, KhNU im. V. N. Karazina Publ., 2007. 129 p.
96. Gandel' Yu. V., Mishhenko V. O. Matematicheskyye modeli v elektrodinamike na baze singulyarnykh integral'nykh uravneniy i proyekt programmnoy sistemy [Mathematical models in electrodynamicity based on singular integral equations and the design of a software system]. *Matematychno modelyuvannya* [Mathematical Modeling]. Kyiv, In-t Matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1996. pp. 70–74.

97. Mishhenko V. O., Skrypnik A. Yu., Trufen V. I. Matematicheskoye modelirovaniye nadezhnosti informatsii v baze dannykh po prilozheniyam metodov parametricheskikh predstavleniy singulyarnykh integral'nykh uravneniy [Mathematical modeling of information reliability in a database on applications of methods of parametric representations of singular integral equations]. *Matematicheskie modeli i sovremennyye informatsionnyye tekhnologii*. Sb. nauchn. Tr. NAN Ukrainy [Mathematical models and modern information technologies, Collection of scientific works of the National Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Mathematics]. Kyiv, 1998, pp. 135–138.
98. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. Matematicheskiye modeli dvumernykh zadach difraktsii: Singulyarnyye integral'nyye uravneniya i chislennyye metody diskretnykh osobennostey [Mathematical models of two-dimensional diffraction problems: Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities]. Kharkov, ABB MBSU Publ., 2012. 544 p.
99. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. Granichnyye integral'nyye uravneniya tret'yey krayevoy zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa v $R^2 + s$ ploskoparallelnymi razrezami [Boundary integral equations of the third boundary value problem for the Helmholtz equation in $R^2 + s$ with plane-parallel cuts]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2014, No. 8, pp. 14–19.
100. Gandel' Y. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *J Math Sci*. 2016, no. 212, pp. 156–166. DOI: 10.1007/s10958-015-2656-2.
101. Nesvit K. The diffraction problem of E polarized wave on the pre-cantor periodic grating with reflector and its discrete mathematical model. *2013 7th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*. Gothenburg, Sweden, 2013. pp. 1072–1076.
102. Nesvit K. Scattering and diffraction of TM modes on a grating consisting of a finite number of pre-fractal thin impedance strips. *2013 European Microwave Conference*. Nuremberg, Germany, 2013. pp. 1143–1146. DOI: 10.23919/EuMC.2013.6686864.
103. Kostenko O. V. Mathematical Model of Wave Scattering by an Impedance Grating. *Cybern Syst Anal*. 2015, no. 51, pp. 344–360. DOI: 10.1007/s10559-015-9727-8.
104. Nesvit K. V. Discrete Mathematical Model of the Problem of Diffraction for E-Polarized Waves on Slots in the Impedance Plane. *J Math Sci*. 2016, vol. 212, pp. 142–155. DOI: 10.1007/s10958-015-2655-2.
105. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes. *2019 XXIVth International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Lviv, Ukraine, 2019. pp. 112–116. DOI: 10.1109/DIPED.2019.8882633.
106. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips. *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*. Kharkiv, Ukraine, 2020. pp. 625–629. DOI: 10.1109/UkrMW49653.2020.9252606.
107. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. Modeling Wave Scattering by GC-liked Periodic Structures. *2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2021. pp. 59–63. DOI: 10.1109/DIPED53165.2021.9552304.
108. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V. Mathematical Model of E-polarized Wave Diffraction on a Reflecting Non-PEC Stripe System Above the Screen. *2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2023. pp. 8–13. DOI: 10.1109/DIPED59408.2023.10269489.
109. Kostenko A. V. Numerical Method for the Solution of a Hypersingular Integral Equation of the Second Kind. *Ukr Math J*. 2014, vol. 65, pp. 1373–1383. DOI: 10.1007/s11253-014-0865-3.
110. Kostenko O. V. A Numerical Method for Solving a System of Hypersingular Integral Equations of the Second Kind. *Cybern Syst Anal*. 2016, vol. 52, pp. 394–407. DOI: 10.1007/s10559-016-9840-3.
111. Dushkin V. D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Zhurn. Mat. fiz. Anal. Geom.* [J. Math. Phys. Anal. Geom.]. 2017, vol. 13, pp. 254–267.
112. Kostenko O. V. A numerical method for solving a complete hypersingular integral equation of the second kind and its justification. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2023, vol. 28(4), pp. 689–714. DOI: 10.3846/ma.2023.14761.

Надійшла (received) 27.09.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Душкін Володимир Давидович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5143-7945>; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

Dushkin Volodymyr Davydovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, National Academy of National Guard of Ukraine, Kharkiv; tel.: (097) 386-64-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5143-7945>; e-mail: dushkinvdv@gmail.com