



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХПІ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 1 (10)'2026

**Харків
2026**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 1 (10)'2026

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 1 (10)'2026

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2026

Kharkiv
NTU "KhPI", 2026

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2026. — № 1 (10). — 130 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців у галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Ідентифікатор медіа R30-02563 згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 11.01.2024 №333.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров Є. С., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Кошовий Г. І., канд. фіз.-мат. наук, доц., ІРЕ НАНУ, Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Мюллер В. Г., д-р прир. наук, проф., Берлінський технічний університет, Німеччина;

Николаєв О. Г., д-р фіз.-мат. наук, проф., НАУ «ХАІ», Україна;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук, НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 3 від 26 лютого 2026 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math.

Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Koshoviy G., PhD, Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., IRE of NASU,

Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University

of Applied Sciences, Austria;

Müller W. H., Dr. rer. Nat, Dr.h.c., Prof., Technische Universität

Berlin, Germany;

Nikolaev O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NAU «KhAI», Ukraine;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE,

Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

Ю. М. АНДРЕЄВ, Г. В. ШАБАНОВ

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ ШЕСТИСТУПЕНЕВИХ КУТОВИХ МАНІПУЛЯТОРІВ З УРАХУВАННЯМ НЕСПІВВІСНОСТЕЙ

У цій статті представлено розвиток аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики для кутових маніпуляторів із шістьма ступенями вільності типу PUMA-560, попередні версії якого були викладені авторами в попередніх публікаціях. Алгоритм базується на умові Піпера, згідно з якою осі обертання трьох останніх ланок перетинаються в одній точці. Це дозволяє розкласти задачу визначення узагальнених координат маніпулятора на дві підзадачі: задачу позиціонування, тобто розміщення центру зап'ястя в заданій точці, та задачу орієнтації, тобто вирівнювання кінцевого ефектора із заданою його просторовою орієнтацією. Вказані положення для кожного моменту часу повинні визначатися з умов використання маніпулятором виробничого завдання. Розбиття всієї задачі на транспортну і орієнтаційну зводить проблему визначення шести кутів відносних поворотів ланок до аналітичного визначення тільки 3-х невідомих в кожній підзадачі. Для моделей маніпуляторів, які повністю задовольняють умову Піпера, обидві підзадачі розв'язуються точно за формулами замкнутої форми, запропонованими в статті. Для моделей, в яких умова Піпера виконується лише частково, а саме, коли осі п'ятої та шостої ланок перетинаються, але їхня точка перетину не збігається з віссю обертання четвертої ланки, задачі позиціонування та орієнтації розв'язуються за допомогою простої ітераційної процедури оцінки кута повороту четвертої ланки. Показано, що для розглянутих моделей цей процес сходиться за три ітерації. Сама задача орієнтації тут розв'язується за допомогою кватерніонних рівнянь і тому не містить проблем виродження, пов'язаних із сингулярністю. Ефективність запропонованого алгоритму демонструється шляхом розв'язання задач оберненої кінематики для трьох моделей маніпуляторів: PUMA-560, ABB (IRB 460) та маніпулятора, розробленого Vertical. Основні відмінності між запропонованим алгоритмом та попередніми підходами авторів полягають у використанні більш прозорих геометричних міркувань, включенні випадків, що стосуються порушень умови Піпера, та застосуванні кватерніонів для розв'язання задачі орієнтації. Отримані формули та алгоритми були перевірені шляхом порівняння результатів розв'язків прямої та зворотної кінематики для трьох моделей роботів.

Ключові слова: кінематика роботів, пряма і обернена задача кінематики, аналітичні рішення, кутовий маніпулятор, кватерніони орієнтації, кватерніонні рівняння, метод простої ітерації.

YU. M. ANDRIEIEV, H. V. SHABANOV

ANALYTICAL SOLUTION OF THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM FOR SIX-DEGREE-OF-FREEDOM ARTICULATED MANIPULATORS WITH AXIS MISALIGNMENTS

This article presents the development of an analytical algorithm for solving the inverse kinematics problem for angular manipulators with six degrees of freedom of the PUMA-560 type, previous versions of which were presented by the authors in previous publications. The algorithm is based on the Pieper condition, according to which the axes of rotation of the last three links intersect at a single point. This makes it possible to decompose the problem of determining the generalized coordinates of the manipulator into two subproblems: a positioning problem, i.e. placing the wrist center at a prescribed point, and an orientation problem, i.e., aligning the end-effector with a prescribed spatial orientation. For each instant of time, these prescribed position and orientation parameters are determined by the requirements of the manipulator's operating task. Such a decomposition reduces the problem of determining all six relative joint angles to the analytical determination of only three unknowns within each subproblem. For manipulator models that fully satisfy the Pieper condition, both subproblems are solved exactly by the closed-form formulas proposed in the paper. For models in which the Pieper condition is satisfied only partially, namely when the axes of the fifth and sixth links intersect but their intersection point does not coincide with the axis of rotation of the fourth link, the positioning and orientation problems are solved within a simple iterative procedure for evaluating the rotation angle of the fourth link. It is shown that, for the models considered, this process converges in three iterations. The orientation problem itself is solved here using quaternion equations and is therefore free from singularity-related degeneracy issues. The performance of the proposed algorithm is demonstrated by solving the inverse kinematics problems for three manipulator models: the PUMA-560, ABB (IRB 460), and a manipulator developed by Vertical. The main differences between the proposed algorithm and the authors' earlier approaches are the use of more transparent geometric reasoning, the inclusion of cases involving violations of the Pieper condition, and the application of quaternions to solve the orientation problem. The derived formulas and algorithms were verified by comparing the results of the forward and inverse kinematics solutions for the three robot models.

Key words: robot kinematics, forward and inverse kinematics, analytical solution, articulated manipulator, orientation quaternions, quaternion equations, simple iteration method.

Вступ. Для розв'язання оберненої задачі кінематики кутових 6-ступеневих маніпуляторів типу ПУМА-560 у цій статті розвивається аналітичний алгоритм, попередні версії якого публікувалися авторами в статтях [1 – 3]. Вказані алгоритми базуються на відомому підході Піпера [4, 5], який використовує факт перетину осей обертання останніх трьох ланок в одній вузловій точці механізму. Це дозволяє розбити всю задачу для визначення 6 узагальнених координат пристрою на транспортну задачу доставки вузлової точки в задане положення та орієнтаційну задачу збігання вихідної ланки з її заданим просторовим положенням. Такі положення вузлової точки і вихідної ланки повинні визначатися з умов використання маніпулятором виробничого завдання. Розбиття всієї оберненої задачі на транспортну і орієнтаційну зводить проблему визначення 6-ти узагальнених координат (кутів відносних поворотів ланок) до того, що в кожній з підзадач визначається тільки по 3 невідомим. Причому в моделях маніпуляторів, де повністю виконується умова Піпера, обидві задачі за пропозиціями тут прямими формулами розв'язуються точно. У моделях, де умова Піпера задовольняється частково (перетинаються осі 5-ї та 6-ї ланки і точка їх перетинання не збігається з віссю повороту 4-ї), транспортна та орієнтаційна задачі розв'язуються в рамках простого ітераційного процесу розрахунку кута повороту 4-ї ланки. Такий процес збігається за 3 ітерації. Сама орієнтаційна задача розв'язується тут за допомогою кватерніонних рівнянь, тому позбавлена проблем виродження. Формули переходу від отриманого кватерніону орієнтації вихідної ланки щодо 3-ї ланки до кутів повороту ланок № 4, 5 та 6 аналізуються на виродження і однозначність. Робота запропонованого

алгоритму демонструється розв'язанням обернених задач кінематики 3-х моделей 6-ступеневих кутових маніпуляторів (ПУМА-560, IRB 460 та фірми Vertical). Відмінності пропонованого тут алгоритму від пропонованих і розглянутих раніше [1 – 3] полягають у використанні більш прозорих геометричних викладках, включенні в алгоритм випадків порушення умов Піпера, використанні кватерніонів для розв'язання орієнтаційної задачі.

Перевірку отриманих формул та алгоритмів було проведено шляхом порівняння результатів розв'язань прямої і оберненої задачі кінематики для трьох моделей роботів-маніпуляторів.

Аналіз останніх досліджень. Незважаючи на те, що 6-ступеневі маніпулятори з'явилися більше півстоліття тому, проблеми розв'язання їх задач динаміки та кінематики і сьогодні є популярними [1 – 20]. Розв'язання задач оберненої кінематики є ключовим кроком у розробці систем керування для роботів та маніпуляторів [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Сьогодні обернена задача кінематики роботів та маніпуляторів розв'язуються як аналітичними [1 – 3, 5], так і числовими методами [1, 11, 19, 20]. Їх поєднання також є життєздатним підходом [1]. Нещодавно були розроблені методи, які в деяких випадках продемонстрували свою ефективність і поєднують традиційні підходи з методами штучного інтелекту [12, 13]. Незважаючи на ці досягнення, класичні аналітичні та числові методи залишаються основним засобом розв'язання таких задач. Геометричні методи широко використовуються [1, 2, 3, 14 – 16]. Одним із підходів, який отримав широке поширення в останні роки, є реалізація алгебри кватерніонів [2, 3] та бікватерніонів [17, 18]. Їх використання в деяких випадках зменшує обчислювальну складність та усуває сингулярності [17].

У багатьох випадках використовуються числові методи [1, 11, 19, 20]. Хоча в найзагальніших випадках отримання рішень без їх використання неможливе, одним з їхніх головних недоліків є відсутність числової стійкості та необхідність великої кількості обчислювальних операцій для досягнення збіжності рішень. При використанні будь-яких методів може виникати питання нормалізації значень кутів у кінематичних парах [1]. Починаючи з фундаментальної статті Денавіта та Хартенберга [21], яка встановила стандартний формалізм для опису механізмів з кінематичними парами п'ятого класу, більшість досліджень застосовують цей підхід (див. нещодавні публікації, наприклад, [10]).

Постановка задачі. У статті поставлено задачу побудови універсального аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики 6-ступеневих кутових маніпуляторів, які відповідають умові Піпера. Протестувати його роботу на трьох моделях маніпуляторів: класичному – ПУМА-560 та сучасних – IRB 460 і спроектованому в фірмі Vertical. Дослідити його працездатність та ефективність. Особливістю цих моделей є те, що в них має місце неспіввідповідності деяких сусідніх кінематичних пар. Зазвичай такий факт призводить до руйнування чисто аналітичних методів. Але в даному випадку запропоновано невеличке ускладнення – додається ітераційний процес визначення кута повороту четвертої ланки. У статті розглядається швидкість збіжності такого ітераційного процесу.

Обернена задача кінематики маніпуляторів полягає у визначенні узагальнених координат робота при відомому положенні та орієнтації кінцевої ланки [22]. За узагальнені координати в кутових маніпуляторах, приклади яких розглядаються в даній статті, найчастіше приймають відносні кути поворотів ланок одна відносно однієї. Навпаки, пряма задача кінематики таких пристроїв дає можливість розрахувати положення і орієнтацію будь-якої ланки за відомими узагальненими координатами. Якщо задавати положення і орієнтацію ланок робота за допомогою чотиривимірних матриць (наприклад, як в методі Денавіта-Хартенберга [21, 22]), то визначення положення кінцевої ланки через такі кути для моделей, що тут розглядаються, можна зробити за формулою:

$$T_{(6)}^{(0)} = T_{(1)}^{(0)} \{\varphi_1\} \cdot T_{(2)}^{(1)} \{\varphi_2\} \cdot T_{(3)}^{(2)} \{\varphi_3\} \cdot T_{(4)}^{(3)} \{\varphi_4\} \cdot T_{(5)}^{(4)} \{\varphi_5\} \cdot T_{(6)}^{(5)} \{\varphi_6\}, \quad (1)$$

де $T_{(i)}^{(j)}$ – позначення матриць перетворення координат точок, заданих у системі координат i – i ланки, в системі координат j – j (нулем позначена абсолютна система координат «стійки»); елементи таких матриць виражаються через геометричні параметри ланок і кути їх поворотів $\varphi_1 - \varphi_6$.

Таким чином, якщо пряма задача розв'язується безпосередньою підстановкою в праву частину (1) кутів $\varphi_1 - \varphi_6$, то розв'язання оберненої задачі пов'язано з пошуком розв'язків трансцендентних рівнянь високого ступеня (1), де задане положення і орієнтація вихідної ланки визначає ліву частину, а невідомі кути $\varphi_1 - \varphi_6$ входять до правої частини.

Відоме аналітичне розв'язання оберненої задачі Крейга для ідеальної моделі маніпулятора ПУМА-560 [4].

У даній статті ставиться наступна задача: дати узагальнений підхід для аналітичного розв'язання оберненої задачі кінематики маніпуляторів, у яких виконано (або майже виконано) умову Піпера [20] при врахуванні неспіввідповідностей кінематичних пар.

Основна ідея такого підходу полягає у розбитті задачі на транспортну і орієнтаційну. Вихідними даними для транспортної задачі є задане положення в просторі останньої ланки – робочого інструменту або захвату, яке визначається із виробничого завдання робота, що виконується. Оскільки при конструктивному виконанні умови Піпера осі обертання трьох останніх ланок перетинаються в одній вузловій точці, то стають відомими її декарто-

ві координати в абсолютному просторі. З іншого боку, положення цієї точки повністю визначається кутами повороту лише перших трьох ланок. Шляхом розв'язання трикутників, що створюються цими ланками, вдається безпосередньо визначити три кути їх повороту. Це забезпечує розв'язання *транспортної задачі*. Одночасно, знання цих трьох кутів задає *орієнтацію* третьої ланки в абсолютному просторі. Тоді орієнтація останньої ланки визначається трьома кутами повороту її відносно третьої, положення якої вже визначено. У статті отримано кватерніонне рівняння відносно останніх трьох кутів і дано його аналітичний розв'язок.

У статті [1] нами для розрахунку останніх трьох кутів складалося матричне рівняння з відомою матрицею орієнтації останньої ланки щодо абсолютної системи координат і невідомою – матрицею орієнтації останньої ланки щодо третьої, абсолютна орієнтація якої задана кутами повороту перших трьох ланок. Після визначення такої невідомої отримувалися і кути повороту останніх ланок. Показано, що вдається на основі геометричних перетворень записати явні формули знаходження спочатку перших трьох кутів, а після них – останніх трьох.

У даній статті розв'язання орієнтаційної задачі здійснюється розв'язанням не матричного, а кватерніонного рівняння.

У випадку неспіввідності останніх ланок розв'язати транспортну задачу можливо тільки при відомому куті φ_4 . Тому розглядається можливість розв'язання задачі за допомогою спеціальної процедури на базі ітераційного визначення цього кута.

Таким чином, у роботі наступна задача: побудувати розв'язання транспортної задачі в умовах існування певних неспіввідностей, які порушують умову Піпера. А розв'язання орієнтаційної задачі будується тут через розв'язання кватерніонного рівняння, що має безумовні переваги відносно використання матричного. Конкретний вигляд вказаних рівнянь визначається конструкцією робота, тому на моделях трьох маніпуляторів демонструється розв'язання всієї оберненої задачі кінематики вказаного класу маніпуляторів.

Математична модель робота ПУМА. Почнемо з класичної моделі таких маніпуляторів – маніпулятора ПУМА-560. На рис. 1 показана схема маніпулятора ПУМА, його ступені свободи та системи координат ланок. У цьому маніпуляторі виконано умову Піпера – на рис. 1 вузлова точка помічена літерою K (білим кольором).

Розглянемо системи координат ланок (рис. 1):

- базова – $OXYZ$ (збігається з показаною системою $Ox_0y_0z_0$ на рис. 1): початок у точці O – проєкції осі першої кінематичної пари на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – доповнює систему координат до правої;
- першої ланки – «колони» – початок у точці O , повернута на кут φ_1 навколо вертикальної осі OA базової;
- другої ланки – «плеча» – початок у точці B , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі AB ;
- третьої ланки – «передпліччя» – початок у точці C , повернута відносно другої на кут φ_3 щодо осі, яка паралельна AB і проходить через точку C ;
- четвертої ланки – «зап'ястя» – початок у точці K – вузловій точки, де перетинаються осі повороту останніх трьох ланок, повернута на кут φ_4 навколо осі CK ;
- п'ятої ланки – «кисті» – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі перпендикулярної CK ;
- шостої ланки – «захвату» – початок у точці K , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо повздовжній осі захвату.

Відлік усіх кутів (крім φ_2) вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається. Обраний знак кута φ_2 в усіх розглянутих у статті моделях зумовлений тим, що при цьому деяка перевага надається конфігураціям маніпуляторів «лікоть зверху» [22], хоча це і не принципово.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від горизонтального напрямку «вперед» для паркувального положення маніпулятора;
- φ_2 – від горизонтальної осі до осі симетрії плеча;
- φ_3 – від осі симетрії ланки 2 до осі симетрії ланки 3;
- φ_4 – від горизонтального положення осі Ky_4 ;
- φ_5 – від осі, що перпендикулярна CK і розташована в вертикальній площині;
- φ_6 – від осі Ky_5 до осі Ky_6 .

Розв'язання транспортної задачі для маніпулятора ПУМА. Визначимо кути повороту перших трьох ланок механізму $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для заданого положення в просторі вузлової точки K . Побачимо, що така задача розв'язується повністю аналітично. Нижче наведені формули для конфігурації маніпулятора, яка відповідає кла-

сифікації [22], як «права рука» та «лікоть зверху». Отримати відповідні формули для інших конфігурацій за допомогою запропонованого тут методу нескладно.

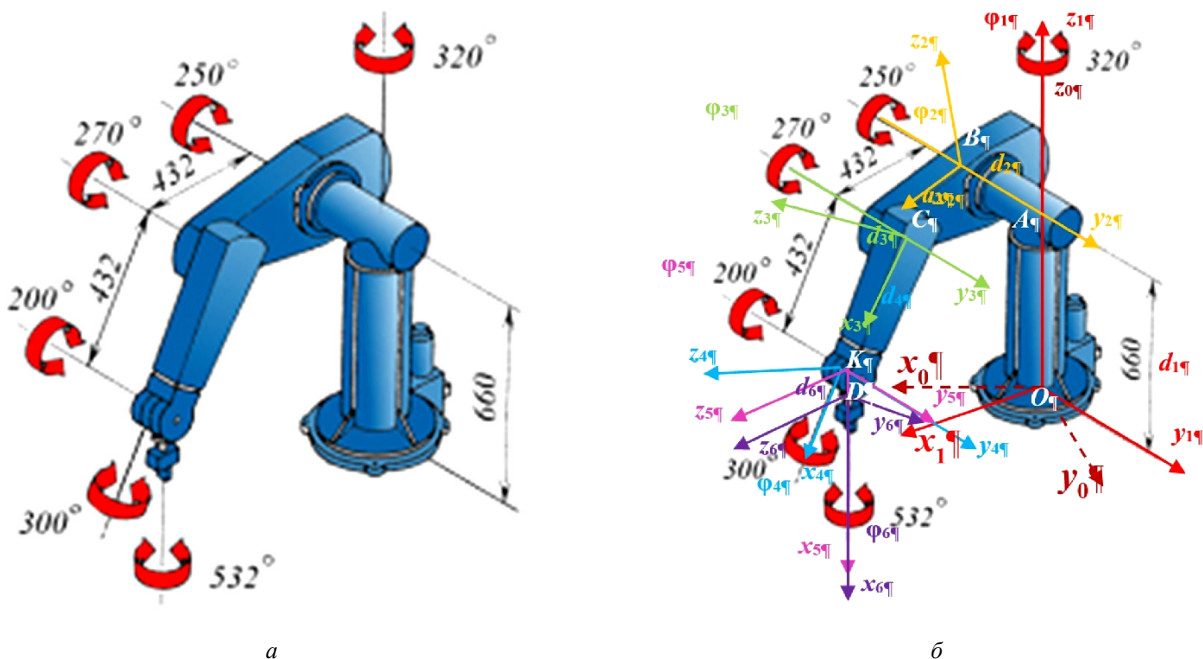


Рис. 1 – Схема маніпулятора ПУМВ: а – ступені вільності робота; б – системи координат ланок.

Конструктивною особливістю маніпулятора ПУМА є те, що вертикальна площина, в якій рухається вісь симетрії системи координат 3-ї ланки (рис. 1, б), не проходить через вісь обертання колони.

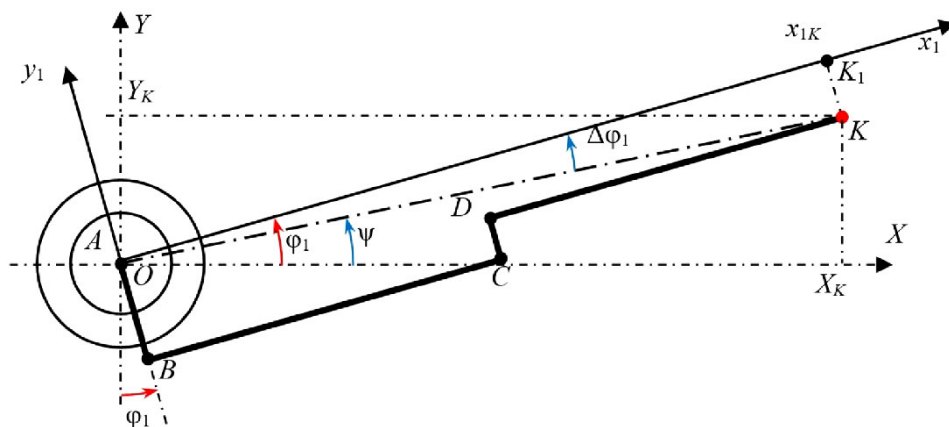


Рис. 2 – До визначення кута φ_1 – кута повороту колони.

тя (DC) та вузлової точки (K).

Проекції цих точок на горизонтальну площину позначені на рис. 2 цими самими літерами, що і самі точки. Звідси можна отримати формули, що дають нам кут повороту першої ланки:

$$KK_1 = AB - DC = d_2 - d_3; \quad y_{1K} = -KK_1; \quad x_{1K} = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 - y_{1K}^2}; \quad \Delta\varphi_1 = \arcsin \frac{KK_1}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}};$$

$$\psi = a \tan 2(Y_K, X_K); \quad \varphi_1 = \psi + \Delta\varphi_1. \quad (2)$$

Розглянемо рис. 3. Тут показано проекцію осей і характерних точок механізму ПУМА на координатну площину Ox_1z_1 системи координат першої ланки. Ще однією конструктивною особливістю ПУМА є те, що продовження осі обертання 4-ї ланки не перетинається з віссю повороту 3-ї. Має місце деяка відстань $C_2C_3 = a_3$. Це дещо ускладнює розв'язання трикутників для визначення кутів φ_2 та φ_3 . Побудуємо формули, що дадуть кути повороту другої та третьої ланки, що разом з визначеним раніше кутом повороту першої ланки φ_1 забезпечують збігання початку системи координат четвертої ланки із положенням вузлової точки K , яке визначено з умов використання маніпулятором цільового руху.

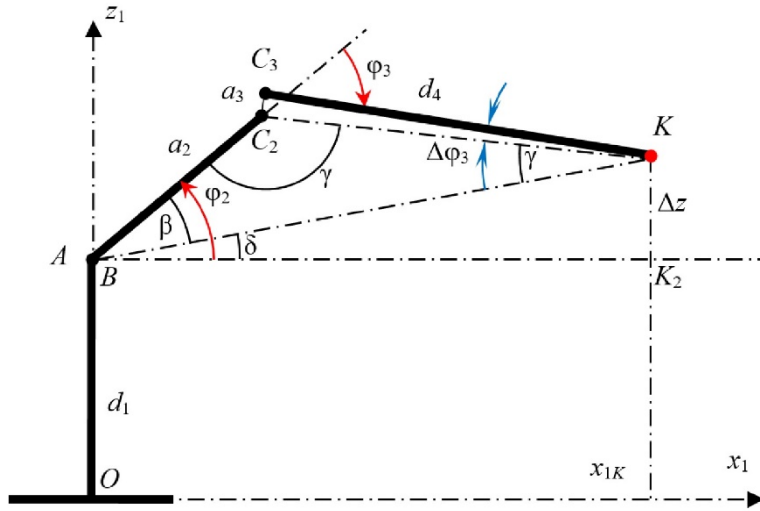


Рис. 3 – Проекція перших трьох ланок на площину Ox_1z_1 .

З рис. 3 послідовно знайдемо:

$$AC_2 = a_2; \quad C_2C_3 = a_3; \quad C_3K = d_4;$$

$$C_2K = \sqrt{d_4^2 + a_3^2}; \quad \Delta z = Z_K - d_1;$$

$$AK = \sqrt{x_{1K}^2 + (\Delta z)^2}. \quad (3)$$

Тоді з ΔAC_2K , ΔKC_2C_3 та ΔAKK_2

знайдемо кути:

$$\beta = \arccos \frac{(AC_2)^2 + (AK)^2 - (C_2K)^2}{2AC_2 \cdot AK};$$

$$\gamma = \arccos \frac{(AC_2)^2 + (C_2K)^2 - (AK)^2}{2AC_2 \cdot C_2K};$$

$$\delta = a \tan 2(\Delta z, x_{1K}); \quad \Delta\varphi_3 = a \tan 2(a_3, d_4);$$

$$\varphi_2 = \beta + \delta; \quad \varphi_3 = \pi - \gamma + \Delta\varphi_3. \quad (4)$$

Розв'язання орієнтаційної задачі для маніпулятора ПУМА за допомогою кватерніонів. Отримані вище за формулами (2) – (4) кути φ_1 , φ_2 і φ_3 визначають, крім розташування точки K відносно стійки маніпулятора, ще й орієнтацію у просторі системи координат «ліктя» CK (рис. 1, б).

Запишемо вираз для кватерніону повороту «ліктя» відносно абсолютної системи координат відповідно до послідовності поворотів на кути φ_1 , φ_2 і φ_3 множенням кватерніонів елементарних поворотів систем координат перших трьох ланок на ці кути:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(-\varphi_2) \circ \Lambda_y(\varphi_3) = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_3 - \varphi_2), \quad (5)$$

де $Cxyz$ – скорочене позначення системи координат $Cx_3y_3z_3$ третьої ланки (рис. 1, б); Λ_y , Λ_z – кватерніони, що відповідають поворотам ланок навколо відповідних осей координат, кути в дужках беруться відповідно їхніх знаків відліку.

Кватерніони, що входять праворуч до виразу (5), є елементарними і задаються формулами:

$$\Lambda_z(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right); \quad \Lambda_y(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right).$$

Таким чином, кватерніон (5) отримує вигляд:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) - i_1 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_2 \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right). \quad (6)$$

Для отримання орієнтації «захвату» («робочого інструменту») «лікоть» треба повернути (рис. 1, б) на кути φ_4 , φ_5 і φ_6 у кінематичних парах, пов'язаних з точкою K . Орієнтація системи координат $Dx_6y_6z_6$ захвату в абсолютній системі координат (яка в подальшому для стислості позначена $Dxyz$) може визначатися через задану орієнтацію вихідної системи координат, а може – через кути поворотів ланок маніпулятора φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , φ_5 , φ_6 в кінематичних парах. Кватерніон орієнтації вихідної системи координат $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ відносно абсолютної представляється в цьому випадку добутком кватерніонів повороту від абсолютної системи координат $OXYZ$ до системи координат $Cxyz$ «ліктя» $\left(\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}\right)$ та повороту від системи координат $Cxyz$ «ліктя» до системи координат $Dxyz$ «захвату» $\left(\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}\right)$:

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}, \quad (7)$$

де кватерніон повороту від абсолютної системи координат до системи координат $Cxyz$ «ліктя» $\left(\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}\right)$ задається формулою (6).

Сформуємо кватерніон повороту системи координат $Cxyz$ «ліктя» до системи координат $Dxyz$ «захвату» за допомогою кватерніонів послідовності поворотів, які здійснюються при такому повороті на кути φ_4 , φ_5 і φ_6 (рис. 1, б):

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \Lambda_x(\varphi_4) \circ \Lambda_y(\varphi_5) \circ \Lambda_x(\varphi_6).$$

Відповідно до цього отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} \Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_1 \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right) + \\ & + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, у рівнянні (7) невідомим буде кватерніон $\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}$, бо кватерніон $\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}$ задається формулою (6), а кватерніон $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ можна знайти з умов орієнтації «захвату» в робочому процесі (за положенням трьох точок захвату), як наведено в статтях [2, 3].

Запишемо розв'язок рівняння (7):

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(abs)}^{(Cxyz)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}, \quad (9)$$

де $\tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(abs)}^{(Cxyz)}$ – спряжений кватерніон кватерніону (6).

Проста форма (8) шуканого кватерніона (9) дозволяє знайти кути φ_4 , φ_5 , φ_6 останніх ланок маніпулятора.

Позначимо λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 – компоненти кватерніона $\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}$, що отримуються через праву частину в формулі (9). З іншої сторони, їх можна знайти з виразу (8):

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); \quad \lambda_1 = \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); \\ \lambda_2 = & \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right); \quad \lambda_3 = \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Звідси можна визначити кути φ_4 , φ_5 , φ_6 . На перший погляд здається, що

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = & \cos^2 \frac{\varphi_5}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_5}{2} = \cos \varphi_5; \\ a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) + a \tan 2(\lambda_3, \lambda_4) = & \varphi_4; \quad a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) - a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2) = \varphi_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Але тут може бути кілька особливих випадків. У другій та третій формулах виразу (11) це буде, коли або $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, або $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Розглянемо ці випадки.

1) $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Це може бути, коли

$$\cos \frac{\varphi_5}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_5}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_5 = \pm \pi.$$

Але зауважимо, що такий випадок конструктивно не реалізується (φ_5 не може бути рівним $\pm \pi$)!

2) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Це може бути, коли

$$\sin \frac{\varphi_5}{2} = 0 \Rightarrow \varphi_5 = 0.$$

З формул для λ_0 та λ_1 рівнянь (10) можна знайти тільки суму кутів

$$\varphi_4 + \varphi_6 = 2a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0). \quad (12)$$

Що цілком зрозуміло. Якщо це реалізується при проході такого положення механізму, то або φ_4 можна взяти з попереднього кроку розрахунків і знайти з (12) φ_6 , або навпаки – задати φ_6 , а знайти φ_4 . Якщо потрібно реалізувати окреме таке положення механізму, ці кути можна взяти будь-якими, щоб сума дорівнювала величині, визначеній за формулою (12). Наприклад, можна взяти $\varphi_4 = \varphi_6$, тоді $\varphi_4 = a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2)$.

В інших випадках будемо використовувати формули:

$$\varphi_4 = a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) + a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2); \quad \varphi_5 = \arccos(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2); \quad \varphi_6 = a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) - a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2). \quad (13)$$

Таким чином, розв'язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (2) – (4) та (13), де X_K , Y_K , Z_K , d_2 , d_3 , d_4 , a_3 – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 – параметри кватерніона

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)},$$

який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої ланки $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$.

Математична модель робота фірми Vertical. Для моделей цього робота, у яких виконується умова Піпера, розв'язання оберненої задачі кінематики розглянуто авторами в статті [1]. Тут розглянемо випадок порушення умови Піпера і отримаємо результати, що узагальнюють розглянуті в статті [1].

На рис. 4, а, б показана схема маніпулятора *Vertical*, що зібраний за схемою ПУМА, але відрізняється розмірами і конкретним виконанням ланок і кінематичних пар.

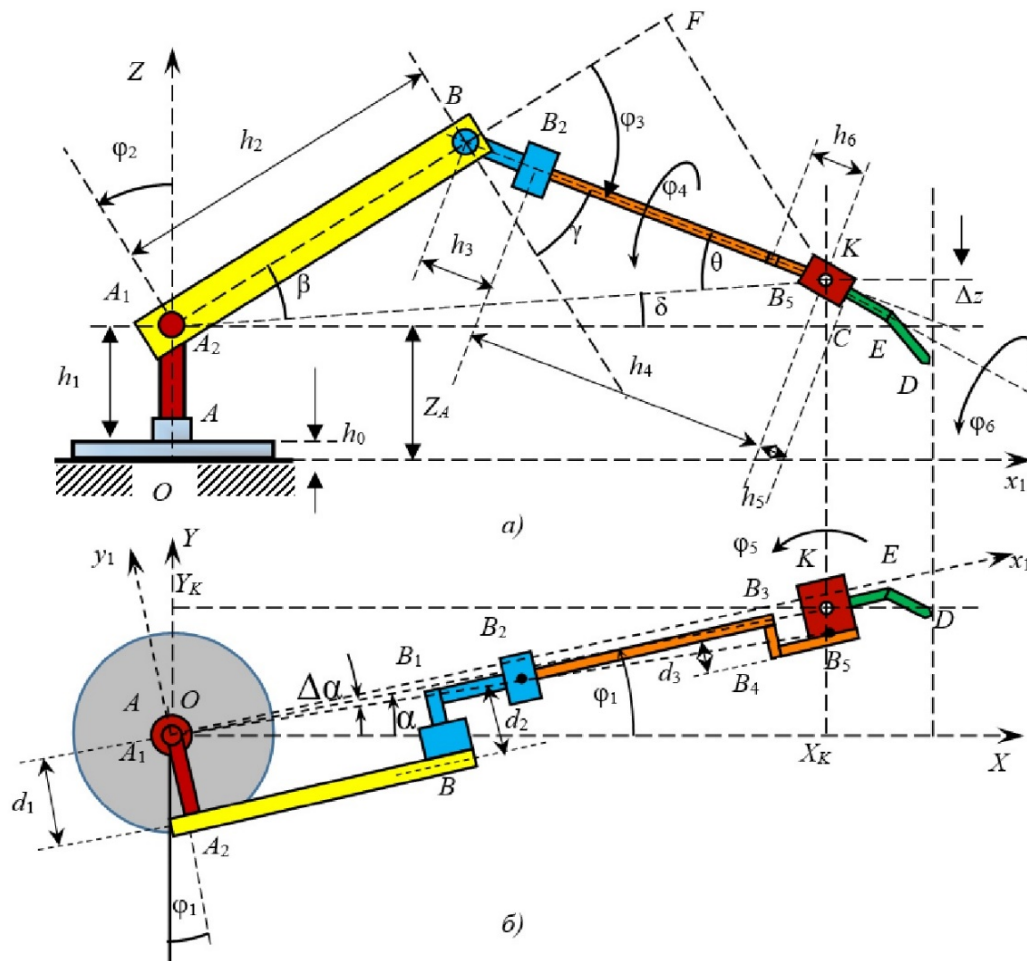


Рис. 4 – Схема робота Vertical: а – вигляд збоку; б – вигляд зверху.

Введемо системи координат ланок (рис. 4, а, б):

- базова: початок у точці O – проекції осі першого шарніра на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – горизонтально від нас;
- першої ланки – початок у точці A (на висоті h_0 над точкою O), повернута навколо базової на кут φ_1 щодо вертикальної осі AA_1 ;
- другої ланки – початок у точці A_1 , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі A_2A_1 (це її ось A_2y_2);
- третьої ланки – початок у точці B , повернута навколо другої на кут φ_3 щодо осі BB_1 паралельної A_2A_1 (це її ось B_2y_3);
- четвертої ланки – початок у точці B_2 , повернута навколо третьої на кут φ_4 щодо осі B_2B_3 (це її ось B_2x_4);
- п'ятої ланки – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі B_5K (це її ось Ky_5);
- шостої ланки – початок у точці K , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо осі KE (це її ось Kx_6).

Відлік усіх кутів, крім кута φ_2 , вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від перпендикуляра до осі першої кінематичної пари напрямку «вперед» для паркувального положення маніпулятора;
- φ_2 – від осі A_1z_1 до площини, що перпендикулярна осі симетрії ланки 2;
- φ_3 – від осі симетрії ланки 2 до осі симетрії ланки 3;
- φ_4 – від осі B_2y_3 до осі B_2y_4 ;
- φ_5 – від осі B_5x_4 до осі B_5x_5 ;
- φ_6 – від осі Ky_5 до осі Ky_6 .

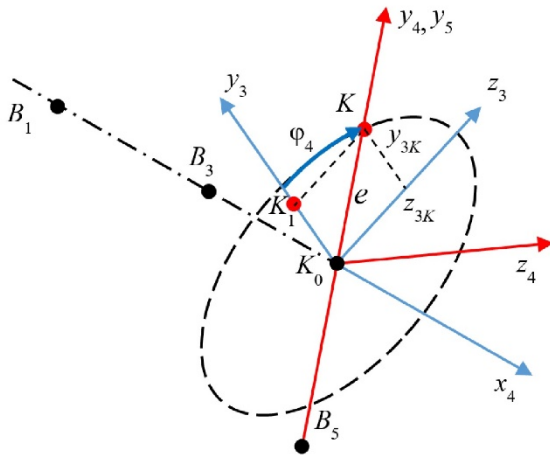


Рис. 5 – Розташування вузлової точки і осей координат при неспіввідності.

ординат ланки 3 (та ланки 4 при $\varphi_4 = 0$) – K_0y_3 та K_0z_3 , кут $\varphi_4 > 0$, положення повернутих осей системи координат 4-ї ланки – K_0y_4 та K_0z_4 , координати на осі K_0y_3 та K_0z_3 вузлової точки K для такого кута і неспіввідності e .

Вказані координати вузлової точки в осях φ_6 системи координат третьої ланки складають:

$$K_0K_1 = y_{3K} = e \cos \varphi_4; \quad K_1K = z_{3K} = e \sin \varphi_4. \quad (14)$$

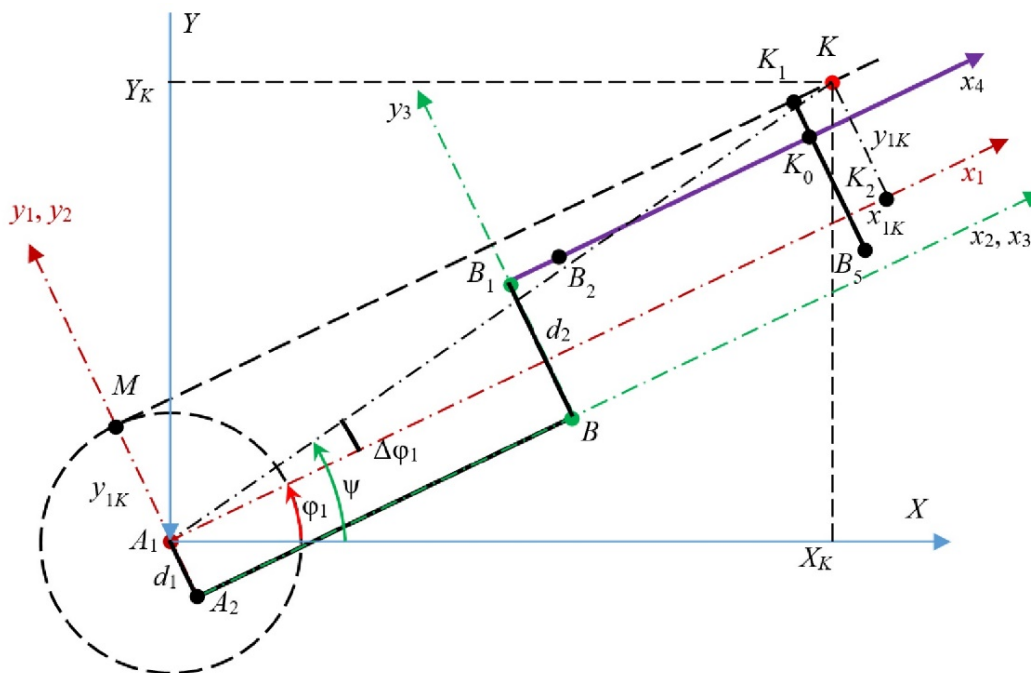


Рис. 6 – До отримання значень кута повороту першої ланки φ_1 .

Розв'язання транспортної задачі для маніпулятора фірми Vertical. Конструктивні особливості маніпулятора *Vertical* суттєво ускладнюють розв'язання оберненої задачі кінематики для нього. Це пояснюється наявністю паралельного зміщення осі B_2x_4 від площини OZx_1 (рис. 4, б) та розбіжності точок перетину осей повороту 5-ї ланки з осями повороту 4-ї та 6-ї (рис. 5). На підставі того, що величини цих зсувів можна задати: перше – в горизонтальній площині, а друге – як функцію кута повороту 4-ї ланки, існує точне аналітичне розв'язання задачі, яке зводиться до пошуку цього кута φ_4 на кожному кроці з неявно заданого трансцендентного рівняння. Покажемо це для цієї моделі маніпулятора.

На рис. 5, показано вісь повороту 4-ї ланки $B_1B_3x_4$, вузлова точка при відсутності неспіввідності – K_0 , положення напрямків осей ординат та аплікват системи координат ланки 3 (та ланки 4 при $\varphi_4 = 0$) – K_0y_3 та K_0z_3 , кут $\varphi_4 > 0$, положення повернутих осей системи координат 4-ї ланки – K_0y_4 та K_0z_4 , координати на осі K_0y_3 та K_0z_3 вузлової точки K для такого кута і неспіввідності e .

Вказані координати вузлової точки в осях φ_6 системи координат третьої ланки складають:

$$K_0K_1 = y_{3K} = e \cos \varphi_4; \quad K_1K = z_{3K} = e \sin \varphi_4. \quad (14)$$

Неспіввідність e виникає тому, що відстані $B_3B_4 = B_5K_0 = d_3$ та $B_5K = d_4$ відрізняються (рис. 4, б). Таким чином, $e = d_4 - d_3$.

Для представлення другої неспіввідності розглянемо рис. 6, де показано проєкції характерних точок та відрізків перших 5-ти ланок механізму маніпулятора на горизонтальну площину AXY .

Друга неспіввідність виникає тому, що відстані $A_1A_2 = d_1$ та $BB_1 = d_2$ відрізняються (рис. 4, б).

Запишемо необхідні формули, які дозволяють знайти кут φ_1 , який забезпечить суміщення проєкцій на площині AXY вузлової точки K механізму з її заданого положення, що визначається через положення і орієнтацію інструмента з умов виконання виробничої операції. Таким чином, нам відомі координати X_K та Y_K точки K та величини A_1A_2 , BB_1 , K_0K_1 , через які можна визначити неспіввідності. Таким чином,

$$y_{1K} = BB_1 - A_1A_2 + K_0K_1 = (d_2 - d_1) + (d_4 - d_3) \cos \varphi_4; \quad (15)$$

$$\Delta\varphi_1 = \arcsin \frac{y_{1K}}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}}; \quad \psi = a \tan 2(Y_K, X_K); \quad \varphi_1 = \psi - \Delta\varphi_1. \quad (16)$$

Одночасно знайдемо для подальшого абсцису точку K в системі координат Ax_1y_1 :

$$x_{1K} = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 - (y_{1K})^2}. \quad (17)$$

Розглянемо рис. 7, де показано проєкцію маніпулятора на площину Ox_1Z .

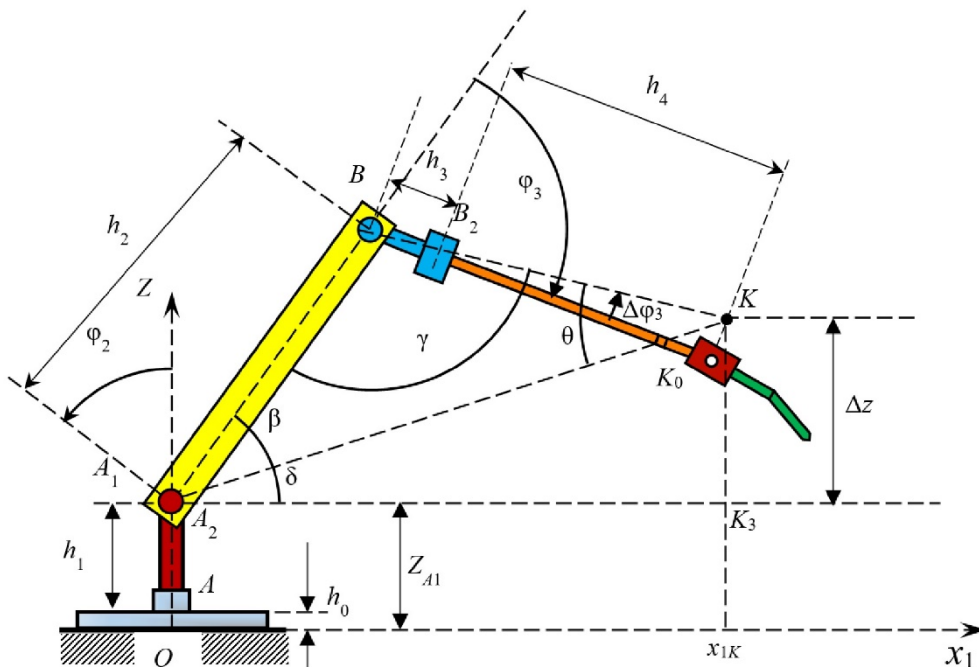


Рис. 7 – Проєкція механізму робота на вертикальну площину Ax_1Z .

Звідси послідовно отримаємо:

$$A_2B = h_2; \quad BK_0 = h_3 + h_4; \quad KK_0 = (d_4 - d_3) \sin \varphi_4; \\ BK = \sqrt{(BK_0)^2 + (KK_0)^2}; \quad \Delta z = Z_K - h_1 - h_0; \quad A_2K = \sqrt{x_{1K}^2 + (\Delta z)^2}. \quad (18)$$

Тоді з ΔA_2BK , ΔA_2KK_0 , ΔBKK_0 визначимо кути:

$$\beta = \arccos \frac{(A_2B)^2 + (A_2K)^2 - (BK)^2}{2A_2B \cdot A_2K}; \quad \gamma = \arccos \frac{(A_2B)^2 + (BK)^2 - (A_2K)^2}{2A_2B \cdot BK}; \\ \delta = a \tan 2(\Delta z, x_{1K}); \quad \Delta\varphi_3 = \arctg \frac{KK_0}{BK_0}; \quad \varphi_2 = \beta + \delta; \quad \varphi_3 = \pi - \gamma + \Delta\varphi_3. \quad (19)$$

Розв’язання орієнтаційної задачі для маніпулятора фірми Vertical в кватерніонах. Розв’язання такої задачі нічим не відрізняється від розв’язку для маніпулятора ПУМА і задається формулами (5) – (13). Тільки в формулах (5) – (9) треба замінити позначення систем координат в кватерніонах:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}; \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}; \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(K_2xyz)}^{(abs)} \quad (20)$$

Тут, як і для маніпулятора ПУМА, використано спрощене позначення систем координат – B_2xyz та $Kxyz$ – замість повних $B_2x_3y_3z_3$ та $Kx_6y_6z_6$, відповідно.

Як бачимо, в тому випадку, коли відстань між точками K_0 і K (рис. 5 та формули (13)) буде дорівнювати нулю (буде виконано умову Піпера), відстані K_0K_1 та K_1K також будуть рівними нулю незалежно від величини кута φ_4 , то за формулами (15) – (19), та (6), (9), (12) або (13) з урахуванням перепозначень (20) одразу отримаємо розв'язок оберненої задачі кінематики такого маніпулятора. Проте при зазначеному порушенні умови Піпера, тобто коли параметр $e = d_4 - d_3$ в формулах (14) не буде нульовим, весь ланцюжок вказаних формул може бути розрахований тільки при заданій величині кута φ_4 . Тому пропонується виконати тут алгоритм простої ітерації – задати якесь значення такого кута, провести розрахунок за формулами (15) – (19), та (6), (9), (12) або (13) з урахуванням перепозначень (20), отримати значення всіх кутів, у тому числі і кута φ_4 . Взяти його за нове наближення і знову провести вказані розрахунки. І так, поки різниця між початковим і розрахованим його значенням на поточному кроці ітерації не буде відрізнятися із заданою точністю. Наші багаточисельні розрахунки показали, що такий процес (див. результати розрахунків нижче) досить швидко збігається (за 3 – 4 ітерації) і може бути рекомендований.

Таким чином, розв'язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (15) – (19) та (13), де $X_K, Y_K, Z_K, d_1, d_2, d_3, d_4, h_3, h_4$ – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметри кватерніону $\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$, який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$.

Математична модель палетизатора IRB 460. На рис. 8 показана схема маніпулятора *IRB 460*, що зібраний за схемою ПУМА, але відрізняється розмірами і конкретним виконанням ланок і кінематичних пар.

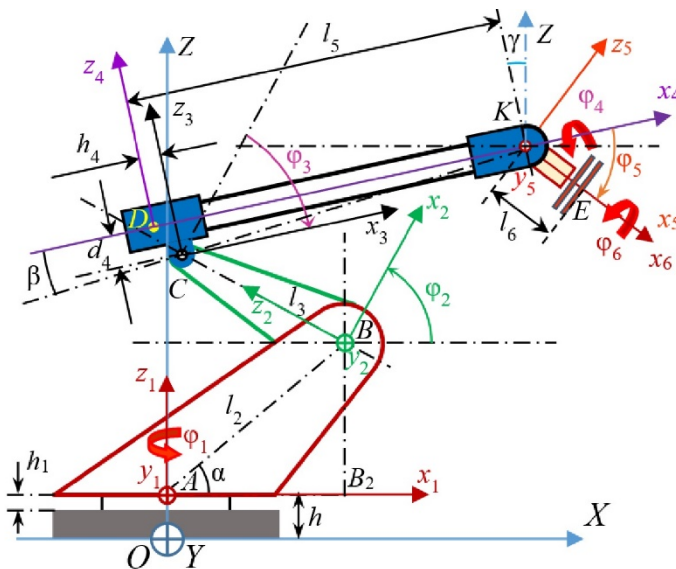


Рис. 8 – Кінематична схема робота *IRB 460*.

- третьої ланки – початок у точці C , повернута навколо другої на кут φ_3 щодо осі, яка паралельна осі OY та проходить через точку C (це її ось Cy_3);
- четвертої ланки – початок у точці K , повернута навколо третьої на кут φ_4 щодо осі Dx_4 – осі симетрії 4-ї ланки;
- п'ятої ланки – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі Ky_5 – осі симетрії 5-ї ланки;
- шостої ланки – початок у точці E , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо осі Ex_6 .

Відлік усіх кутів, крім кута φ_2 , вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від перпендикулярного осі першої кінематичної пари напрямку «вперед» для паркувального поло-

Введемо системи координат ланок:

- базова система координат: початок у точці O – проекції осі першої кінематичної пари на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – горизонтально від нас;
- першої ланки – початок у точці A (на висоті $h + h_1$ над точкою O), повернута навколо базової на кут φ_1 щодо вертикальної осі OA ;
- другої ланки – початок у точці B , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі, яка паралельна осі OY та проходить через точку B (це її ось B_2y_2);

ження маніпулятора;

- φ_2 – відлік від горизонтального положення ланки 2, коли точка C позаду від точки B ;
- φ_3 – відлік напрямку CD від напрямку BC або перпендикуляру до CD від перпендикуляру до BC ;
- φ_4 – відлік ланки 4 від площини симетрії ланки 3;
- φ_5 – відлік ланки 5 від горизонтального положення її осі;
- φ_6 – відлік від загального перпендикуляру осей повороту 4-ї та 5-ї ланок.

Розв’язання транспортної задачі для маніпулятора IRB 460. Конструктивні особливості маніпулятора IRB 460 суттєво ускладнюють розв’язання оберненої задачі кінематики для нього. Це пояснюється наявністю паралельного зміщення осі Dx_4 від площини OZx_1 (рис. 8) та розбіжністю точок перетину осі повороту 5-ї ланки з осями повороту 4-ї та 6-ї (рис. 9). На підставі того, що величини цих зсувів можна задати: перше – в горизонтальній площині, а друге – як функцію кута повороту 4-ї ланки, існує точне аналітичне розв’язання задачі, яке зводиться до пошуку цього кута φ_4 на кожному кроці з неявно заданого трансцендентного рівняння. Покажемо це для цієї моделі маніпулятора.

Підкреслимо, що відрізок K_0K_1 горизонтальний, а відрізок K_1K належить вертикальній площині, якій перпендикулярна площина кола з центром в точці K_0 .

На рис. 9 показано положення трьох систем координат ланок – № 3, № 4, № 5. Еліпсом показано коло з радіусом b_5 геометричного місця точок можливих положень початку системи координат 5-ї ланки відповідно куту повороту φ_4 4-ї ланки навколо осі Dx_4 . Приведено приклад розташування вузлової точки для якогось значення такого кута і координати такої точки в системі координат, яка відповідає значенню кута $\varphi_4 = 0$. Це будуть відрізки K_0K_1 та K_1K , які є ординатою та аплікатою точки K в такій системі координат, осі якої будуть паралельні осям системи координат 3-ї ланки

$$y_{3K} = b_5 \cos \varphi_4; \quad z_{3K} = b_5 \sin \varphi_4. \quad (21)$$

Розглянемо задачу визначення кутів повороту перших трьох ланок механізму $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для заданого положення в просторі вузлової точки K у загальному випадку відсутності виконання умови Піпера (очевидно, що при постановці значення $b_5 = 0$ у формули, наведені нижче, отримаємо формули для випадку виконання умови Піпера).

Припустимо, що кут φ_4 повороту 4-ї ланки щодо осі Dx_4 відомий. Через точку K_0 проведемо дві осі, що показано пунктиром, які паралельні осям системи координат 3-ї ланки – це K_0y_3 та K_0z_3 (рис. 9).

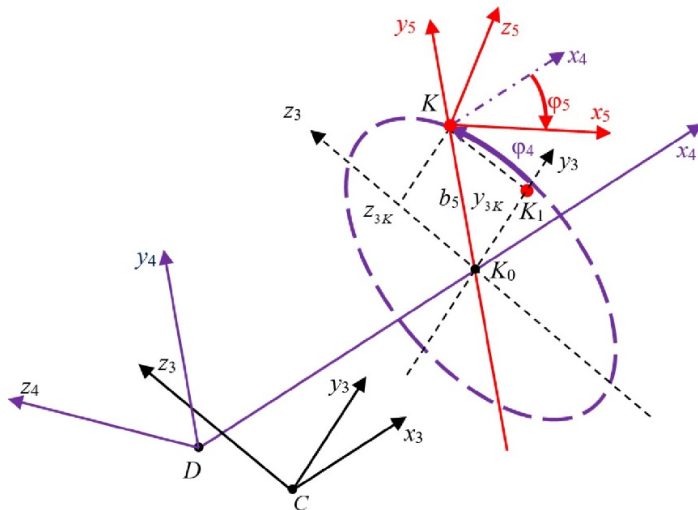


Рис. 9 – Розташування та перетворення систем координат 3-ї, 4-ї та 5-ї ланок.

Зауважимо, що вісь K_0y_3 , як і вісь Cy_3 , горизонтальна, оскільки горизонтальні осі обертання 2-ї та 3-ї ланок (рис. 8). На цій підставі отримаємо наступний рис. 10 шляхом проектування необхідних відрізків і осей механізму на горизонтальну площину (масштаб порушено для наочності). Тому всі точки на рис. 10 – це проєкції відповідних точок на горизонтальну площину.

Тут

$$KK_2 = BB_1 + K_0K_1 = b_2 + b_5 \cos \varphi_4;$$

$$AK = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}; \quad \psi = a \tan 2(Y_K, X_K);$$

$$\Delta \varphi_1 = \arcsin \frac{KK_2}{AK}; \quad \varphi_1 = \psi - \Delta \varphi_1;$$

$$AK_2 = \sqrt{AK^2 - (KK_2)^2};$$

$$B_2K_2 = AK_2 - AB_2. \quad (22)$$

Розглянемо проєкцію механізму робота на вертикальну площину Ax_1z_1 (рис. 11). Тут точка B – ось повороту другої ланки на кут φ_2 щодо першої, C – ось повороту 3-ї ланки на кут φ_3 щодо другої.

Розглянемо ΔBCK . У ньому сторона $BC = l_3$. Сторони BK та CK можна знайти з прямокутних трикутників $\Delta BKK'$ та $\Delta CKD'$.

Тут

Отже, поки різниця між початковим і розрахованим його значенням не буде відрізнятися на поточному кроці ітерації із заданою точністю. Наші багаточисельні розрахунки показали, що такий процес (див. результати розрахунків нижче) досить швидко збігається (за 3 – 4 ітерації) і може бути рекомендований.

Таким чином, розв’язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (22) – (24) та (13), де X_K, Y_K, Z_K, b_2, b_5 – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметри кватерніону $\Lambda_{(Exyz)}^{(Dxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Dxyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Exyz)}^{(abs)}$, який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої $\Lambda_{(Exyz)}^{(abs)}$.

Результати. Тестування отриманих в роботі рішень обернених задач розглянутих маніпуляторів здійснювалося шляхом порівняння конфігурацій, розрахованих при розв’язанні обернених задач і заданих при вирішенні прямих задач. Наведемо результати для трьох розглянутих випадків для трьох маніпуляторів. Для перевірки аналітичних виразів і взагалі будь-яких нових підходів найбільший інтерес викликають випадки, коли рішення задач можуть мати математичні особливості. Слід зазначити, що наведені в статті формули подані в спрощеному вигляді для полегшення сприйняття. Річ у тому, що у формулах зустрічаються операції ділення, добування квадратного кореня та обчислення арктангенса. При реалізації цих формул обов’язково треба перевіряти їх аргументи на вродженість, що ускладнює їх вигляд і реалізацію. Але це питання не може викликати серйозну проблему. Тому формули надані без таких ускладнень. При викладанні розв’язання орієнтаційної задачі маніпуляторів розглянуто випадки виродження формул для кутів останніх ланок. Тому при тестуванні було спеціально розглянуто випадки їхнього виродження, яке може виникнути при нульових значеннях кутів повороту останніх ланок. Таким чином, у роботі було проведено розв’язання обернених задач кінематики всіх маніпуляторів для трьох випадків. Задавалися значення всіх шести кутів, на базі чого розв’язувалася пряма задача кінематики. Отримувалася відповідна конфігурація механізмів, з якої визначалися положення вузлової точки K (її декартові координати в абсолютній системі координат) та кватерніон орієнтації останньої ланки. Ці дані надавалися як початкові для розв’язання оберненої задачі. Задавалося початкове значення кута повороту четвертої ланки для старту ітераційного процесу її визначення. У рамках кожного кроку такого процесу розв’язувалася обернена задача кінематики та визначалися всі кути, зокрема і кут четвертої ланки. При досягненні заданої точності визначення такого кута отримувалася відповідна конфігурація механізму, яка порівнювалася з вихідною в прямій задачі. Ці конфігурації порівнювалися по значенню отриманих кутів і координат характерних точок механізму. При цьому в усіх проведених розрахунках практично досягалася машинна точність. Це пояснюється тим, що використовувалися точні аналітичні формули. Таким чином, без урахування ітераційного процесу визначення кута повороту четвертої ланки, можна сказати, що представлений у статті підхід дає можливість розв’язувати обернену задачу для широкого кола маніпуляторів аналітичним алгоритмом, подібно до розв’язання прямої задачі – прямим розрахунком невідомих – кутів повороту ланок через відомі – положення та орієнтацію кінцевої ланки і геометричні параметри за отриманими формулами.

Для визначення працездатності розроблених алгоритмів проводилися для кожного маніпулятора розрахунки для таких наборів значень кутів: всі кути нульові; кути перших трьох ланок задавалися зі значеннями $\varphi_1 = 10^\circ, \varphi_2 = 20^\circ, \varphi_3 = 30^\circ$, інші – нульові; кути повороту всіх ланок ненульові зі значеннями $\varphi_1 = 10^\circ, \varphi_2 = 20^\circ, \varphi_3 = 30^\circ, \varphi_4 = 40^\circ, \varphi_5 = 50^\circ, \varphi_6 = 60^\circ$. Окремо контролювалося значення кута φ_4 в ітераційному процесі його визначення. Нижче представлено отримані конфігурації розглянутих маніпуляторів і приклад збігання кута φ_4 . На рис. 12 – 17 показано характерні точки механізмів, що з’єднані прямими.

1. Розрахунки для нульових кутів (рис. 12, 13).

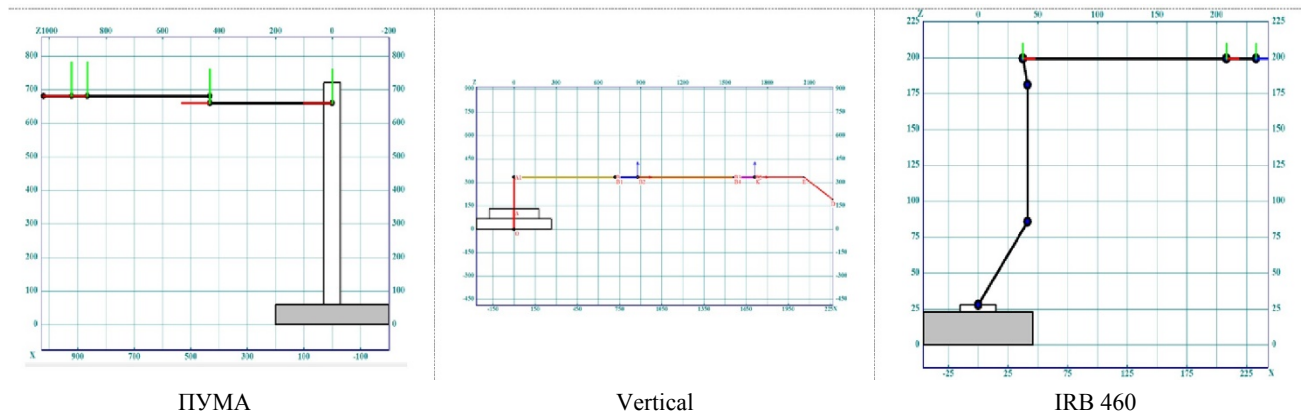


Рис. 12 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

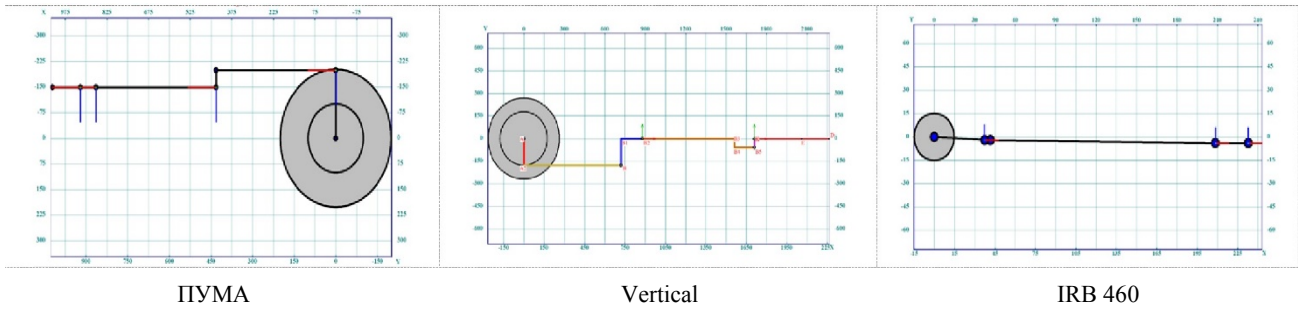


Рис. 13 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

2. Розрахунки для нульових кутів останніх трьох ланок і значень кутів перших $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$ (рис. 14, 15).

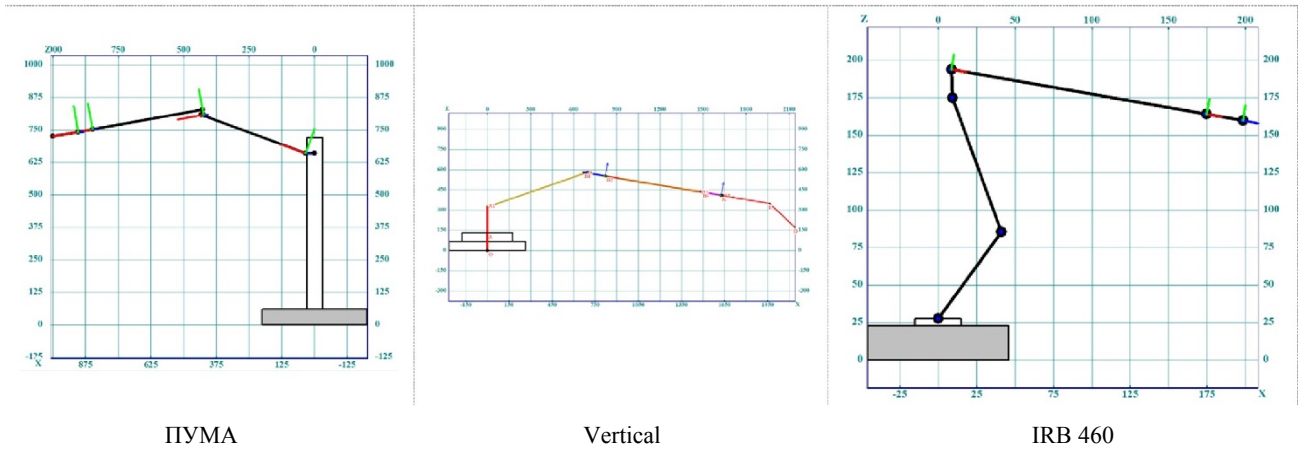


Рис. 14 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

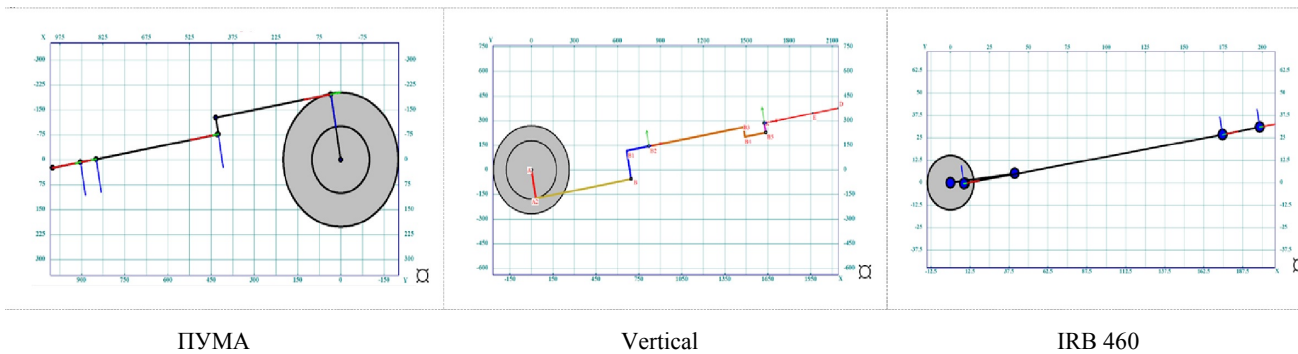


Рис. 15 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

3. Розрахунки для значень кутів $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\varphi_4 = 40^\circ$, $\varphi_5 = 50^\circ$, $\varphi_6 = 60^\circ$ (рис. 16, 17).

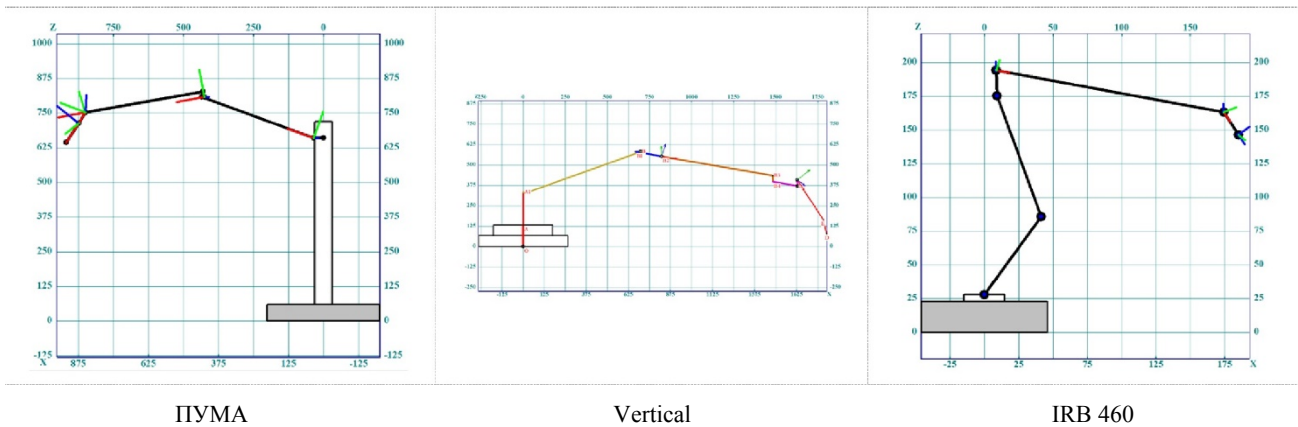


Рис. 16 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

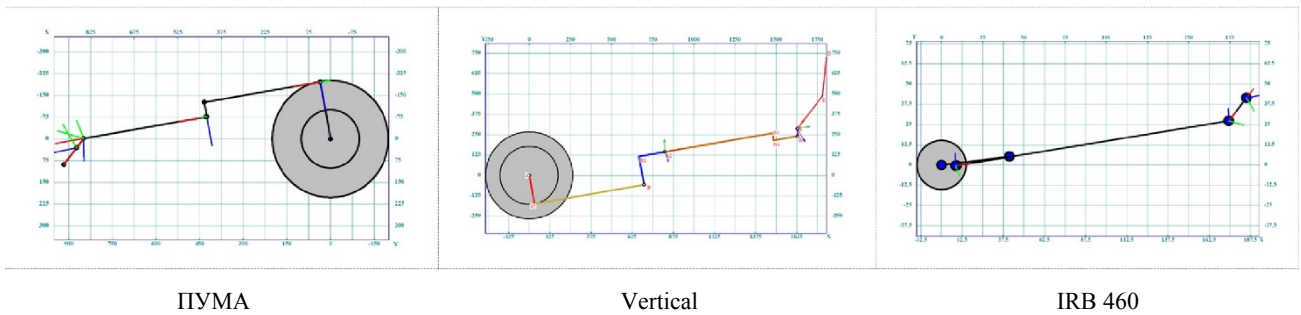


Рис. 17 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

Продемонструємо роботу методу простої ітерації в процесі розв'язання оберненої задачі для визначення кутів $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\varphi_4 = 40^\circ$, $\varphi_5 = 50^\circ$, $\varphi_6 = 60^\circ$ для робота IRB 460. У табл. 1 показано три варіанти старту ітераційного процесу пошуку значення кута φ_4 , що дорівнює 40° . Стартові значення тут: 0° , 320° , 720° .

Таблиця 1 – Збіжність значення кута φ_4 у методі простої ітерації

Варіанти розрахунків		Номер ітерації			
		1	2	3	4
Варіант 1	Початкове значення кута для поточної ітерації, $^\circ$	0	40,1554	39,9998	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,1554	39,9998	40,0000	40,0000
Варіант 2	Початкове значення кута φ_4 для поточної ітерації, $^\circ$	320	40,4537	39,9994	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,4537	39,9994	40,0000	40,0000
Варіант 3	Початкове значення кута φ_4 для поточної ітерації, $^\circ$	720	40,1554	39,9998	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,1554	39,9998	40,0000	40,0000

Перспективи подальших досліджень. Подальша робота може полягати в реалізації отриманих алгоритмів у рамках розв'язання задач управління рухом маніпуляторів розглянутого класу. Також потребує заміни використаний тут метод простої ітерації на більш надійні методи: Ньютона, половинного ділення, золотого перетину тощо, оскільки гарантувати збіжність методу простої ітерації у всіх випадках все ж таки проблематично.

Висновки. У статті розвинуто аналітичний алгоритм розв'язання оберненої задачі кінематики для кутових маніпуляторів із шістьма ступенями вільності типу PUMA-560, попередні версії якого були представлені авторами в попередніх публікаціях [1 – 3]. Алгоритм базується на умові Піпера, що дозволяє поділити задачу на дві підзадачі: задачу позиціонування та задачу орієнтації, що зводить проблему визначення шести кутів відносних поворотів ланок до аналітичного визначення тільки 3-х в кожній підзадачі. Для моделей маніпуляторів, що відповідають умові Піпера, обидві підзадачі розв'язуються точно за отриманими формулами. Для інших розглянутих моделей задача розв'язується за допомогою простої ітераційної процедури пошуку кута повороту четвертої ланки. Задача орієнтації розв'язується за допомогою кватерніонних рівнянь і тому не містить проблем виродження. Ефективність запропонованого алгоритму демонструється шляхом розв'язання задач оберненої кінематики для трьох моделей маніпуляторів: PUMA-560, АВВ (IRB 460) та маніпулятора, розробленого Vertical.

Список літератури

1. Andrieviev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom // Applied Sciences. – 2025. – 15(5):2840. DOI: 10.3390/app15052840.
2. Шабанов Г. В., Ю. М. Андрєєв. Аналітичне рішення оберненого і прямого завдання кінематики просторового кутового маніпулятора АВВ з подальшим 3D-модельованням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2 (2024). – С. 30 – 38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
3. Андрєєв Ю. М., Головня О. О., Шабанов Г. В. Автоматичний вибір конфігурації просторового маніпулятора з шістьма степенями вільності

- сті на підставі енергетичних витрат на заданому русі // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2(7). – С. 13 – 23. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02(7).02.
4. Craig J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. – New Delhi, India : 3/E, Pearson Education, 2009. – 402 p.
 5. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. – John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2020. – 608 p.
 6. Neppalli S., Csencsits M. A., Jones B. A., Walker I. D. Closed-form inverse kinematics for continuum manipulators // *Adv. Robot.* – 2009. – № 23. – P. 2077–2091. DOI: 10.1163/016918609X12518783330274.
 7. Kucuk S., Bingul Z. Robot kinematics: Industrial robotics: Forward and inverse kinematics. In *Industrial Robotics // Theory, Modelling and Control*, INTECH OA. – Publ: London, UK, 2006, pp. 117 – 148.
 8. Kucuk S., Bingul Z. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators // In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, Istanbul, Turkey, 3–5 June 2004*. – 2004. – pp. 274 – 279. DOI: 10.1109/ICMECH.2004.1364441.
 9. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry // *Mech. Mach. Theory.* – 2021. – vol. 159. – 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
 10. Harada K., Yoshida E., Yokoi K. *Motion Planning for Humanoid Robots*. – Berlin/Heidelberg, Germany, Springer, 2010. – 302 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03991-2.
 11. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms // *Appl. Math. Inf. Sci.* – 2016. – vol. 10, 225. DOI: 10.12785/amis/100125.
 12. Csiszar A., Eilers J., Verl A. On solving the inverse kinematics problem using neural networks // In *Proceedings of the 24th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP) Auckland, New Zealand, 21–23 November 2017*. – 2017. – pp. 1 – 6. DOI: 10.1109/M2VIP.2017.8211481.
 13. Zaplana H., Hadfield I. H., Lasenby J. Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra // *Mech. Mach. Theory.* – 2022. – vol. 173. – 104835. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104835.
 14. Dong X., Yu J., Chen B., Zong G. Geometric approach for kinematic analysis of a class of 2-DOF rotational parallel manipulators // *Chin. J. Mech. Eng.* – 2012. – vol. 25. – P. 241 – 247. DOI: 10.3901/CJME.2012.02.241.
 15. Jones B. A., Walker I. D. Kinematics for multisection continuum robots // *IEEE Trans. Robot.* – 2006. – vol. 22. – P. 43–55. DOI: 10.1109/TRO.2005.861458.
 16. Chen L., Zielinska T., Wang J., Ge W. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions // *Int. J. Appl. Math. Comput.* – 2020. – vol. 30. – P. 351 – 361. DOI: 10.34768/amcs-2020-0027.
 17. Godage I. S., Walker I. D. Dual Quaternion based modal kinematics for multisection continuum arms // In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA, 26–30 May 2015*. – IEEE: New York, NY, USA, 2015. – P. 1416 – 1422. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139556.
 18. El-Sherbiny A., Elhosseni M. A., Haikal A. Y. A comparative study of soft computing methods to solve inverse kinematics problem // *Ain Shams Eng. J.* – 2018. – vol. 9. – P. 2535 – 2548. DOI: 10.1016/j.asej.2017.01.007.
 19. Xie S., Sun L., Wang Z., Chen G. A speedup method for solving the inverse kinematics problem of robotic manipulators // *Int. J. Adv. Robot. Syst.* – 2022. – vol. 19. – 17298806221104602. DOI: 10.1177/17298806221104602.
 20. Pieper D. *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Ph.D. Thesis. – Stanford University, Stanford, CA, USA, 1968. – 157 p.
 21. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices // *Int. Appl. Mech.* – 1955. – vol. 22. – no. 2. – pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 22. Фук К., Гонсалес Р., Лу К. *Робототехника* – М.: Мир, 1989. – 621 с. DOI: 10.1036/0070226253.

References (transliterated)

1. Andrieiev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom. *Applied Sciences*. 2025, 15(5), 2840. DOI: 10.3390/app15052840.
2. Shabanov H. V., Andrieiev Yu. M. Analitichne rishennya obrnennogo i pryamogo zavdannya kinematyky prostorovogo kutovogo manipulyatora AVV z podal'shym 3D-modelyuvannam [Analytical solution of the inverse and forward kinematics problems of a spatial articulated ABB manipulator with subsequent 3D modeling]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: *Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv: NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2(2024), pp. 30–38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
3. Andrieiev Yu. M., Holovnia O. O., Shabanov H. V. Avtomatychnyi vybir konfigratsiyi prostorovogo manipulyatora z shist'ma stepenyamy vil'nosti na pidstavi energetychnykh vytrat na zadanomu rusi [Automatic selection of the configuration of a spatial manipulator with six degrees of freedom based on energy consumption in a prescribed motion]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2(7), pp. 13–23. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02(7).02.
4. Craig J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. New Delhi, India, 3/E, Pearson Education, 2009. 402 p.
5. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 2020. 608 p.
6. Neppalli S., Csencsits M. A., Jones B. A., Walker I. D. Closed-form inverse kinematics for continuum manipulators. *Adv. Robot.* 2009, vol. 23, pp. 2077–2091. DOI: 10.1163/016918609X12518783330274.
7. Kucuk S., Bingul Z. Robot kinematics: Industrial robotics: Forward and inverse kinematics. In *Industrial Robotics. Theory, Modelling and Control*, INTECH OA. Publ: London, UK, 2006, pp. 117–148.
8. Kucuk S., Bingul Z. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, Istanbul, Turkey, 3–5 June 2004*. 2004, pp. 274–279. DOI: 10.1109/ICMECH.2004.1364441.
9. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry. *Mech. Mach. Theory*. 2021, vol. 159, 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
10. Harada K., Yoshida E., Yokoi K. *Motion Planning for Humanoid Robots*. Berlin/Heidelberg, Germany, Springer, 2010. 302 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03991-2.
11. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2016, vol. 10, 225. DOI: 10.12785/amis/100125.
12. Csiszar A., Eilers J., Verl A. On solving the inverse kinematics problem using neural networks. In *Proceedings of the 24th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP) Auckland, New Zealand, 21–23 November 2017*. 2017, pp. 1–6. DOI: 10.1109/M2VIP.2017.8211481.
13. Zaplana H., Hadfield I. H., Lasenby J. Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra. *Mech.*

- Mach. Theory*. 2022, vol. 173, 104835. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104835.
14. Dong X., Yu J., Chen B., Zong G. Geometric approach for kinematic analysis of a class of 2-DOF rotational parallel manipulators. *Chin. J. Mech. Eng.* 2012, vol. 25, pp. 241–247. DOI: 10.3901/CJME.2012.02.241.
 15. Jones B. A., Walker I. D. Kinematics for multisection continuum robots. *IEEE Trans. Robot.* 2006, vol. 22, pp. 43–55. DOI: 10.1109/TRO.2005.861458.
 16. Chen L., Zielinska T., Wang J., Ge W. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions. *Int. J. Appl. Math. Comput.* 2020, vol. 30, pp. 351–361. DOI: 10.34768/amcs-2020-0027.
 17. Godage I. S., Walker I. D. Dual Quaternion based modal kinematics for multisection continuum arms. In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA, 26–30 May 2015*. IEEE, New York, NY, USA, 2015, pp. 1416–1422. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139556.
 18. El-Sherbiny A., Elhosseini M. A., Haikal A. Y. A comparative study of soft computing methods to solve inverse kinematics problem. *Ain Shams Eng. J.* 2018, vol. 9, pp. 2535–2548. DOI: 10.1016/j.asej.2017.01.007.
 19. Xie S., Sun L., Wang Z., Chen G. A speedup method for solving the inverse kinematics problem of robotic manipulators. *Int. J. Adv. Robot. Syst.* 2022, vol. 19, 17298806221104602. DOI: 10.1177/17298806221104602.
 20. Pieper D. *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Ph.D. Thesis. Stanford University, Stanford, CA, USA, 1968. 157 p.
 21. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Int. Appl. Mech.* 1955, vol. 22, no. 2, pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 22. Fu K., Gonzalez R., Lee C. *Robototekhnika* [Robotics]. Moscow, Mir Publ., 1989. 621 p. DOI: 10.1036/0070226253.

Надійшла (received) 30.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.01.2026; До публікації (for publication) 17.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: yurii.andriev@khp.edu.ua.

Andriev Yuriy Mykhailovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: yurii.andriev@khp.edu.ua.

Шабанов Геннадій Вікторович – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: Hennadii.Shabanov@infiz.khp.edu.ua.

Shabanov Hennadii Viktorovich – Graduate Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: Hennadii.Shabanov@infiz.khp.edu.ua.

О. М. БАШНЯКОВ, К. І. ДЕНИСОВ, В. Т. МАТВИЄНКО, В. В. ПІЧКУР, М. С. ТАІРОВА

СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОСТІЙНИМИ СИМЕТРИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ

У статті висвітлено методику розв'язування задачі стабілізації лінійного матричного диференціального рівняння з постійними симетричними матрицями, а також для важливого випадку таких рівнянь, як матричне рівняння Ляпунова. Матричні диференціальні рівняння виникають у задачах теорії стійкості, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності. Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є лінійні матричні диференціальні рівняння, зокрема матричні рівняння Ляпунова. Постають задачі знаходження аналітичних розв'язків таких рівнянь, проблеми аналізу якісних властивостей розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Для випадків, при яких незбурений розв'язок рівняння є нестійким, виникають задачі стабілізації завдяки вибору матриці керування з оберненим зв'язком. В статті пропонується методика конструювання керувань, які розв'язують задачу стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова та лінійного матричного диференціального рівняння з симетричними матрицями. Метод, розроблений в статті, базується на алгебраїчних властивостях власних чисел симетричних матриць. Побудова керування здійснюється у такий спосіб, щоб забезпечити виконання умов асимптотичної стійкості для матричного рівняння. При цьому розглядається випадок, коли матриці рівняння володіють наперед заданими спектральними властивостями, які дозволяють забезпечити умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку замкненої системи. Крім того, аналізується постановка задачі з обмеженням на матриці підсилення, які визначають матричну функцію керування. Сформульовані теореми носять конструктивний характер.

Ключові слова: матричне диференціальне рівняння, стабілізація, стійкість, власні значення матриці, лінійний обернений зв'язок.

О. М. BASHNIAKOV, K. I. DENYSOV, V. T. MATVIENKO, V. V. PICHKUR, M. S. TAIROVA STABILIZATION OF LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT SYMMETRIC MATRICES

The article highlights the methodology for solving the problem of stabilizing a linear matrix differential equation with constant symmetric matrices, as well as for an important case of such equations, which is called the matrix Lyapunov equation. Matrix differential equations arise in problems of stability theory, practical stability, optimal control theory, and evaluation of the state of systems under uncertainty. One of the classical types of matrix differential equations is linear matrix differential equations, in particular matrix Lyapunov equations. The problems of finding analytical solutions to such equations, the problems of analyzing the qualitative properties of solutions to matrix differential equations arise. For cases in which the unperturbed solution of the equation is unstable, stabilization problems arise due to the choice of a control matrix with an inverse relationship. The article proposes a method for constructing controls that solve the problem of stabilizing a matrix Lyapunov differential equation and a linear matrix differential equation with symmetric matrices. The method developed in the article is based on the algebraic properties of the eigenvalues of symmetric matrices. The control is constructed in such a way as to ensure that the conditions of asymptotic stability for the matrix equation are met. In this case, the case is considered in which the matrices of the equation have predetermined spectral properties that allow ensuring the conditions of asymptotic stability of the zero solution of the closed-loop system. In addition, the formulation of the problem with the restriction on the gain matrices that determine the matrix control function is analyzed. The formulated theorems are constructive in nature.

Key words: matrix differential equation, stabilization, stability, matrix eigenvalues, linear feedback.

Вступ. Матричні диференціальні рівняння є математичним засобом апроксимації пучка розв'язків систем диференціальних рівнянь. Вони виникають в результаті розв'язування задач теорії стійкості, конструювання оптимального керування, оцінювання стану системи за спостереженнями [1 – 4]. Як наслідок, постають питання знаходження *аналітичних розв'язків* таких рівнянь, аналізу якісних властивостей їхніх розв'язків, зокрема існування, єдиності, продовжуваності розв'язку *задачі Коші*, а також знаходження умов стійкості незбурених режимів [4 – 7]. Зазначимо, що *матричні рівняння Ляпунова*, як і лінійні матричні диференціальні рівняння, є одним з тих видів матричних диференціальних рівнянь, які виникають у застосуваннях, зокрема при моделюванні пучка заряджених частинок з використанням методів практичної стійкості [3].

Якщо незбурений розв'язок матричного диференціального рівняння є нестійким, то ставиться задача стабілізації, яка полягає в тому, щоб шляхом включення у *математичну модель* відповідних керуючих впливів з оберненим зв'язком, забезпечити *умови стійкості*. У статті пропонується методика розв'язування задачі стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова і лінійного матричного рівняння з симетричними постійними матрицями в класі лінійних керувань з оберненим зв'язком. Вибір керування здійснюється у такий спосіб, щоб забезпечити виконання *умов асимптотичної стійкості* для лінійного матричного рівняння. При цьому розглядається випадок, коли матриці рівняння володіють наперед заданими *спектральними властивостями*, які дозволяють забезпечити умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку замкненої системи. Така постановка є розвитком *методу модального керування* для лінійних матричних диференціальних рівнянь [8].

У статті використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множина матриць розмірності $n \times n$ над полем дійсних чисел; M^T – транспонована матриця (вектор) M ; $\lambda_{\max}(M)$ – максимальне власне число матриці M ; $tr(M)$ – слід матриці M ; $diag(\cdot)$ – діагональна матриця з вказаними в дужках діагональними елементами; $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Випадок матричного рівняння Ляпунова. Розглянемо матричне диференціальне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA + U(X), \quad (1)$$

де $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетрична матриця з постійними коефіцієнтами; $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця розв’язків рівняння (1); $U(X) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця керування. Необхідно знайти таку матрицю керування $U(X)$, що нульовий розв’язок рівняння (1) є асимптотично стійким. Будемо шукати керування у вигляді:

$$U(X) = GX + XG, \quad (2)$$

де $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетрична матриця з постійними коефіцієнтами. При цьому вибір керування вигляду (2) будемо здійснювати так, щоб забезпечити обмеження вигляду:

$$\text{tr}(G^2) \leq r^2, \quad r > 0. \quad (3)$$

Підставимо керування (2) у матричне диференціальне рівняння (1). Одержимо замкнене матричне диференціальне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = (A+G)X + X(A+G). \quad (4)$$

Оскільки матриці A та G симетричні, то $A+G = (A+G)^T$, і власні числа цієї матриці є дійсними [9]. З умови асимптотичної стійкості матричного рівняння Ляпунова [7] маємо, що нульовий розв’язок рівняння (4) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли власні числа матриці $A+G$ є від’ємними. Отже, знайдемо таку матрицю G , що матриця $A+G$ має від’ємні власні числа. Ця умова еквівалентна від’ємній визначеності матриці $A+G$.

Позначимо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – впорядковані за спаданням власні числа матриці A . Подамо матрицю A у вигляді:

$$A = H^T \Lambda H,$$

де $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетрична матриця; $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – діагональна матриця, елементами якої є $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Одержимо:

$$A+G = H^T \Lambda H + G = H^T (\Lambda + HGH^T) H.$$

Матриця H є ортогональною, тому [9]

$$\begin{aligned} \text{tr}(G^2) &= \text{tr}(H^T H G^2) = \text{tr}(H G^2 H^T) = \\ &= \text{tr}(HGH^T HGH^T) = \text{tr}\left(\left(HG^2 H^T\right)^2\right) = \text{tr}(F^2), \end{aligned}$$

де $F = HGH^T$. Отже, необхідно знайти таку симетричну матрицю $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, що матриця

$$H^T (\Lambda + F) H$$

є від’ємно визначеною та забезпечує виконання обмежень

$$\text{tr}(F^2) \leq r^2.$$

Матриця $H^T (\Lambda + F) H$ є від’ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли матриця $\Lambda + F$ є від’ємно визначеною [9]. Будемо шукати матрицю F у діагональному вигляді так, щоб $\Lambda + F$ була від’ємно визначеною матрицею. Нехай F_{ij} – компоненти матриці F , λ_i – діагональні компоненти матриці Λ , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Обираємо F_{ij} з умови:

$$F_{ii} + \lambda_i < 0, \quad i \in I; \quad F_{ij} = 0, \quad i, j \in I, \quad i \neq j.$$

Визначимо сукупність від’ємних чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ так, що $F_{ii} + \lambda_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді

$$F_{ii} = \sigma_i - \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

У цьому випадку матриця $\Lambda + F$ є діагональною і від’ємно визначеною,

$$\text{tr}(F^2) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \lambda_i)^2.$$

Наведемо один зі способів забезпечення виконання обмежень (3). Позначимо:

$$J_- = \{i \in I : \lambda_i < 0\}, \quad J_0 = \{i \in I : \lambda_i = 0\}, \quad J_+ = \{i \in I : \lambda_i > 0\}.$$

Припустимо, що виконується умова

$$s^2 = \sum_{i \in J_+} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n (\max(0, \lambda_i))^2 < r^2, \quad s > 0. \quad (6)$$

Це означає, що сума квадратів додатних власних значень матриці Λ менша від r^2 . Якщо $i \in J_-$, то виберемо $\sigma_i = \lambda_i$. Якщо $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ задати так, щоб

$$\text{tr}(F^2) = \sum_{i \in J_+} (\sigma_i - \lambda_i)^2 + \sum_{i \in J_0} \sigma_i^2 \leq r^2, \quad (7)$$

тоді обмеження (3) мають місце. Тому покладемо:

$$\sigma_i = -p\lambda_i, \quad i \in J_+; \quad \sigma_i = -\varepsilon(1+p), \quad i \in J_0; \quad \sigma_i = \lambda_i, \quad i \in J_-, \quad (8)$$

де $p > 0$, $\varepsilon > 0$. Підставляючи (8) в (7), одержимо таку оцінку:

$$(1+p)^2 s^2 + (1+p)^2 \varepsilon^2 |J_0| \leq r^2.$$

Тут $|J_0|$ – кількість елементів множини J_0 . Звідси

$$p \leq \frac{r}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 |J_0|}} - 1. \quad (9)$$

Значимо, що $\varepsilon > 0$ слід задавати достатньо малим так, щоб права частина (9) була додатною. Має місце теорема.

Теорема 1. Припустимо, що для власних чисел матриці A виконуються обмеження (6). Керування (2) за обмежень (3) розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (1), якщо G обирається з умови:

$$G = H^T F H,$$

де $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ортогональна матриця, яка утворена з ортонормованої системи власних векторів матриці A , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – діагональна матриця, компоненти F_{ij} якої обираються з умови:

$$F_{ii} < -\lambda_i, \quad i \in I; \quad F_{ij} = 0, \quad i, j \in I, \quad i \neq j,$$

зокрема за допомогою (5), (8), (9).

Припустимо, що обмеження (3) відсутні, але необхідно знайти таке керування вигляду (2), яке забезпечує наперед визначений набір власних значень матриці $A+G$ відповідного замкненого матричного рівняння (4). Справджується така теорема.

Теорема 2. Керування (2) (без врахування обмежень (3)) розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (1) з наперед заданими від'ємними власними значеннями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ матриці $A+G$ рівняння (4), якщо $G = H^T F H$, де $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ортогональна матриця, яка утворена ортонормованою системою власних векторів матриці A , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – діагональна матриця, компоненти F_{ij} якої обираються з умови:

$$F_{ii} = \sigma_i - \lambda_i, \quad i \in I; \quad F_{ij} = 0, \quad i, j \in I, \quad i \neq j.$$

Для представлення матриці A у вигляді $A = H^T \Lambda H$, де $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ортогональна матриця, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – діагональна матриця з власних чисел матриці A , застосовується метод поворотів Якобі [10].

Стабілізація лінійного матричного рівняння. Розглянемо лінійне матричне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB + U(X), \quad (10)$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетричні матриці з постійними коефіцієнтами; $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (10); $U(X) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця керування. Необхідно знайти таке керування $U(X)$, що нульовий розв'язок рівняння (10) є асимптотично стійким.

Будемо шукати керування у вигляді:

$$U(X) = PX + XQ, \quad (11)$$

де $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симетричні матриці з постійними коефіцієнтами. Підставимо керування $U(X)$ у рівняння (10) і одержимо замкнене матричне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = (A+P)X + X(B+Q). \quad (12)$$

З умов асимптотичної стійкості випливає, що нульовий розв'язок матричного рівняння (12) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли [7]

$$\lambda_{\max}(A+P) + \lambda_{\max}(B+Q) < 0. \quad (13)$$

Тоді задача зводиться до знаходження симетричних матриць P , Q , для яких виконується умова (13).

Позначимо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – впорядковані за спаданням власні числа матриці A та $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – впорядковані за спаданням власні числа матриці B . Подамо матриці A, B у вигляді:

$$A = H_1^T \Lambda H_1, \quad B = H_2^T M H_2,$$

де $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ортогональні матриці,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

– діагональні матриці, що складаються з власних чисел матриць A та B відповідно [9]. Одержимо:

$$A+P = H_1^T (\Lambda + H_1 P H_1^T) H_1, \quad B+Q = H_2^T (M + H_2 Q H_2^T) H_2.$$

Зробимо заміну:

$$F = H_1 P H_1^T, \quad G = H_2 Q H_2^T.$$

Будемо шукати матриці $F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ у діагональному вигляді так, щоб

$$\lambda_{\max}(\Lambda + F) + \lambda_{\max}(M + G) < 0. \quad (14)$$

У цьому випадку справджується (13).

Припустимо, що $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ – впорядковані за спаданням від'ємні дійсні числа. Знайдемо таке керування $U(X)$, що

$$s_k(A+P) + s_k(B+Q) = \sigma_k, \quad (15)$$

де $s_k(A+P)$, $s_k(B+Q)$ – власні числа матриць $A+P$, $B+Q$ відповідно, $k = 1, 2, \dots, n$. Позначимо:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Умова (15) еквівалентна до

$$\Lambda + F + M + G = \Sigma. \quad (16)$$

Таким чином, (14) буде виконуватися, оскільки

$$\lambda_{\max}(\Lambda + F) + \lambda_{\max}(M + G) = \sigma_1 < 0.$$

Покладемо:

$$F = G = \frac{1}{2} \Sigma - \frac{1}{2} (\Lambda + M). \quad (17)$$

Тоді справджується (16). Враховуючи, що $P = H_1^T F H_1$, $Q = H_2^T G H_2$, одержимо таку теорему.

Теорема 3. Керування (11) при

$$P = \frac{1}{2} H_1^T (\Sigma - \Lambda - M) H_1, \quad Q = \frac{1}{2} H_2^T (\Sigma - \Lambda - M) H_2$$

розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (10) з умовою

$$s_k(A+P) + s_k(B+Q) = \sigma_k,$$

де $s_k(A+P)$, $s_k(B+Q)$ – власні числа матриць $A+P$, $B+Q$ відповідно, $k = 1, 2, \dots, n$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ – впорядковані за спаданням від'ємні дійсні числа, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $H_1, H_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ортогональні матриці, які утворені за допомогою ортонормованих систем власних векторів матриць A та B відповідно.

Припустимо, що при розв'язуванні задачі стабілізації матричного рівняння (10) в класі керувань з оберненим зв'язком вигляду (11) задано обмеження на матриці P, Q вигляду:

$$\text{tr}(P^2) + \text{tr}(Q^2) \leq r^2, \quad (18)$$

де $r > 0$. У цьому випадку помічаємо, що

$$\text{tr}(P^2) = \text{tr}\left(\left(H_1 P H_1^T\right)^2\right) = \text{tr}(F^2), \quad \text{tr}(Q^2) = \text{tr}\left(\left(H_2 Q H_2^T\right)^2\right) = \text{tr}(G^2).$$

Тоді обмеження (18) еквівалентні до

$$\text{tr}(F^2) + \text{tr}(G^2) \leq r^2. \quad (19)$$

Позначимо:

$$\theta_k = \lambda_k + \mu_k, \quad k \in I;$$

$$I_0 = \{k \in I : \theta_k = 0\}, \quad I_- = \{k \in I : \theta_k < 0\}, \quad I_+ = \{k \in I : \theta_k > 0\}.$$

Припустимо, що

$$2 \sum_{k \in I_+} \theta_k^2 < r^2.$$

Якщо $k \in I_-$, то в умові (15) покладемо $\sigma_k = \theta_k$. У випадку $k \in I_0$ в (15) визначимо $\sigma_k = -2\varepsilon$. При $k \in I_+$ покладемо $\sigma_k = -\theta_k - 2\varepsilon$. Тут $\varepsilon > 0$.

Матриці F, G визначаємо за формулою (17). Тоді обмеження (19) дають оцінку параметра $\varepsilon > 0$ у вигляді:

$$2\varepsilon^2 |I_0| + 2 \sum_{k \in I_+} (\theta_k + \varepsilon)^2 \leq r^2,$$

яку можемо записати так:

$$\varepsilon^2 (|I_0| + |I_+|) + 2\varepsilon \sum_{k \in I_+} \theta_k + \sum_{k \in I_+} \theta_k^2 - \frac{1}{2} r^2 \leq 0. \quad (20)$$

Тут $|I_0|$ – кількість елементів множини I_0 , $|I_+|$ – кількість елементів множини I_+ , $|I_0| + |I_+| > 0$. Нерівність (20) буде мати розв'язок, оскільки

$$\left(\sum_{k \in I_+} \theta_k \right)^2 - (|I_0| + |I_+|) \left(\sum_{k \in I_+} \theta_k^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) \geq 0.$$

Підберемо $\varepsilon > 0$, яке задовольняє нерівності (20). Тоді має місце умова (19). Конструюємо матрицю $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Далі розв'язування задачі стабілізації матричного рівняння (10) в класі керувань з оберненим зв'язком вигляду (11) при обмеженнях (18) здійснюємо за допомогою теореми 3.

Перспективи подальших досліджень. Надалі дослідження будуть спрямовані на створення методів розв'язування задачі стабілізації лінійного диференціального матричного рівняння з постійними матрицями та з майже постійними матрицями. Передбачається, що це дозволить побудувати алгоритми керування пучком траєкторій систем керування з використанням матричних диференціальних рівнянь.

Висновки. У статті обгрунтовано метод розв'язування задачі стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова і лінійного матричного рівняння з симетричними постійними матрицями в класі лінійних керувань з оберненим зв'язком. Основна ідея методу полягає в тому, що керування визначає замкнене диференціальне рівняння, матриці якого задовольняють наперед заданим умовам щодо власних чисел, і які забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв'язку (умови обгрунтовані в [7]). Такий підхід є новим і розвиває постановки модального керування на випадок матричних диференціальних рівнянь. Крім того, обгрунтовані в статті результати застосовуються до розв'язування задачі стабілізації матричного рівняння Ляпунова і лінійного матричного диференціального рівняння з обмеженням на матриці функції керування.

Список літератури

1. Fleming W. H., Rishel R. W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. – Springer, 2012. – 222 p.
2. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. *Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data*. – River Publishers, 2021. – 224 p.
3. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. *Практична стійкість, оцінки та оптимізація*. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
4. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. – NJ : Prentice Hall, 2002. – 766 p.
5. Barbu V. *Differential Equations*. – Springer, 2016. – 224 p.
6. Reid W. T. *Riccati Differential Equations*. – Academic Press, 2012. – 226 p.
7. Денисов К. І., Пічкур В. В. Аналіз стійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 2(9). – С. 49 – 55. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.02(9).06.
8. Porter B., Crossley R. *Modal Control. Theory and Applications*. – Taylor & Francis, 1972. – 233 p.
9. Gantmacher F. R. *The theory of matrices*. – NY : Chelsea Publishing Company, 1959. – 276 p.
10. Шахно С. М. *Чисельні методи лінійної алгебри*. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 245 с.

References (transliterated)

1. Fleming W. H., Rishel R. W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer, 2012. 222 p.
2. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. *Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data*. River Publishers, 2021. 224 p.
3. Bashniakov O. M., Garashchenko F. G., Pichkur V. V. *Praktychna stikist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical Stability, Estimations and Optimization]. Kyiv, Kyiv University Publ., 2008. 383 p.

4. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. NJ, Prentice Hall, 2002. 766 p.
5. Barbu V. *Differential Equations*. Springer, 2016. 224 p.
6. Reid W. T. *Riccati Differential Equations*. Academic Press, 2012. 226 p.
7. Denysov K. I., Pichkur V. V. Analiz stiikosti rozvyazkiv liniynogo matrychnogo dyferentsial'nogo rivnyannya z postynymy koefitsientamy [Stability analysis of solutions of a linear matrix differential equation with constant coefficients]. *Visnyk Natsional'nogho tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychno modelivannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2025, no. 2(9), pp. 49–55. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.02(9).06.
8. Porter B., Crossley R. *Modal Control. Theory and Applications*. Taylor & Francis, 1972. 233 p.
9. Gantmacher F. R. *The theory of matrices*. NY, Chelsea Publishing Company, 1959. 276 p.
10. Shakhno S. M. *Chysel'ni metody liniynoyi algebry* [Numerical methods of linear algebra]. Lviv, LNU im. I. Franka Publ., 2007. 245 p.

Надійшла (received) 30.09.2025; Доопрацьована (finalized) 06.01.2026; До публікації (for publication) 15.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Башняков Олександр Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Bashniakov Oleksandr Mykolaiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Денисов Костянтин Ігоревич – студент першого курсу магістратури та інженер кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Denysov Kostiantyn Ihorovich – first-year Master's student of the Department of Complex Systems Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Матвієнко Володимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Matvienko Volodymyr Tyhonovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Тайрова Марія Сергіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики, факультет математики, фізики та інформаційних технологій, Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса; тел.: +38(048) 723-12-23; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5609-2552>; e-mail: mason@onu.edu.ua.

Tairova Mariia Serhiivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Optimal Control and Economic Cybernetics, Odesa I. I. Mechnikov National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Odesa; tel.: +38(048) 723-12-23; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5609-2552>; e-mail: mason@onu.edu.ua.

В. А. ВАНІН, Г. І. КОШОВИЙ

ІНТЕГРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПЛАНАРНИХ СИСТЕМ ІМПЕДАНСНИХ СТРИЧОК В ПОЛІ Е-ПОЛЯРИЗОВАНИХ ХВИЛЬ

У роботі на основі повної хвильової математичної моделі проаналізовано розсіювання плоскої Е-поляризованої хвилі на системах імпедансних стрічок. Значну увагу приділено інтегральним характеристикам розсіювання для неklasичних компланарних систем імпедансних стрічок нульової товщини. Для знаходження основних характеристик розсіювання для планарних передфракціальних решіток та компланарних систем стрічок, що базуються на функціях «Сходи Диявола», використовується інтегральна формула Гельмгольца – Кірхгофа. Представлено два класи специфічних функцій Сходи Диявола, що відповідають самоподібним досконалим множинам зі змінною фрактальною розмірністю. Окрім повних хвильових математичних моделей, для дослідження цих характеристик розсіювання були використані асимптотичні моделі Лорда Релея. Прості асимптотичні формули дають можливість порівняти їх з результатами розрахунків за повною хвильовою моделлю і оцінити діапазон застосування асимптотик. Чисельна апроксимація системи СИУ для повної хвильової моделі для ґраток із двох та трьох стрічок виконана методом механічних квадратур з вибором точок інтегрування та точок колокації на інтервалах розбиття.

Ключові слова: інтегральні характеристики, компланарні системи, імпедансні стрічки, моделювання, розсіювання хвиль, асимптотичні та чисельні методи.

V. A. VANIN, G. I. KOSHOVY

INTEGRAL CHARACTERISTICS OF PLANAR AND CO-PLANAR SYSTEMS OF IMPEDANCE STRIPS IN THE FIELD OF E-POLARIZED WAVES

In this work, a full-wave mathematical model is used to analyze the scattering of a plane E-polarized wave by impedance strip systems. Considerable attention is paid to the integral scattering characteristics for non-classical planar and coplanar systems of zero-thickness impedance strips. To find the main scattering characteristics for planar pre-fractal gratings and coplanar strip systems based on the Devil's Ladder functions, the Helmholtz-Kirchhoff integral formula is used. Two classes of specific Devil's Ladder functions are presented, corresponding to self-similar perfect sets with variable fractal dimension. In addition to full-wave mathematical models, Lord Rayleigh's asymptotic models were used to study these scattering characteristics. Simple asymptotic formulas make it possible to compare them with the results of calculations using the full-wave model and to estimate the range of application of the asymptotics. Numerical approximation of the SIU system for the full-wave model for gratings of two and three strips is performed by the method of mechanical quadratures with the selection of integration points and collocation points on the intervals of division.

Key words: integral characteristics, coplanar systems, impedance strips, modeling, wave scattering, asymptotic and numerical methods.

Вступ. Задачі розсіювання *електромагнітних (ЕМ) хвиль* у тривимірному (3В) просторі можуть бути адекватно спрощені до 1В *математичних моделей* завдяки методу *інтегральних рівнянь* [1, 2]. У випадку розсіювання плоскої ЕМ-хвилі *системами імпедансних електропровідних стрічок* нульової товщини коректні 1В математичні моделі були представлені в статтях [3 – 7]. Окрім повних хвильових математичних моделей у вигляді *систем інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною сингулярністю*, були розроблені *асимптотичні математичні моделі лорда Релея*. Ці асимптотичні моделі у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь дають дві можливості: перша стосується тестування алгоритмів обчислення вихідних змінних повних хвильових математичних моделей; друга можливість пов'язана з обчисленням основних характеристик розсіювання для розріджених систем електрично вузьких стрічок.

Метою цієї статті є пошук коректних, простих та ефективних виразів для інтегральних характеристик розсіювання систем імпедансних стрічок, що опромінюються плоскою *Е-поляризованою* ЕМ-хвилею. Дослідження починається з повної хвильової математичної моделі для реалізації асимптотичного підходу лорда Релея з метою побудови асимптотичної математичної моделі, яка дає нам явний розв'язок. Основна увага в дослідженні буде зосереджена на розрахунку головних характеристик розсіювання для *передфрактальної ґратки імпедансних стрічок (ПФґС)* та *компланарних систем імпедансних стрічок (КСІС)*, пов'язаних із *специфічними функціями Сходи Диявола (СД-функції)*. Базову інформацію про найпростіші самоподібні фрактальні множини та специфічні СД-функції можна знайти у [8 – 12].

Постановка задачі розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі КСІС та отримання виразів інтегральних характеристик розсіювання, пов'язаних з поведінкою ЕМ-поля у дальній зоні, представлені у першому розділі цієї статті. Асимптотичний підхід лорда Релея до задачі розсіювання плоскої Е-поляризованої ЕМ-хвилі слабо заповненими ПФґС, що приводить до звичайної системи лінійних алгебраїчних рівнянь та простих виразів для інтегральної характеристики розсіювання, подані у наступному другому розділі цієї статті. Третій розділ присвячений розгляду кількох типів специфічних СД-функцій, що будуються на основі *третьої досконалої множини* зі змінною *фрактальною розмірністю*. Завдяки підходу лорда Релея задачу розсіювання плоскої Е-поляризованої ЕМ-хвилі слабо заповненими КСІС також спрощено до систем *лінійних алгебраїчних рівнянь* у четвертому розділі. Використовуючи прості аналітичні вирази та системи лінійних алгебраїчних рівнянь, створено ефективний алгоритм для проведення чисельних експериментів із розсіюванням ЕМ-полем у дальній зоні. Останні два розділи показують деякі результати чисельних експериментів із розсіюванням ЕМ-полем.

Аналіз останніх досліджень. Ефективні методи дослідження розсіювання Е-поляризованої хвилі як однією стрічкою з імпедансом, так і двома провідними стрічками були розглянуті в статтях [13, 14]. Слід зазначити, що

там основну увагу приділено розробці методів дослідження повних хвильових математичних моделей у вигляді систем інтегральних рівнянь першого роду. При цьому асимптотичні математичні моделі лорда Релея використовуються для тестування алгоритмів обчислення вихідних змінних повних хвильових математичних моделей. Результати тестування показали досить гарне співпадіння вихідних змінних обох математичних моделей у відповідному частотному діапазоні як для випадку з однією стрічкою, так і для випадку з двома провідними стрічками з імпедансом.

Повні хвильові та асимптотичні математичні моделі розсіювання плоскої Е-поляризованої ЕМ-хвилі на ПФГІС були розглянуті в статті [6]. Відповідні інтегральні характеристики для ПФГІС будуть представлені у розділі 2 цієї статті. Цікаві типи КСІС, що відповідають специфічним СД-функціям, були запропоновані у статті [5]. Там же були представлені та проаналізовані два класи специфічних СД-функцій, що відповідають основним класам 1D самоподібних досконалих множин зі змінною фрактальною розмірністю. Вони дають прості конструкції для впорядкування великої кількості специфічних компланарних багатоеlementних систем. Такого роду системи можуть бути корисними для моделювання особливих природних процесів та екстремальних зон в однорідному середовищі [8, 9].

1. Задача розсіювання плоскої Е- поляризованої хвилі компланарною системою стрічок з імпедансом.

1.1. Постановка задачі. Задача розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі компланарною системою абсолютно тонких та провідних циліндричних стрічок (рис. 1) полягає у визначенні відповідного розв'язку рівнянь Максвелла у 3D – просторі. Ця задача розсіювання за відомим методом інтегральних рівнянь (ІР) може бути спрощена до 1D математичної моделі [1, 2, 13].

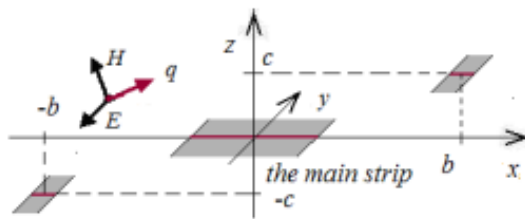


Рис. 1 – Схема компланарної ґратки з 3 стрічок.

Процес розсіювання плоскої Е-поляризованої ЕМ-хвилі компланарними системами провідних стрічок з імпедансом – загальна повно хвильова 1D математична модель, представлена системою інтегральних рівнянь першого роду з логарифмічною сингулярністю в діагональних ядрах. Повну інформацію про ці сингулярні інтегральні рівняння можна знайти в публікаціях [4 – 7]. Коли вихідні змінні для відповідної математичної моделі знайдені, легко отримати ЕМ-поле навколо стрічок. Розсіяне ЕМ-поле представлено двома векторами

напруженості: для електричного та магнітного полів [13 – 16].

Позначимо у випадку Е-поляризації єдину компоненту напруженості електричного поля: $E_y(x, z) = v(x, z)$. Згідно з інтегральною формулою Гельмгольца – Кірхгофа, після деяких перетворень отримаємо формулу:

$$v^s(x, z) = \int_S \psi(x') \cdot \left(1 + \frac{i\mu}{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) H_0^{(1)}(kR) \cdot dx', \quad (1)$$

де невідома функція $\psi(x)$ визначає розподіл густини струму на електропровідних стрічках з імпедансом; μ – безрозмірний параметр імпедансу [5, 6, 13]. Областю інтегрування S є об'єднання інтервалів – поперечних перерізів стрічок у компланарній системі (рис. 1). Для вектора напруженості магнітного поля маємо вираз:

$$H(x, z) = \left(-v(x, z)'_z, 0, v(x, z)'_x\right) / ik\chi,$$

χ – хвильовий опір середовища навколо стрічок.

1.2. Розсіяне ЕМ-поле у дальній зоні. Коли вихідна змінна математичної моделі розсіювання відома, легко знайти характеристики розсіювання. Основна характеристика розсіяного поля решіткою скінчених стрічок пов'язана з поведінкою ЕМ-поля у дальній зоні [1, 2, 5, 6]. Для отримання виразів інтегральних характеристик розсіювання в дальній зоні розглянемо падаючу плоску Е-поляризовану ЕМ-хвилю на компланарні системи плоских імпедансних стрічок. За умови $r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg 1$, можемо використати асимптотичні вирази функції Ганкеля та її похідної [1]. Виконуючи стандартні перетворення з (1), можемо її знайти у вигляді:

$$v^p(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{i}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} (1 - \mu \sin \varphi) \cdot \sum_{m=1}^M \left\{ \hat{\psi}_m(k \cos \varphi) \exp[-ik(x_{m0} \cos \varphi + z_{m0} \sin \varphi)] \right\}. \quad (2)$$

Тут інтегральне перетворення

$$\hat{\psi}_m(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_m} \psi(x') \exp(-ix'y) dx'$$

подібне до перетворення Фур'є функції $\psi(x)$, визначеної на сегменті S_m . Координати x_{m0}, z_{m0} визначають положення центрів стрічок в площині XOZ . Так, для звичайної ґратки із двох стрічок у одній площині для них маємо $x_{10} = -b, z_{10} = 0, x_{20} = b, z_{20} = 0$. Для компланарної ґратки із трьох стрічок, що виникає на другому етапі

утворення іррегулярної непарної неklasичної структури (друга стадія побудови ДС-функції), зображеної на рис. 1, ці координати є такими $x_{10} = -b$, $z_{10} = -c$, $x_{20} = 0$, $z_{20} = 0$, $x_{30} = b$, $z_{30} = c$.

Зазначимо, що вираз для розсіяного ЕМ-поля у дальній зоні (2) узгоджується із відповідним виразом для $M = 1$ та $\mu = 0$ [5]. Множник e^{ikr} / \sqrt{kr} (що залежить від полярного радіуса) опускаємо, оскільки нас цікавить розподіл розсіяного ЕМ-поля в залежності від полярного кута. Позначимо його $A(\varphi)$. Відомий асимптотичний підхід лорда Релея дозволяє нам побудувати математичну модель, яка має строгий розв'язок задачі розсіювання для електрично вузьких, слабо заповнених ґраток стрічок

$$\hat{\psi}_m(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_m} \psi(x') \exp(-ix'y) dx'.$$

2. Асимптотичний підхід лорда Релея для слабо заповнених ПФГІС.

1.2. Найпростіша асимптотична модель лорда Релея. Асимптотичний підхід лорда Релея до розв'язання задачі розсіювання дозволяє нам побудувати досить прості математичні моделі. Розв'язки задачі розсіювання, представлені в публікаціях [3 – 5, 17], корисні для дослідження характеристик розсіювання слабо заповнених ПФГІС. Наприклад, сегменти першого рівня на рис. 2 (червоний колір) є утворювачами найпростішого класу досконалої множини з фрактальною розмірністю 0.5. Він складається з двох сегментів із центрами $x_{10} = -b$,

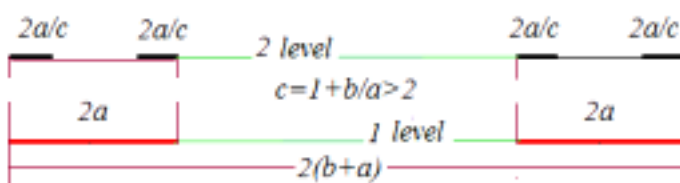


Рис. 2 – Поперечні розрізи двох ПФГІС.

$z_{10} = 0$, $x_{20} = b$, $z_{20} = 0$, та представлені двома функціями $\pm b + at$, де $t \in [-1, 1]$. Алгоритм побудови меж для сегментів другого рівня буде наведений нижче.

Використовуючи такий підхід, математичну модель для асимптотичного наближення задачі розсіювання можна спростити до системи двох

алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} j_{10} \cdot \ln \frac{\gamma \cdot ka}{4i} + j_{20} \cdot R(2kb) = \beta(\mu) \cdot e^{-ik \cdot x_{10} \cos(\varphi_0) +}, \\ j_{10} \cdot R(2kb) + j_{20} \cdot \ln \frac{\gamma \cdot ka}{4i} = \beta(\mu) \cdot e^{-ik \cdot \cos(\varphi_0)}. \end{cases} \quad (3)$$

Тут позадіагональні коефіцієнти матриці представлені (з використанням функції Ганкеля першого роду) формулами $R(\rho) = \pi \cdot H_0^{(1)}(\rho) / 2i$. Інтеграл $j_m = \int_{-1}^1 j_m(t) dt$ є основними невідомими константами, які визначають головне наближення вихідних змінних для асимптотичної моделі $j_{k0}(x) = j_{k0} / (\pi \sqrt{1-x^2})$. У правій частині системи (3) маємо вирази $\beta(\mu) = 2\pi / [g_1 \mu - 1]$, де g_1 – перша компонента одиничного вектора напрямку поширення Е-поляризованої хвилі, що набігає на систему стрічок знизу (статті [5, 6]).

Задача розсіювання Е-поляризованої хвилі системою двох стрічок з імпедансом приведена до звичайної системи двох алгебраїчних рівнянь (3). Таким чином, зазначена задача розсіювання може вважатися розв'язаною у головному наближенні, оскільки розв'язок системи (3) просто знаходиться за правилом Крамера аналітично.

Отже, для отримання виразу для інтегральної характеристики розсіювання використовуємо вираз (2) при $M = 2$. Тоді для розподілу розсіяного ЕМ поля в залежності від полярного кута легко знайти простий аналітичний вираз:

$$A(\varphi) = \sqrt{2/\pi i} \cdot (1 - \mu \sin \varphi) \cdot [j_{10} e^{-ikx_{10} \cos \varphi} + j_{20} e^{-ikx_{20} \cos \varphi}]. \quad (4)$$

Використовуючи цей простий аналітичний вираз та систему двох алгебраїчних рівнянь (3), можна створити ефективний алгоритм для проведення чисельних експериментів із розсіювання ЕМ-полем у дальній зоні.

2.2. Асимптотична модель лорда Релея для 4 стрічок. Розріджена ПФГІС, що відповідає другому етапу створення для найпростішого класу досконалої множини з фрактальною розмірністю 0.5, складається з 4 стрічок. Поперечний переріз цих стрічок, представлений 4 сегментами, виділений чорним кольором на другому рівні рис. 2. Підхід лорда Релея дає систему з чотирьох простих лінійних алгебраїчних рівнянь, аналогічну системі лінійних алгебраїчних рівнянь (3). Цей випадок був детально проаналізований для еквідистантної та передфрактальної ґратки з чотирьох електрично вузьких стрічок у статті [6]. Таким чином, зазначена задача розсіювання може вважатися розв'язаною у головному наближенні, оскільки розв'язок відповідної системи також просто знаходиться за правилом Крамера аналітично.

Після розв'язання задачі розсіювання Е-поляризованої хвилі на 4 стрічках у головному наближенні для отримання виразу для інтегральної характеристики розсіювання використовуємо вираз (2) при $M = 4$. Тоді для розподілу розсіяного ЕМ-поля в залежності від полярного кута легко знайти складніший, але подібний до формули (4), аналітичний вираз:

$$A(\varphi) = \sqrt{2/\pi i} \cdot (1 - \mu \sin \varphi) \cdot \left[j_{10} e^{ikb(1+1/c)\cos\varphi} + j_{20} e^{ikb(1-1/c)\cos\varphi} + j_{30} e^{ikb(1/c-1)\cos\varphi} j_{10} e^{-ikb(1+1/c)\cos\varphi} \right]. \quad (5)$$

Щойно наведену формулу можна розглядати тільки як основу для створення чисельних алгоритмів розрахунку інтегральних характеристик розсіювання. Для проведення чисельних експериментів із розсіянням ЕМ-полем у дальній зоні, маємо розв'язувати більш складну асимптотичну модель розсіювання як систему з чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Узагальнення функції Кантора – специфічні СД-функції.

Існує величезна кількість узагальнень класичної функції Кантора, які можуть бути корисними для моделювання специфічних зон із заданими властивостями. Ці узагальнення стосуються одновимірних (1D) фрактальних досконалих множин різних фрактальних розмірностей і нульової топологічної розмірності. Такі СД-функції можуть бути побудовані аналогічно до класичної функції Кантора [8, 9]. Етапи їх створення можна використовувати для впорядкування багаторівневої системи стрічок нульової товщини. Наразі ми розглянемо кілька типів специфічних СД-функцій: непарні та парні, зростаючі та спадні. Вони будуватимуться на основі третинної досконалої множини зі змінною фрактальною розмірністю.

3.1. Перше узагальнення класичної функції Кантора. Функція Кантора – це дивна неперервна функція на відрізку $[-1, 1]$, похідна якої дорівнює 0 майже скрізь, але вона якимось магічним чином зростає від -1 до 1 . Її графік міститься у квадраті $[(-1, -1); (1, -1); (1, 1); (-1, 1)]$, і функція Кантора дорівнює константам майже скрізь,

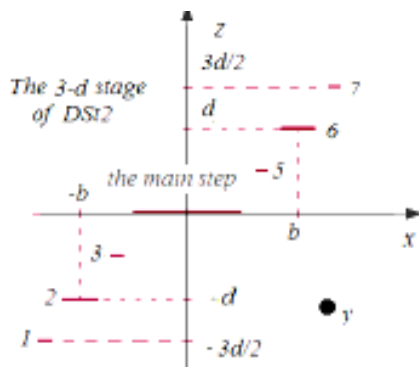


Рис. 3 – Сходинок непарної третинної DS-функції.

за винятком множини *Сміта – Кантора* (фрактальної множини) на відрізку $[-1, 1]$. Через незвичайну особливість (сингулярність) функції Кантора її графік називають «сходами диявола», а саму її – жажливою функцією «Сходів диявола» (СД). Інформацію про фрактальні множини зі змінною фрактальною розмірністю, специфічні СД-функції та їх застосування можна знайти у статтях [8 – 12]. Тут для узагальнення класичної функції Кантора будемо використовувати термін СД-функції. Перше узагальнення третинної функції Кантора є класом СД-функцій, що будується на основі найпростішого класу досконалих множин зі змінною фрактальною розмірністю.

На рис. 3. показано третій етап побудови іррегулярної СД-функції на основі четвертого етапу творення найпростішого класу досконалих множин [5]. Можна побачити сім сходинок (відкритих інтервалів), доданих до восьми сегментів етапу *діадичної досконалої множини*. Новий

геометричний параметр d є вільним.

Щоб розширити можливості для ефективного моделювання особливих, навіть жажливих, природних процесів та зон, будемо розглядати не тільки стадії побудови зростаючих третинних СД-функцій.

3.2. Друге узагальнення класичної функції Кантора. Найперше, що спадає на думку, – це використати спадну третинну СД-функцію. Оскільки зростаючих третинних СД-функцій є цілий клас, то і спадних СД-функцій буде рівно стільки ж. Тобто можна говорити про подвоєння кількості третинних СД-функцій для ефективного моделювання особливих природних процесів та зон. Сходинок зростаючої третинної СД-функції на рис. 3 ведуть вгору, тоді як сходинок спадної третинної СД-функції будуть вести вниз.

Далі знову, окрім непарних третинних СД-функцій, легко створити відповідні парні третинні СД-функції. Третій етап процедури створення парної третинної СД-функції показано на рис. 4.

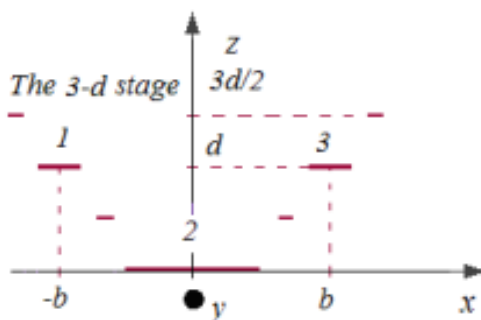


Рис. 4 – Сходинок парної третинної DS-функції.

Тут маємо 7 різних за розміром сходинок: зліва три ведуть до низу (спадна частина), а праві три – догори (зростаюча частина). Другий етап парної третинної СД-функції представлений лише 3 сходинками: вони пронумеровані цифрами 1, 2, 3 на рис. 4. Зрозуміло, можна розглядати також парні третинні СД-функції, де сходинок зліва від центральної ведуть догори, а праві – до низу. Тобто, відобразити графік парної третинної СД-функції відносно осі абсцис симетрично вниз.

Графік парної діадичної СД-функції є компактнішим за непарну. Можна помітити, що на рис. 3, 4 наведено два приклади третинних СД-функцій, проте за аналогією можна створити безліч подібних специфічних СД-функцій, використовуючи досконалі множини зі змінною фрактальною розмірністю. Подібним

чином, використовуючи тріадні досконалі множини зі змінною фрактальною розмірністю, можна створити нові СД-функції [6]. Отже, існує дуже багато класів СД-функцій для практичного використання при моделюванні особливих, в тому числі екстремальних, зон в інтенсивності опадів, річкових потоках, тощо.

4. Асимптотичний підхід лорда Релея для слабо заповнених компланарних систем.

4.1. Асимптотична модель лорда Релея. Другий етап створення третинної СД-функції складається з трьох інтервалів. Таким чином, підхід лорда Релея дає систему з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь, подібну до (3). Для випадку компланарних систем з M імпедансних стрічок це представлено у статті [6]. Тут буде розглянуто систему з трьох імпедансних стрічок нульової товщини, зображену на рис. 1. Завдяки підходу лорда Релея задачу розсіювання можна спростити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} j_{10} \ln \frac{\gamma \cdot \alpha_2}{4i} + j_{20} R(\rho) + j_{30} R(2\rho) = \beta(\mu) e^{ik(q_1 b + q_3 c)}, \\ j_{10} R(\rho) + j_{20} \ln \frac{\gamma \cdot \alpha_1}{4i} + j_{30} R(\rho) = \beta(\mu), \\ j_{10} R(2\rho) + j_{20} R(\rho) + j_{30} \ln \frac{\gamma \cdot \alpha_2}{4i} = \beta(\mu) \cdot e^{-ik(q_1 b + q_3 c)}. \end{cases} \quad (6)$$

Тут безрозмірний геометричний параметр $\rho = \sqrt{b^2 + c^2}$ для слабо заповненої ПФРІС має бути досить великим, а два різні безрозмірні геометричні параметри $\alpha_1 = ka_1$, $\alpha_2 = ka_2$ мають бути досить малими. Ці припущення можуть суттєво звужити частотний діапазон досліджень. У правій частині системи (6) q_1 та q_3 є декартовими компонентами одиничного вектора напрямку поширення початкової хвилі.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (6) легко розв'язати, наприклад, за правилом Крамера, для знаходження вихідної змінної асимптотичної моделі лорда Релея в головному наближенні за простою формулою:

$$j_{k0}(x) = j_{k0} / \left(\pi \sqrt{1 - x^2} \right).$$

Таким чином, задачу розсіювання плоскої Е-поляризованої електромагнітної хвилі на розрідженій системі з трьох електрично вузьких імпедансних плоских стрічок, що відповідає другому етапу побудови діадичної СД-функції («сходи диявола»), повністю розв'язано в головному наближенні. Явний аналітичний розв'язок задачі розсіювання плоскої Е-поляризованої хвилі провідною КСІС є важливою перевагою асимптотичної моделі. Він дозволяє проводити досить широкі дослідження, в тому числі і у так званому резонансному частотному діапазоні, та здійснювати важливі числові експерименти. Основним недоліком довгохвильової математичної моделі розсіювання досить віддаленими вузькими стрічками є те, що частотний діапазон може суттєво звужитися. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот, можна застосувати два відомі та добре обгрунтовані прямі чисельні методи. Це *метод механічних квадратур* та *метод дискретних особливостей*, розроблені вітчизняними науковцями [18, 19]. Також можна звернутись до інших підходів та сучасних методів, як це було при дослідженні подібних задач розсіювання ґратками [20 – 24].

4.2. Розсіяне ЕМ-поле у дальній зоні. Нарешті, розглянемо основну інтегральну характеристику розсіювання найпростішої системи стрічок, представленої трьома сходинками на рис. 4: вони пронумеровані цифрами 1, 2, 3. Розсіяне ЕМ поле у дальній зоні для другого етапу парної СД-функції може бути представлене формулою (2):

$$A(\varphi) = \sqrt{2/\pi i} \cdot (1 - \mu \sin \varphi) \cdot \left[j_{10} \cdot e^{-ik(-b \cos \varphi + d \sin \varphi)} + j_{20} + j_{30} e^{-ik(b \cos \varphi + d \sin \varphi)} \right], \quad (7)$$

тут два основні геометричні параметри b та d показані на рис. 4. Вони дають нам можливість забезпечити друге важливе припущення, за якого асимптотична модель є коректною, що стосується відстаней між стрічками. Ці відстані будуть близькими до довжини Е-поляризованої хвилі, що набігає на систему стрічок знизу (або більшими за неї). Основні константи j_{m0} визначаються системою лінійних алгебраїчних рівнянь, подібною (але не тотожною!) до системи (6). Кожен може порівняти другі етапи непарних і парних DS-функцій, представлених трьома сходинками на рис. 3 (непарна) та рис. 4 (парна).

5. Короткі чисельні експерименти з розсіям ЕМ-полем у дальній зоні.

5.1. Результати дослідження слабо заповнених ПФРІС. Основною інтегральною характеристикою розсіювання ґратки стрічок є діаграма спрямованості, що визначається розсіям ЕМ-полем у дальній зоні. Отже, для проведення чисельних експериментів ми маємо використовувати формули (4) та (5). Вони дають нам змогу побудувати графіки для абсолютних значень функції $A(\varphi)$.

Початкові безрозмірні геометричні параметри $\alpha = \pi/8$, $\beta = 7\pi/8$, для яких $2(b+a) = \lambda$, $2a = \lambda/8$. На рис. 5 показано результати чисельного розрахунку абсолютних значень функції $A(\varphi)$ для двох різних значень кутів падіння $\pi/2$ (рис. 5, а), $\pi/6$ (рис. 5, б). Для безрозмірного параметра імпедансу $\mu = (1+i)/4$ графіки наведені чорним ($M = 2$) та синім ($M = 4$) кольорами. Для безрозмірного параметра імпедансу $\mu = 0$ графіки зображені червоним кольором і пунктиром.

Діаграми спрямованості демонструють фрактальні властивості слабо заповненої ПФРІС (префрактальної

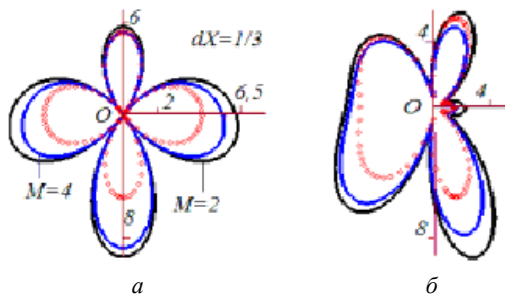


Рис. 5 – Діаграми спрямованості (графіки $|A(\varphi)|$):
а – при $\pi/2$; б – при $\pi/6$.

решітки на основі імпедансних стрічок), що складається з двох стрічок. Можна спостерігати хорошу узгодженість форм діаграм спрямованості для двох різних значень M та безрозмірного параметра імпедансу. Припущення, за яких асимптотична модель є коректною, можуть суттєво звужити частотний діапазон досліджень. Щоб отримати діаграми спрямованості у всьому частотному діапазоні, ми маємо використати вираз для розсіяного ЕМ-поля у дальній зоні (2) та застосувати загальновідомий і обґрунтований прямий чисельний метод. Це різновид *методу механічних квадратур із правильним вибором вузлових точок та точок колокації* [18]. Завдяки цьому методу можна успішно використовувати звичайні квадратурні формули для інтегралів.

5.2. Результати дослідження слабо заповнених КСІС. На рис. 6 наведені результати для ґраток з двох стрічок ($2S$) ($x_1 = -80, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 0$) та для ґраток з трьох стрічок ($3S$) ($x_1 = -80, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 0, x_3 = 80, z_3 = 0$), довжина хвилі – 80. Помітний вплив кута падіння та додавання третьої стрічки в структуру $2S$ на конфігурацію діаграм спрямування.

Аналіз представлених результатів (рис. 6) для $2S$ та $3S$ ґраток дозволяє сформулювати фізично обґрунтовану точку зору на їхні електродинамічні характеристики. У цьому випадку ключовим фактором є трансформація поля розсіювання при зміні кількості елементів та їхніх геометричних параметрів.

Додавання третьої стрічки в центр (перехід від $2S$ ґратки до $3S$ ґратки) кардинально змінює фазову картину. На графіках (рис. 6, д, е, ж, з) видно появу більш вузьких та виражених пелюсток порівняно з (рис. 6, а, б, в, г). Тристрічкова ґратка починає проявляти властивості періодичної структури. Це призводить до кращого «фокусування» розсіяної енергії в певних напрямках, що проявляється у збільшенні кількості локальних максимумів і мінімумів. Так, у випадку $3S$ (2, 2, 2), коли всі стрічки вузькі та однакові, діаграма має відносно рівномірний розподіл пелюсток (рис. 6, а, е). При збільшенні ширини центральної стрічки до 8, варіант $3S$ (2, 8, 2) (рис. 6, ж, з), вона починає відігравати роль основного рефлектора. Бокові стрічки для довжини хвилі – 60 працюють як пасивні фазові елементи, коригуючи форму головних пелюсток, сформованих широким центром. Діаграми (рис. 6, а, в, д, ж) демонструють дзеркальну симетрію відносно вертикальної осі. При відхиленні кута (рис. 6, б, г, е, з) спостерігається інтенсивне «перекачування» енергії в бік дзеркального відбиття. У тристрічкової моделі ($3S$) при 30° пелюстки стають більш гострими, підвищуючи кутову вибірковість системи порівняно з $2S$.

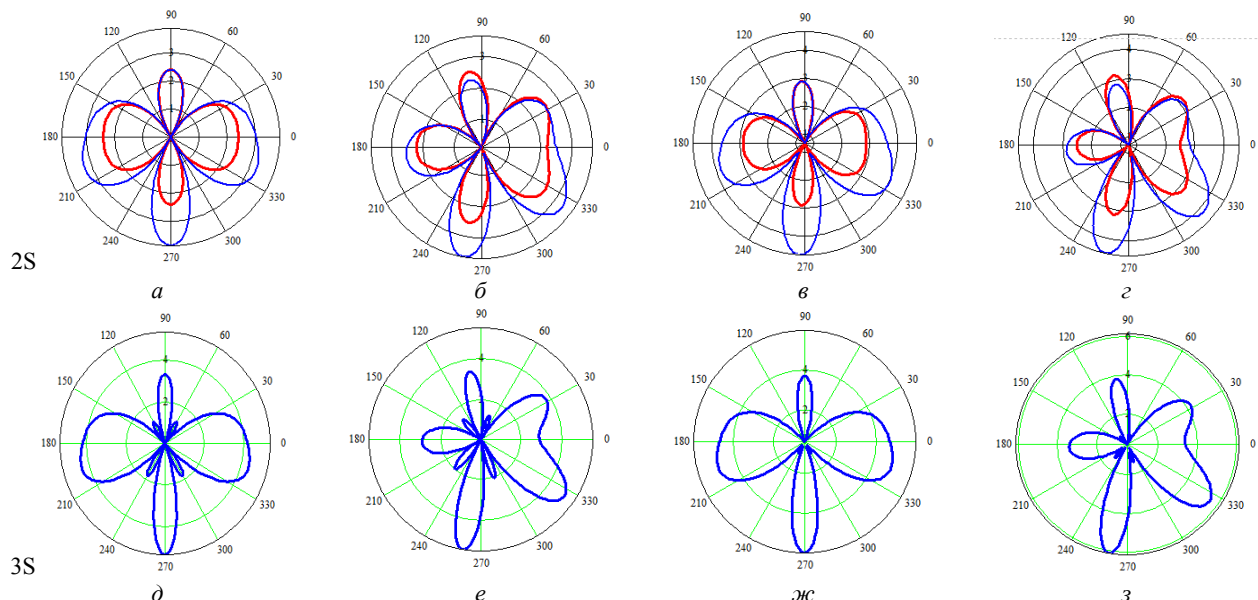


Рис. 6 – ґратка $2S$. Ширини ґраток (2,2). Діаграми розсіювання: а – кут падіння – 90° ; б – 30° . Ширина ґраток (2,8). Діаграми розсіювання: в – кут падіння – 90° ; г – 30° . Синій – асимптотичне значення при $\mu = (1+i)/4$. Червоний – $\mu = 0$.

ґратка $3S$. Ширини ґраток (2,2,2). Діаграми розсіювання: д – кут падіння – 90° ; е – 30° . Ширина ґраток (2,8,2).

Діаграми розсіювання: ж – кут падіння – 90° ; з – 30° . Синій – асимптотичне значення при $\mu = (1+i)/4$.

Наявність імпедансу суттєво «згладжує» діаграму. Амплітуда пелюсток зменшується, а їхня ширина дещо збільшується. Це може інтерпретуватися наступним чином: частина енергії падаючої хвилі переходить у тепло або поглинається поверхнею, що зменшує загальну інтенсивність дифрагованого поля.

З точки зору електродинаміки, ці результати демонструють процес формування дифракційної решітки. ґратка $2S$ працює як пара інтерференційних центрів (аналог *досліду Юнга*). ґратка $3S$ вже демонструє ознаки резонансної структури, де центральний елемент може виконувати роль керуючого органу для формування ДС.

Збіг асимптотичних та чисельних результатів (на малих довжинах хвиль вони можуть розходитися) підтверджує, що модель адекватно описує фазові взаємодії між стрічками. Це класична картина дифракції на скінченній кількості об'єктів, де кожен доданий елемент «дробить» діаграму спрямованості, роблячи її більш інформативною для задач розпізнавання або сканування.

6. Чисельне дослідження діаграм розсіювання для ґраток з трьох стрічок ($3S$).

Чисельне дослідження було виконано для трьохстрічкових ґраток з ширинами $(2, 8, 2)$ при їх різних положеннях. На рис. 7 наведено схематичну геометрію ґраток, розподіл густини струмів на стрічках ґратки для трьох кутів падіння E -поляризованої електромагнітної хвилі та діаграми направленості в діапазоні асимптотичних значень довжин хвиль. Маємо: ґратка 1, планарна, предфрактальна; ґратка 2 копланарна, 1 стадія парної фракталізації; ґратка 3, копланарна, 1 стадія непарної фракталізації, «прямі сходи».

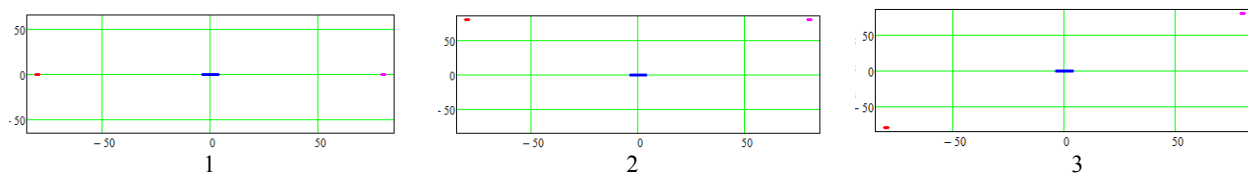


Рис. 7 – Геометричні характеристики ґраток (координати центрів стрічок): 1 – $(x_1 = -80, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 0, x_3 = 80, z_3 = 0)$; 2 – $(x_1 = -80, z_1 = 80, x_2 = 0, z_2 = 0, x_3 = 80, z_3 = 80)$; 3 – $(x_1 = -80, z_1 = -80, x_2 = 0, z_2 = 0, x_3 = 80, z_3 = 80)$. Ширини стрічок, відповідно, 2, 8, 2.

6.1. Порівняння діаграм розсіювання для $3S$ - ґраток у одній площині. Дослідження характеристик таких двох ґраток виконано на довжині хвилі 160 (квазістатичний режим) та порівнюються їхні ДР з ДР на довжині 60 (близька до резонансної).

На рис. 8, рис. 9 – результати досліджень ґратки 1, у якій стрічки розташовані в одній площині. Графіки, рис. 8, *a, б, в*, показують достатньо кількісне співпадіння розподілів густини струму розрахункового (червоний) та асимптотичного (синій). Невелика зміна кута падіння для ґраток зі стрічок з малою електричною шириною демонструє збереження симетрії розподілів характеристик (рис. 8, *г, д, е*) при довжині хвилі – 160. ДС має дипольний характер з двома пелюстками. При зміні кута падіння видно незначний нахил пелюсток відносно симетричної конфігурації при куті 90° , рис. 8, *ж, з, к*. Падіння хвилі довжиною 60 демонструє фазову інтерференцію полів від кожної стрічки. ґратка стала чутливою до зміни кута падіння. Велика центральна стрічка визначає основний вплив на ДС, а відстань до малих бічних формує фазову картину (бічні пелюстки) на коротких хвилях (рис. 10). Для довгих хвиль така ґратка менш чутлива до точності визначення джерела випромінювання.

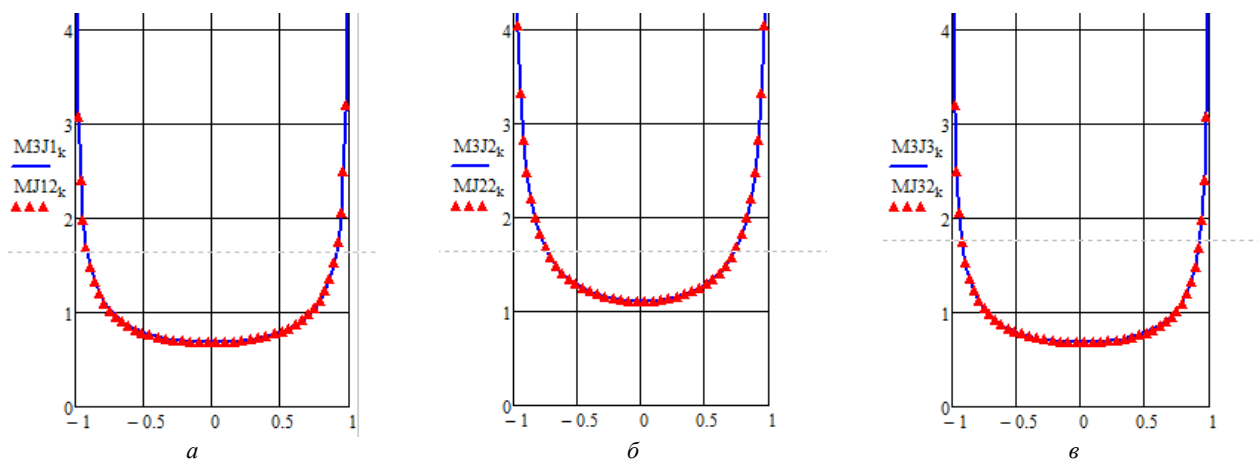


Рис. 8 – ґратка 1. Розподіл параметрів та ДС, кути падіння – $82.5^\circ, 90^\circ, 97.5^\circ$; *a, б, в* – порівняння розподілів густини струму, асимптота (синій), розрахунок по СІУ (червоний).

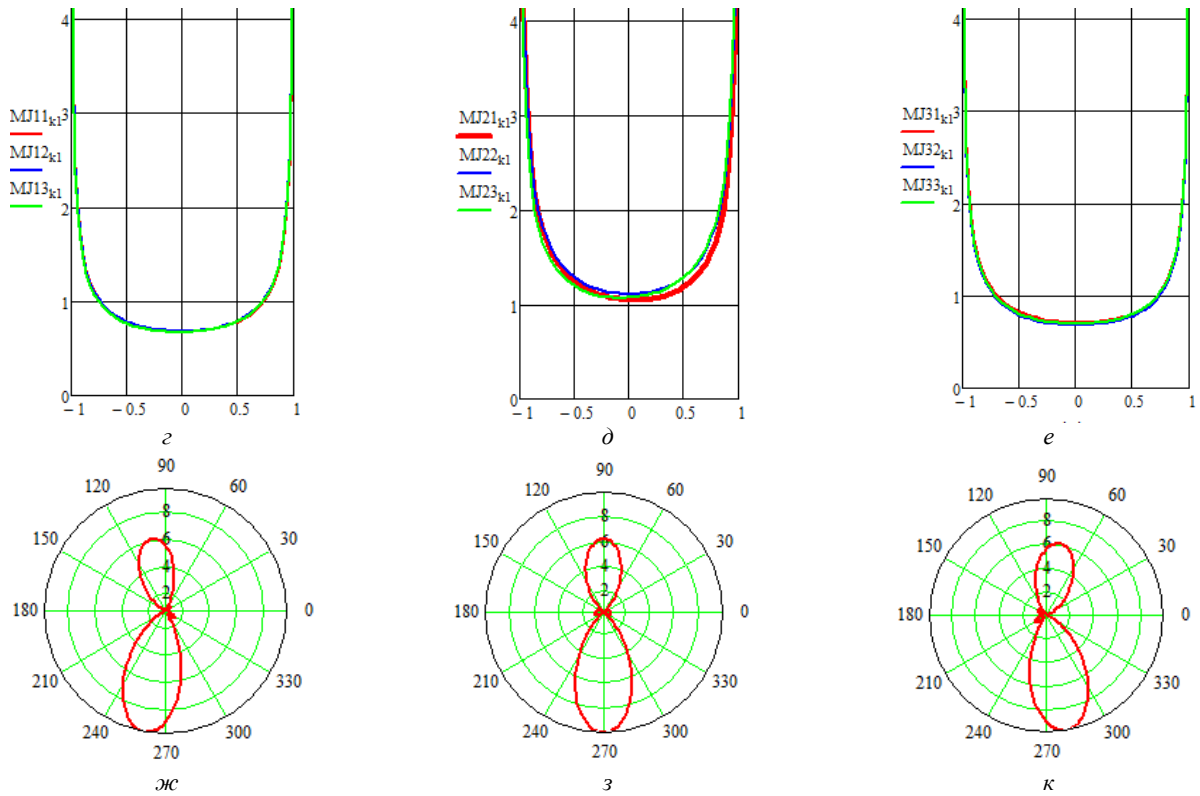


Рис. 8 – Гратка 1. Розподіл параметрів та ДС, кути падіння – 82.5° , 90° , 97.5° ; z , d , e – розподіл розрахункової густини струмів на стрічках; $ж$, $з$, $к$ – діаграми спрямування (ДС).

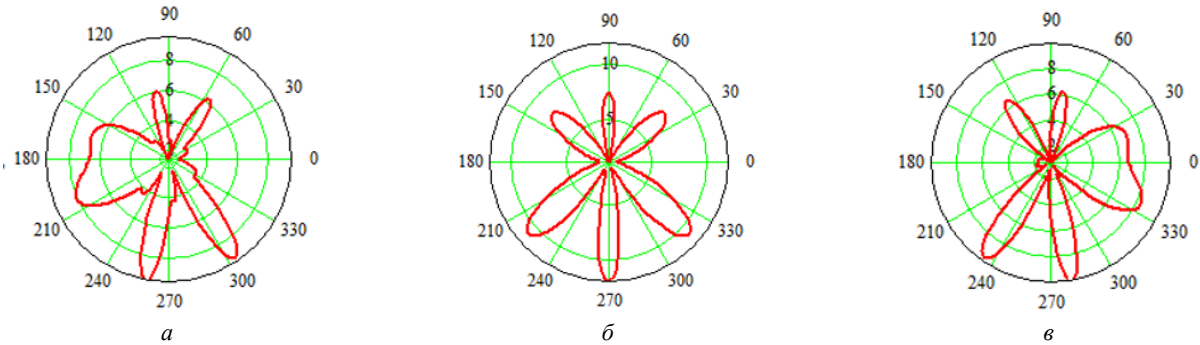


Рис. 9 – ДС для гратки 1 при довжині хвилі – 60, кути падіння: $a - 82.5^\circ$; $b - 90^\circ$; $v - 97.5^\circ$.



Рис. 10 – Гратка 1. Порівняння ДС розрахункові (червоний) та асимптотичні (синій) для довжин ($a - 160$) та ($b - 60$) при кути падіння $EMX - 90^\circ$.

6.2. Порівняння діаграм розсіювання для КСІС (3S – граток). Аналіз результатів для гратки 2 (рис. 11 та рис. 12) у порівнянні з попередньою структурою виявляє суттєві відмінності, зумовлені зміною геометрії. Гратка 2 має вертикальне зміщення стрічок. Червоні маркери (чисельний розрахунок) та синя лінія (асимптота) на графіках (рис. 11, a , b , v) демонструють високу кореляцію, що підтверджує стійкість алгоритму до зміни просторової конфігурації. На відміну від першої гратки, на графіках (рис. 11, z , d , e) маємо більшу варіативність амплітуд струму між окремими стрічками, викликану посиленням взаємодії між елементами через їхнє просторове розне-

сення по осі. Стрічки «бачать» одна одну під іншими кутами, що змінює фазовий набіг падаючої хвилі на кожному елементі.

При довжині хвилі 160 (рис. 11, *ж, з, к*) ДС стає асиметрично здеформованою. Оскільки крайні стрічки зміщені по вертикалі, виникає суттєва різниця у фазах розсіяних хвиль навіть при нормальному падінні (рис. 11, *з*). Діаграма «нахиляється» і втрачає чітку спрямованість вздовж головних осей порівняно з ґраткою 1. Навіть на довгій хвилі з'являються додаткові бокові пелюстки, викликані складнішою інтерференційною взаємодією в ближніх та дальніх зонах. При довжині хвилі 60 (рис. 12), в порівнянні з ґраткою 1, спостерігається «голчаста» структура ДС. Оскільки відстані між стрічками по обох осях сумірні або перевищують довжину хвилі, виникає велика кількість напрямків, де хвилі додаються в фазі. Зміна кута падіння на декілька градусів (рис. 12, *ж, з, к*) призводить до повної перебудови пелюсткової структури, як це відбувається в складних фазованих об'єктах, де навіть незначна зміна фази падаючого поля змінює положення максимумів і мінімумів розсіювання.

Якщо ґратку 1 можна використовувати для створення стабільного поля розсіювання, то ґратка 2 більше підходить для задач, де потрібна висока кутова вибірковість або створення складної інтерференційної ДС. При довжині хвилі – 60 структура входить у режим інтенсивного багатопелюсткового розсіювання, де геометричні параметри починають відігравати ключову роль у формуванні «зображення» об'єкта рис. 13.

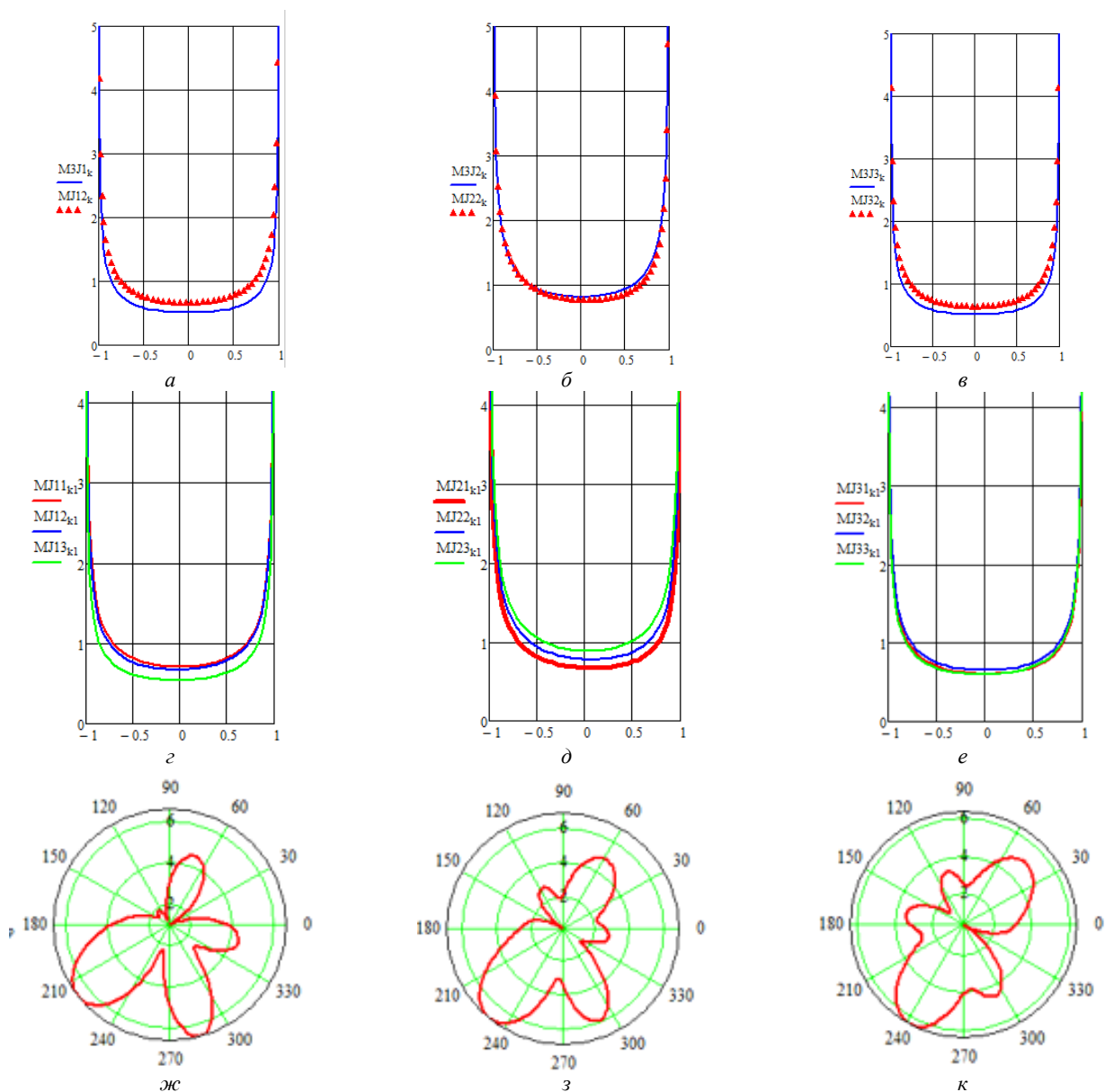


Рис. 11 – Ґратка 2. Розподіл параметрів та ДС, кути падіння – 82.5° , 90° , 97.5° ; *а, б, в* – порівняння розподілів густини струму, асимптота (синій), розрахунок по СІУ (червоний); *г, д, е* – розподіл розрахункової густини струмів на стрічках; *ж, з, к* – діаграми спрямування (ДС).

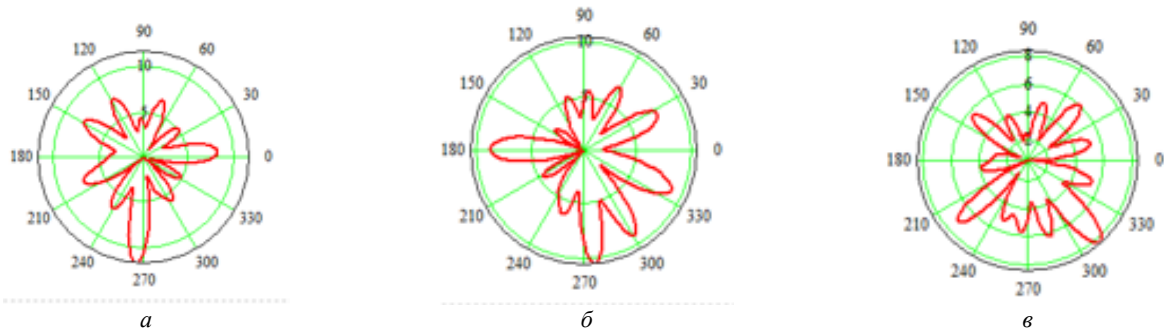


Рис. 12 – Гратка 2. ДС для гратки 2 при довжині хвилі – 60, кути падіння: $a - 82.5^\circ$; $b - 90^\circ$; $v - 97.5^\circ$.

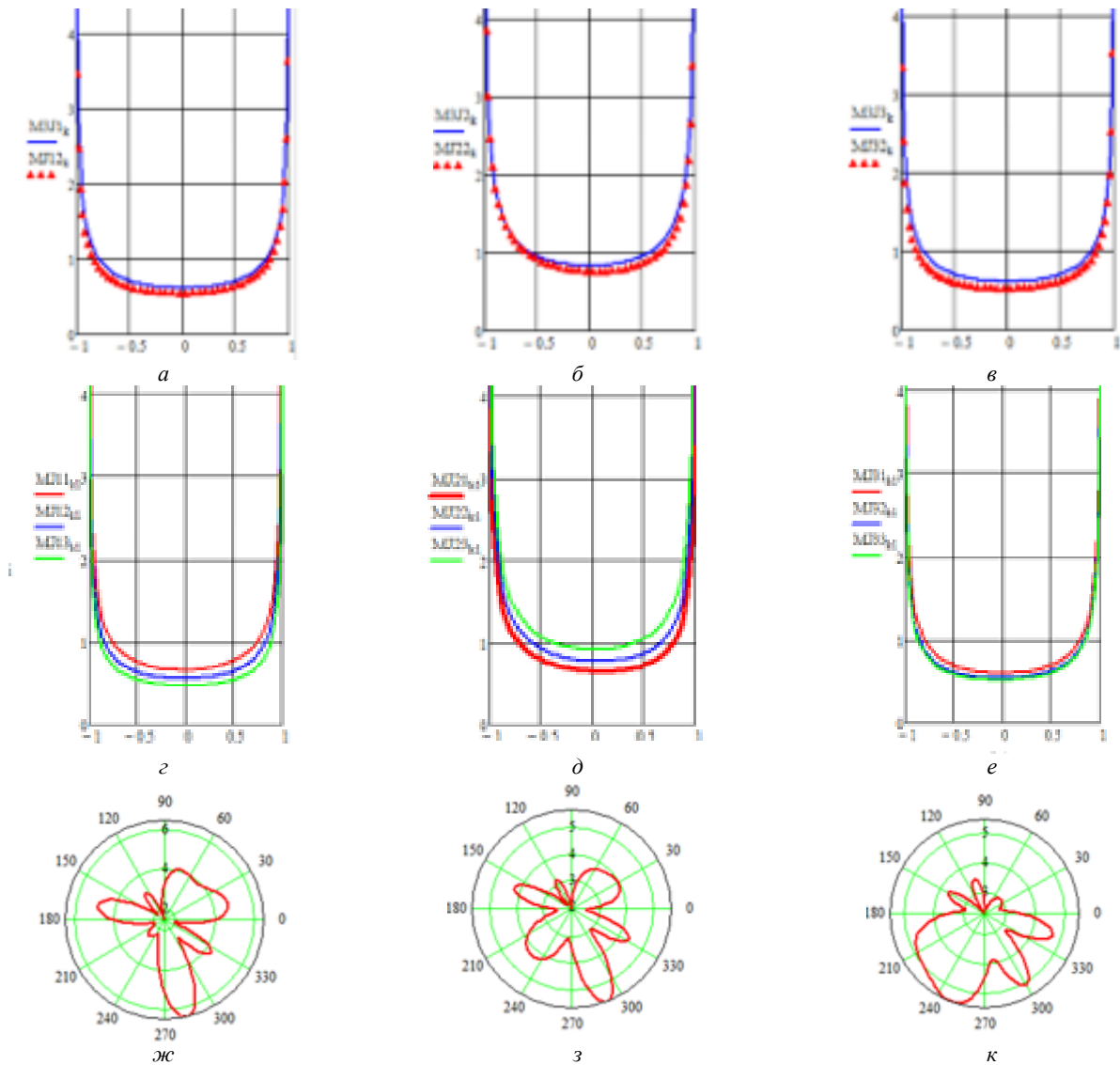


Рис. 14 – Гратка 3. Розподіл параметрів та ДС, кути падіння: $- 82.5^\circ$, 90° , 97.5° ; $a, б, в$ – порівняння розподілів густини струму, асимптота (синій), розрахунок по СІУ (червоний); $z, д, е$ – розподіл розрахункових густини струмів на стрічках; $ж, з, к$ – діаграми спрямування (ДС).

Гратка 3 (рис. 14 та рис. 15) згідно з рис. 7 створює діагональне (ступінчасте) розташування елементів. Порівняно з граткою 2, тут (рис. 14, $a, б, в, z, д, е$) спостерігається ще більш виражена розбіжність у розподілах струму між першою та третьою стрічками, які максимально віддалені одна від одної по вертикалі, що створює значний фазовий зсув при похилому падінні хвилі. На графіках (рис. 14, $z, д, е$) видно, що центральна стрічка (зелена лінія) має іншу амплітуду струму порівняно з крайніми, сформовану в результаті перевідбитків від зміщених країв. Висока точність методу СІУ (червоні точки) на фоні асимптоти (синя лінія) (рис. 14, $a, б, в$) підтверджує, що обрана математична модель коректно враховує вертикальне зміщення елементів.

При довжині хвилі 160 (рис. 14, ж, з, к) ДС стає ще більш «порізаною» порівняно з ґраткою 2. Спостерігається сильна асиметрія головних пелюсток. Діагональне розташування стрічок діє як своєрідна фазована решітка, налаштована на певний кут. Навіть при нормальному падінні (рис. 14, з) максимум випромінювання не збігається з віссю, а помітно зміщується. Основна частина енергії розсіюється в широкому секторі кутів, що вказує на низьку спрямованість такої системи на довгих хвилях.

При довжині хвилі 60 (рис. 15) ДС – найбільш складні діаграми серед усіх трьох ґраток. Велика кількість вузьких пелюсток свідчить про щільність інтерференційної картини. Оскільки стрічки рознесені по діагоналі, будь-яка зміна кута падіння призводить до нелінійної зміни фази на кожній стрічці. Це створює ефект «сканування» променем – навіть невелика зміна кута падіння (від 82.5° до 97.5°) призводить до того, що головні максимуми на рис. 15, ж та рис. 15, к спрямовані в принципово різні боки. На діаграмах помітні глибокі мінімуми (провали майже до нуля), що говорить про повне фазове гасіння поля в певних напрямках (рис. 16).

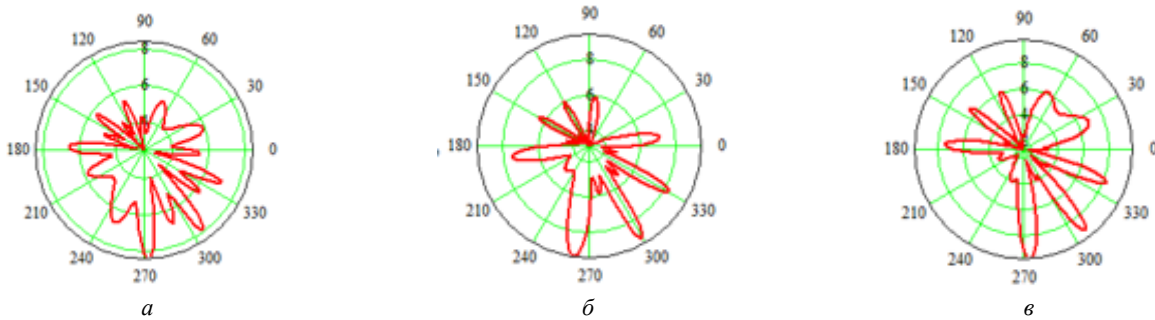


Рис. 15 – Ґратка 3. ДС для ґратки 3 при довжині хвилі – 60, кути падіння: а – 82.5° ; б – 90° ; в – 97.5° .



Рис. 16 – Ґратка 3. Порівняння розрахункових (червоних) та асимптотичних (синіх) ДС для довжин а – 160 та б – 60 при куті падіння ЕМХ – 90° .

Представлені графіки (рис. 10, 13, 16) дають порівняння чисельного розрахунку (червона лінія) та асимптотичного наближення (синя лінія) для трьох різних конфігурацій ґраток. Результати демонструють межу застосування асимптотичного методу. Так, для «ступінчастої» ґратки (ефект «сходів») стандартна асимптота стає непридатною. На графіках видно суттєву різницю між положеннями пелюсток розрахункової та асимптотичної моделей. Вона не пристосована до такої сильної просторової декомпозиції елементів і потребує уточнення.

Перспективи подальших досліджень. Подальше дослідження може бути спрямоване на розробку нових математичних моделей розсіювання у всьому діапазоні частот для КСІС зі скінченною кількістю стрічок різних розмірів. Також можна звернутися до інших підходів та сучасних методів, як це було при дослідженні подібних задач розсіювання ґратками [20 – 24]. Цікавими можуть бути розробка нових методів та дослідження впливу на структуру ДС для ґраток зі скінченною кількістю стрічок різних розмірів. Має сенс розгляд управління ДС наступними засобами: зміною імпедансного показника μ (стрічки з різних матеріалів), використання структур зі стрічками в непаралельних площинах, криволінійні стрічки [21].

Висновки. Значну увагу було приділено інтегральній характеристиці розсіювання для неklasичних систем імпедансних електропровідних стрічок нульової товщини. Для знаходження основних характеристик передфрактальних стрічкових решіток та копланарних систем, пов'язаних із функцією «Сходи диявола», було використано інтегральну формулу Гельмгольца – Кірхгофа. Розглянуто два класи специфічних функцій «Сходи диявола», що відповідають діадичним досконалим множинам зі змінною фрактальною розмірністю. Вони дають змогу впорядкувати різні багаторівневі системи копланарних стрічок для моделювання екстремальних («жахливих») природних процесів. Для складних просторових конфігурацій (Ґратка 3) чисельний розрахунок є єдиним достовірним інструментом, а розбіжність з асимптотою лише підкреслює складність електродинамічних процесів (взаємного впливу та дифракції) у таких системах.

Перехід від лінійної (ґратка 1) до двовимірної конфігурації (ґратка 2 та 3) різко ускладнює діаграму спрямованості, перетворюючи її з дипольної на багатопелюсткову. При довжині падаючої хвилі – 160 домінує загальна геометрія об'єкта (*анертура*), а при 60 – ефекти інтерференції між окремими стрічками. Ґратка 1 найкраще підходить для стабільного розсіювання. Ґратка 3 (ступінчаста) демонструє найвищу кутову чутливість і може бути використана для створення селективних відбивачів або систем розпізнавання кута приходу хвилі.

Список літератури

1. Honl H., Maue A. W., Westpfahl K. *Diffraction Theory*. – Berlin: Springer, 1961. – pp. 17 – 60, 105 – 115, 189 – 207.
2. Colton D., Kress R. *The integral equation technique in scattering theory*. – New York: John Wiley & Sons, 1983. – pp. 123 – 167.
3. Koshovy G. I. The plane H-polarized electromagnetic wave scattering by pre-fractal grating of impedance strips // *Int. Journal of Microwave and Wireless Technologies*. – 2020. – vol. 12 (10). – pp. 269 – 275. DOI: 10.1017/S1759078720000598.
4. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in the modeling of the plane E-polarized electromagnetic wave scattering by a flat system of impedance strips // *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. – 2021. – vol. 15(10). – pp. 1218 – 1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
5. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Regularization Technique in Modeling of the Plane E-Polarized EM Wave Scattering by Coplanar System of Electrically Conducting Flat Strips // *Appl. Scien.* – 2023. – vol. 13(9). – 5488. DOI: 10.3390/app13095488.
6. Koshovy G. I. Asymptotic models of electromagnetic wave scattering from sparsely filled grating of electrically-narrow strips // *Phil. Trans. Royal Society A*. – 2025: 20240345. – 383. DOI: 10.1098/rsta.2024.0345.
7. Koshovy George, Vanin Victor. Effective methods for studying the plane E-polarized wave scattering from a coplanar system of two conductive strips // *2025 IEEE 30th International Seminar/Workshop Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. – 2025. – P. 142 – 145. DOI: 10.1109/DIPED66951.2025.11194486.
8. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. – W.H. Freeman and Company: New York, 1983. – pp. 114 – 127, 528 – 567.
9. Barnsley M. F. *Fractals Everywhere*. – New York: Academic Press Professional, 1993. – 567 p.
10. Bunde A., Helvin S. *Fractals in Science*. – Berlin: Springer, 1994. – 298 p.
11. Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. – Chichester: Wiley, 2003. – 361 p.
12. Edgar G. A. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. – New York: Springer, 2008. – pp. 1 – 7, 117 – 122, 165 – 188.
13. Vanin B. A., Koshovy G. I., Karpenko V. I., Vanin B. V. Розсіювання Е-поляризованої електромагнітної хвилі однією провідною стрічкою з імпедансом // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2024. – № 1(6). – С. 19 – 27. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.01(6).03.
14. Vanin B. A., Koshovy G. I. Методи дослідження розсіювання Е-поляризованої хвилі двома провідними стрічками з імпедансом // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2025. – № 1(8). – С. 19 – 27. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.01(8).01.
15. Felsen L. B., Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves*. – Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1973. – 857 p.
16. Born M., Wolf E. *Principles of Optics*. – New York: Pergamon Pres, 1968. – pp. 341 – 345, pp. 513 – 533.
17. Eom H. J. *Electromagnetic wave theory for boundary-value problems*. – Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010. – 314 p.
18. Nazarchuk Z. T. *Application of numerical methods to investigating wave diffraction by cylindrical structures*. – Kiev: Naukova Dumka, 1989. – 256 p.
19. Lijanov I. K. *Singular integral equations and discrete vortices*. – Utrecht (the Netherlands): VCP VB, 1996. – 484 p.
20. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range // *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* – 2018. – vol. 82. – 21301. DOI: 10.1051/epjap/2018170324.
21. Vinogradova E., Kobayashi K., Eizawa T. Full wave analysis of plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating: E-polarization case // *Wave Motion*. – 2019. – vol. 86. – pp. 44 – 62. DOI: 10.1016/j.wavemoti. 2018.12.006.
22. Kaliberda M., Pogarsky C. Nystrom technique analysis of the terahertz and infrared range radar cross section of a circular dielectric cylinder with graphene strips inside // *Phil. Trans. Royal Society A*. – 2025: 20240337, 383. DOI: 10.1098/rsta.2024.0337.
23. Dushkin V. The Nyström scheme in modelling E-polarized wave scattering on a non-PEC strip system in the presence and absence of the screen // *Phil. Trans. R. Soc. A*. – 383: 20240336. DOI: 10.1098/rsta.2024.0336.
24. Lucido M. Regularizing Helmholtz–Galerkin technique in the plane wave scattering from a finite set of coplanar thin circular resistive discs // *Phil. Trans. R. Soc. A*. – 383: 20240348. DOI: 10.1098/rsta.2024.0348.

References (transliterated)

1. Honl H., Maue A. W., Westpfahl K. *Diffraction Theory*. Berlin, Springer, 1961. pp. 17–60, 105–115, 189–207.
2. Colton D., Kress R. *The integral equation technique in scattering theory*. New York, John Wiley & Sons, 1983. pp. 123–167.
3. Koshovy G. I. The plane H-polarized electromagnetic wave scattering by pre-fractal grating of impedance strips. *Int. Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2020, vol. 12 (10), pp. 269–275. DOI: 10.1017/S1759078720000598.
4. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in the modeling of the plane E-polarized electromagnetic wave scattering by a flat system of impedance strips. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021, vol. 15(10), pp. 1218–1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
5. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Regularization Technique in Modeling of the Plane E-Polarized EM Wave Scattering by Coplanar System of Electrically Conducting Flat Strips. *Appl. Scien.* 2023, vol. 13(9), 5488. DOI: 10.3390/app13095488.
6. Koshovy G. I. Asymptotic models of electromagnetic wave scattering from sparsely filled grating of electrically-narrow strips. *Phil. Trans. Royal Society A*. 2025: 20240345, 383. DOI: 10.1098/rsta.2024.0345.
7. Koshovy George, Vanin Victor. Effective methods for studying the plane E-polarized wave scattering from a coplanar system of two conductive strips. *IEEE 30th International Seminar/Workshop Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. 2025, pp. 142–145. DOI: 10.1109/DIPED66951.2025.11194486.
8. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Company, New York, 1983. pp. 114–127, 528–567.
9. Barnsley M. F. *Fractals Everywhere*. New York, Academic Press Professional, 1993. 567 p.
10. Bunde A., Helvin S. *Fractals in Science*. Berlin, Springer, 1994. 298 p.
11. Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester, Wiley, 2003. 361 p.
12. Edgar G. A. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. New York, Springer, 2008. pp. 1–7, 117–122, 165–188.
13. Vanin V. A., Koshovy G. I., Karpenko V. I., Vanin B. V. Rossiyuvaniya E-polyaryzovanoi elektromagnitnoyi khvyli odniyeyu providnoyu strichkoyu z impedansom [Scattering of the E-polarized electromagnetic wave by solitude conductive strip with impedance]. *Visnyk NTU "KhPI"*.

- Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2024, no. 1(6), pp. 19–27. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.01(6).03.
14. Vanin V. A., Koshovy G. I. Metody doslidzhennya E-polyaryzovanoi khvyli dvoma providnymy strichkamy z impedansom [Methods for monitoring the dispersion of an E-polarized circuit using two conductive lines with impedance]. *Visnyk NTU «KhPI»*. *Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2025, no. 1(8), pp. 19–27. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.01(8).01.
 15. Felsen L. B., Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1973. 857 p.
 16. Born M., Wolf E. *Principles of Optics*. New York: Pergamon Press, 1968. pp. 341–345, pp. 513–533.
 17. Eom H. J. *Electromagnetic wave theory for boundary-value problems*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010. 314 p.
 18. Nazarchuk Z. T. *Application of numerical methods to investigating wave diffraction by cylindrical structures*. Kiev, Naukova Dumka, 1989. 256 p.
 19. Lifanov I. K. *Singular integral equations and discrete vortices*. Utrecht (the Netherlands), VCP VB, 1996. 484 p.
 20. Kaliberda M., Lytvynenko L., Pogarsky S. Singular integral equations in diffraction by multilayer grating of graphene strips in the THz range. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 2018, vol. 82, 21301. DOI: 10.1051/epjap/2018170324.
 21. Vinogradova E., Kobayashi K., Eizawa T. Full wave analysis of plane wave diffraction by a finite sinusoidal grating: E-polarization case. *Wave Motion*. 2019, vol. 86, pp. 44–62. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.12.006.
 22. Kaliberda M., Pogarsky C. Nystrom technique analysis of the terahertz and infrared range radar cross section of a circular dielectric cylinder with graphene strips inside. *Phil. Trans. Royal Society A*. 2025: 20240337, 383. DOI: 10.1098/rsta.2024.0337.
 23. Dushkin V. The Nyström scheme in modelling E-polarized wave scattering on a non-PEC strip system in the presence and absence of the screen. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 383: 20240336. DOI: 10.1098/rsta.2024.0336.
 24. Lucido M. Regularizing Helmholtz–Galerkin technique in the plane wave scattering from a finite set of coplanar thin circular resistive discs. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 383: 20240348. DOI: 10.1098/rsta.2024.0348.

Надійшла (received) 20.12.2025; Доопрацьована (finalized) 15.01.2026; До публікації (for publication) 05.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3523-7505>; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3523-7505>; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Кошовий Георгій Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, Вул. Проксури 12, м. Харків; тел.: (098) 851-32-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7991-8591>; e-mail: gikosh@gmail.com.

Koshovy George Ivanovych – PhD, Associate Professor, Senior Scientist of the Department №35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Vul. Proskury 12, Kharkiv; tel.: (098) 851-32-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7991-8591>; e-mail: gikosh@gmail.com.

О. В. ВАЩІЛІНА, І. В. ЛЕБЕДЄВА

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ У ЗАДАЧІ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ КОЛОНИ У В'ЯЗКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті досліджено стійкість явної та неявної скінченно-різницевої схем, побудованих для чисельного розв'язання задачі торсійних автоколивань пружної колони у в'язкому середовищі. Розглянута математична модель описує динаміку протяжної пружної системи з урахуванням інерційних, пружних і дисипативних ефектів та є типовою для прикладних задач механіки бурових колон і інших інженерних конструкцій. Основну увагу зосереджено на аналізі стійкості різницевої алгоритму за методом фон Неймана, який дозволяє дослідити спектральні властивості похибки чисельного розв'язку без виконання повномасштабних обчислювальних експериментів. Для явної різницевої схеми отримано характеристичне рівняння та показано, що вона є умовно стійкою. Встановлено існування критичного значення кроку інтегрування за часом, перевищення якого призводить до втрати стійкості чисельного процесу. У найгіршому спектральному режимі критичний крок визначається з умови досягнення граничного значення модуля спектрального параметра та еквівалентно може бути знайдений з рівності нулю дискримінанта характеристичного рівняння. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку інтегрування узгоджується з чисельними оцінками. Для неявної різницевої схеми проведено аналітичне дослідження характеристичного рівняння та доведено, що для довільних значень кроків дискретизації за часом і простором модулі його коренів не перевищують одиниці. Це дозволяє зробити висновок про безумовну стійкість неявної схеми за методом фон Неймана. Побудовані графіки залежності спектрального параметра від кроку інтегрування наочно підтверджують аналітичні результати. Отримані висновки можуть бути використані для обґрунтованого вибору чисельної схеми при моделюванні динамічних процесів у пружних протяжних системах із дисипацією енергії.

Ключові слова: чисельне моделювання, спектральний аналіз, стійкість різницевої схем, торсійні автоколивання, пружна колона, в'язке середовище, явна різницева схема, неявна різницева схема, метод фон Неймана, критичний крок інтегрування.

O. V. VASHCHILINA, I. V. LEBEDYEVA

SPECTRAL STABILITY ANALYSIS OF DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL MODELING OF TORSIONAL SELF-OSCILLATIONS OF AN ELASTIC COLUMN IN A VISCOUS MEDIUM

The paper investigates the stability properties of explicit and implicit finite-difference schemes applied to the numerical solution of the torsional self-excited oscillations of an elastic column in a viscous medium. The considered mathematical model describes the dynamics of a distributed elastic system accounting for inertial, elastic, and dissipative effects and is representative of applied problems in the mechanics of drilling columns and similar engineering structures. The main focus of the study is the stability analysis of the difference schemes using the von Neumann method, which enables the investigation of the spectral behavior of numerical errors without performing large-scale computational simulations. For the explicit finite-difference scheme, the characteristic equation is derived and analyzed. It is shown that the scheme is conditionally stable and that there exists a critical time step beyond which numerical instability occurs. In the most unfavorable spectral mode, the critical time step corresponds to the attainment of the limiting value of the spectral parameter modulus and can equivalently be determined from the condition that the discriminant of the characteristic equation vanishes. The obtained analytical expression for the critical time step is consistent with numerical estimates. For the implicit finite-difference scheme, an analytical study of the characteristic equation is carried out. It is proven that, for arbitrary values of the temporal and spatial discretization steps, the moduli of its roots do not exceed unity. This result indicates unconditional stability of the implicit scheme within the von Neumann framework. Graphical representations of the spectral parameter as a function of the time step provide a clear illustration of the analytical conclusions. The obtained results may be used to justify the choice of efficient numerical schemes for the simulation of dynamic processes in elastic distributed systems with energy dissipation.

Key words: numerical modeling, spectral analysis, stability of difference schemes, torsional self-oscillations, elastic column, viscous medium, explicit difference scheme, implicit difference scheme, von Neumann method, critical integration step.

Вступ. Чисельне моделювання торсійних автоколивань пружних колон у в'язкому середовищі є важливим напрямом досліджень у галузі *нелінійної динаміки та прикладної механіки*. Такі коливальні процеси виникають у протяжних пружних системах під дією *інерційних, пружних і дисипативних сил* та можуть призводити до формування *самозбуджених режимів*, що істотно впливають на динамічну поведінку системи. Узагальнені підходи до аналізу критичних режимів динаміки протяжних пружних систем наведено в монографії [1].

Значний внесок у дослідження нелінійних процесів у пружних системах зроблено в дисертаційній роботі [2], де побудовано математичні моделі коливальних процесів з урахуванням нелінійних ефектів та проаналізовано умови виникнення автоколивань. Показано, що навіть за відносно простих геометричних і матеріальних припущень система може демонструвати складну *часову еволюцію*, включаючи перехід до *релаксаційних режимів*.

У сучасних публікаціях значну увагу приділено *розподіленим моделям торсійних і осьових коливань пружних систем*. Зокрема, в роботі [3] досліджено механізми виникнення самозбуджених коливань у розподілених системах, а в роботі [4] показано суттєвий вплив затримок і сухого тертя на стійкість коливальних режимів. Подальший розвиток цих підходів представлено в [5], де враховано регенеративні ефекти взаємодії та показано їх роль у формуванні автоколивань. Окремі особливості руху елементів пружних систем, зокрема вплив конструктивних параметрів на їхню динаміку, розглянуто у [6].

Аналітичне дослідження відповідних нелінійних крайових задач, зазвичай, є суттєво ускладненим або неможливим, що зумовлює необхідність застосування чисельних методів. При цьому вибір різницевої схеми інтегрування має принципове значення, оскільки він може впливати не лише на точність, а й на стійкість чисельного розв'язку та коректність відтворення автоколивальних режимів. Відомо, що явні *скінченно-різницевої схеми*, як

правило, є умовно стійкими і потребують обмежень на крок інтегрування за часом, тоді як неявні схеми характеризуються підвищеною стійкістю чисельного процесу [7].

У зв'язку з цим актуальною є задача аналізу стійкості різницевих схем, побудованих для *математичної моделі торсійних автоколивань* пружної колони у в'язкому середовищі [2]. У даній роботі для цієї мети застосовано *метод фон Неймана* [8], який дозволяє дослідити *спектральні властивості похибки* чисельного розв'язку та отримати кількісні умови стійкості явних і неявних алгоритмів без проведення повномасштабних обчислювальних експериментів. Новизна роботи полягає у застосуванні класичного спектрального підходу до аналізу стійкості різницевих схем для специфічної фізичної моделі торсійних автоколивань, що дає змогу уточнити критичні значення кроку інтегрування та обґрунтувати вибір ефективної чисельної схеми.

Метою даної роботи є аналіз стійкості явних і неявних скінченно-різницевих схем для задачі торсійних автоколивань пружної колони у в'язкому середовищі на основі методу фон Неймана та порівняння їх спектральних властивостей. Практична значущість дослідження підтверджується прикладами прикладних задач, зокрема аналізом динамічних режимів бурильного інструменту на нерівному забої свердловини [9] та впливом граничних умов і в'язкості середовища на коливальні процеси у пружних системах [10].

Постановка задачі. Розглянемо торсійні коливання пружної колони довжиною L у в'язкому середовищі. Динаміка системи описується *рівнянням балансу моментів* [2]:

$$GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu \left(\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де $\varphi(z, t)$ – кут пружного закручування колони; z – осьова координата; t – час; G – модуль пружності при зсуві; I_z – полярний момент інерції; ρ – густина матеріалу; ω – кутова швидкість обертання; μ – зведений коефіцієнт в'язкого тертя.

Рівняння доповнюється граничними умовами на кінцях колони та початковими умовами, що задають початковий розподіл кутів закручування і кутових швидкостей. Наявність дисипативного члена з коефіцієнтом μ зумовлює можливість формування автоколивальних режимів у нелінійній постановці задачі. Рівняння (1) доповнюється граничними та початковими умовами.

Граничні умови. На закріпленому верхньому кінці ($z=0$) виконується умова Діріхле:

$$\varphi|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

На нижньому вільному кінці ($z=L$) задається мішана гранична умова, що враховує інерцію навантаження та момент тертя:

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=L} + GI_z \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=L} + M^{тер} = 0, \quad (3)$$

де J – момент інерції навантаження на нижньому кінці колони; $M^{тер}$ – момент тертя, прикладений на нижньому кінці колони внаслідок дії робочого процесу чи інструменту, який моделює реальне навантаження системи (рис. 1).

Початкові умови задають кут та кутову швидкість в момент часу $t=0$:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(z). \quad (4)$$

Нелінійний характер цієї системи зумовлений залежністю моменту сил тертя від кутової швидкості обертання. Саме ця нелінійність визначає можливість виникнення самозбудованих коливальних режимів і ускладнює чисельний аналіз задачі.

Після розкриття дужок рівняння (1) набуває еквівалентного вигляду:

$$GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu \omega. \quad (5)$$

У рівнянні руху (5) перший доданок описує пружний опір кручення колони, другий – дисипацію енергії внаслідок в'язкого тертя, а третій – інерційні властивості системи. Права частина рівняння відповідає зовнішньому технологічному моменту. Таким чином, рівняння (5) чітко розділяє внесок пружних, демпфувальних, інерційних та зовнішніх сил, що є зручним для побудови скінченно-різницевої схеми і подальшої чисельної реалізації. Таким чином, задача зводиться до розв'язання крайової задачі для рівняння (5) з граничними умовами (2), (3) та початковими умовами (4).

Чисельна дискретизація та аналіз стійкості. Для чисельного розв'язання рівняння у частинних похідних

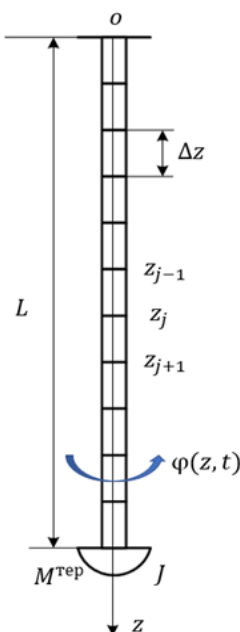


Рис. 1 – Механічна модель пружної колони та її скінченно-різницева дискретизація вздовж осі z .

(5) застосовують скінченно-різницеві методи. Інтервал $0 \leq z \leq L$, який відповідає довжині колони (рис. 1), поділяється на N рівних відрізків довжиною $\Delta z = L/N$. У кожному вузлі просторової сітки $z_j = j \cdot \Delta z$ ($j = 0, 1, \dots, N$) неперервне рівняння замінюється його різницеvim аналогом. Це дозволяє виконувати обчислення у дискретні моменти часу $t^m = m \cdot \Delta t$, де $m = 0, 1, 2, \dots, M$ – номер часової сітки. Похідні за просторовою координатою та часом апроксимуються різницеvими виразами, що дає змогу побудувати чисельні алгоритми для моделювання динаміки системи. Такий підхід передбачає використання двох основних схем інтегрування: *явної* та *неявної*, які відрізняються способом апроксимації похідних та стійкісними властивостями.

Явна різницева схема (explicit scheme). У явній схемі нові значення функції φ_j^{m+1} обчислюються безпосередньо через відомі значення на попередніх часових шарах m та $m-1$. Для побудови явної скінченно-різницевої схеми здійснюється апроксимація похідних у точці $z = z_j$ на часовому шарі t^m . Використовуються такі різницеvі вирази:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2}. \quad (6)$$

У цих виразах нижній індекс j відповідає положенню точки по координаті z , верхній індекс m – номеру часової сітки. Вважається, що $m-1 = t^m - \Delta t$, $m+1 = t^m + \Delta t$, де Δt – фіксований крок інтегрування. Підставивши апроксимації (6) у рівняння (5), отримуємо його дискретизовану форму:

$$GI_z \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = \mu \omega. \quad (7)$$

Аналогічно перетворюються і граничні умови (2), (3). При цьому рівняння (5) зводиться до вигляду:

$$J \left. \frac{\varphi_N^{m+1} - 2\varphi_N^m + \varphi_N^{m-1}}{\Delta t^2} \right|_L + GI_z \left. \frac{\varphi_N^m - \varphi_{N-1}^m}{\Delta z} \right|_L - M_z^{mep} \Big|_L = 0. \quad (8)$$

Побудована система алгебраїчних рівнянь (7), (2), (8) доповнюється початковими умовами, які визначають положення φ_j^0 та швидкості $\dot{\varphi}_j^0$ усіх точок системи ($0 \leq j \leq N$) у початковий момент часу $t^0 = 0$.

Важливо відзначити, що кожне з рівнянь (7), (2), (8) містить лише одну невідому змінну φ_j^{m+1} , яка відповідає наступному часовому шару $t^{m+1} = t^m + \Delta t$. Усі інші величини виражені через значення функції у попередніх моментах часу t^m та t^{m-1} . Таким чином, якщо стан системи у моменти t^m та t^{m-1} відомий, то нове значення φ_j^{m+1} може бути отримане за допомогою простих арифметичних операцій додавання та віднімання. Обчисливши всі шукані змінні φ_j^{m+1} , ми визначаємо стан системи у момент часу t^{m+1} . Далі рівняння (7), (2), (8) переписуються для нового шару, і, оскільки стани системи при t^m та t^{m-1} уже відомі, аналогічними перерахунками можна знайти значення змінних у момент часу $t^{m+2} = t^m + 2\Delta t$. Продовжуючи цей процес послідовно, отримуємо розв'язок для всіх наступних моментів часу в межах розглянутого інтервалу. Як було зазначено, для реалізації схеми необхідно знати стани системи на двох попередніх часових кроках, які завжди визначені, за винятком перших двох кроків. У цих випадках значення функції φ_j^0 та її похідної $\dot{\varphi}_j^0$ задаються початковими умовами.

Для аналізу стійкості та чисельних властивостей скінченно-різницевої схеми застосовано метод фон Неймана [8]. Зазначений підхід є стандартним інструментом дослідження лінійних чисельних схем та дозволяє отримати якісні і кількісні характеристики їхньої стійкості без виконання повномасштабних обчислювальних експериментів. Права частина рівняння (5), що відповідає зовнішньому технологічному моменту, не впливає на стійкість схеми і надалі не враховується.

В основу аналізу покладено припущення про гармонічну форму похибки чисельного розв'язку у вигляді плоскої хвилі:

$$\varphi_j^m = \xi^m e^{ikj\Delta z}, \quad (9)$$

де ξ – спектральний параметр, що характеризує зростання або згасання гармонічної складової похибки за один часовий крок; k – хвильове число; j – номер вузла; m – номер часового шару; Δz – просторовий крок сітки. Тоді

$$\varphi_{j+1}^m = \varphi_j^m e^{ik\Delta z}, \quad \varphi_{j-1}^m = \varphi_j^m e^{-ik\Delta z}, \quad \varphi_j^{m+1} = \xi \varphi_j^m, \quad \varphi_j^{m-1} = \xi^{-1} \varphi_j^m. \quad (10)$$

Підстановка виразів (9), (10) у просторову та часову різницю (6) приводить до співвідношень:

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m &= \varphi_j^m \left(e^{ik\Delta z} - 2 + e^{-ik\Delta z} \right) = -4\varphi_j^m \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right), \\ \varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1} &= \varphi_j^m \left(\xi - \xi^{-1} \right) = \varphi_j^m \xi^{-1} \left(\xi^2 - 1 \right), \\ \varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1} &= \varphi_j^m \left(\xi - 2 + \xi^{-1} \right) = \varphi_j^m \left(\left(\sqrt{\xi} \right)^2 - 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \right)^2 \right) = \varphi_j^m \left(\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right)^2 = \varphi_j^m \frac{(\xi - 1)^2}{\xi}.\end{aligned}\quad (11)$$

Як зазначено вище, беремо однорідну частину схеми (7):

$$GI_z \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = 0. \quad (12)$$

Після підстановки (11) в однорідну схему (12) та скорочення на спільний множник φ_j^m , отримуємо характеристичне рівняння відносно ξ :

$$A_{\text{exp}} \xi^2 + B_{\text{exp}} \xi + C_{\text{exp}} = 0, \quad (13)$$

де

$$A_{\text{exp}} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{\mu}{2\Delta t}, \quad B_{\text{exp}} = -\frac{2\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{4GI_z}{\Delta z^2} \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right), \quad C_{\text{exp}} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} - \frac{\mu}{2\Delta t}. \quad (14)$$

Схема вважається стійкою, якщо для всіх допустимих значень k корені рівняння (13) задовольняють умову:

$$|\xi| \leq 1. \quad (15)$$

Це гарантує, що амплітуда похибки не зростає з часом, тобто чисельний розв'язок є збіжним і не розбігається при переході до наступних часових шарів. Таким чином, аналіз стійкості зводиться до дослідження властивостей коренів характеристичного рівняння (13).

Згідно з підходом фон Неймана, найсуворіші обмеження на крок інтегрування за часом виникають для найкоротшої гармоніки, яку може відтворити просторово-дискретна сітка. Такий режим відповідає умові:

$$k\Delta z = \pi, \quad \text{звідки} \quad \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) = 1. \quad (16)$$

Фізично це означає, що короткохвильові збурення є найбільш чутливими до чисельних похибок і першими виявляють нестійкість схеми. Тому саме цей режим визначає критичне значення кроку інтегрування $\Delta t_{\text{кр}}$.

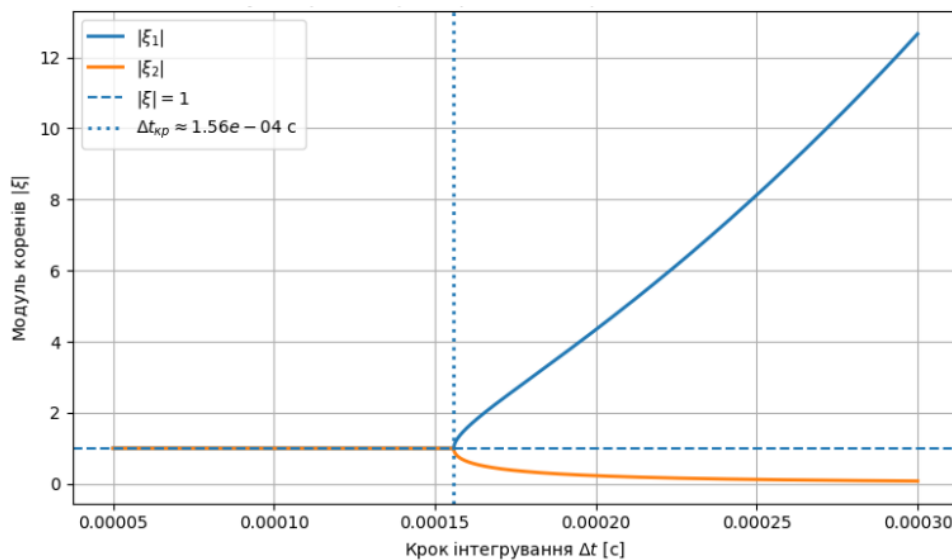


Рис. 2 – Залежність модулів коренів характеристичного рівняння від кроку Δt .

При малих значеннях кроку інтегрування за часом дискримінант

$$D = B_{\text{exp}}^2 - 4A_{\text{exp}}C_{\text{exp}} \quad (17)$$

характеристичного рівняння (13) є від'ємним, і корені рівняння

$$\xi_{1,2} = \frac{-B_{\text{exp}} \pm \sqrt{D}}{2A_{\text{exp}}}$$

утворюють комплексно-спряжену пару. У цьому випадку еволюція похибки має осцилюючий характер, а за наявності дисипативного члена ($\mu > 0$) модуль спектрального параметра є строго меншим за одиницю, що відповідає асимптотично стійкому режиму.

Із зростанням кроку інтегрування Δt дискримінант збільшується і при досягненні певного значення стає рівним нулю. У цій точці комплексно-спряжені корені зливаються у кратний дійсний корінь, модуль якого дорівнює одиниці. Такий режим відповідає межі стійкості явної різницевої схеми. Подальше збільшення кроку часу призводить до появи дійсного кореня з модулем, більшим за одиницю, що зумовлює експоненціальне зростання похибки та втрату стійкості чисельного розв'язку. Графік залежності модулів коренів характеристичного рівняння від кроку Δt для параметрів, характерних для сталеві бурильної колони [1]: $G = 80,77 \cdot 10^9$ Па, $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 10$ Н·с, $\Delta z = 0,5$ м, $k\Delta z = \pi$ представлено на рис. 2.

Таким чином, для розглянутої явної різницевої схеми критичне значення кроку інтегрування за часом $\Delta t_{кр}$ визначається умовою рівності нулю дискримінанта (17) характеристичного рівняння (13). У найгіршому спектральному режимі (16) ця умова дозволяє отримати аналітичний вираз для $\Delta t_{кр}$. Після підстановки коефіцієнтів (14) та виконання алгебраїчних перетворень одержуємо:

$$\Delta t_{кр} = \frac{\Delta z}{\sqrt{G/\rho}} \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \Delta z^2}{16\rho G I_z^2}}. \quad (18)$$

Аналітичне значення (18) для $\Delta t_{кр}$ було перевірено чисельно шляхом знаходження коренів рівняння

$$\max(|\xi|) = 1.$$

Варто зазначити, що отриманий вираз (18) узагальнює *класичну умову CFL (Courant–Friedrichs–Lewy)* стійкості для явних схем, що застосовується при моделюванні хвильових процесів [8]. У випадку відсутності дисипації ($\mu = 0$) формула (18) переходить у відоме співвідношення

$$\Delta t_{CFL} = \frac{\Delta z}{\sqrt{G/\rho}} = \frac{\Delta z}{c},$$

яке відповідає обмеженню на крок інтегрування за часом, визначеному швидкістю поширення хвилі c . Наявність демпфування ($\mu > 0$) призводить до зменшення допустимого кроку, хоча для фізично реалістичних значень коефіцієнта дисипації відповідна поправка є незначною, що узгоджується з результатами проведеного чисельного спектрального аналізу.

Для заданих параметрів задачі значення критичного кроку $\Delta t_{кр}$, знайдені обома способами, збігаються з високою точністю, що підтверджує еквівалентність критеріїв $D = 0$ та $\max(|\xi_1|, |\xi_2|) = 1$ для розглянутої явної різницевої схеми.

Отже, проведений аналіз показав, що явна різницева схема є умовно стійкою, а її межа стійкості в розглянутій задачі визначається моментом досягнення дискримінантом характеристичного рівняння нульового значення. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку інтегрування (18) за часом узгоджується з чисельними результатами та дає наочне пояснення механізму втрати стійкості з точки зору спектральних властивостей похибки.

Неявна різницева схема (implicit scheme). У такій схемі нові значення функції φ_j^{m+1} визначаються через невідомі на поточному часовому шарі, що теоретично має забезпечити підвищену стійкість чисельного процесу. На відміну від явної схеми, де апроксимація похідних виконується на попередніх часових рівнях, у неявній схемі просторові та часові похідні беруться на новому шарі t^{m+1} . Слід зазначити, що застосування неявної різницевої схеми пов'язане з необхідністю розв'язання на кожному часовому кроці системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це значно ускладнює реалізацію чисельного алгоритму порівняно з явною схемою. Особливістю отриманої системи рівнянь є її матриця, яка має вигляд тридіагональної стрічкової структури, тобто ненульові елементи зосереджені лише на головній діагоналі та двох прилеглих до неї. Така структура дозволяє застосовувати *метод прогонки (метод Томаса)*, що забезпечує ефективне розв'язання системи з лінійною обчислювальною складністю [7, 11].

Однорідне різницеве рівняння для дослідження стійкості неявної схеми має вигляд:

$$G I_z \frac{\varphi_{j+1}^{m+1} - 2\varphi_j^{m+1} + \varphi_{j-1}^{m+1}}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = 0. \quad (19)$$

Для дослідження стійкості неявної схеми за методом фон Неймана застосуємо стандартну підстановку похибки (9). Виконуючи аналогічні перетворення, що і у випадку явної схеми, дістанемо характеристичне рівняння

$$A_{imp}\xi^2 + B_{imp}\xi + C_{imp} = 0, \quad (20)$$

де

$$A_{imp} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{\mu}{2\Delta t} + \frac{4GI_z}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right), \quad B_{imp} = -\frac{2\rho I_z}{\Delta t^2}, \quad C_{imp} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} - \frac{\mu}{2\Delta t}. \quad (21)$$

Проаналізуємо корені цього рівняння. Поділимо його на $A_{imp} > 0$, дістанемо нормалізоване рівняння

$$\xi^2 + p\xi + q = 0, \quad (22)$$

де

$$p = -\frac{2\rho I_z}{\rho I_z + \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{4GI_z\Delta t^2}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)}, \quad q = \frac{\rho I_z - \frac{\mu\Delta t}{2}}{\rho I_z + \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{4GI_z\Delta t^2}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)}. \quad (23)$$

Для квадратного рівняння (22) з дійсними коефіцієнтами корені $\xi_{1,2}$ задовольняють умову $|\xi_{1,2}| \leq 1$ тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$|q| \leq 1, \quad 1 + p + q \geq 0, \quad 1 - p + q \geq 0, \quad (24)$$

що впливає з умов стійкості для лінійних різницевих рівнянь другого порядку [8]. Безпосередня перевірка показує, що для значень p і q , які визначаються формулами (23), умови (24) виконуються для довільних значень кроків дискретизації Δt , Δz та хвильового числа k .

Таким чином, неявна різницева схема є безумовно стійкою згідно з методом фон Неймана. Для нульової просторової моди ($k = 0$) реалізується нейтральна стійкість ($|\xi| = 1$), тоді як для ненульових мод за наявності дисипації ($\mu > 0$) має місце згасання похибки з часом. Наявність демпфувального члена з коефіцієнтом μ додатково підвищує чисельну стійкість схеми.

На рис. 3 представлено залежність максимального за модулем спектрального параметра $|\xi|$ від інтегрування за часом Δt для явної та неявної скінчено-різницевих схем при значеннях параметрів, характерних для сталеві буровий колоні [1]:

$$G = 80,77 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad I_z = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 10 \text{ Н} \cdot \text{с}, \quad \Delta z = 0,5 \text{ м}.$$

Штрихова горизонтальна лінія відповідає граничному значенню $|\xi| = 1$. Вертикальною пунктирною лінією позначено критичне значення кроку інтегрування $\Delta t_{кр} \approx 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Для явної схеми при $\Delta t < \Delta t_{кр}$ виконується умова стійкості $|\xi| \leq 1$, тоді як при $\Delta t > \Delta t_{кр}$ спостерігається різке зростання $|\xi|$, що відповідає втраті стійкості. Для неявної схеми модуль спектрального параметра залишається меншим за одиницю в усьому розглянутому діапазоні значень Δt , що узгоджується з аналітичним висновком про її безумовну стійкість.

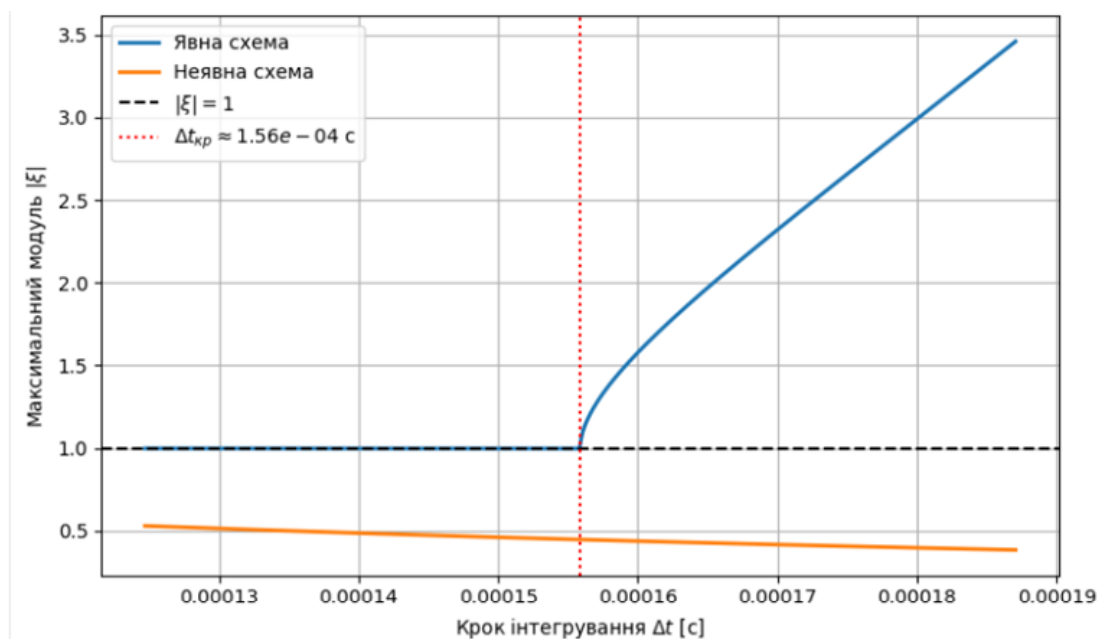


Рис. 3 – Порівняльний аналіз стійкості явної та неявної різницевих схем.

Слід зазначити, що аналіз стійкості за методом фон Неймана виконується для лінійної частини різницевої схеми в нескінченній області, оскільки метод спрямований на дослідження еволюції гармонічних похибок у внутрішніх вузлах сітки за однорідної дискретизації. Вплив граничних умов обмежується вузлами на межі області та не змінює спектрального критерію стійкості: $|\xi| \leq 1$. Тому граничні умови в межах аналізу фон Неймана не враховуються, що дозволяє здобути універсальне характеристичне рівняння без втрати загальності висновків щодо стійкості схеми.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані з поширенням спектрального аналізу на нелінійні різницеві схеми для задачі торсійних автоколиваний з урахуванням реальної залежності моменту тертя від кутової швидкості. Доцільним є також аналіз впливу складніших граничних умов та неоднорідності параметрів колони на стійкість і збіжність чисельних алгоритмів. Отримані підходи можуть бути узагальнені для просторових моделей і задач із комбінованими типами демпфування.

Висновки. У роботі досліджено стійкість явної та неявної скінчено-різницевої схем, застосованих для чисельного розв'язання рівняння, що описує торсійні автоколивання пружної колони у в'язкому середовищі. Аналіз виконано за методом фон Неймана на основі спектральних властивостей характеристичних рівнянь відповідних різницевої схем.

Показано, що явна різницева схема є умовно стійкою та потребує обмеження на крок інтегрування за часом. Для розглянутої задачі в найгіршому спектральному режимі втрата стійкості відповідає злиттю коренів характеристичного рівняння та досягненню граничного значення модуля спектрального параметра. Критичне значення кроку інтегрування може бути визначене як з умови досягнення граничного значення модуля спектрального параметра характеристичного рівняння, так і з рівності нулю дискримінанта характеристичного рівняння, причому обидва підходи дають однаковий результат. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку узгоджується з чисельними результатами.

Для неявної різницевої схеми доведено безумовну стійкість за методом фон Неймана. Встановлено, що для довільних значень кроків дискретизації за часом і простором модулі коренів характеристичного рівняння не перевищують одиниці, а за наявності дисипативного члена забезпечується згасання похибки з часом.

Отримані результати дозволяють обґрунтовано обирати тип чисельної схеми та параметри дискретизації залежно від поставленої задачі. Явна схема може бути ефективною при малих кроках інтегрування за часом, тоді як неявна схема є більш придатною для довготривалих розрахунків і моделювання процесів із суттєвою дисипацією. Запропонований підхід до аналізу стійкості може бути використаний для дослідження інших класів скінчено-різницевої схем у задачах математичного моделювання коливальних процесів у технічних системах.

Список літератури

1. Gulyayev V., Glazunov S., Glushakova O., Vashchilina E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. – Cambridge Scholars Publishing, 2019. – 512 с.
2. Глазунов С. М. Квазістатичні та динамічні фрикційні ефекти при бурінні глибоких свердловин : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 – будівельна механіка. – Національний транспортний університет. – Київ, 2018. – 210 с.
3. Aarsnes U. J. F., van de Wouw N. Axial and torsional self-excited vibrations of a distributed drill-string // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol. 458. – P. 1 – 20. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.12.028.
4. Liu X., Meng G., Balachandran B. Drill-string stability and stress localization: Influence of complex delay effects and dry friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 151. – P. 104 – 118. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104559.
5. Faghihi M. A., Mohammadi H., Yazdi E. A., Eghtesad M., Tashakori S. Distributed model for the drill-string system with multiple regenerative effects in the bit-rock interaction // Journal of Sound and Vibration. – 2024. – Vol. 550. – P. 117 – 134. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.118120.
6. Ваціліна О. В., Лебедєва І. В. Деякі особливості руху елементів бурових установок // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : фізико-математичні науки. – 2020. – № 1–2. – С. 57 – 60. DOI: 10.17721/1812-5409.2020/1-2-9.
7. Thomas J. W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. – New York : Springer Science & Business Media, 2013. – 437 p.
8. LeVeque R. J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. – Philadelphia : SIAM, 2007. – 339 с.
9. Gulyayev V. I., Vashchilina O. V., Glazunov S. M. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – 2016. – № 46. – С. 81 – 84. DOI: 10.20998/2078-9130.2016.46.88055.
10. Шеховцов А. В. Вплив твердих границь та в'язкості середовища на внесок інерційної та вихрової компонент нормальній силі пластини, що обертається. Частина 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 212 – 217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
11. Ваціліна О. В., Жижарєва Ю. І., Шолохов О. В. Чисельні методи : навч. пос. – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2025. – 325 с. – Режим доступу : <https://ais.knu.ua/інформаційна-довідка-викладача>. – Дата звертання : 05 жовтня 2025 р.

References (transliterated)

1. Gulyayev V., Glazunov S., Glushakova O., Vashchilina E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. Cambridge, Scholars Publishing, 2019. – 512 c.
2. Glazunov S. M. *Kvazistatychni ta dynamichni fryktsiyni efekty pry burinni glybokyykh sverdlovyh : dys. kand. tekhn.nauk 05.23.17* [Quasi-static and dynamic frictional effects in deep borehole drilling. Candidate eng. sci.diss. (Ph. D.)]. Kyiv, 2018. 210 p. Manuscript.
3. Aarsnes U. J. F., van de Wouw N. Axial and torsional self-excited vibrations of a distributed drill-string. *Journal of Sound and Vibration*. 2019, Vol. 458, pp. 1–20. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.12.028.
4. Liu X., Meng G., Balachandran B. Drill-string stability and stress localization: Influence of complex delay effects and dry friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023, Vol. 151, pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104559.
5. Faghihi M. A., Mohammadi H., Yazdi E. A., Eghtesad M., Tashakori S. Distributed model for the drill-string system with multiple regenerative effects in the bit–rock interaction. *Journal of Sound and Vibration*. 2024, Vol. 550, pp. 117–134. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.118120.
6. Vashchilina O. V., Lebedyeva I. V. Deyaki osoblyvosti rukhu elementiv buryl'nykh ustanovok [Some peculiarities of the drilling rigs elements movement]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv Physics and Mathematics]. 2020, no. 1–2, pp. 57–60. DOI: 10.17721/1812-5409.2020/1-2-9.
7. Thomas J. W. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. New York, Springer Science & Business Media, 2013. 437 p.
8. LeVeque R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia, SIAM, 2007. 339 p.
9. Gulyayev V. I., Vashchilina O. V., Glazunov S. M. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya: *Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and Strength of Machines]. 2016, no. 46, pp. 81–84. DOI: 10.20998/2078-9130.2016.46.88055.
10. Shekhovtsov A. V. Vplyv tverdykh granyt ta v'yazkosti seredovyshha na vnesok inertsynoyi ta vykhrovoyi komponent normal'noyi syly plastyny, shho obertaet'sya. Chastyna 1 [Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, no. 1, pp. 212–217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
11. Vashchilina O. V., Zhykharyeva Yu. I., Sholokhov O. V. *Chysel'ni metody : navch. pos.* [Numerical Methods : textbook]. Kyiv, Taras Shevchenko National University of Kyiv Publ., 2025. 325 p. Available at: <https://ais.knu.ua/інформаційна-довідка-викладача> (accessed 5 October 2025).

Надійшла (received) 10.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.12.2026; До публікації (for publication) 15.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Ваціліна Олена Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладних інформаційних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 413-23-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6867-6216>; e-mail: olenavashchilina@knu.ua.

Vashchilina Olena Valeriivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Applied Information Systems, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 413-23-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6867-6216>; e-mail: olenavashchilina@knu.ua.

Лебедєва Ірина Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 999-17-98; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7150-1310>; e-mail: lebedyevaiv@knu.ua.

Lebedyeva Iryna Valeriivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 999-17-98; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7150-1310>; e-mail: lebedyevaiv@knu.ua.

А. П. КОЖУШКО, І. Р. ЛІМ, О. І. КОВАЛЕНКО, С. П. СОКОЛІК, О. Б. ДУДКА

АНАЛІЗ ПІДХОДІВ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПНЕВМАТИЧНИХ ШИН З ОПОРНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

У статті розглянуто питання визначення площин плям контакту пневматичних шин мобільних машин при взаємодії з опорною поверхнею в умовах змінного навантаження та внутрішнього тиску в шині. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю адекватного врахування деформаційних властивостей шин і фізико-механічних характеристик ґрунту при моделюванні руху транспортних засобів, зокрема сільськогосподарської техніки та спеціалізованих мобільних платформ, що працюють у складних експлуатаційних умовах. Метою роботи є порівняння результатів розрахунку площі плями контакту шин при взаємодії з опорною поверхнею за різними математичними моделями, побудованими на основі емпіричних залежностей, з експериментальними даними. Методика дослідження базується на поєднанні математичного моделювання та експериментальних вимірювань параметрів контактної взаємодії шин із опорною поверхнею. У роботі проаналізовано низку моделей, що описують форму та площу контактної плями, зокрема моделі, засновані на припущенні еліптичної та супереліптичної геометрії контакту, а також емпіричні залежності. У результаті дослідження встановлено, що зі збільшенням навантаження на колесо відбувається закономірне зростання площі плями контакту, тоді як підвищення внутрішнього тиску в шині призводить до її зменшення через збільшення жорсткості шини та обмеження деформації. Виявлено відмінності у характері цих залежностей для передніх і задніх шин, що обумовлено конструктивними особливостями та розподілом навантаження по осях. Порівняльний аналіз показав, що найбільш адекватне відтворення експериментальних даних забезпечують окремі емпіричні моделі, середня похибка яких не перевищує 7,65 – 8,5% для передніх та 8,4 – 14,3% для задніх шин, тоді як базові моделі демонструють суттєво більші відхилення. Показано, що моделі, які описують площу плями контакту шини у вигляді області, обмеженої супереліпсом, характеризуються значною похибкою порівняно з експериментальними даними при тиску в шині понад 150 кПа, проте можуть бути ефективними за умов зниженого внутрішнього тиску. Обґрунтовано доцільність використання емпіричних підходів для опису контактної взаємодії шин із подальшим уточненням їх параметрів. Отримані результати можуть бути використані для підвищення точності математичних моделей руху мобільних машин та оптимізації їх експлуатаційних характеристик.

Ключові слова: мобільна машина, шина, навантаження, внутрішній тиск, площа контакту, опорна поверхня, моделювання, емпірична модель, супереліпс, аналіз.

A. P. KOZHUSHKO, I. R. LIM, O. I. KOVALENKO, S. P. SOKOLIK, O. B. DUDKA

ANALYSIS OF APPROACHES TO MODELING THE INTERACTION OF PNEUMATIC TIRES WITH THE SUPPORTING SURFACE

The article addresses the problem of determining the contact patch area of pneumatic tires of mobile machines during their interaction with the supporting surface under conditions of variable load and internal tire pressure. The relevance of the study is due to the need for adequate consideration of tire deformation properties and the physico-mechanical characteristics of the soil when modeling the motion of vehicles, in particular agricultural machinery and specialized mobile platforms operating under complex conditions. The aim of the study is to compare the results of calculating the tire contact patch area during interaction with the supporting surface using different mathematical models based on empirical relationships with experimental data. The research methodology is based on a combination of mathematical modeling and experimental measurements of the parameters of tire-ground contact interaction. The paper analyzes a number of models describing the shape and area of the contact patch, including models based on the assumption of elliptical and superelliptical contact geometry, as well as empirical relationships. The results of the study show that an increase in wheel load leads to a corresponding increase in the contact patch area, while an increase in internal tire pressure results in its reduction due to increased tire stiffness and limited deformation. Differences in the nature of these dependencies for front and rear tires have been identified, which are due to design features and load distribution across the axles. A comparative analysis has shown that the most accurate representation of experimental data is provided by certain empirical models, with an average error not exceeding 7.65 – 8.5% for front tires and 8.4 – 14.3% for rear tires, whereas the basic models demonstrate significantly larger deviations. It is shown that models describing the contact patch area as a region bounded by a superellipse are characterized by significant error compared to experimental data at tire pressures above 150 kPa, but may be effective under reduced internal pressure conditions. The expediency of using empirical approaches to describe tire-ground contact interaction with further refinement of their parameters is substantiated. The obtained results can be used to improve the accuracy of mathematical models of mobile machine motion and to optimize their operational characteristics.

Key words: mobile machine, tire, load, internal pressure, contact area, support surface, modeling, empirical model, superellipse, analysis.

Вступ. Ефективність руху мобільних машин значною мірою визначається характером їх взаємодії з опорною поверхнею. Для транспортних засобів, що працюють у складних умовах експлуатації [1], зокрема сільськогосподарської техніки, роботизованих платформ аграрного призначення та спеціалізованих всюдихідних засобів, ця взаємодія набуває вирішального значення. Пневматичні шини виконують функцію основного елемента контакту машини з ґрунтом, забезпечуючи передачу тягових і гальмівних сил, сприйняття навантажень та формування опорної реакції [2]. Водночас деформаційні властивості пневматичних шин, змінність фізико-механічних характеристик ґрунтового середовища, а також вплив внутрішнього тиску повітря в шині істотно ускладнюють процес опису їх взаємодії з опорною поверхнею, оскільки зазначені фактори змінюють параметри контактної плями, жорсткісні характеристики та умови передачі тягових зусиль. Як наслідок, формується складний взаємозв'язок між навантаженням на колесо, ступенем деформації шини, параметрами ґрунту та величиною внутрішнього тиску, що, таким чином, зумовлює виникнення суттєвої *нелінійної залежності*, зміну якої складно прогнозувати в межах спрощених математичних моделей.

Аналіз останніх досліджень. Взаємодія колісного рушія мобільних машин із шарами ґрунту супроводжується складними фізико-механічними процесами [3], що включають ущільнення, зсув та локальну пластичну деформацію ґрунтового середовища. Одночасно під дією змінних навантажень відбувається деформація пневма-

тичної шини, що проявляється у вигляді прогину її каркаса та зміни параметрів контактної плями. Нерівномірність структури ґрунту, наявність вологи, рослинних залишків та інші експлуатаційні чинники зумовлюють стохастичний характер таких деформацій, що істотно ускладнює прогнозування процесів взаємодії колеса з опорною поверхнею. За результатами досліджень, наведених у роботі [4], зазначені явища можуть призводити до значних втрат тягових можливостей колісних машин: у окремих режимах роботи втрати тягової сили колісного трактора можуть досягати близько 55 %.

Упродовж останніх десятиліть розвиток інноваційних технологій у галузі шинної промисловості, зокрема вдосконалення конструкції каркаса, застосування гнучкіших матеріалів та оптимізація геометрії протектора, дозволили створити шини, здатні сприймати більші навантаження за зниженого внутрішнього тиску [5]. Це сприяє збільшенню площі контакту з опорною поверхнею та зменшенню питомого тиску на ґрунт. Проте, незважаючи на досягнуті технічні покращення, *проблема негативного впливу колісного рушія на ґрунтове середовище та пов'язаного з цим зниження ефективності реалізації тягових властивостей машин під час виконання енерговитратних робіт залишається актуальною і потребує подальших досліджень.*

Розвиток сучасних комп'ютерних технологій створив передумови для більш точного прогнозування параметрів взаємодії пневматичних шин з опорною поверхнею для конкретних типорозмірів. Зокрема, з'явилася можливість визначати зміну таких показників, як площа контактної плями та розподіл контактної тиску за різних значень навантаження на колесо із застосуванням *методів нечіткої логіки* [6]. Подальший розвиток цього підходу представлено у роботі [7], де запропоновано модель на основі *штучної нейронної мережі*, що узагальнює прогнозування змін площі контактної плями та контактної тиску шини. Результати дослідження показали, що прогнозні значення, отримані за допомогою *нейромережевої моделі*, характеризуються вищою достовірністю порівняно з експериментальними даними, ніж результати, отримані на основі класичних регресійних залежностей. У роботі [8] за допомогою моделі штучної нейронної мережі здійснено прогнозування площі контактної плями та тиску на ґрунт для 538 тракторних шин типорозмірів 12,4 – 28, 13,6 – 28, 14,9 – 28 і 16,9 – 28 за різних значень навантаження та внутрішнього тиску в шині. Отримані результати показали, що максимальне відхилення розрахункових значень від експериментальних даних не перевищує 2 %. Водночас продовжується розвиток і *традиційних статистичних підходів*. Зокрема, у роботі [9] запропоновано регресійну модель визначення тривимірної площі контакту пневматичної шини з опорною поверхнею на основі рівняння множинної лінійної регресії, що встановлює залежність між факторами впливу та площею контакту шин трактора. Крім того, у роботі [10] представлено експериментальну методіку визначення параметрів контактної плями шини із застосуванням технології 3D – сканування, що дозволило отримати цифрове зображення контактної поверхні шини на ґрунті та виконати детальний аналіз її геометричних характеристик.

Для опису процесів взаємодії пневматичних шин з опорною поверхнею застосовуються різні підходи до математичного моделювання, серед яких *аналітичні, чисельні та емпіричні моделі* [11]. Аналітичні моделі, що базуються на законах механіки деформованого тіла та механіки ґрунтів, дозволяють отримати узагальнений опис процесів деформації шини і ґрунтового середовища. Однак їх використання часто супроводжується необхідністю прийняття значної кількості припущень щодо фізико-механічних властивостей матеріалів, геометрії контактної зони та умов навантаження, що знижує точність опису реальних експлуатаційних процесів.

Чисельні методи моделювання, зокрема *метод скінченних елементів* або *дискретних елементів*, забезпечують більш детальний аналіз напружено-деформованого стану шини та ґрунту [12]. Водночас їх застосування потребує значних обчислювальних ресурсів, детальної інформації про властивості матеріалів і складних процедур калібрування моделей, що обмежує можливість використання таких підходів у прикладних інженерних розрахунках і при моделюванні динаміки руху мобільних машин.

У цьому контексті емпіричні моделі набувають особливої практичної цінності. Вони формуються на основі узагальнення результатів експериментальних досліджень і встановлюють функціональні залежності між основними параметрами взаємодії, такими як навантаження на колесо, внутрішній тиск у шині, параметри ґрунту та геометричні характеристики контактної плями. Завдяки відносній простоті математичного апарату, невеликій кількості вхідних параметрів та достатній точності для інженерних розрахунків емпіричні моделі дозволяють ефективно оцінювати тягово-зчипні властивості колісних рушіїв, енергетичні показники руху машин і параметри їх взаємодії з опорною поверхнею.

Метою роботи є порівняння результатів обчислення площі плями контакту шин при взаємодії з опорною поверхнею за різними математичними моделями, побудованими на основі емпіричних залежностей, з експериментальними даними. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- скласти математичні моделі процесу взаємодії пневматичної шини з опорною поверхнею;
- виконати порівняльний аналіз результатів розрахунку площі плям контакту шин з опорною поверхнею при різних умовах навантаження та внутрішнього тиску в шинах.

Виклад основного матеріалу. При виконанні енергоємних робіт пневматична шина (рис. 1) взаємодіє з деформованим ґрунтом, такий процес супроводжується великими *радіальними деформаціями* шини f_{ur} , які характеризуються роботою стиснення повітря. Такий процес характеризується залежністю надлишкового внутрішнього тиску та об'єму шини.

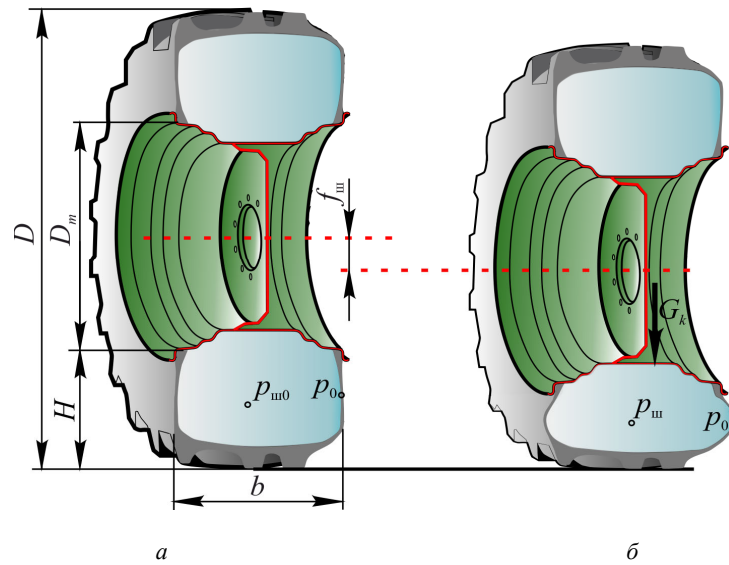


Рис. 1 – Характеристики шини: *a* – статичне положення; *б* – в режимі навантаження.

Однією з найпоширеніших емпіричних моделей взаємодії пневматичної шини з опорною поверхнею є *модель Ляско* [13]. Її використання висвітлено в ряді наукових робіт [1, 14 – 16]. У межах даної моделі приймається припущення, що внутрішній тиск p_u у шині під час деформації залишається сталою величиною, що дає змогу спростити опис процесу контактної взаємодії. При цьому деформація шини f_u зумовлена переважно зміною її форми в зоні плями контакту з опорною поверхнею, тоді як зміна внутрішнього об'єму має незначний характер і, як правило, ним можна нехтувати. За таких припущень радіальна деформація шини f_u визначається її пружними (жорсткісними) характеристиками та величиною внутрішнього тиску p_u , який впливає на площу плями контакту. Таким чином, радіальна деформація шини має наступний вигляд:

$$f_u = \frac{c_2 \cdot G_k}{2(p_u + p_0)} + \sqrt{\left(\frac{c_2 \cdot G_k}{2(p_u + p_0)}\right)^2 + c_1 \cdot G_k}, \quad (1)$$

де c_1, c_2 – сталі коефіцієнти, які мають залежність від геометричних характеристик та тиску в шині; G_k – навантаження на шину; p_0 – умовний тиск, що визначається для шини при нульовому тиску накачування на твердій поверхні. Тиск p_0 залежить від конструкції шини, її конструкції та матеріалу [13]:

$$c_1 = \frac{(x_1^2 + x_2^2)(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}; \quad (2)$$

$$c_2 = \frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}; \quad (3)$$

$$x_{1,2} = \frac{0,5D - r_c}{p_{u,\min,\max} + p_0}; \quad y_{1,2} = \frac{(0,5D - r_c)^2}{Q_{p,\min,\max}}, \quad (4)$$

де D – зовнішній діаметр; r_c – статичний радіус шини; $p_{u,\min}$ та $p_{u,\max}$ – мінімально та максимально допустимий тиск в шині; $Q_{p,\min}$ та $Q_{p,\max}$ – максимально допустиме навантаження при мінімально та максимально допустимому тиску.

Обчислюючи конструкційні характеристики шини, стає можливим визначення показників, які впливають на тяглові та економічні параметри колісного трактора. Це, насамперед, динамічний радіус r_k та площа плями контакту з ґрунтом F_k

$$r_k = 0,5D - f_u; \quad (5)$$

$$F_k = \frac{\pi}{4} \cdot a_k \cdot b_k, \quad (6)$$

де a_k, b_k – довжина та ширина плями контакту шини.

Обчислення складових плями контакту шини при взаємодії з ґрунтом виглядає наступним чином:

$$a_k = \frac{23}{11,9 + \left| \frac{D}{b} - 3 \right|} \sqrt{D \cdot f_{uu} - f_{uu}^2}; \quad (7)$$

$$b_k = 2 \sqrt{\frac{2(b + (0,5(D - 0,0254 \cdot D_m)))}{2,5} \cdot f_{uu} - f_{uu}^2}, \quad (8)$$

де D_m – номінальний посадковий діаметр обода; b – ширина профілю шини.

Відмітимо, що реалізація плями контакту за моделлю Ляско обчислюється за еквівалентною формою еліпса, що в умовах реальної експлуатації мобільної машини є некоректним. Зважаючи на це, запропонуємо наступні модернізації моделі Ляско. В подальшому при порівнянні дану модель (формули (1) – (8)) окреслимо, як «Модель №1».

«Модель №2» ґрунтується на впровадженні показника норми шаруватості. Так, в моделі Реброва [16] запропоновано використовувати умовний показник норми шаруватості, який більш характерний та доречний для діагональних шин. Але автор [16] використовує цей показник для радіальних шин з додаванням умов по навантаженню та контурної площі шини.

Математична модель Реброва загалом побудована на моделі Ляско [13], але має відмінності, зокрема при впровадженні показника норми шаруватості n_c у формули визначення умовного тиску та довжини плями контакту (7):

$$p_0(n_c) = 16,7 \cdot n_c \sqrt{\frac{D}{b} - 1,4} - 28; \quad (9)$$

$$a_k(n_c) = \frac{20,5}{11,9 + \left| \frac{D}{b} - \frac{|n_c - 9|}{2} - 3 \right|} \sqrt{D \cdot f_{uu} - f_{uu}^2}. \quad (10)$$

Обчислення формул (9) та (10) здійснюється при використанні табличної величини норми шаруватості n_c , що надається заводом-виробником шини. Далі необхідно уточнити норму шаруватості шляхом виконання наступної умови [16]:

$$\left(\frac{c_2 \cdot G_k}{2(p_{uu} + p_0(n_c))} \right)^2 + c_1 \cdot G_k \geq 0. \quad (11)$$

Окрім виконання умови (11), необхідно також дотриматися наступної рівності:

$$\frac{F_s}{5000} = \frac{20,5 \cdot \pi / \sqrt{k_F}}{11,9 + \left| \frac{D}{b} - \frac{|n_c - 9|}{2} - 3 \right|} \cdot \sqrt{D \cdot f_{uu} - f_{uu}^2} \cdot \sqrt{\frac{2(b+H)}{2,5 \sqrt{k_F}}} \cdot f_{uu} - f_{uu}^2, \quad (12)$$

де k_F – коефіцієнт площі контакту, який обчислюється відношенням площі плями контакту з ґрунтом F_k шини до номінальної контурної площі плями контакту F_s шини [16]:

$$k_F = \frac{F_k}{F_s}. \quad (13)$$

Аналізуючи наведений алгоритм, констатуємо, що вибір конкретної шини необхідно проводити при комплексному дослідженні в ході експлуатації мобільної машини. «Модель №2» реалізується за рахунок використання формул (1) – (6), (8), (9) – (13).

«Модель №3» базується на представленні плями контакту шини у формі, обмеженої супереліпсом, замість форми контакту, обмеженої еліпсом. Площу плями контакту у формі області, обмеженої супереліпсом, описано в роботі [17], нерівність в ортогональній системі координат має наступний вигляд:

$$\left| \frac{x}{0,5 \cdot a_k} \right|^n + \left| \frac{y}{0,5 \cdot b_k} \right|^n \leq 1, \quad (14)$$

де x, y – координати супереліпса; n – показник степеня супереліпса.

В ортогональній системі координат показник степеня супереліпса n є додатним дійсним числом, яке визначає форму супереліпса, тоді як параметри $0,5 \cdot a_k$ та $0,5 \cdot b_k$ є півосями, що визначають його розмір. Зміна значення показника степеня n дає можливість отримати широкий спектр кривих [18]. Крива для $n = 2$ є еліпсом (для $0,5 \cdot a_k = 0,5 \cdot b_k$ це коло). Якщо значення n зменшується до 1, крива створює пік на вершині; крива для $n = 1$ є паралелограмом (ромбом). При $n > 2$ сторони кривої сплющуються, і форма кривої починає нагадувати прямокутник. Зважаючи на рівняння (14), площа плями контакту знаходиться з наступного виразу [17]:

$$F_k = a_k \cdot b_k \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right)} \text{ або } F_k = b_k \cdot \int_0^{a_k} \left(1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^n\right)^{1/n} dx, \quad (15)$$

де Γ – гамма-функція.

З роботи [19] експериментальними дослідженнями підтверджено, що показник степеня n , який є невід'ємною складовою для знаходження площі області, обмеженої супереліпсом, повинен складати 3.2. Зважаючи на це, рівняння (15) прийме наступний вигляд:

$$F_k \approx 0.9 \cdot a_k \cdot b_k. \quad (16)$$

Таким чином, «Модель №3» реалізується за рахунок використання формул (1) – (5), (8), (9) – (13) та (16).

«Модель №4» ґрунтується на врахуванні глибини колії, що формує колісний рушій при експлуатації. У роботі [14] показано, що глибина колії впливає на довжину плями контакту, а саме:

$$a_k = \sqrt{D \cdot (h + f_{uu}) - (h + f_{uu})^2} + \sqrt{D \cdot f_{uu} - f_{uu}^2}, \quad (17)$$

де h – глибина колії [20], що розраховується за наступною формулою:

$$h = \sqrt[3]{\frac{G_k^2}{\left(\frac{k_0 \cdot k_N}{100 \cdot \sqrt{a_k \cdot b_k}}\right)^2 \cdot b_k^2 \cdot D}}, \quad (18)$$

де k_0, k_N – коефіцієнт об'ємного зминання ґрунту та коефіцієнт, що враховує зміну фізико-механічних властивостей ґрунту.

Відмітимо, що задля реалізації «Моделі №4» базовою моделлю буде «Модель №1», тому використовуватимуться формули (1) – (6), (8), (17) та (18).

«Модель №5» базуватиметься на «Моделі №4», але з представленням плями контакту шини у формі, обмеженої супереліпсом, замість форми контакту, обмеженої еліпсом. Таким чином, «Модель №5» реалізується за рахунок використання формул (1) – (5), (8), (16) – (18).

Результати розрахунку моделей. Оскільки запропоновані вище математичні моделі потребують експериментальної перевірки та підтвердження їх адекватності реальним умовам експлуатації, виникає необхідність залучення достовірних експериментальних даних. У зв'язку з цим доцільно використати результати випробувань, проведених на базі *Університету Менделя* в Брно у Навчально-дослідному лісовому підприємстві «Масариків ліс Кржтини» (Чехія) [14], які відзначаються високою точністю вимірювань і добре документованою методикою.

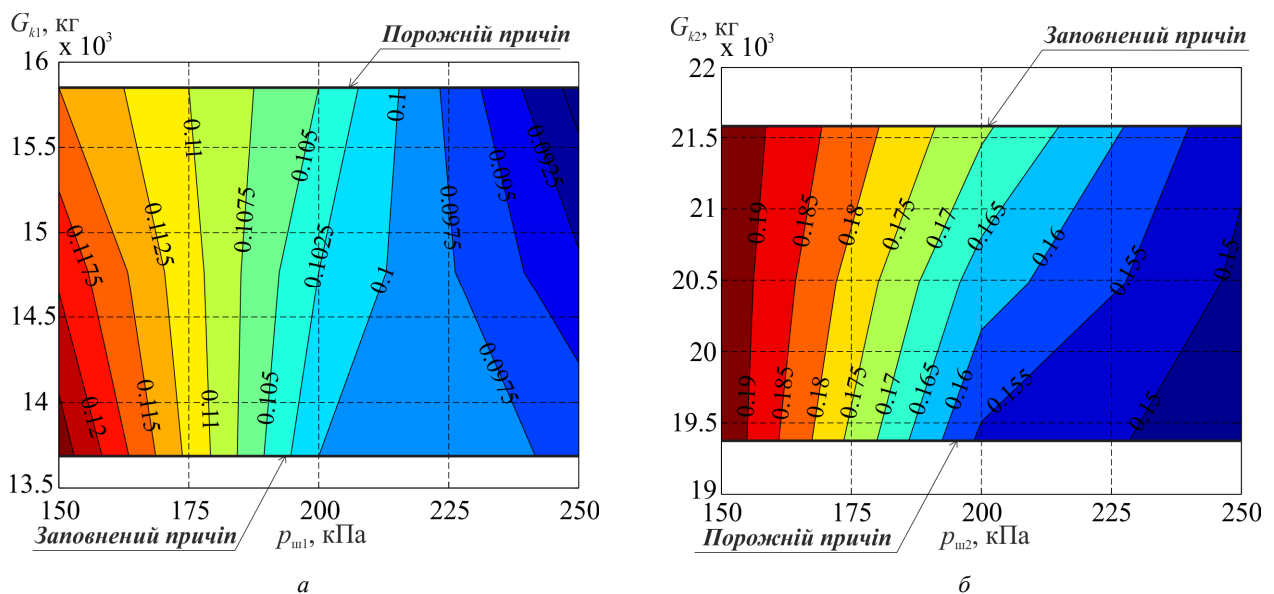


Рис. 2 – Залежність експериментально отриманих значень площ плям контакту шин F_k (m^2) від навантаження G_k (кг) та внутрішнього тиску p_u (кПа) [14]: а – Nokian 380/85 R28; б – Nokian 460/85 R38.

Експериментальні дослідження були спрямовані на визначення геометричних параметрів пневматичних шин у різних режимах навантаження та тиску накачування. Зокрема, вимірювалися радіуси шин у ненавантаже-

ному та навантаженому станам із використанням електронного штангенциркуля на твердій горизонтальній поверхні. Для кожного поєднання параметрів (навантаження – тиск) проводилися окремі серії вимірювань. Додатково здійснювалось визначення параметрів плями контакту (рис. 2) шляхом фіксації відбитків шин на аркушах паперу великого формату, що дозволило оцінити площу контакту та характер розподілу тиску в зоні взаємодії шини з опорною поверхнею. Об'єктами дослідження виступали *колісний трактор Valtra 134* та *причіп Agama LV10* з ефективною вантажопідйомністю 10 т, що забезпечує репрезентативність результатів для умов лісгосподарського виробництва. Передня вісь трактора була укомплектована шинами Nokian 380/85 R28, тоді як задня вісь – шинами Nokian 460/85 R38, що відповідає типовій схемі оснащення тракторів даного класу.

Під час експерименту варіювали тиск повітря в шинах $p_{ш}$, встановлюючи три характерні рівні: 150, 200 та 250 кПа, що дозволило проаналізувати вплив жорсткості шини на її деформаційні характеристики та параметри контакту шини з опорною поверхнею. Випробування проводилися у двох режимах навантаження: без вантажу (порожній причіп) та з частковим завантаженням – 4200 кг деревини (ялиновий кругляк довжиною 4 м). Такий підхід дав змогу оцінити вплив змінної маси на радіус кочення, деформацію шини та площу контакту шин. Важливо відзначити, що дослідження виконувалися на твердій горизонтальній поверхні без нахилу: поздовжній градієнт і поперечний ухил становили 0° , що виключало вплив додаткових силових факторів і дозволяло зосередитися виключно на дослідженні деформаційних та контактних характеристик шин. Це, у свою чергу, підвищує точність подальшої ідентифікації параметрів моделей та забезпечує коректність їхнього використання при математичному моделюванні роботи транспортних засобів.

На рис. 2 представлено узагальнені результати експериментальних досліджень, що стосуються визначення площі плями контакту передніх і задніх шин колісного трактора Valtra 134 у складі агрегату з причепом Agama LV10 як у режимі без навантаження, так і при його частковому завантаженні. Отримані дані відображають характер зміни контактної взаємодії шин з опорною поверхнею залежно від експлуатаційних умов роботи транспортного засобу.

Слід зазначити, що побудова рис. 2 виконана у просторовому (тривимірному) вигляді, що дозволяє одночасно врахувати вплив двох ключових факторів: вертикального навантаження G_k , яке припадає на шину, та внутрішнього тиску повітря в шині $p_{ш}$. Такий підхід забезпечує більш наочне та інформативне представлення результатів порівняно з двовимірними залежностями, оскільки дає змогу оцінити взаємний вплив зазначених параметрів і виявити їх комплексний ефект на формування площі плями контакту.

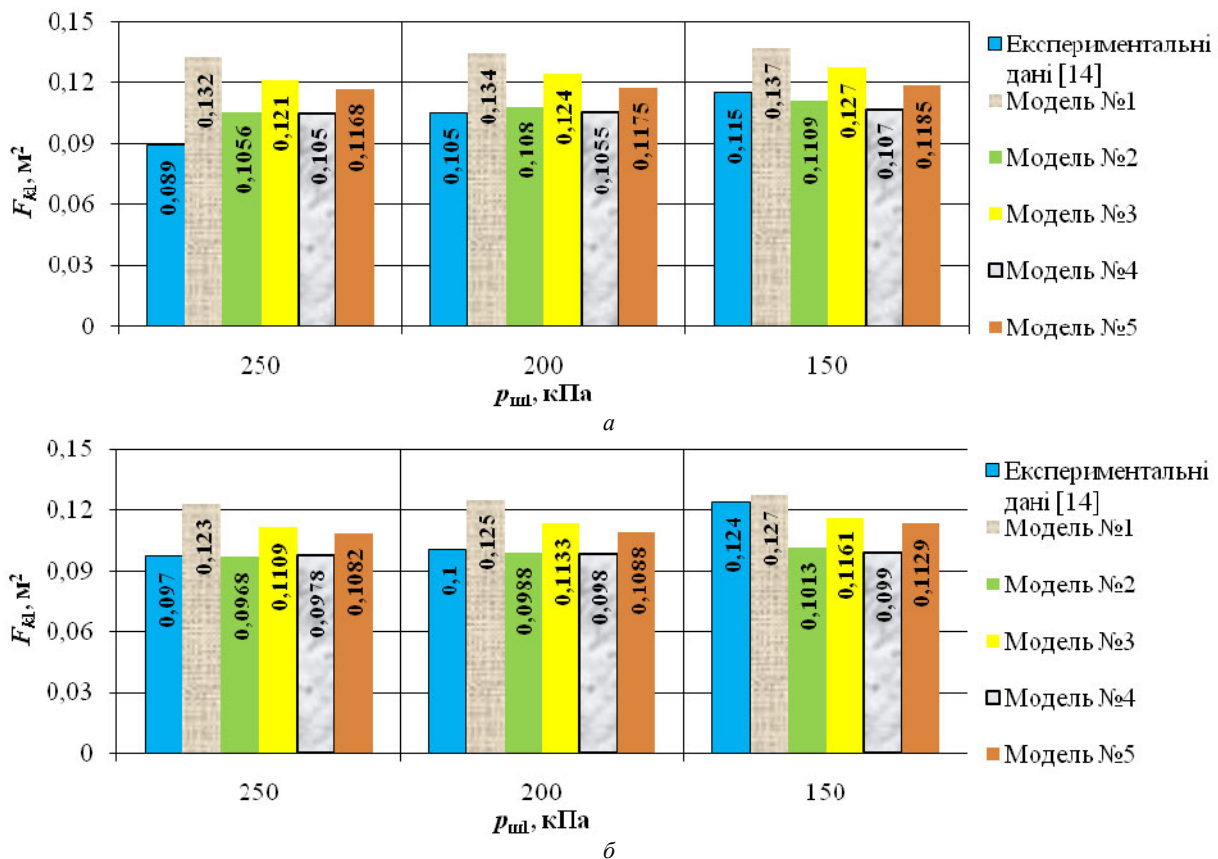


Рис. 3 – Порівняння експериментально визначених та розрахункових площ плями контакту передньої шини Nokian 380/85 R28: а – порожній причіп ($G_{k1} = 15845$ кг); б – заповнений причіп ($G_{k1} = 13685$ кг).

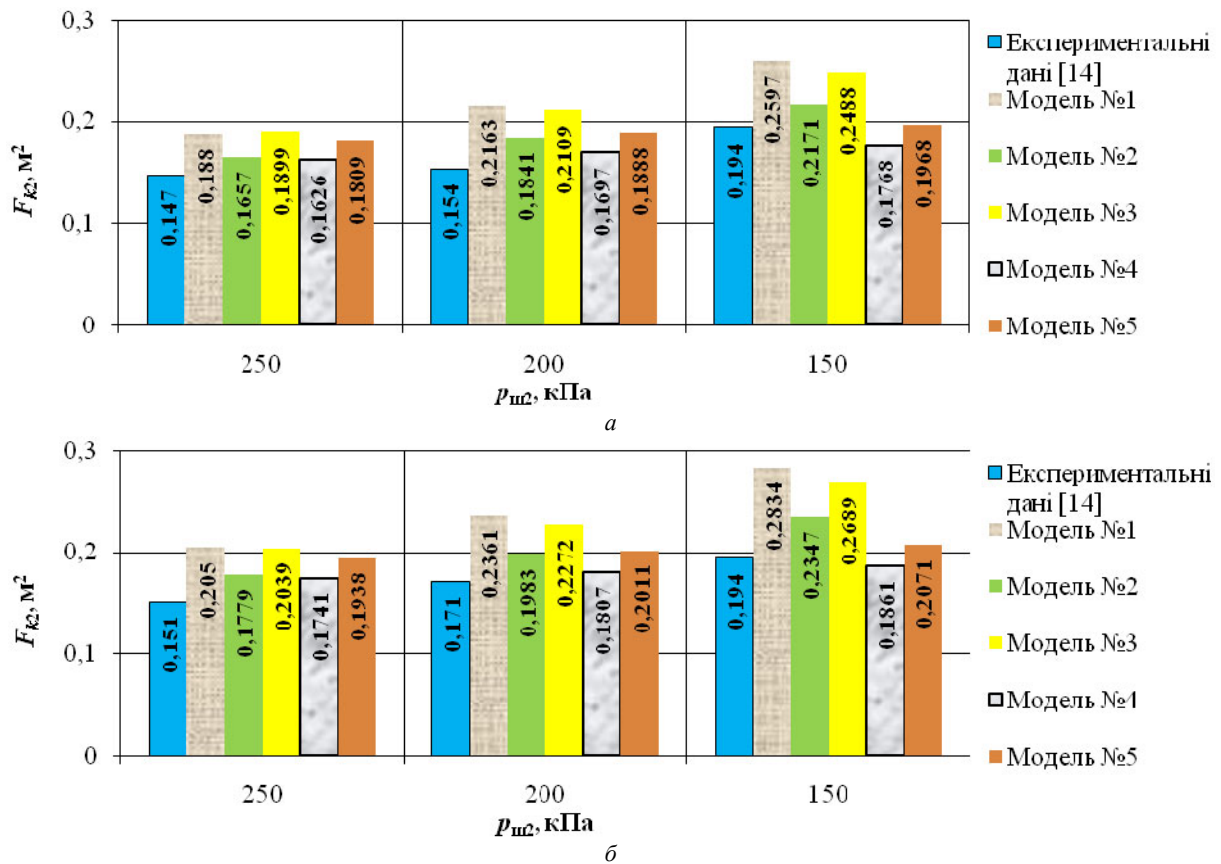


Рис. 4 – Порівняння експериментально визначених та розрахункових площ плями контакту передньої шини Nokian 460/85 R38: *a* – порожній причіп ($G_{k1} = 19375$ кг); *б* – заповнений причіп ($G_{k1} = 21582$ кг).

Аналіз представлених залежностей свідчить про закономірне зростання площі контакту зі збільшенням навантаження G_k , що пояснюється підвищенням ступеня деформації пневматичної шини та збільшенням довжини і ширини контактної ділянки. Водночас підвищення внутрішнього тиску $p_{ш}$ призводить до зменшення площі плями контакту, що обумовлено зростанням радіальної жорсткості шини та зниженням її здатності до деформації під дією навантаження. Окремо варто відмітити відмінності у поведінці передніх та задніх шин, зумовлені різницею в їх типорозмірах (Nokian 380/85 R28 для передньої осі та Nokian 460/85 R38 для задньої) та відповідним розподілом навантаження по осях. Задні шини, які сприймають більшу частку ваги агрегату, характеризуються більшою площею контакту та вищою чутливістю до зміни навантаження, тоді як передні шини демонструють менш виражену, але аналогічну за характером залежність.

На рис. 3 – 4 представлено результати експериментально визначених за [14] та розрахункових за «Моделями 1 – 5» величини площ плям контакту передньої шини Nokian 380/85 R28 та задньої шини Nokian 460/85 R38 залежно від навантаження G_k та внутрішнього тиску $p_{ш}$ в шинах.

Порівнюючи результати математичного моделювання визначення площ плям контакту шин та експериментальних даних (рис. 3, *a*), відмітимо, що середня похибка для передньої шини при ненавантаженому причепі для «Моделі 1» складає 23,4%; для «Моделі 2» – 7,4%; для «Моделі 3» – 17,1%; для «Моделі 4» – 7,6%; для «Моделі 5» складає 12,5%. З рис. 3, *б* помітно, що середня похибка для передньої шини при навантаженому причепі для «Моделі 1» складає 14,5%; для «Моделі 2» – 7,9%; для «Моделі 3» – 10,4%; для «Моделі 4» – 9,4%; для «Моделі 5» складає 10,4%. З результатів порівняння помітно, що найменші похибки з експериментальними дослідженнями для передньої шини Nokian 380/85 R28 мають «Модель 2» та «Модель 4» з середньою похибкою 7,65% та 8,5%, відповідно.

Аналізуючи результати математичного моделювання визначення площ плям контакту шин та експериментальних даних (рис. 4, *a*), відмітимо, що середня похибка для задньої шини при ненавантаженому причепі для «Моделі 1» складає 25,3%; для «Моделі 2» – 13,2%; для «Моделі 3» – 23,9%; для «Моделі 4» – 9,2%; для «Моделі 5» – 12,9%. З рис. 4, *б* помітно, що середня похибка для задньої шини при навантаженому причепі для «Моделі 1» складає 28,5%; для «Моделі 2» – 15,4%; для «Моделі 3» – 26,2%; для «Моделі 4» – 7,6%; для «Моделі 5» – 14,5%. З результатів порівняння помітно, що найменші похибки з експериментальними дослідженнями для передньої шини Nokian 460/85 R38 мають також «Модель 2», «Модель 4» та «Модель 5» з середньою похибкою 14,3%, 8,4% та 13,7%, відповідно.

Відмітимо, що базова «Модель 1» має найбільші значення похибки, як для передньої шини – 18,95 %, так і для задньої шини – 26,9 %, тому її використання є неприпустимим при моделюванні взаємодії шин мобільних машин з опорною поверхнею.

Що стосується моделей, які представляють пляму контакту шини у формі, обмеженої супереліпсом, замість форми контакту, обмеженої еліпсом, то використовувати їх для аналізу не зовсім коректно в умовах аналізу варіювання внутрішнім тиском $p_{ш}$ в шинах та зміною навантаги G_k . Але, як показали результати з рис. 3 – 4, «Модель 3» та «Модель 5» доречно використовувати при аналізі величини площі плями контакту при пониженому внутрішньому тиску в шинах. Так, при $p_{ш} = 150$ кПа середня похибка для передньої шини при ненавантаженому та навантаженому причепі для «Моделі 3» складає 9,4 % та 6,8 %; для «Моделі 5» – 9,4 % та 9,8 %, відповідно. При $p_{ш} = 150$ кПа середня похибка для задньої шини при ненавантаженому та навантаженому причепі для «Моделі 3» складає 22,0 % та 27,9 %; для «Моделі 5» – 1,4 % та 6,3 %, відповідно. Отриману величину похибки можливо зменшити за рахунок коректного підбору показника степеня супереліпса (формула (14)).

Таким чином, визначено математичні моделі, що описують взаємодію пневматичних шин мобільних машин з опорною поверхнею, які з достатньою точністю, що відповідає похибці експериментальних досліджень, дозволяють відтворювати основні закономірності формування контактної плями, розподілу тиску та реалізації тягових зусиль, і можуть бути використані для інженерних розрахунків та побудови спрощених математичних моделей руху мобільних машин.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають, що перспективним напрямом розвитку отриманих результатів є проведення розширених експериментальних досліджень, спрямованих на визначення площі плями контакту пневматичних шин у різноманітних умовах експлуатації мобільних машин. Зокрема, доцільним є врахування впливу таких факторів, як тип і вологість ґрунту, величина вертикального навантаження на колесо, внутрішній тиск у шині та ступінь її деформації. Проведення таких досліджень із застосуванням сучасних методів вимірювання, зокрема цифрового моделювання та 3D – сканування контактної поверхні, дає змогу отримати достовірні експериментальні дані щодо геометричних і силових параметрів взаємодії «шина – опорна поверхня». Це, у свою чергу, створить передумови для виконання якісної кореляції запропонованих математичних «Моделей 2 – 5» з експериментальними результатами, уточнення їх параметрів та підвищення точності прогнозування. Очікується, що така адаптація моделей забезпечить досягнення допустимого рівня похибки та розширить можливості їх практичного застосування при моделюванні руху сільськогосподарських машин, роботизованих платформ аграрного призначення та спеціалізованих всюдихідних засобів.

Висновки. У результаті проведеного дослідження встановлено основні закономірності взаємодії пневматичних шин мобільних машин з опорною поверхнею. Показано, що збільшення навантаження на колесо G_k супроводжується зростанням площі плями контакту внаслідок підвищення ступеня деформації шини та збільшення геометричних розмірів контактної ділянки. Водночас підвищення внутрішнього тиску в шині $p_{ш}$ призводить до зменшення площі контакту через зростання радіальної жорсткості шини та обмеження її деформаційної здатності. Встановлено також відмінності у характері зміни площі контакту для передніх і задніх шин, що зумовлено їх типорозмірами та нерівномірним розподілом навантаження по осях.

Порівняльний аналіз результатів математичного моделювання та експериментальних даних [14] показав, що найбільшу точність відтворення площі плями контакту забезпечують «Модель 2» та «Модель 4», середня похибка яких для передньої шини становить 7,65 % та 8,5 %, а для задньої – 14,3 % та 8,4 % відповідно. Встановлено, що базова «Модель 1» характеризується найбільшими відхиленнями (до 26,9 %), що свідчить про недоцільність її використання для моделювання.

Показано, що моделі, засновані на описі плями контакту шини у формі, обмеженої супереліпсом, замість форми контакту, обмеженої еліпсом, характеризуються значною похибкою порівняно з експериментальними даними [14], проте можуть бути ефективними при аналізі за умов зниженого тиску. Зокрема, «Модель 3» та «Модель 5» демонструють задовільну точність для передніх шин (похибка до 6,8 – 9,8 %) і високий рівень точності для задніх шин у окремих режимах (до 1,4 %) при $p_{ш} = 150$ кПа.

Отримані результати свідчать про доцільність використання емпіричних моделей для опису взаємодії шин з опорною поверхнею, а також про необхідність подальшого вдосконалення моделей на основі уточнення параметрів, зокрема показника форми, обмеженої супереліпсом. Це дозволить підвищити точність прогнозування характеристик контактної взаємодії та ефективність моделювання руху мобільних машин.

Подяка. Загальний підхід розроблено в рамках науково-дослідного проєкту «Наукове обґрунтування підходів до створення гібридних силових установок об'єктів інженерно-будівельної техніки» (№ 0125U000240).

Список літератури

1. Kozhushko A., Rebrov O., Kalchenko B., Sirovitskiy K., Mudryi Y. Analysis of the Efficiency of Agricultural Tires for Low-Power Electric Tractors // 4th International Conference on Reliable Systems Engineering, ICoRSE 2024. Lecture Notes in Networks and Systems. – 2024. – Vol. 1129. – P. 61 – 70. DOI: 10.1007/978-3-031-70670-7_5.
2. Ребров О. Ю., Малько М. М., Реброва А. О., Якунін М. Є. Методика визначення раціональних типорозмірів шин для комплектування колісних сільськогосподарських тракторів // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер. : Автомобіле- та тракторобуду-

- вання : зб. наук. пр. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 117 – 125. DOI: 10.20998/2078-6840.2023.1.14.
3. Ребров О. Ю., Кальченко Б. І., Макаров В. А., Якунін М. Є., Бучко І. Г., Реброва О. М., Артюшенко О. В., Леоненко О. М. Оціночний аналіз дії на ґрунт ходових систем колісних сільськогосподарських тракторів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Сер.: Автомобіле- та тракторобудування : зб. наук. пр. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1. – С. 36 – 43. DOI: 10.20998/2078-6840.2022.1.05.
 4. Janulevičius A., Damauskas V. How to select air pressures in the tires of MFWD (mechanical front-wheel drive) tractor to minimize fuel consumption for the case of reasonable wheel slip // *Energy*. – 2015. – Vol. 90, Part 1. – P. 691 – 700. DOI: 10.1016/j.energy.2015.07.099.
 5. Damme L., Stettler M., Pinet F., Vervaeke P., Keller T., Munkholm L. J., Lamande M. The contribution of tyre evolution to the reduction of soil compaction risks // *Soil Tillage Res.* – 2019. – Vol. 194, 104283. DOI: 10.1016/j.still.2019.05.029.
 6. Taghavifar H., Mardani A. Effect of velocity, wheel load and multipass on soil compaction // *J. Saudi Soc. Agric.* – 2014. – Vol. 13 (1). – P. 57 – 66. DOI: 10.1016/j.jssas.2013.01.004.
 7. Farhadi P., Golmohammadi A., Sharifi A., Shahgholi G. Potential of three-dimensional footprint mold in investigating the effect of tractor tire contact volume changes on rolling resistance // *J. Terramech.* – 2018. – Vol. 78. – P. 63 – 72. DOI: 10.1016/j.jterra.2018.05.003.
 8. Yadav R., Raheman H. Development of an artificial neural network model with graphical user interface for predicting contact area of bias-ply tractor tyres on firm Surface // *J. Terramech.* – 2023. – Vol. 107. – P. 1 – 11. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.01.004.
 9. Jiang C., Lu Z., Dong W., Cao B., Shin K. Measurement and Analysis of the Influence Factors of Tractor Tire Contact Area Based on a Multiple Linear Regression Equation // *Sustainability*. – 2023. – Vol. 15, 10017. DOI: 10.3390/su151310017.
 10. Ptak W., Czarniecki J., Brennensthal M., Lejman K., Małecka A. Evaluation of Tires Acting on Soil in Field Conditions Using the 3D Scanning Method // *Agriculture*. – 2023. – Vol. 13, 1094. DOI: 10.3390/agriculture13051094.
 11. Jasoliya D., Untaroiu A., Untaroiu C. A review of soil modeling for numerical simulations of soil-tire/agricultural tools interaction // *Journal of Terramechanics*. – 2024. – Vol. 111. – P. 41 – 64. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.09.003.
 12. Acquah K., Chen Y. Discrete element modelling of soil pressure under varying number of tire passes // *Journal of Terramechanics*. – 2023. – Vol. 107. – P. 23 – 33. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.02.003.
 13. Lyasko M. I. The determination of deflection and contact characteristics of a pneumatic tyre on a rigid surface // *Journal of Terramechanics*. – 1994. – Vol. 31. – P. 239 – 242. DOI: 10.1016/0022-4898(94)90019-1.
 14. Marušiak M., Zemánek T., Neruda J., Nevrlka P. Calculation and operational assessment of tyre contact areas in the tractor-and-trailer unit // *Journal of Forest Science*. – 2024. – Vol. 70(3). – P. 144 – 159. DOI: 10.17221/109/2023-JFS.
 15. Alkhalifa N., Tekeste M. Z., Jjagwe P., Way T. R. Effects of vertical load and inflation pressure on tire-soil interaction on artificial soil // *Journal of Terramechanics*. – 2024. – Vol. 112. – P. 19 – 34. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.11.002.
 16. Ребров О. Ю. Вибір параметрів шин сільськогосподарських тракторів : монографія. – Харків : Мірошниченко О. А., 2021. – 302 с.
 17. Keller T. A model for the prediction of the contact area and the distribution of vertical stress below agricultural tyres from readily available tyre parameters // *Biosystems Engineering*. – 2005. – Vol. 92(1). – P. 85 – 96. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2005.05.012.
 18. Spíchal L. Superelipsa a superformule (Superellipse and superformula) // МАТЕМАТИКА-ФЫЗИКА-ИНФОРМАТИКА. – Прага : PROMETHEUS, spol. s r. o. – 2020. – Vol. 29(1). – P. 54 – 69. – Режим доступа : https://mfj.upol.cz/files/29/2901/mfj_2901_054_069.pdf. – Дата звернення : 05 листопада 2025 р.
 19. Marušiak M., Zemánek T., Neruda J., Nevrlka P. Calculation and operational assessment of tyre contact areas in the tractor-and-trailer unit // *J. For. Sci.* – 2024. – Vol. 70(3). – P. 144 – 159. DOI: 10.17221/109/2023-JFS.
 20. Кожушко А. П., Ткачов В. Ю. Вплив розподілу ваги на вісі міні-трактора на його тягові показники за імітаційними циклами PowerMix // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія : Механізація та автоматизація виробничих процесів. – Суми : CHAY, 2023. – № 4 (54). – С. 55 – 61. DOI: 10.32782/msnau.2023.4.9.

References (transliterated)

1. Kozhushko A., Rebrov O., Kalchenko B., Sirovitskiy K., Mudryi Y. Analysis of the Efficiency of Agricultural Tires for Low-Power Electric Tractors. *4th International Conference on Reliable Systems Engineering, ICoRSE 2024. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2024, Vol. 1129, pp. 61–70. DOI: 10.1007/978-3-031-70670-7_5.
2. Rebrov O. Yu., Malko M. M., Rebrova A. O., Yakunin M. Ye. Metodyka vyznachennya ratsional'nykh typorozmiriv shyn dlya komplektuvannya kolisnykh sil'skogospodars'kykh traktoriv [Method of determining of reasonable tire sizes for wheeled agricultural tractors]. *Visnyk NTU "KhPI". Ser.: Avtomobile- ta traktorobuduвання* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Automobile and tractor building]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1, pp. 117–125. DOI: 10.20998/2078-6840.2023.1.14.
3. Rebrov O. Yu., Kalchenko B. I., Makarov V. A., Yakunin M. Ye., Burchko I. H., Rebrova O. M., Artiushenko O. V., Leonenko O. M. Otsinochnyi analiz diyi na grunt khodovykh system kolisnykh sil'skogospodars'kykh traktoriv [Evaluation analysis of the running system soil interaction of wheeled agricultural tractors]. *Visnyk NTU "KhPI". Ser.: Avtomobile- ta traktorobuduвання* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser.: Automobile and tractor building]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2022, no. 1, pp. 36–43. DOI: 10.20998/2078-6840.2022.1.05.
4. Janulevičius A., Damauskas V. How to select air pressures in the tires of MFWD (mechanical front-wheel drive) tractor to minimize fuel consumption for the case of reasonable wheel slip. *Energy*. 2015, Vol. 90, Part 1, pp. 691–700. DOI: 10.1016/j.energy.2015.07.099.
5. Damme L., Stettler M., Pinet F., Vervaeke P., Keller T., Munkholm L. J., Lamande M. The contribution of tyre evolution to the reduction of soil compaction risks. *Soil Tillage Res.* 2019, Vol. 194, 104283. DOI: 10.1016/j.still.2019.05.029.
6. Taghavifar H., Mardani A. Effect of velocity, wheel load and multipass on soil compaction. *J. Saudi Soc. Agric.* 2014, Vol. 13 (1), pp. 57–66. DOI: 10.1016/j.jssas.2013.01.004.
7. Farhadi P., Golmohammadi A., Sharifi A., Shahgholi G. Potential of three-dimensional footprint mold in investigating the effect of tractor tire contact volume changes on rolling resistance. *J. Terramech.* 2018, Vol. 78, pp. 63–72. DOI: 10.1016/j.jterra.2018.05.003.
8. Yadav R., Raheman H. Development of an artificial neural network model with graphical user interface for predicting contact area of bias-ply tractor tyres on firm Surface. *J. Terramech.* 2023, Vol. 107, pp. 1–11. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.01.004.
9. Jiang C., Lu Z., Dong W., Cao B., Shin K. Measurement and Analysis of the Influence Factors of Tractor Tire Contact Area Based on a Multiple Linear Regression Equation. *Sustainability*. 2023, Vol. 15, 10017. DOI: 10.3390/su151310017.
10. Ptak W., Czarniecki J., Brennensthal M., Lejman K., Małecka A. Evaluation of Tires Acting on Soil in Field Conditions Using the 3D Scanning Method. *Agriculture*. 2023, Vol. 13, 1094. DOI: 10.3390/agriculture13051094.
11. Jasoliya D., Untaroiu A., Untaroiu C. A review of soil modeling for numerical simulations of soil-tire/agricultural tools interaction. *Journal of Terramechanics*. 2024, Vol. 111, pp. 41–64. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.09.003.
12. Acquah K., Chen Y. Discrete element modelling of soil pressure under varying number of tire passes. *Journal of Terramechanics*. 2023, Vol. 107, pp. 23–33. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.02.003.
13. Lyasko M. I. The determination of deflection and contact characteristics of a pneumatic tyre on a rigid surface. *Journal of Terramechanics*. 1994, Vol. 31, pp. 239–242. DOI: 10.1016/0022-4898(94)90019-1.
14. Marušiak M., Zemánek T., Neruda J., Nevrlka P. Calculation and operational assessment of tyre contact areas in the tractor-and-trailer unit. *Journal of Forest Science*. 2024, Vol. 70(3), pp. 144–159. DOI: 10.17221/109/2023-JFS.
15. Alkhalifa N., Tekeste M. Z., Jjagwe P., Way T. R. Effects of vertical load and inflation pressure on tire-soil interaction on artificial soil. *Journal of*

- Terramechanics*. 2024, Vol. 112, pp. 19–34. DOI: 10.1016/j.jterra.2023.11.002.
16. Rebrov O. Yu. *Vybir parametriv shyn sil'skogospodars'kykh traktoriv : monografiya* [Selection of tire parameters for agricultural tractors: monograph]. Kharkiv, Miroschnyenko O. A. Publ., 2021. 302 p.
 17. Keller T. A model for the prediction of the contact area and the distribution of vertical stress below agricultural tyres from readily available tyre parameters. *Biosystems Engineering*. 2005, Vol. 92(1), pp. 85–96. DOI: 10.1016/j.biosystemseng.2005.05.012.
 18. Spíchal L. Superelipsa a superformule (Superellipse and superformula). *MATEMATIKA-FYZIKA-INFORMATIKA*. Praha, PROMETHEUS, spol. s r. o. 2020, Vol. 29(1), pp. 54–69. Available at : https://mfi.upol.cz/files/29/2901/mfi_2901_054_069.pdf (accessed 5 November 2025).
 19. Marušiak M., Zemánek T., Neruda J., Nevřkla P. Calculation and operational assessment of tyre contact areas in the tractor-and-trailer unit. *J. For. Sci.* 2024, Vol. 70(3), pp. 144–159. DOI: 10.17221/109/2023-JFS.
 20. Kozhushko A. P., Tkachov V. Yu. Vplyv rozpodilu vazy na visi mini-traktora na yogo tyagovi pokaznyky za imitatsynymy tsyklamy PowerMix [Influence of axle weight distribution a minitractor weight distribution on its traction indicators under simulated powermix cycles]. *Visnyk Sum'skogo natsional'nogo agrarnogo universytetu. Seriya: Mekhanizatsiya ta avtomatyzatsiya vyrobnychyykh protsesiv* [Bulletin of Sumy National Agrarian University. The series: Mechanization and Automation of Production Processes]. Sumy, SNAU Publ., 2023, no. 4 (54), pp. 55–61. DOI: 10.32782/msnau.2023.4.9.

Надійшла (received) 10.11.2025; Доопрацьована (finalized) 15.01.2026; До публікації (for publication) 03.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри автомобіле- та тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4725-5911>; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Kozhushko Andrii Pavlovych – Doctor of of Engineering Science, Professor, Professor at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4725-5911>; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Лім Ігор Русланович – аспірант кафедри автомобіле- і тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6453-7338>; e-mail: Ihor.Lim@mit.khpi.edu.ua.

Lim Ihor Ruslanovych – Postgraduate Student at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6453-7338>; e-mail: Ihor.Lim@mit.khpi.edu.ua.

Коваленко Олексій Ігорович – аспірант кафедри автомобіле- і тракторобудування, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1275-9908>; e-mail: Oleksii.Kovalenko@mit.khpi.edu.ua.

Kovalenko Oleksii Ihorovych – Postgraduate Student at the Department of Car and Tractor Industry, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1275-9908>; e-mail: Oleksii.Kovalenko@mit.khpi.edu.ua.

Соколік Сергій Петрович – старший викладач кафедри агроінжинірингу, Сумський національний аграрний університет, м. Суми; тел.: (054) 270-11-40; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4496-8681>; e-mail: Sokolik1009@gmail.com.

Sokolik Sergii Petrovych – Senior Lecturer of Agroengineering Department, Sumy National Agrarian University, Sumy; tel.: (054) 270-11-40; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4496-8681>; e-mail: Sokolik1009@gmail.com.

Дудка Олексій Борисович – аспірант кафедри інформаційних технологій і систем колісних та гусеничних машин імені О. О. Морозова, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1491-7592>; e-mail: Oleksii.Dudka@mit.khpi.edu.ua.

Dudka Oleksii Borysovych – Postgraduate Student at the Department of Information Technologies and Systems of Wheeled and Tracked Vehicles Named after O. O. Morozov, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-64; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1491-7592>; e-mail: Oleksii.Dudka@mit.khpi.edu.ua.

О. С. КУЦЕНКО, С. В. КОВАЛЕНКО

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПОСТАЧАННЯ МНОЖИНИ ПОВ'ЯЗАНИХ АБОНЕНТІВ

На даний час проблема енергозбереження є однією з найактуальніших. Особливого значення проблема енергозбереження набуває стосовно сфери забезпечення комфортного існування як в домашніх умовах, так і в робочий час в офісних або інших виробничих приміщеннях. Побудова адекватної математичної моделі процесу теплопостачання є складною математичною задачею. Основною складністю є наявність великої кількості конструктивних та теплофізичних параметрів, які необхідно встановити для чисельної реалізації існуючих математичних моделей. Метою даної роботи є розробка простої математичної моделі процесу теплопостачання багатоабонентного споживача теплової енергії, що має теплову взаємодію між суміжними абонентами. Пропонується математична модель, заснована на квазістатичному підході до опису складних динамічних процесів, що дозволило мінімізувати розмірність моделі при врахуванні основних теплових процесів та конфігурації будівлі. Таке спрощення дозволило без особливих труднощів отримати основні співвідношення між геометричними характеристиками окремих абонентів, конструкційними матеріалами, параметрами опалювальних приладів, витратами і температурами теплоносія, а також врахувати вплив температури навколишнього середовища. Отримана математична модель є лінійною системою рівнянь зв'язку між температурами і тепловими потоками всіх абонентів. Матриця лінійного оператора системи складається з теплових провідностей між суміжними абонентами та між абонентами та навколишнім середовищем. Елементи матриці взаємодії легко знаходяться, виходячи з відомих співвідношень теплотехніки. Наведено аналітичні рішення, як задачі аналізу, так і задачі синтезу керуючих параметрів. Одним із результатів є оцінка перерозподілу теплового потоку кожного з абонентів, що надходить через відповідні опалювальні прилади на корисний тепловий потік та тепловий потік розсіювання між суміжними абонентами. Отримані співвідношення дозволяють оцінити перерозподіл оплати за споживану теплову енергію.

Ключові слова: теплопостачання будівель, математична модель, матриця теплових провідностей, розсіювання теплових потоків, електрична модель системи теплопостачання, основне рівняння системи теплопостачання.

O. S. KUTSENKO, S. V. KOVALENKO

MATHEMATICAL MODEL OF THE HEAT SUPPLY PROCESS OF A SET OF CONNECTED SUBSCRIBERS

Currently, the problem of energy saving is one of the most relevant. The problem of energy saving acquires particular importance in relation to the sphere of ensuring a comfortable existence both at home and during working hours in office or other production premises. Building an adequate mathematical model of the heat supply process is a complex mathematical problem. The main difficulty is the presence of a large number of constructive and thermophysical parameters that must be established for the numerical implementation of existing mathematical models. The purpose of this work is to develop a simple mathematical model of the heat supply process of a multi-subscriber consumer of thermal energy, which has thermal interaction between adjacent subscribers. A mathematical model is proposed based on a quasi-static approach to the description of complex dynamic processes, which allowed minimizing the dimensionality of the model while taking into account the main thermal processes and the configuration of the building. Such simplification allowed us to obtain without any particular difficulties the basic relationships between the geometric characteristics of individual subscribers, structural materials, parameters of heating devices, flow rates and temperatures of the coolant, as well as to take into account the influence of the ambient temperature. The resulting mathematical model is a linear system of equations relating the temperatures and heat flows of all subscribers. The matrix of the linear operator of the system consists of thermal conductivities between adjacent subscribers and between subscribers and the environment. The elements of the interaction matrix are easily found based on the known relations of heat engineering. Analytical solutions are given, both to the analysis problem and to the problem of synthesis of control parameters. One of the results is the assessment of the redistribution of the heat flow of each subscriber, which comes through the corresponding heating devices to the useful heat flow and the heat flow of dissipation between adjacent subscribers. The obtained relations allow us to assess the redistribution of payment for the consumed thermal energy.

Key words: heat supply of buildings, mathematical model, thermal conductivity matrix, heat flux dissipation, electrical model of the heat supply system, basic equation of the heat supply system.

Вступ. Інфраструктура систем життєзабезпечення, як одна з основних компонент, містить системи розподілу енергетичних та матеріальних ресурсів. Так склалося, що електричні та гідравлічні мережі досить глибоко досліджені як на макрорівні, так і на рівні розподілу ресурсів у рамках окремих підсистем, таких як офісні комплекси, багатоквартирні будівлі, виробничі приміщення та інші, що характеризуються окремим обмеженим місцезнаходженням. Електричним та гідравлічним мережам присвячені численні наукові фундаментальні та прикладні дослідження, що дозволило отримати безліч реальних практичних результатів, спрямованих на економію енергетичних ресурсів та витрат на водозабезпечення виробничого та житлово-комунального комплексів. Більшість результатів досліджень у галузі електричних та гідравлічних мереж отримано завдяки адекватним математичним моделям відповідних мережевих процесів та наявності обґрунтованої інформації про параметри моделей. Крім того, на даний час набули широкого поширення *індивідуальні лічильники* витрат електричної енергії, холодної та гарячої води, що дозволило впровадити нові сучасні *методи контролю* та управління витратами відповідних ресурсів.

Що ж до *процесів теплопостачання*, то тут основні наукові результати пов'язані з гідравлічними процесами як у зовнішніх, так і внутрішніх локальних будинкових мережах. Більш проблемною з погляду теплопостачання є частина загального процесу, пов'язана з теплопередачею від опалювальних приладів до внутрішнього повітря, від внутрішнього повітря до елементів конструкції будівель і далі в навколишнє середовище. Математичні моделі процесів теплопередачі описуються *диференціальними рівняннями у часткових похідних* та містять безліч теплофізичних та конструктивних параметрів будівель. Як правило, частина цих параметрів недоступна

для вимірювання, а їх ідентифікація вимагає проведення численних дорогих експериментів, що не гарантують достатнього ступеня достовірності результатів.

У цій статті надається *системний підхід* до побудови простих математичних моделей окремих елементів та процесів системи теплопостачання *комплексом взаємопов'язаних абонентів*, підключених до загального теплового пункту із незалежним підключенням до зовнішньої теплової мережі.

Огляд джерел інформації. Завдяки величезній практичній значущості та багаторічній історії, теплові процеси стосовно теплопостачання середовищ існування, таких як житлові, виробничі та офісні приміщення стали об'єктом широкого фронту наукових досліджень.

Численні публікації у спеціалізованих виданнях, монографії, патенти на винаходи свідчать про глибокі наукові та прикладні дослідження, а також про значні практичні результати, що спрямовані на вдосконалення теплових процесів *систем централізованого теплопостачання*. Природно системи централізованого теплопостачання розглядаються як дві підсистеми: зовнішня тепла мережа та внутрішня [1]. Особливості цих підсистем детально розглянуті у відповідній літературі, а наукові результати широко застосовуються при розрахунку реальних конструкцій елементів зазначених підсистем [2 – 4].

Процеси у зовнішніх теплових мережах є відносно простими, оскільки вони є перебігом рідини по трубах, що описується добре відомими законами гідравліки і теплопередачі. З цих фундаментальних законів розраховуються параметри конструкцій трубопроводів з погляду їхньої пропускної спроможності, міцності та теплоізоляції [3, 5].

Що ж стосується процесів у внутрішній підсистемі теплопостачання, то тут виникають значні труднощі для *математичного моделювання* теплових процесів, оскільки процес теплопостачання розпадається на транспортування теплоносія від точки введення до опалювальних приладів і теплопередачу від опалювальних приладів до внутрішнього повітря і далі до огорож, через які теплота передається в навколишнє середовище [5, 6].

Останнім часом широкого поширення набули електричні моделі теплових процесів в огорожах приміщень, що обігриваються [6 – 8]. Ці моделі вимагають великого обсягу вихідної інформації про теплофізичні параметри конструкційних матеріалів, а також інформації про початкові та крайові умови для інтегрування підсистем диференціальних рівнянь високої розмірності. Ці обставини дозволяють, в загальному випадку, вирішувати задачу аналізу теплових процесів. Розв'язання задач синтезу конструктивних параметрів системи теплопостачання дуже складне.

Теплові процеси в елементах будівель не можуть бути відірвані від процесів теплопостачання у складній системі: котельня, тепловий пункт, опалювальні прилади, абоненти. Таким чином, математичну модель теплових процесів опалювальної будівлі необхідно доповнити моделями процесів у тепловому пункті та опалювальних приладах окремих абонентів.

Таке розширення математичної моделі передбачає включення до системи диференціальних рівнянь опалювальної будівлі додаткових диференціальних рівнянь тепломасообміну в системі транспортування теплової енергії від входу будівлі до теплового пункту та від теплового пункту до опалювальних приладів кожного з абонентів. Очевидно, що така модель у повному обсязі без різних припущень та спрощень не може бути реалізована.

Математична модель процесу теплопостачання. Нехай A_1, A_2, \dots, A_n – множина абонентів, які споживають теплову енергію від загального теплового пункту. Будемо також припускати, що абоненти можуть бути у тепловому контакті між собою, а також із навколишнім середовищем. Кожен із A_k має власну підсистему опалювальних приладів та індивідуальний *теплочисельник*.

Введемо такі позначення: L – структурна матриця:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ і } A_j \text{ знаходяться у тепловому контакті,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку;} \end{cases}$$

G – симетрична матриця провідностей

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ij} - \text{теплова провідність між } A_i \text{ і } A_j, & \text{якщо } l_{ij} = 1, \\ 0, & \text{якщо } l_{ij} = 0; \end{cases}$$

$g = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ – вектор теплових провідностей між абонентами та навколишнім середовищем;

$T = (T_1, T_2, \dots, T_n)^T$ – вектор температур внутрішнього повітря абонентів;

$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ – вектор теплових потоків, що підводяться до абонентів через відповідні опалювальні прилади.

Рівняння теплового балансу для i -го абонента запишемо у вигляді:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} + Q_{io}, \quad (1)$$

де Q_i – тепловий потік i -го опалювального приладу; Q_{ij} – тепловий потік між i -м та j -м абонентами; Q_{io} – тепловий потік від i -го абонента у навколишнє середовище. Ці теплові потоки у першому наближенні [9] можна представити у наступному вигляді:

$$Q_{ij} = g_{ij} (T_i - T_j), \quad (2)$$

$$Q_{io} = g_i (T_i - T_{oc}). \quad (3)$$

Підставляючи (2) та (3) у (1), отримаємо

$$Q_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} (T_i - T_j) + g_i (T_i - T_{oc}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Після розкриття дужок у (4) отримаємо

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n g_{ij} T_j + T_i \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_i T_i - g_i T_{oc}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

У матричній формі система рівнянь (5) для $i = \overline{1, n}$ набуде вигляду:

$$Q = -GT + \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_i \right\} T - gT_{oc}. \quad (6)$$

Введемо позначення:

$$\bar{G} = -G + \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_i \right\}. \quad (7)$$

Тоді остаточно (6) можна подати у вигляді:

$$Q = \bar{G}T - gT_{oc}. \quad (8)$$

Далі будемо матрично-векторне рівняння (8) називати *основним рівнянням теплопостачання (ОРТ)*.

На основі ОРТ можна проводити оціночні розрахунки параметрів багатоабонентних систем теплопостачання: знаходити розподіл температур теплових потужностей залежно від конструктивних параметрів будівлі та температури довкілля.

ОРТ у формі (8) являє собою розв'язок прямої задачі теплопостачання: для заданого розподілу температур T_1, T_2, \dots, T_n та температури навколишнього середовища знайти відповідні теплові потужності Q_1, Q_2, \dots, Q_n , що підводяться до абонентів.

Для вирішення *зворотної задачі*: за заданим вектором Q і T_{oc} знайти вектор T температур внутрішнього повітря абонентів, необхідно розв'язати лінійну систему (8) щодо T .

Теплова потужність опалювального приладу \bar{Q} залежить від ефективної площі поверхні ОП S , коефіцієнта теплопередачі α , масової витрати теплоносія F та температур теплоносія T_r і T_x на вході та виході ОП відповідно, а також від температури внутрішнього повітря \bar{T} . Відповідно до [10], тепловий потік \bar{Q} можна представити у вигляді:

$$\bar{Q} = \alpha S \frac{T_r - T_x}{\ln \frac{T_r - \bar{T}}{T_x - \bar{T}}}. \quad (9)$$

З іншого боку, цей же тепловий потік можна виразити через зміну *ентальпії* теплоносія на вході та виході ОП:

$$\bar{Q} = Fc(T_r - T_x). \quad (10)$$

Виключаючи з (9) та (10) температуру T_x , отримаємо:

$$\bar{Q} = \alpha S \varphi(f)(T_r - \bar{T}), \quad (11)$$

де $f = \frac{Fc}{\alpha S}$ – безрозмірна масова витрата теплоносія, а

$$\varphi(f) = f \left(1 - e^{-\frac{1}{f}} \right).$$

Неважко бачити, що $\varphi(f)$ змінюється від 0 до 1 за зміни витрати f від 0 до ∞ . Можна сказати, що величина

$$R(f) = (\alpha S \varphi(f))^{-1}$$

є керованим (вибором f) тепловим опором опалювального приладу.

У ряді випадків, згідно з [5], замість *середньологарифмічної температури* можна скористатися середньою температурою теплоносія \hat{T} :

$$\bar{T} = \frac{T_G + T_X}{2}.$$

Тоді система рівнянь для визначення величин \bar{Q} і T_X набуде вигляду:

$$\bar{Q} = \alpha S \left(\frac{T_G + T_X}{2} - \bar{T} \right), \quad (12)$$

$$\bar{Q} = Gc(T_G - T_X). \quad (13)$$

Розв'язуючи систему (12) та (13) щодо \bar{Q} і T_X , отримаємо

$$\bar{Q} = \alpha S \psi(f)(T_G - \bar{T}), \quad (14)$$

де

$$\psi(f) = \frac{2f}{1+2f}. \quad (15)$$

Функція $\psi(f)$ так само як і $\varphi(f)$ змінюється від 0 до 1 за зміни f від 0 до ∞ .

Тепловий опір ОП у цьому випадку запишеться як

$$R(f) = (\alpha S \psi(f))^{-1}. \quad (16)$$

Таблиця 1 – Таблиця значень функцій $\varphi(f)$ та $\psi(f)$

f	0,1	0,5	1	2	5	10
φ	0,1	0,43	0,64	0,78	0,9	1
ψ	0,17	0,5	0,66	0,79	0,91	1

У таблиці наведено значення функцій $\varphi(f)$ та $\psi(f)$ від безрозмірної витрати теплоносія f . З наведених результатів можна дійти висновку про досить хороший збіг зазначених функцій. Таким чином, з метою спрощення обчислювальних процесів допустимо як регульовану теплову провідність опалювального приладу використовувати функцію $\psi(f)$, яка легко дозволяє знайти необхідну безрозмірну витрату теплоносія f :

$$f = \frac{\psi}{2(1-\psi)}.$$

Системи рівнянь (11) або (14), та (8) при заданих f , T_G , T_{oc} є лінійними системами $2n$ рівнянь щодо $2n$ невідомих компонент векторів T і Q . У векторно-матричній формі ця система набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} \bar{G} & -E \\ E & \text{diag}\{R\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gT_{oc} \\ T_G \\ \vdots \\ T_G \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тоді задача аналізу процесу тепlopостачання полягає у розв'язанні системи (17) при заданих теплових опорах опалювальних приладів $R_k(f_k)$.

З практичної точки зору більший інтерес представляє задача синтезу, яка полягає у знаходженні витрат теплоносія, що забезпечують заданий розподіл температур абонентів, що відповідають температурам T_G і T_{oc} . Замість витрат теплоносія шукатимемо теплові опори R_k , що пов'язані з витратами f_k співвідношенням (16). Тоді

$$Q_k = \frac{T_G - T_k}{R_k}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Враховуючи ОПТ (8), отримаємо величини теплових потоків кожного з абонентів:

$$Q_k = (\bar{G}T - \bar{g}T_{oc})_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Після підстановки (19) в (18) отримаємо необхідну величину теплового опору k -го опалювального приладу:

$$R_k = \frac{T_G - T_k}{Q_k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Отримані значення R_k дозволяють, виходячи із співвідношень (16) та (15), знайти витрати теплоносія f_k що забезпечують заданий розподіл температур абонентів. Таким чином, задачу знаходження витрат теплоносія, що забезпечують заданий розподіл температур абонентів вирішено.

Зауважимо, що ОПТ (8) дає нам лінійну залежність між вектором теплових потоків Q та вектором температур T абонентів A_1, A_2, \dots, A_n . У загальному випадку лінійне перетворення, що пов'язує Q і T невироджене. Отже, матрицю

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial Q} = \bar{G}^{-1}$$

можна вважати *матрицею чутливості змін температури* абонентів щодо змін теплових потоків.

Систему рівнянь (8) та (18) для визначення параметрів системи опалення можна представити у вигляді електричної аналогії (рис. 1):

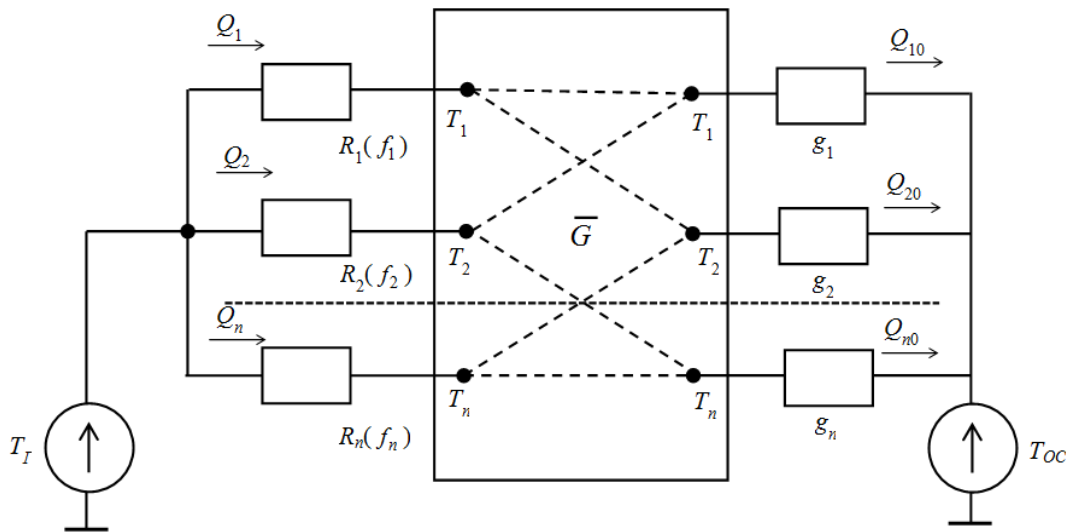


Рис. 1 – Спрощена електрична модель системи теплопостачання.

Введемо на розгляд матрицю \tilde{Q} , кожен елемент якої q_{ik} являє собою тепловий потік між i -м та k -м абонентами та має вигляд:

$$q_{ik} = g_{ik} (T_i - T_k)$$

або в матричній формі:

$$\tilde{Q} = \text{diag}\{T\} \cdot G - G \cdot \text{diag}\{T\}.$$

Повний тепловий потік i -го абонента \hat{Q}_i знаходиться у вигляді суми теплового потоку Q_i , що підводиться від ОП i -го абонента та суми теплових потоків від суміжних абонентів:

$$\hat{Q}_i = Q_i + \sum_{k=1}^n q_{ik}. \tag{20}$$

Врахуємо, що тепловий лічильник кожного абонента вимірює тепловий потік опалювального приладу Q_i у формулі (20). Реальний тепловий потік \hat{Q}_i згідно (20) складається з вимірюваного потоку Q_i та перерозподіленого потоку, обумовленого відмінністю температур сусідніх абонентів

$$\Delta Q_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}.$$

Величина ΔQ_i залежить як від конструкції будівлі, так і від температур суміжних абонентів і вказує на перерозподіл теплових потоків між абонентами, а отже і на перерозподіл оплати за теплову енергію. В ідеальному випадку $\Delta Q_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$), що відповідає рівності температур приміщень всіх абонентів.

Крім того, з косиметричності матриці \tilde{Q} отримаємо очевидний результат:

$$\sum_{k=1}^n \Delta Q_i = 0.$$

Таким чином, співвідношення (20) ілюструє перерозподіл теплових потоків між абонентами.

Побудуємо скалярний критерій міри розсіювання теплоти в системі теплопостачання взаємозв'язаних абонентів. Для цього розглянемо розв'язок ОРТ (8) у випадках теплопостачання без зв'язків між абонентами та при їх наявності. У першому випадку усі g_{ij} дорівнюють нулю, а T_{oc} приймаємо також нулевою. Тоді ОРТ для множини одиничних теплових потоків $Q = E$ можна записати як

$$-\text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \hat{T} + E = 0. \quad (21)$$

Розв'язок рівняння (21) має вигляд:

$$\hat{T} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \quad (22)$$

де $r_k = g_k^{-1}$ – тепловий опір k -го абоненту відносно зовнішнього середовища.

Якщо матриця G в ОРТ буде недіагональною, то в загальному вигляді розв'язок (8) буде

$$\tilde{T} = -\bar{G}^{-1}. \quad (23)$$

Стовпчики матриці \tilde{T} є вектори температур абонентів при одиничних векторах підведення теплоти. Таким чином, пропонується міра довершеності конструкції опалювального об'єкту у вигляді критерію розсіювання теплоти τ :

$$\tau = \frac{\text{tr} \tilde{T}}{\text{tr} \hat{T}} \leq 1. \quad (24)$$

Чим ближче значення τ до одиниці, тим вище ступень організації процесів опалення.

Приклад. Розглянемо двовимірний комплекс абонентів. У цьому випадку матриця \bar{G} прийме вигляд:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -(g_1 + g_{12}) & g_{12} \\ g_{21} & -(g_2 + g_{12}) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Нехай $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Тоді розв'язок рівняння (21) можна записати як

$$\hat{T} = \text{diag}\{r_1, r_2\} = \text{diag}\{1, 1/2\}.$$

Якщо $g_{12} = g_{21} = 1$, то матриця \bar{G} (25) у нашому випадку прийме вигляд:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

а матриця \tilde{T} – матричний розв'язок рівняння (8) набуде вигляду:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, критерій розсіювання теплоти (24) у нашому випадку буде $\tau = \frac{2}{3} < 1$.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження будуть пов'язані з розробкою автоматизованих обчислювальних методів аналізу і синтезу теплових процесів, які враховують конструктивні параметри, матеріали огорожень, вентиляцію приміщень та скління. Також отримає подальший розвиток адаптація моделі притаманно до процесів керування тепловим станом системи пов'язаних абонентів.

Висновки. 1. У роботі запропоновано та обґрунтовано спрощену математичну модель теплових процесів опалюваних будівель. Модель заснована на квазістатичному поданні теплових процесів і є лінійною системою рівнянь щодо температур і теплових потоків абонентів – споживачів теплової потужності.

2. В отриманій математичній моделі частина параметрів матриці лінійного перетворення визначається на підставі архітектури будівлі та конструкційних матеріалів. Інша частина – залежить від конструкції опалювальних приладів та від вибраних витрат теплоносія кожним з абонентів. Таким чином, можна сформулювати задачу управління теплопостачанням як задачу управління з параметрами, постановка якої та шлях вирішення наведені в [11, 12].

3. Отримана математична модель дозволяє оцінити перерозподіл теплового потоку, що підводиться до кожного з абонентів, на корисний потік, що йде на підтримку власної температури, і на тепловий потік, що передається через перегородки суміжним абонентам.

Практична значущість отриманого результату полягає у можливості оцінки перевитрат з оплати теплової енергії, що вимірюється теплотічильником кожного з абонентів.

Список літератури

1. Соколов Е. Я. Теплофикация и тепловые сети : учеб. для вузов. – М. : МЭИ, 2001. – 472 с.

2. Вороновский Г. К. Усовершенствование практик оперативного управления крупными теплофикационными системами в новых экономических условиях. – Харьков : Харьков, 2002. – 240 с.
3. Беляйкина И. В., Витальев В. П., Громов Н. К. Водяные тепловые сети : справочное пособие по проектированию. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 376 с.
4. Громов Н. К. Абонентские установки водяных тепловых сетей : проектирование и эксплуатация. – М. : Энергия, 1968. – 320 с.
5. Тяттор И. Отопительные системы : пер. с нем. – М. : ТЕХНОСФЕРА : ЕВРОКЛИМАТ, 2006. – 272 с.
6. Kutsenko O., Tovazhnyansky V., Kovalenko S. Synthesis of a Mathematical Model of Thermal Processes of Buildings. Systems Approach // IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing. – Kyiv, 2020. – pp. 276 – 281. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239144.
7. Atam E., Helsen L. Control-Oriented Thermal Modeling of Multizone Buildings: Methods and Issues: Intelligent Control of a Building System // IEEE Control Systems Magazine. – 2016. – Vol. 36. – № 3. – pp. 86 – 111. DOI: 10.1109/MCS.2016.2535913.
8. Lehmann B., Gyalistras D., Gwerder M., Wirth K., Carl S. Intermediate complexity model for model predictive control of integrated room automation // Energy and Buildings. – 2013. – Vol. 58. – pp. 250 – 262. DOI: 10.1016/j.enbuild.2012.12.007.
9. Куценко О. С., Коваленко С. В., Товажнянский В. И. Системный подход к математическому моделированию тепловых процессов зданий // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 4/4(70). – С. 9 – 12. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.26200.
10. Табуничиков Ю. А., Бродах М. М. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. – М. : АВК-ПРЕСС, 2002. – 194 с.
11. Куценко О. С., Коваленко С. В. Управління квазістатичними процесами : монографія / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : ФОП Панов А. М., 2024. – 156 с.
12. Kutsenko A. S., Kovalenko S. V., Kovalenko S. M. Generalization of the thermodynamic approach to multi-dimensional quasistatic processes // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2023. – № 1. – С. 62 – 77. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.05.

References (transliterated)

1. Sokolov E. Ya. *Teplofikatsiya i teplovye seti* [District heating and thermal networks]. Moscow, MEI Publ., 2001. 472 p.
2. Voronovskiy G. K. *Usovershenstvovanie praktik operativnogo upravleniya krupnymi teplofikatsionnymi sistemami v novykh ekonomicheskikh usloviyakh* [Improvement of operational management practices of large district heating systems in new economic conditions]. Kharkiv, Kharkiv Publ., 2002. 240 p.
3. Belyaykina I. V., Vital'ev V. P., Gromov N. K. *Vodyanye teplovye seti: spravochnoe posobie po proektirovaniyu* [Water heating networks: design reference guide]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988. 376 p.
4. Gromov N. K. *Abonentskie ustanovki vodyanykh teplovykh setey: proektirovanie i ekspluatatsiya* [Subscriber installations of water heating networks: design and operation]. Moscow, Energiya Publ., 1968. 320 p.
5. Tietor I. *Otopitel'nye sistemy* [Heating systems]. Translated from German. Moscow, Technosfera; Euroklimat Publ., 2006. 272 p.
6. Kutsenko O., Tovazhnyansky V., Kovalenko S. Synthesis of a mathematical model of thermal processes of buildings. Systems approach. *Proceedings of the IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing*. Kyiv, 2020, pp. 276–281. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239144.
7. Atam E., Helsen L. Control-oriented thermal modeling of multizone buildings: methods and issues. *IEEE Control Systems Magazine*, 2016, Vol. 36, no. 3, pp. 86–111. DOI: 10.1109/MCS.2016.2535913.
8. Lehmann B., Gyalistras D., Gwerder M., Wirth K., Carl S. Intermediate complexity model for model predictive control of integrated room automation. *Energy and Buildings*. 2013, Vol. 58, pp. 250–262. DOI: 10.1016/j.enbuild.2012.12.007.
9. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V., Tovazhnyansky V. I. Sistemnyy podkhod k matematicheskomu modelirovaniyu teplovykh protsessov zdaniy [System approach to mathematical modeling of thermal processes of buildings]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2014, no. 4/4(70), pp. 9–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.26200.
10. Tabunshchikov Yu. A., Brodach M. M. *Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya teplovykh effektivnosti zdaniy* [Mathematical modeling and optimization of thermal efficiency of buildings]. Moscow, AVOK-PRESS Publ., 2002. 194 p.
11. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V. *Upravlinnya kvazistatichnyimi protsesami* [Control of quasistatic processes]. Kharkiv, FOP Panov A. M. Publ., 2024. 156 p.
12. Kutsenko A. S., Kovalenko S. V., Kovalenko S. M. Generalization of the thermodynamic approach to multi-dimensional quasistatic processes. *Systemni doslidzhennya ta informatsiyi tekhnologiyi* [System Research & Information Technologies]. 2023, no. 1, pp. 62–77. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.05.

Nadiiushla (received) 22.11.2025; Dooprac'ovana (finalized) 05.01.2026; Do nulykatsii (for publication) 12.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Куценко Олександр Сергійович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 681-21-06; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6059-3694>; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@kphi.edu.ua.

Kutsenko Oleksandr Serhiyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 681-21-06; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6059-3694>; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@kphi.edu.ua.

Коваленко Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 646-13-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8763-0862>; e-mail: Serhii.Kovalenko@kphi.edu.ua.

Kovalenko Serhii Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 646-13-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8763-0862>; e-mail: Serhii.Kovalenko@kphi.edu.ua.

О. І. МАТВИЄНКО, О. О. МИРОШНІЧЕНКО

ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ У ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ З НЕЧІТКО ЗАДАНИМИ ПРОПУСКНИМИ ЗДАТНОСТЯМИ КОМУНІКАЦІЙ

Метою роботи є застосування апарату теорії нечітких множин та нечіткої логіки для розв'язання задачі визначення максимального потоку у транспортній мережі. Розглядається ситуація, коли частина транспортної мережі пошкоджена, а для відновлення логістики необхідно в найкоротший час оцінити максимальну пропускну здатність її неушкодженої частини. Транспортна мережа представлена у вигляді орієнтованого графа з нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій у вигляді нечітких трикутних чисел. Потрібно визначити величину максимального потоку, який можна пропустити із джерела до стоку за одиницю часу. Використовується підхід Беллмана-Заде, згідно з яким нечітким розв'язком задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини допустимих альтернатив. Для наближеного розв'язання задачі пропонується алгоритм, який зводиться до розв'язання послідовності чітких задач знаходження максимального потоку для різних значень пропускних здатностей дуг методом Форда-Фалкерсона. В результаті отримується значення максимального потоку, який може бути пропущений із джерела до стоку за одиницю часу, значення пропускних здатностей дуг для оптимального плану та ступінь впевненості в тому, що знайдений план є оптимальним. Такий підхід до визначення максимального потоку в транспортних мережах дозволяє оцінити стійкість і надійність логістичної мережі, виявити «вузькі місця», оптимізувати розподіл ресурсів і розробити ефективні стратегії відновлення логістики в післяаварійних ситуаціях.

Ключові слова: максимальний потік, функція належності, нечіткі пропускні здатності, транспортна мережа, алгоритм Форда-Фалкерсона.

О. І. МАТВИЄНКО, О. О. МИРОШНІЧЕНКО

DETERMINATION OF THE MAXIMUM FLOW IN A TRANSPORT NETWORK WITH FUZZY CAPACITIES OF COMMUNICATIONS

The purpose of the work is the application of the apparatus of fuzzy set theory and fuzzy logic to solve the problem of determining the maximum flow in a transport network. A situation is considered in which part of the transport network is damaged, and for the restoration of logistics it is necessary in the shortest time to estimate the maximum throughput capacity of its undamaged part. The transport network is represented in the form of a directed graph with fuzzily specified capacities of communications in the form of fuzzy triangular numbers. It is required to determine the value of the maximum flow that can be sent from the source to the sink per unit of time. The Bellman-Zadeh approach is used, according to which the fuzzy solution of the problem is the intersection of the fuzzy goal and the fuzzy set of admissible alternatives. For the approximate solution of the problem, an algorithm is proposed that reduces to solving a sequence of crisp problems of finding the maximum flow for different values of arc capacities by the Ford-Fulkerson method. As a result, the value of the maximum flow that can be sent from the source to the sink per unit of time, the values of arc capacities for the optimal plan, and the degree of confidence that the found plan is optimal are obtained. Such an approach to determining the maximum flow in transport networks makes it possible to assess the stability and reliability of the logistics network, identify "bottlenecks," optimize the distribution of resources, and develop effective strategies for restoring logistics in post-accident situations.

Key words: maximum flow, membership function, fuzzy capacities, transport network, Ford-Fulkerson algorithm.

Вступ. Транспортні мережі представляють собою сукупність комунікацій (автомобільних доріг, залізничних колій, водних або повітряних маршрутів) та вузлів (станцій, терміналів, розв'язок, логістичних центрів), що забезпечують переміщення вантажів і пасажирів. Основними показниками транспортних мереж є довжина комунікацій, їхня пропускну здатність та фактичне навантаження, час руху комунікацією, її надійність, вартість перевезення тощо. Ці показники можуть бути динамічними, тобто змінюватися в залежності від часових характеристик (час доби, день тижня, сезон), погодних умов (дощ, ожеледиця, туман), дорожньої ситуації (пробки, аварії, масові заходи), економічних факторів.

В умовах воєнного стану та надзвичайних ситуацій пошкодження транспортної інфраструктури, блокування окремих ділянок доріг, мостів або логістичних вузлів стають частим явищем. Такі порушення призводять до різких змін у функціонуванні транспортної системи, обмеження пропускну здатності окремих маршрутів і необхідності оперативного перерозподілу потоків транспорту та вантажів. В таких умовах виникає потреба у швидкому аналізі стану транспортної мережі для забезпечення неперервності перевезень і мінімізації втрат часу та ресурсів.

У разі виходу з ладу окремих ділянок або цілих гілок транспортної мережі постає задача визначення максимально можливого обсягу перевезень, який може бути здійснений неушкодженою частиною мережі з урахуванням наявних обмежень. Зокрема, необхідно оцінити величину максимального транспортного потоку, що може бути пропущений від пунктів відправлення до пунктів призначення, оминаючи пошкоджені або перевантажені ділянки. Результати такого аналізу дають змогу визначити потенційну пропускну здатність мережі в змінних умовах функціонування та оцінити рівень забезпечення транспортних потреб.

Визначення *максимального потоку* в транспортних мережах має важливе практичне значення: воно дозволяє оцінити стійкість і надійність логістичної системи, виявити «вузькі місця» у структурі маршрутів, оптимізувати розподіл транспортних ресурсів і розробити ефективні стратегії функціонування мережі в умовах пошкодженої інфраструктури або підвищеного навантаження.

Аналіз останніх досліджень. Методи розв'язання задачі знаходження максимального потоку в умовах невизначеності розглядаються у багатьох сучасних наукових дослідженнях. Ці методи характеризуються різнома-

нітними підходами до формалізації невизначеності та використовують різний математичний апарат для моделювання параметрів мережі.

У роботі [1] було представлено розширену версію задачі про максимальний потік для гіпермереж з обмеженнями нечітких часових вікон, запропоновано генетичний алгоритм її розв'язання.

У роботі [2] розглянуто новий алгоритм дослідження максимального потоку у мережі, що використовує лінгвістичні змінні для моделювання невизначеності. Були введені трапецієподібні піфагорійські нечіткі числа з новими арифметичними операціями та процедурою дефазифікацією.

У роботі [3] наводиться метод знаходження максимального потоку на мережах з нечіткими пропускними здатностями.

Визначенню максимального потоку на основі реальних даних транспортної мережі присвячено роботу [4].

У роботі [5] розглядалася задача перешкодження максимальному потоку в мережі за нечіткою стохастичних гібридних умов.

Разом з тим, залишається актуальною потреба в розробці спеціалізованих алгоритмів для транспортних мереж, що враховують специфіку їх функціонування та особливості визначення пропускних здатностей комунікацій. Застосування апарату нечіткої логіки та нечітких множин дозволяє враховувати невизначеність параметрів транспортної системи та отримувати практично значущі результати для планування та оптимізації її роботи.

У даній роботі пропонується новий підхід до розв'язання задачі визначення максимального потоку вантажів або пасажирів, який може бути пропущений через частину транспортної мережі, що враховує нечіткі пропускні здатності комунікацій. Новий алгоритм є комбінацією алгоритмів теорії графів та теорії нечітких множин.

Задача про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій. Однією із класичних задач теорії графів є задача про максимальний потік [6]. Вона виникає, коли потрібно знайти максимальний (за обсягом або вагою, або ціною тощо) потік цільового продукту, який можна пропустити з джерела в стік в одиницю часу. Передбачається, що в проміжних пунктах цільовий продукт не споживається і не виникає. Пропускні здатності комунікацій є нечіткими і задаються нечіткими числами.

Мережа комунікацій представляється у вигляді кінцевого, зв'язаного, змішаного графа з n пунктами та m комунікаціями (ребрами). Припускається, що множина комунікацій $\mathfrak{R} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$ певним чином упорядкована. Кожному ребру (i, j) відповідає пропускна здатність, що задана нечітким числом $\tilde{d}_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$ з функцією належності $\mu_{ij}(d)$, визначеною на універсальній множині U можливих значень пропускних здатностей $[0, +\infty)$:

$$U = [0, +\infty) = \{u \in R^m \mid u_{i_k j_k} \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (1)$$

де $u_{i_k j_k}$ – значення пропускної здатності комунікації (i_k, j_k) .

Множиною допустимих планів є нечітка множина \hat{V} , визначена на універсальній множині:

$$V = \{v \in R^m \mid v_{i_k j_k} \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}, \quad (2)$$

де $v = (v_{i_1 j_1}, v_{i_2 j_2}, \dots, v_{i_m j_m})$ – план перевезень по всій мережі; $v_{i_k j_k}$ – запланований обсяг перевезень за комунікацією (i_k, j_k) .

Максимальний потік на мережі $v^*(u)$ у випадку, коли пропускні здатності комунікацій $u = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_m j_m})$ дорівнює:

$$v^*(u) = (v^*_{i_1 j_1}(u), v^*_{i_2 j_2}(u), \dots, v^*_{i_m j_m}(u)). \quad (3)$$

Функція належності $\mu_{\hat{V}}(v)$ нечіткої множини \hat{V} , заданої на універсальній множині V , визначається формулою:

$$\mu_{\hat{V}}(v) = \begin{cases} \max_{\{u \in U \mid v = v^*(u)\}} \min_{(i_k j_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), \\ 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases} \quad (4)$$

тобто якщо v є максимальний потік при значеннях пропускних здатностей, що дорівнюють $u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_m j_m}$, то його надійність дорівнює $\min_{(i_k j_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k})$, в іншому випадку вона дорівнює нулю. Але один і той же потік може виявитися максимальним при різних значеннях пропускних здатностей комунікацій. $\mu_{\hat{V}}(v)$ – це максимальний зі ступенів впевненості в тому, що v є максимальний потік у розглянутій мережі.

Нечітко визначена мета задачі формалізується нечіткою множиною $V_{\hat{C}}$ з функцією належності $\mu_{\hat{C}}(v)$:

$$\mu_{\hat{C}}(v) = \frac{S(v) - S^{\min}}{S^{\max} - S^{\min}}, \quad (5)$$

де $S(v)$ – величина потоку при допустимому плані v ; $v^*(u)$ – максимальний потік при пропускних здатностях u ; $S(v^*(u))$ – величина максимального потоку при пропускних здатностях u ; S^{\min} – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій мінімальні, тобто дорівнюють a_{ij} ; S^{\max} – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій максимальні, тобто дорівнюють c_{ij} .

Застосовуючи, наприклад, *алгоритм Форда-Фалкерсона* [5], обчислюється $S(v^*(u))$.

Функція належності $\mu_{\hat{C}}$ планів нечіткої мети розглядається як показник близькості плану v до найбільшого за величиною максимального потоку, який характеризується близькістю величини $S(v)$ до величини S^{\max} .

Нечітким розв'язком задачі є нечітка множина \hat{D} з функцією належності $\mu_{\hat{D}}(v)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\hat{D}}(v) = \min\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\}. \quad (6)$$

Розв'язком задачі є план v^* , для якого

$$\mu_{\hat{D}}(v^*) = \max_{v \in V} \mu_{\hat{D}}(v) = \max_{v \in V} \min\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\}. \quad (7)$$

Математична модель задачі. Математична модель задачі в чіткій постановці:

$$S(v) = \sum_i v_{si} \rightarrow \max, \quad (8)$$

де сума береться по всіх комунікаціях, що йдуть із джерела.

З обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum_{i_k} v_{i_k j_k} - \sum_{n_k} v_{j_k n_k} = 0, & i_k \neq 1, n_k \neq m, \\ \sum_{j_k} v_{1 j_k} = \sum_{n_k} v_{n_k m_k} = S(v), \end{cases} \quad (9)$$

$$S(v) > 0, \quad 0 \leq v_{i_k j_k} \leq u_{i_k j_k}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (10)$$

У лівій частині формули (9) перша сума береться за всіма комунікаціями, для яких $u_{i_k j_k} > 0$ (за якими можна здійснювати підвезення до пункту j); друга сума береться за всіма комунікаціями, для яких $u_{j_k n_k} > 0$ (за якими можна здійснювати вивезення вантажів із пункту j).

Математична модель задачі у нечіткій постановці:

$$\mu_{\hat{D}}(v) = \min\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\} \rightarrow \max_{v \in V}, \quad (11)$$

З обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum_{i_k} v_{i_k j_k} - \sum_{n_k} v_{j_k n_k} = 0, & i_k \neq 1, n_k \neq m, \\ \sum_{j_k} v_{1 j_k} = \sum_{n_k} v_{n_k m_k} = S(v), \end{cases} \quad (12)$$

$$S(v) > 0, \quad 0 \leq v_{i_k j_k} \leq \tilde{d}_{i_k j_k}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (13)$$

де $\tilde{d}_{i_k j_k}$ – нечітка пропускна здатність комунікації $(i_k j_k)$.

Алгоритм наближеного розв'язання задачі.

1. Задається певний крок $\Delta = \frac{1}{N}$, де N – число кроків.

2. Знаходяться (або задаються) такі значення пропускної здатності комунікацій, що $\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta$ для будь якої комунікації (i, j) . Тут $\mu_{ij}(u_{ij})$ – ступінь впевненості в тому, що пропускна здатність комунікації (i, j) дорівнює u_{ij} . Отриману мережу позначимо v^k , маємо: $\mu_{\hat{V}}(v^k) = k \cdot \Delta$.

3. Для кожної мережі v^k знаходиться величина максимального потоку $S(v^k)$ при таких пропускових здатностях з використанням алгоритму Форда-Фалкерсона.

4. Для кожної мережі v^k знаходиться значення функції належності нечіткої мети $\mu_c(v^k)$ за формулою (5) та значення функції належності нечіткого рішення $\mu_D(v^k)$ за формулою (6).

5. Із усіх значень $\mu_D(v^k)$ вибирають максимальне $\mu_D(v^*)$ за формулою (7). Відповідний цьому значенню максимальний потік і дає наближений розв'язок задачі.

Обчислювальний експеримент. Моделюється ситуація, коли частина транспортної мережі зруйнована. Необхідно оцінити максимальну пропуску здатність неушкодженої її частини для відновлення логістики (рис. 1).

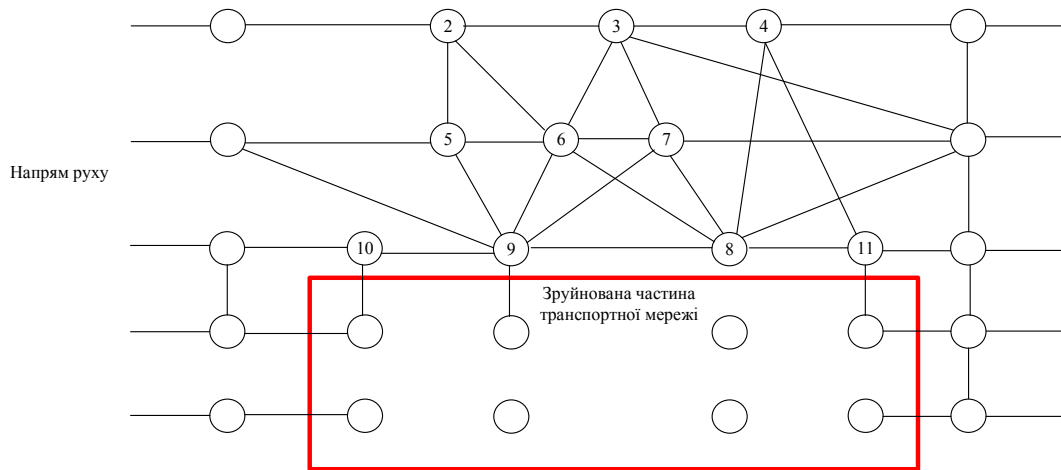


Рис. 1 – Схема транспортної мережі.

Розглядається фрагмент транспортної мережі, що складається з 10 вузлів. До графу цієї мережі додаються два фіктивні вузли (джерело та стік – вершини 1 та 12). Пропускні здатності комунікацій u_{ij} представляються нечіткими числами і при значеннях функції належності, взятих з кроком 0,1, вказані у табл. 1. Необхідно знайти максимальний потік на мережі, схема якої зображена на рис. 2.

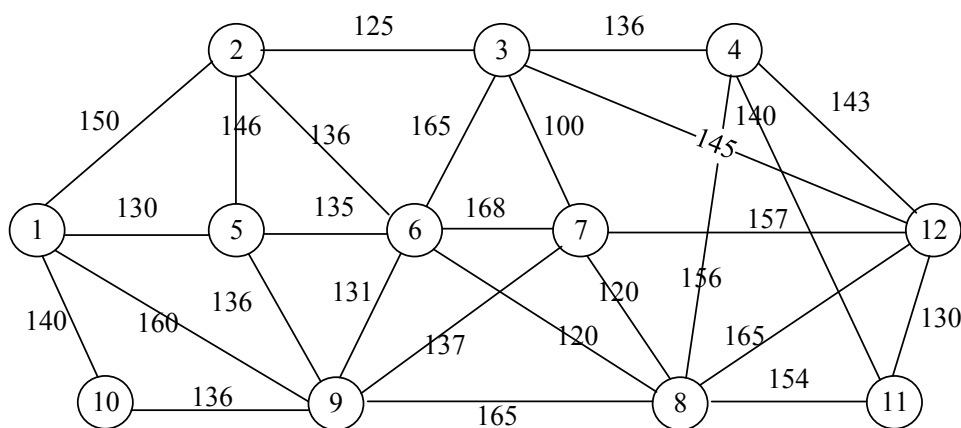


Рис. 2 – Граф транспортної мережі з максимальними значеннями пропускових здатностей.

З останнього рядка табл. 1 видно, що максимальне значення функції належності нечіткого рішення дорівнює 0,49, що відповідає значенню функцій належності пропускових здатностей комунікацій, рівному 0,5. Значення пропускових здатностей комунікацій зазначені у відповідній графі табл. 1.

В останніх трьох рядках табл. 1 наведені $S(v^{*k})S(v^*)$ – значення максимального потоку графа з відповідними пропускними здатностями дуг, $\mu_c(v^{*k})\mu_c(v^*)$ – значення функції належності нечітко визначеної мети задачі, $\mu_{\tilde{D}}(v^{*k})\mu_{\tilde{D}}(v^*)$ – значення функції належності нечіткого розв'язку задачі.

Таблиця 1 – Нечіткі пропускні здатності u_{ij} (од/од часу), величина потоку v_{ij} (од/ од часу) та інші результати обчислень

u_{ij}/v_{ij}	Значення функцій належності пропускних здатностей $\mu_{\tilde{v}}(v)$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_{12}/v_{12}	150/150	148/148	146/144	140/140	130/130	129/129	128/128	125/125	125/125	122/122	120/120
u_{15}/v_{15}	130/130	130/130	129/129	127/127	126/126	124/124	120/120	120/120	119/119	118/118	116/116
u_{19}/v_{19}	160/160	158/158	156/156	155/155	153/153	153/153	145/145	140/140	140/140	139/139	138/138
$u_{1.10}/v_{1.10}$	140/136	138/135	137/134	136/132	134/131	134/130	132/129	131/127	131/125	130/125	130/124
u_{23}/v_{23}	125/14	125/14	124/124	123/10	122/122	121/121	121/0	120/120	118/118	115/115	114/0
u_{25}/v_{25}	146/0	145/0	143/0	143/0	142/122	141/0	140/128	138/0	137/0	134/123	132/120
u_{26}/v_{26}	136/136	134/134	132/20	130/130	127/127	125/8	123/0	120/5	115/7	114/114	113/0
u_{34}/v_{34}	136/14	132/14	132/129	131/10	130/122	129/121	128/0	126/120	124/118	123/115	122/122
u_{36}/v_{36}	165/136	164/134	163/149	162/130	156/127	155/124	152/120	150/127	149/116	148/114	145/122
u_{37}/v_{37}	100/0	99/0	98/0	97/0	96/0	95/0	93/0	92/0	92/0	90/0	88/88
$u_{3.12}/v_{3.12}$	145/136	144/134	144/144	143/130	142/127	141/124	140/120	139/135	137/116	134/114	132/111
u_{48}/v_{48}	156/0	154/0	154/0	145/0	144/0	143/0	133/0	132/0	130/0	128/0	128/0
$u_{4.11}/v_{4.11}$	140/0	140/0	139/0	138/0	138/0	137/0	136/0	134/0	134/0	132/0	130/0
$u_{4.12}/v_{4.12}$	143/14	143/14	142/129	141/10	140/0	139/121	138/0	137/120	136/118	134/115	132/120
u_{56}/v_{56}	135/130	134/130	132/129	131/127	128/7	125/124	123/120	120/120	116/116	114/11	112/111
u_{59}/v_{59}	136/0	136/0	135/0	134/0	134/0	132/0	132/128	131/0	131/3	130/0	130/125
u_{67}/v_{67}	168/130	165/130	152/0	156/127	152/7	149/8	146/127	142/125	140/7	138/136	135/88
u_{68}/v_{68}	120/0	119/0	118/0	117/0	115/0	114/0	113/0	112/0	112/0	111/0	110/0
u_{69}/v_{69}	131/0	130/0	130/0	129/0	128/0	128/0	127/127	127/127	126/0	126/125	126/122
u_{78}/v_{78}	120/120	119/120	118/0	116/116	115/0	114/0	113/113	112/0	112/0	111/0	110/0
u_{79}/v_{79}	137/136	137/135	137/134	137/132	137/131	137/130	137/128	135/0	133/128	131/0	130/125
$u_{7.12}/v_{7.12}$	157/145	155/145	153/134	152/143	151/138	149/138	147/142	145/125	144/135	142/136	140/125
u_{89}/v_{89}	165/160	163/158	162/156	161/155	156/153	154/153	153/147	151/140	147/125	147/139	146/140
$u_{8.11}/v_{8.11}$	154/130	154/120	154/0	153/116	153/0	153/0	152/113	152/0	151/0	151/0	150/0
$u_{8.12}/v_{8.12}$	165/160	165/158	163/156	163/155	162/153	161/153	158/147	156/140	155/140	153/139	151/140
$u_{9.10}/v_{9.10}$	136/136	135/135	134/134	132/132	131/131	130/130	129/129	127/127	125/125	125/125	124/124
$u_{11.12}/v_{11.12}$	130/120	129/120	128/0	125/116	123/0	121/0	120/113	117/0	115/0	113/0	111/0
$S(v^{*k})$	576	571	565	554	540	536	522	512	509	504	498
$\mu_c(v^{*k})$	1,00	0,94	0,86	0,72	0,54	0,49	0,31	0,18	0,14	0,08	0,00
$\mu_{\tilde{D}}(v^{*k})$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,49	0,31	0,18	0,14	0,08	0,00

Розв'язку задачі відповідає точка перетину графіків на рис. 3 із приблизними координатами (0,5; 0,5). Це означає, що варіант із пропускними здатностями із сьомої графі табл. 1 є оптимальним зі ступенем впевненості

0,5, що відповідає величині максимального потоку 536 од/од часу.

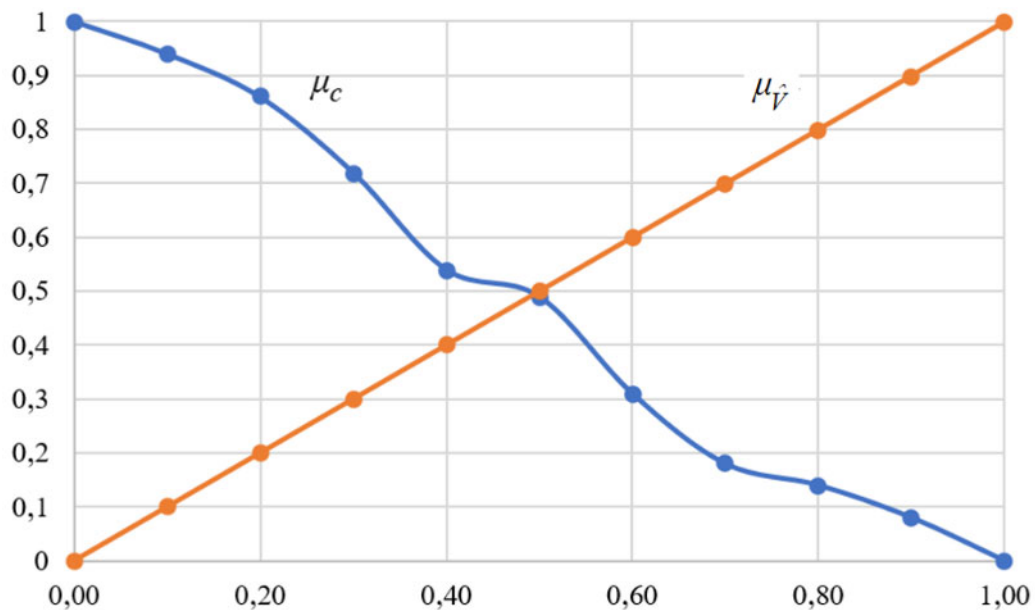


Рис. 3 – Графіки функцій належності μ_γ та μ_c .

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення запропонованого підходу для мереж із пропускними здатностями, що динамічно змінюються. Також доцільно використати інші способи подання невизначеностей.

Висновки. У роботі реалізовано застосування апарату теорії нечітких множин та нечіткої логіки для розв'язання задачі визначення максимального потоку у транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій.

Отримано такі результати: для заданої мережі визначено величину максимального потоку, який можна пропустити із джерела до стоку за одиницю часу та значення ступеня впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. Для розв'язання цієї задачі можна використати інший підхід: знаходити мінімальний розріз графа. Але такий підхід через високу обчислювальну складність може застосовуватися для графів малої розмірності або для цільного графа (а не фрагменту графа). Підхід, запропонований у цій роботі, використовує простий алгоритм та враховує нечіткість вхідних даних.

Оціночне значення максимального потоку може використовуватися для прийняття оперативних управлінських рішень і попереднього планування відновлювальних заходів.

Розглянуті в роботі математична модель та метод її розв'язання можна застосовувати для розв'язання логістичних задач при плануванні реконструкції логістичних мереж чи ремонту після аварій або руйнувань.

Список літератури

1. Nasser El-Sherbeny. Algorithm of fuzzy maximum flow problem with fuzzy time-windows in hyper network // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – Vol. 116. – № 4. – С. 863 – 874. DOI: 10.12732/ijpam.v116i4.6.
2. Muhammad Akram, Amna Habib, Tofiq Allahviranloo. A new maximal flow algorithm for solving optimization problems with linguistic capacities and flows // *Information Sciences*. – 2022. – Vol. 612. – P. 201 – 230. DOI: 10.1016/j.ins.2022.08.068.
3. Shengwei Han, Zixiong Peng, Shunqin Wang. The maximum flow problem of uncertain network // *Information Sciences*. – 2014. – Vol. 265. – P. 167 – 175. DOI: 10.1016/j.ins.2013.11.029.
4. Çağlar A., Öztemiz F., Yakut S. Link Prediction and Maximum Flow in Transportation Network // *Computer Science*. – 2024. – Vol. 9. – №2. – P. 169 – 177. DOI: 10.53070/bbd.1593501.
5. Bavandi S., Bigdeli H. A Maximum Flow Network Interdiction Model in Fuzzy Stochastic Hybrid Uncertainty Environments // *Yugoslav Journal of Operations Research*. – 2023. – Vol. 33(3). – P. 409-424. DOI: 10.2298/YJOR220415038B.
6. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. С. Дискретна математика. – К. : Вища школа, 2002. – 287 с.

References (transliterated)

1. Nasser El-Sherbeny. Algorithm of fuzzy maximum flow problem with fuzzy time-windows in hyper network. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2017. – Vol. 116. – № 4. – P. 863-874. DOI: 10.12732/ijpam.v116i4.6.

- Applied Mathematics*. 2017, Vol. 116, no. 4, pp. 863–874. DOI: 10.12732/ijpam.v116i4.6.
2. Muhammad Akram, Amna Habib, Tofiq Allahviranloo. A new maximal flow algorithm for solving optimization problems with linguistic capacities and flows. *Information Sciences*. 2022, Vol. 612, pp. 201–230. DOI: 10.1016/j.ins.2022.08.068.
 3. Shengwei Han, Zixiong Peng, Shunqin Wang. The maximum flow problem of uncertain network. *Information Sciences*. 2014, Vol. 265, pp. 167–175. DOI: 10.1016/j.ins.2013.11.029.
 4. Çağlar A., Öztemiz F., Yakut S. Link Prediction and Maximum Flow in Transportation Network. *Computer Science*. 2024, Vol. 9, no. 2, pp. 169–177. DOI: 10.53070/bbd.1593501.
 5. Bavandi S., Bigdeli H. A Maximum Flow Network Interdiction Model in Fuzzy Stochastic Hybrid Uncertainty Environments. *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2023, Vol. 33(3), pp. 409–424. DOI: 10.2298/YJOR220415038B.
 6. Bardachov Yu. M., Sokolova N. A., Khodakov V. Ie. *Dyskretna matematika* [Discrete Mathematics]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2002. 287 p.

Надійшла (received) 25.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.12.2025; До публікації (for publication) 05.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Матвієнко Ольга Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 715-18-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7492-7616>; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Matviienko Olha Ivanivna – PhD (Engineering Sciences), Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics, Kharkiv; tel.: (097) 715-18-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7492-7616>; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Мірошніченко Олександр Олександрович – аспірант кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (096) 165-84-70; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7568-4942>; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

Miroshnichenko Oleksandr Okeksandrovich – Postgraduate Student of Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (096) 165-84-70; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7568-4942>; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАНОРОЗМІРНИХ МОДУЛІВ

Стаття присвячена аналізу актуальних антагоністичних питань щодо впровадження нових методів математичного моделювання, які можливо застосувати для відтворення різноманітних бінарних функцій декількох аргументів на базі мікро- та наноелектронних мультиплексорних модулів. Зростання спеціалізації сучасних великих інтегральних схем вступає в протиріччя з їхньою універсальністю, що підвищує собівартість проєктних робіт та зменшує обсяги виробництва типомінальних зразків. Мінімізувати розбіжності між спеціалізацією та універсальністю слід шляхом математичного моделювання мікро- та нанорозмірних модулів з програмованою логікою. Програмування виконується не для створення алгоритмів обробки дискретної інформації, як це реалізує мікропроцесор, а шляхом логічних налаштувань мультиплексорних мікро- та нанопристроїв. Результати поєднаного моделювання, які отримані в роботі, підтверджують еквівалентність їхнього функціонування, а також переваги коміркових кулонівських наномultiплексорів у надійності, технологічному масштабуванні, енергоефективності, швидкодії та недоліки у виключно криогенних наднизькотемпературних застосуваннях. Вочевидь, еволюція мікроелектроніки триватиме тільки в умовах широкого запровадження нанорозмірних модулів з новими функціональними принципами дії.

Ключові слова: математичне моделювання, мікро- та наномодулі, програмовані логічні пристрої, мажоритарна логіка, комп'ютерне проєктування, мультиплексори.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH

MATHEMATICAL MODELING OF NANO-SIZED MODULES

The article is devoted to the analysis of topical antagonistic issues regarding the implementation of new methods of mathematical modeling, which can be used to reproduce heterogeneous binary functions of several arguments on the basis of micro- and nanoelectronic multiplexer modules. The growth of specialization of modern large integrated circuits comes into conflict with their universality, which increases the cost of design work and reduces the production volumes of typonominal samples. The discrepancies between specialization and universality should be minimized by mathematical modeling of micro- and nano-sized modules with programmable logic. Programming is performed not to create algorithms for processing discrete information, as implemented by a microprocessor, but by logical settings of multiplexer micro- and nanodevices. The results of combined modeling obtained in the work confirm the equivalence of their functioning, as well as the advantages of cellular Coulomb nanomultiplexers in reliability, technological scalability, energy efficiency, speed and disadvantages in exclusively cryogenic ultra-low temperature applications. Obviously, the evolution of microelectronics will continue only under conditions of widespread introduction of nano-sized modules with new functional principles of operation.

Key words: mathematical modeling, micro- and nanomodels, programmable logic devices, majority logic, computer design, multiplexers.

Вступ. Математичне моделювання мікро- та наноелектронних мультиплексорних пристроїв (МНМП) не передбачає створення алгоритмів для обробки вхідних багатоаргументних функцій шляхом зміни робочих програм, як це зазвичай реалізується мікропроцесорами. Воно стосується змін у внутрішній структурі наноелектронних схем таким чином, щоб забезпечити реалізацію необхідних функцій на логічному рівні.

Аналіз останніх досліджень. Експерименти в галузі математичного моделювання програмованих мікро- та наномодулів активно розвиваються, і значна частина уваги науковців зосереджена на комп'ютерному проєктуванні таких систем. Перші значні розробки у цій галузі відбулися внаслідок створення мультиструктурних систем, побудованих на базі універсальних, функціонально завершених модулів. Такі модулі виявилися однією з перспективних тенденцій в розвитку сучасної мікроелектроніки [1]. У цих дослідженнях було продемонстровано можливість автоматизованого проєктування мікро- та наносхем, здатних реалізовувати 16 двоаргументних та 256 триаргументних функцій на основі мультиплексорів [2]. Проте існують суттєві труднощі у спрощенні цих схем, що зумовлюють надмірну складність у реалізації та їх універсальному застосуванні. Важливим аспектом досліджень стало удосконалення методів математичного моделювання програмованих мікро- та наносхем для відтворення різноманітних функцій алгебри булевої та мажоритарної логіки [3],[4], [5]. Розробники запропонували ефективні алгоритми автоматизованого моделювання мікросхем з високим рівнем інтеграції, що стали основою для подальшого розвитку нанопристроїв з програмованою логікою [6], [7]. Попри значний прогрес у цій сфері, завдання ефективного математичного моделювання все ще залишається відкритим, і на сьогодні проблема спрощення алгоритмів та їх адекватного відтворення викликає активні дискусії [8], [9].

Ще залишаються невирішеними питання налаштування нано- та мікромодулів, які створюють додаткові завдання для їх впровадження. У результаті, предмет покращення якості мікро- та наносхем з програмованою логікою залишається актуальним і вимагає подальшого вдосконалення методів їх математичного моделювання [10].

Постановка задачі і мета роботи. У цій статті розроблено математичні моделі мікро- та наносхем на базі булевої і мажоритарної алгебр. Метою дослідження є реалізація функцій дискретної математики із застосуванням створених мікро- та наномодулів для етапу автоматизованого схематехнічного проєктування.

Моделювання мікро- та наномодулів. При моделюванні МНМП сигнали різних аргументів дискретних функцій, що відтворюються, подаються на адресні входи, а інформаційні входи виконують роль програмованих. Для цифрового пристрою з двома вхідними аргументами x_1, x_0 , можливі чотири дискретні комбінації: 00, 01, 10, 11, і це дозволяє синтезувати 16 різних вихідних функцій.

На рис. 1, а показане графічне позначення двовходового МНМП ($2 \rightarrow 1$).

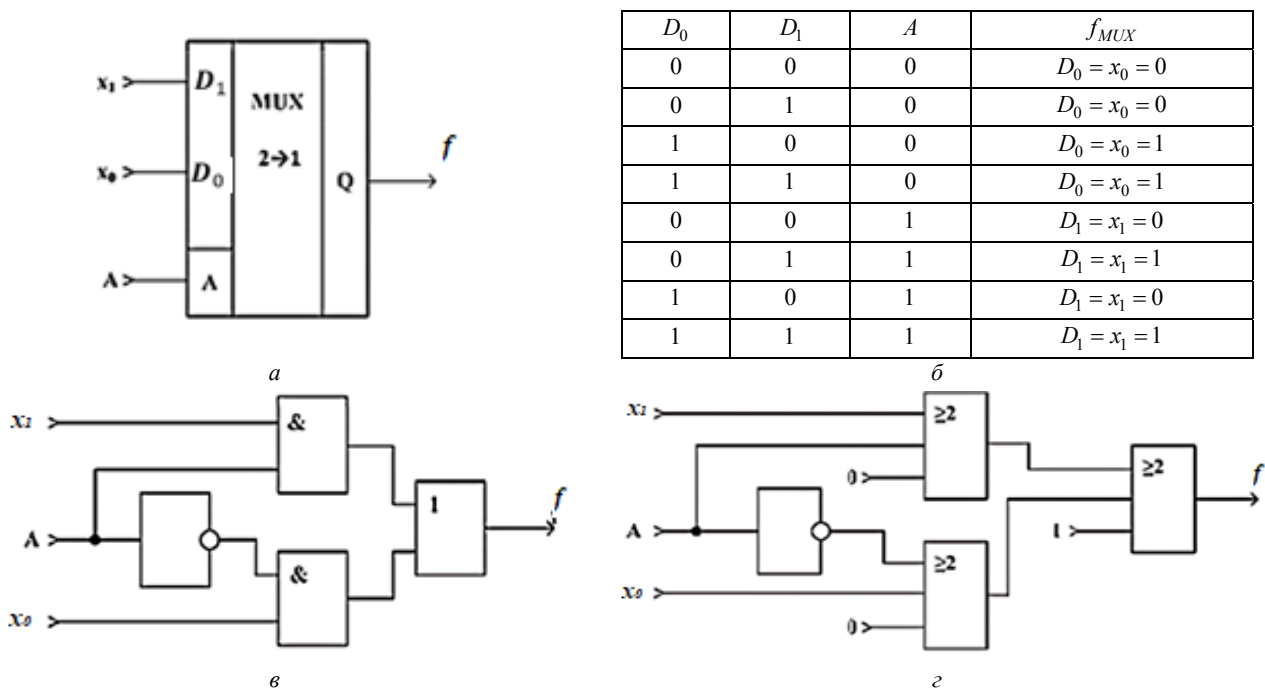


Рис. 1 – Двовходовий МНМП: а – одноадресний мультиплексор; б – таблиця істинності одноадресного мультиплексора; в – еквівалентна модель мікросхеми; г – еквівалентна модель наносхеми.

Відповідно до таблиці істинності (рис. 1, б) та моделі мікросхеми МНМП (рис. 1, в) після математичних перетворень отримують *довершену диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ)* його булевої функції f_B у вигляді:

$$f_B = \bar{A}x_1\bar{x}_0 \vee \bar{A}x_1x_0 \vee Ax_1\bar{x}_0 \vee Ax_1x_0. \quad (1)$$

Для реалізації булевих функцій декількох аргументів слід, по-перше, отримати їхню ДНФ, а, по-друге, створити алгоритм моделювання МНМП для їхнього синтезу та створити рівняння дискретної математики [4] шляхом співставлення ДНФ функції f_1 з функцією (1):

$$\bar{A}x_1\bar{x}_0 \vee \bar{A}x_1x_0 \vee Ax_1\bar{x}_0 \vee Ax_1x_0 = \overline{x_1 \vee x_0} = \bar{x}_1\bar{x}_0. \quad (2)$$

Використовуючи з дискретної математики [4] *методи перебору та невизначених коефіцієнтів*, розв'язують (2) у вигляді:

$$\bar{A}x_1(\bar{x}_0 \vee x_0) \vee Ax_0(\bar{x}_1 \vee x_1) = \bar{x}_1\bar{x}_0. \quad (3)$$

З огляду на модель мікросхеми на логічних елементах (рис. 1, в) отримують корені рівняння (3):

$$D_1 = 0 \quad \text{або} \quad \bar{x}_1, \quad D_0 = \bar{x}_0, \quad A = x_1.$$

Триразовий перебір четвертого доданку в (1):

$$x_1(\bar{A}x_0 \vee Ax_0) \vee x_1x_0(\bar{A} \vee A) \vee Ax_0(\bar{x}_0 \vee x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0 \quad (4)$$

визначає другий набір параметрів моделі:

$$D_1 = 0 \quad \text{або} \quad \bar{x}_0, \quad D_0 = \bar{x}_1, \quad A = x_0.$$

Для двох завершальних рівнозначних перетворень дискретного рівняння (2) отримують:

$$\bar{A}x_1(\bar{x}_0 \vee x_0) \vee x_0(\bar{A}\bar{x}_1 \vee Ax_1) = \bar{x}_1\bar{x}_0,$$

тобто

$$D_1 = \bar{x}_0, \quad D_0 = 0 \quad \text{або} \quad \bar{x}_1, \quad A = \bar{x}_1; \quad (5)$$

$$Ax_0(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_1(\bar{A}\bar{x}_0 \vee \bar{A}x_0) = \bar{x}_1\bar{x}_0, \quad (6)$$

тому

$$D_1 = \bar{x}_1, \quad D_0 = 0 \quad \text{або} \quad \bar{x}_0, \quad A = \bar{x}_0.$$

Таким чином, для програмування одного входу адреси A слід подавати варіації сигналів x_1 та x_0 на два

інформаційні входи D_1 та D_0 самого МНМП. Табл. 1 підсумовує результати формування функцій програмування f_{np} для нього та, власне, відтворення функції *АБО – НІ* самим мультиплексором $f_{MUX} = f_1$.

Таблиця 1 – Параметри моделі мікроелектронного модуля

A	D_1	D_0	f_{np}	f_{MUX}
x_1	$\overline{x_1}$ або 0	$\overline{x_0}$	$D_1 x_1(0) \vee D_0 \overline{x_1}$	$\overline{x_1 x_0} = f_1 = \overline{x_1 \vee x_0}$
x_0	$\overline{x_0}$ або 0	$\overline{x_1}$	$D_1 x_0(0) \vee D_0 \overline{x_0}$	
$\overline{x_1}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$ або 0	$D_1 \overline{x_1} \vee D_0 x_1(0)$	
$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_0}$ або 0	$D_1 \overline{x_0} \vee D_0 x_0(0)$	

Подібним чином для моделі наносхеми двовходового мультиплексора (рис. 1, з), створеного на базі *мажоритарних елементів (МЕ)*, отримують мажоритарне дискретне рівняння у вигляді:

$$f_M = maj[maj(A, x_1, 0), maj(\overline{A}, x_0, 0), 1] = maj(\overline{x_1}, \overline{x_0}, 0), \quad (7)$$

де позначення *maj* є мажоритарною операцією вибору більшості бінарних значень з непарної кількості (у цьому випадку із трьох) вхідних аргументів [5].

Функція мажоритарного вибору (2 з 3) в канонічній або десятковій формах має вигляд:

$$f_M = \Sigma(011, 101, 110, 111) = \Sigma(3, 5, 6, 7).$$

В табл. 2 записані чотири варіанти моделювання нанорозмірного модуля МНМП, зібраного з трьох МЕ і одного інвертора (рис. 1, з).

Таблиця 2 – Параметри моделі нанорозмірного модуля

A	D_1	D_0	f_{np}	f_{MUX}
x_1	$maj(x_1, \overline{x_1}, 0)$	$maj(\overline{x_1}, \overline{x_0}, 0)$	$D_1 x_1(0) \vee D_0 \overline{x_1}$	Функція (2) $f_1 = \overline{x_1 \vee x_0}$
x_0	$maj(x_1, \overline{x_0}, 0)$	$maj(\overline{x_1}, \overline{x_0}, 0)$	$D_1 x_0(0) \vee D_0 \overline{x_0}$	
$\overline{x_1}$	$maj(\overline{x_1}, \overline{x_0}, 0)$	$maj(\overline{x_1}, x_0, 0)$	$D_1 \overline{x_1} \vee D_0 x_1(0)$	
$\overline{x_0}$	$maj(\overline{x_1}, \overline{x_0}, 0)$	$maj(\overline{x_1}, x_0, 0)$	$D_1 \overline{x_0} \vee D_0 x_0(0)$	

Обговорення результатів програмування наномодулів. Відповідно до рис. 1, з моделі двовходових МНМП були побудовані на *робочому полі САПР Multi-Cap II* [9]. На рис. 2 наведені мікросхеми комп'ютерної реалізації логічної функції *АБО – НІ* на чотирьох МНМП (рис. 2, а), які запрограмовані згідно з перетвореннями дискретних рівнянь (3), (4), (5) та (6) і табл. 1, а також результати тотожних моделювань чотирьох часових діаграм (рис. 2, б).

Кулонівські *квантові автомати (КА)* є прикладом мажоритарного моделювання, згідно з яким бінарна інформація кодується двома діагонально розташованими електронами у комірці КА [8]. Одноелектронні нанопристрої на основі квантової технології складаються з нанорозмірних діелектричних чарунок, які мають по чотири напівпровідникових квантових кулонівських острівців у кутках, і два вільних електрони, що безінерційно тунелюють між ними. Створена раніше модель нанорозмірного МНМП (рис. 1, з) тепер відтворена на КА (рис. 3, а) як початкове завдання для моделювання на САПР *QCADesigner* [5, 6]. Вона складається з інвертора адресного сигналу А на входах мажоритарних модулів з запрограмованою логікою у вигляді негативної поляризації –1.00 для виконання логічної операції перемноження в рівнянні (2). Вихідний МЕ запрограмований позитивною поляризацією 1.00 для виконання логічного додавання у функції f_M (2). На рис. 3, б показано результати моделювання осцилограм наноелектронного МНМП, які точно збігаються з таблицею істинності (рис. 1, б), що підтверджує адекватність програмування.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток нових методів моделювання наномодулів на базі мажоритарної логіки, оскільки подальша мініатюризація та підвищення швидкодії можливі лише у запровадженні одноелектронних нанопристроїв. Окрім цього, перспективними є напрями досліджень, що сприяють започаткуванню розробок наномодулів *спінтроніки* та *біомолекулярної електроніки* [7].

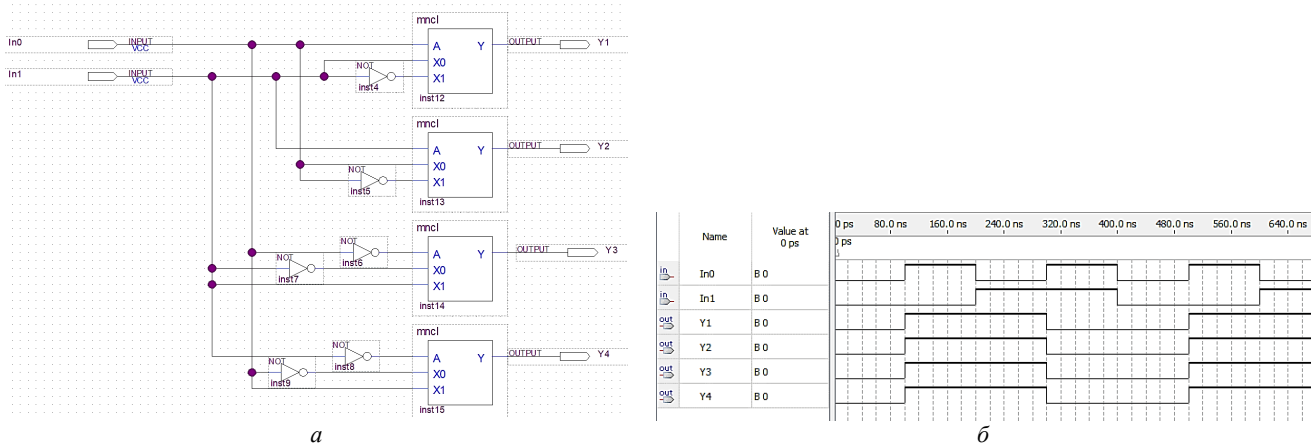


Рис. 2 – Результати моделювання чотирьох ПМНМ (а) та осцилограми запрограмованої функції АБО-НІ (б).

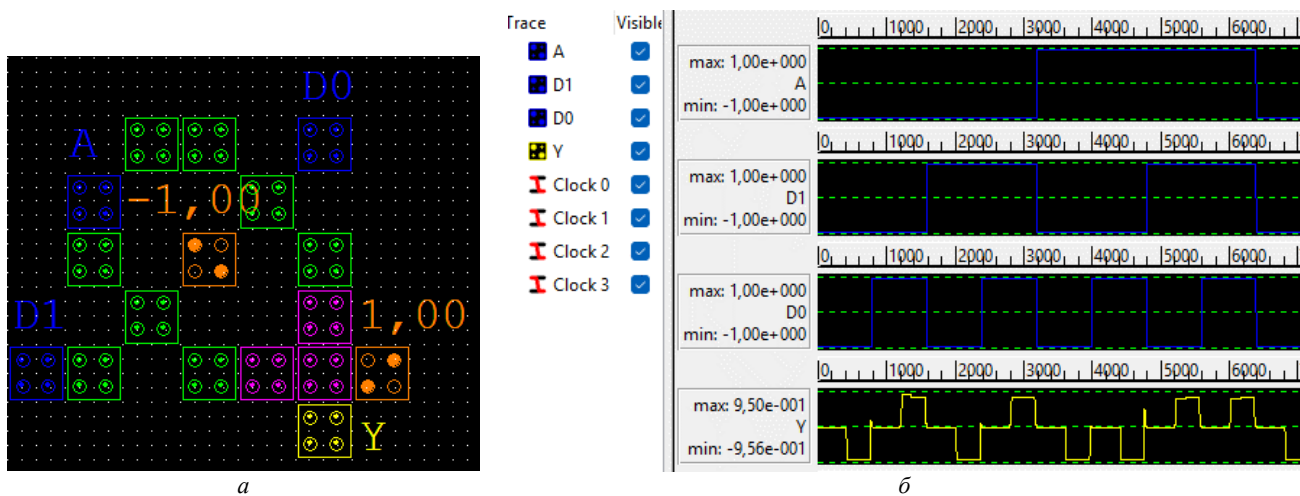


Рис. 3 – Результати моделювання наномодуля ПМНМ (а) та його часових діаграм (б) на САПР QCAD [6].

Висновки. Оскільки розвиток мікроелектроніки на основі комплементарних метал-оксиднапівпровідникових транзисторів обмежений маломасштабними та квантово-технологічними ефектами [2, 3], автори статті приділили пріоритетну увагу розробці математичних моделей нанорозмірних модулів для реалізації дискретних булевих та мажоритарних функцій. Розроблені алгоритми (табл. 1 і 2) автоматичного моделювання ПМНМ (рис. 2 і 3) підтвердили коректність і надійність їхнього функціонування (рис. 1, б).

Список літератури

1. Tougaw P., Lent S., Porod W. Bistable saturation in coupled quantum cellular automata // *Journal of Applied Physics*. – 1993. – vol. 74. – no. 5. – P. 3558 – 3566. DOI : 10.1063/1.354535.
2. Lent C. S., Liu M., Lu Y. Benette clocking of QCA and the limits to binary logic scaling // *Nanotechnology*. – 2006. – vol. 17. – no. 16. – 4240 – 51. DOI : 10.1088/0957-4484/17/16/040.
3. Sicard E., Bendhia S. D. *Advanced CMOS Cell Design*. – McGraw-Hill, 2007. – 385 p.
4. Hennessy J. L., Patterson D. A. *Computer Architecture: A Quantitative Approach*. – Morgan Kaufmann, 2011. – 856 p.
5. Walus K., Dusart T., Budiman C. QCA Designer: A rapid design and simulation tool for QCA // *IEEE Transactions on Nanotechnology*. – 2004. – vol. 3. – no. 4. – P. 26 – 39. DOI : 10.1109/TNANO.2003.820815.
6. QCADesigner, version 2.0.3. – Режим доступу : www.atips.ca. – Дата звертання : 25 серпня 2025.
7. Sen B., Gosman S. Towards modular design of reliable QCA logic circuits using multiplexers // *Computer Electronics Eng.* – 2015. – vol. 45. – no. 2. – P. 42 – 54. DOI : 10.1016/j.compeleceng.2015.05.001.
8. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Arithmetic Logic Single-electron // *Electronics and Control Systems*. – 2023. – vol. 2. – no. 76. – P. 68 – 77. DOI: 10.18372/1990-5548.77.18003.
9. Cho H., Swartzlander E. Adder and multiplier design in quantum-dot cellular automata // *IEEE Trans on Computers*. – 2009. – vol. 58. – no. 1. – P. 721 – 729. DOI : 10.1109/TC.2009.21.
10. Shin S., Jeon C. Design of wire-crossing technics based on difference of cell in quantum-dot cellular automata // *Int. Journal of control and automation*. – 2014. – vol. 7. – no. 7. – P. 153 – 165. DOI : 10.14257/ijca.2014.7.4.14.

References (transliterated)

1. Tougaw P., Lent S., Porod W. Bistable saturation in coupled quantum cellular automata. *Journal of Applied Physics*. 1993, vol. 74, no. 5, pp. 3558–3566. DOI : 10.1063/1.354535.

2. Lent C. S., Liu M., Lu Y. Benette clocking of QCA and the limits to binary logic scaling. *Nanotechnology*. 2006, vol. 17, no. 16, 4240–51. DOI : 10.1088/0957-4484/17/16/040.
3. Sicard E., Bendhia S. D. *Advanced CMOS Cell Design*. McGraw-Hill, 2007. 385 p.
4. Hennessy J. L., Patterson D. A. *Computer Architecture: A Quantitative Approach*. Morgan Kaufmann, 2011. 856 p.
5. Walus K., Dusart T., Budiman C. QCA Designer: A rapid design and simulation tool for QCA. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2004, vol. 3, no. 4, pp. 26–39. DOI : 10.1109/TNANO.2003.820815.
6. QCADesigner, version 2.0.3. Available at : www.atips.ca (accessed 25 August 2025).
7. Sen B., Gosman S. Towards modular design of reliable QCA logic circuits using multiplexers. *Computer Electronics Eng.* 2015, vol. 45, no. 2, pp. 42–54. DOI : 10.1016/j.compeleceng.2015.05.001.
8. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Arithmetic Logic Single-electron. *Electronics and Control Systems*. 2023, vol. 2, no. 76, pp. 68–77. DOI : 10.18372/1990-5548.77.18003.
9. Cho H., Swartzlander E. Adder and multiplier design in quantum-dot cellular automata. *IEEE Trans on Computers*. 2009, vol. 58, no. 1, pp. 721–729. DOI : 10.1109/TC.2009.21.
10. Shin S., Jeon C. Design of wire-crossing technics based on difference of cell in quantum-dot cellular automata. *Int. Journal of control and automation*. 2014, vol. 7, no. 7, pp. 153–165. DOI : 10.14257/ijca.2014.7.4.14.

Надійшла (received) 30.08.2025; Доопрацьована (finalized) 25.10.2025; До публікації (for publication) 03.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Державний університет «Київський авіаційний інститут», м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, State University "Kyiv Aviation Institute", Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Державний університет «Київський авіаційний інститут», м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, State University "Kyiv Aviation Institute", Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Є. Л. ХУРДЕЙ, В. В. ІВАНОВ, А. С. ШНИЦАР, О. Р. ГИЩАК, А. В. ЗАБОРНИЙ

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ НА ЛІНІЯХ ЗАЛЕЖНО ВІД ВИДУ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ, ШВИДКОСТІ ЗРОСТАННЯ ФАЗИ ТА АМПЛІТУДИ

Важливою задачею математичного моделювання наразі є чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Через складність самих функцій або області інтегрування виникає необхідність застосування ефективних чисельних методів. Основна проблема чисельного інтегрування функцій багатьох змінних полягає в зростанні обчислювальних витрат зі збільшенням розмірності області інтегрування. Це спонукає до пошуку ефективних методів, які дозволяють зберігати баланс між обчислювальною складністю та точністю результатів. Особливий інтерес становлять методи чисельного інтегрування, розроблені з використанням інформаційних операторів, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних у точках, на лініях, площинах тощо. На основі таких операторів будуються кубатурні формули для наближеного обчислення багатовимірних інтегралів, у тому числі і для інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Однак не було приділено достатньо уваги приділено вивченню впливу на точність обчислень таких характеристик фази та амплітуди як швидкість зростання. Метою даної статті є проведення аналізу точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також від швидкості зростання фази та амплітуди.

Ключові слова: математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування, швидкоосцилюючі функції багатьох змінних, кубатурна формула, інформаційні оператори, оператори інтерлінації.

O. P. NECHUIVITER, YE. L. KHURDEI, V. V. IVANOV, A. S. SHNITSAR, O. R. HISHCHAK, A. V. ZABORNIY

ACCURACY ANALYSIS OF COMPUTING DOUBLE INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATORY FUNCTIONS BASED ON LINE DATA WITH RESPECT TO THE TYPE OF INFORMATION OPERATORS, GROWTH RATE OF THE PHASE AND AMPLITUDE

An important task in mathematical modelling today is the numerical integration of functions of several variables. Due to the complexity of the functions themselves or the domain of integration, there is a need to apply efficient numerical methods. The main problem with the numerical integration of functions of several variables lies in the increase in computational cost as the dimension of the integration domain increases. This prompts the search for efficient methods that allow a balance to be maintained between computational complexity and the accuracy of the results. Of particular interest are numerical integration methods developed using information operators, which reconstruct intermediate values of quantities based on a given set of known values of a multivariable function at points, on lines, in planes, etc. Based on such operators, cubature formulas are constructed for the approximate calculation of multidimensional integrals, including integrals of rapidly oscillating functions of general form. However, insufficient attention has been paid to studying the influence of phase and amplitude characteristics, such as the rate of increase, on the accuracy of the calculations. The aim of this article is to analyze the accuracy of the calculation of double integrals of rapidly oscillating functions of general form based on data specified on lines, depending on the type of information operators, as well as on the rate of increase of phase and amplitude.

Key words: mathematical modeling of processes, digital image processing, numerical integration, highly oscillating functions of many variables, cubature formula, information operators, interlineation operators.

Вступ. Розвиток *інформаційних технологій* зумовлює зростаючий інтерес до задач цифрової обробки зображень. У сучасних *методах цифрової обробки зображень*, зокрема в дифракційній томографії, оптичній когерентній томографії та фазоконтрастній візуалізації, формування зображення ґрунтується на *хвильовій природі випромінювання* та його взаємодії з об'єктом. Загалом цей процес включає такі етапи: генерація та поширення хвильового поля, вимірювання інтенсивності, побудова математичної моделі прямої задачі та чисельна реконструкція зображення. Прямая, так і обернена задачі відновлення зображень зводяться до багаторазового обчислення швидкоосцилюваних інтегралів узагальненого вигляду [1]. Традиційні *методи чисельного інтегрування* виявляються малоєфективними через недостатню точність. Особливий інтерес становлять задачі, де вхідна інформація про функцію задається лише на певних лініях. У зв'язку з цим актуальним є розроблення та дослідження нових підходів, зокрема *кубатурних формул*, які дозволяють враховувати специфіку відомої інформації. Наразі існують методи чисельного інтегрування, в тому числі *методи чисельного інтегрування швидкоосцилюваних функцій декількох змінних*, які розроблені з використанням інформаційних операторів, що відновлюють проміжні значення функцій за відомими значеннями функції на лініях, площинах, смугах тощо. До таких інформаційних операторів відносять *оператори О. М. Литвина*: оператори *інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації* та інші. Точність таких інформаційних операторів значною мірою залежить від виду інформаційних операторів, а також від способу відновлення функції між лініями спостереження. При цьому суттєвий вплив на точність обчислень мають характеристики фази та амплітуди. У даній роботі проводиться аналіз точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також швидкості зростання фази та амплітуди.

Аналіз останніх досліджень. Чисельне інтегрування швидкоосцилюваних функцій є дуже важливим напрямком, який досліджується вченими усього світу. Найбільш відомі з них – *Arieh Iserles, Daan Huybrechs, Ben Adcock, Alfredo Deaño, Валерій Задірака* та інші, які давно присвячують свої дослідження цій тематиці. Дослі-

дження не втрачають актуальності, про що свідчать нещодавні публікації цих авторів [2 – 9], де висвітлено методи для обчислення багатовимірних високоосциляційних інтегралів. Однак такі кубатурні формули не дають можливості використовувати дані на площинах, лініях.

Детальніше зупинимося на чисельному інтегруванні швидкоосцильованих функцій у випадку, коли інформація про функції задається значеннями функції на лініях, площинах. До таких методів відносяться кубатурні формули, які будуються з використанням різних інформаційних операторів (операторів інтерлінації, інтерфлетації) [10, 11]. У роботі [12] розглядається наближене обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій двох змінних та отримані оцінки похибки наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних. Більше результатів щодо обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій було опубліковано в [13]. У монографії зроблено класифікацію кубатурних формул за типом завдання інформації про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій трьох змінних з використанням інформаційних операторів детально представлено в роботах [14, 15]. Кубатурні формули для наближеного обчислення $3D$ -коефіцієнтів Фур'є будуються з використанням операторів інтерфлетації та інтерлінації. У своїй побудові інформаційні оператори використовували значення функцій на взаємно перпендикулярних площинах, лініях.

Обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду за даними на площинах та лініях представлено в статтях [16 – 19]. Роботи присвячені застосуванню інформаційних операторів до більш загального виду інтегралів від швидкоосцильованих функцій. Однак в жодній з вищезазначених робіт не досліджувалося питання впливу на точність обчислень таких властивостей фази та амплітуди як швидкість зростання.

Метою даної статті є проведення аналізу точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також від швидкості зростання фази та амплітуди.

Постановка задачі. Розглянемо $H^{2,1}(M, \tilde{M}) = H^{2,1}(M_u, \tilde{M}_u)$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що $|u^{(1,0)}(x, y)| \leq M_u$, $|u^{(0,1)}(x, y)| \leq M_u$, $|u^{(1,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}_u$.

Для наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій двох змінних загального виду

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (1)$$

провести порівняльний аналіз точності кубатурних формул, які в своїй побудові використовують оператори кусково-сталої та лінійної сплайн-інтерлінації. Проаналізувати вплив властивостей фази та амплітуди на точність обчислення швидкоосцилюючих інтегралів загального виду із застосуванням кубатурних формул, побудованих на основі даних, заданих на лініях.

Точність обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за даними на лініях залежно від виду інформаційного оператора. Проведемо дослідження точності наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючих функцій загального виду (1) за допомогою кубатурних формул, побудованих на основі даних, заданих на лініях. У межах дослідження розглядаються дві формули, отримані із використанням різних інформаційних операторів. Наведемо оператор інтерлінації, який відновлює функцію за даними на лініях і використовує кусково-сталі сплайни у вигляді допоміжних функцій.

Означення. Під слідом функції на заданих лініях розуміють обмеження цієї функції на відповідні лінії, унаслідок чого вона зводиться до функції однієї змінної, визначених уздовж кожної з цих ліній.

Введемо позначення:

$$h_{10k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_{1k}, \\ 0, & x \notin X_{1k}, \end{cases} \quad H_{10j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_{1j}, \\ 0, & y \notin Y_{1j}, \end{cases}$$

$$X_{1k} = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_{1j} = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad k, j = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1/\ell_1,$$

$$h_{20p}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_{2p}, \\ 0, & x \notin X_{2p}, \end{cases} \quad H_{20s}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_{2s}, \\ 0, & y \notin Y_{2s}, \end{cases}$$

$$X_{2p} = [x_{p-1/2}, x_{p+1/2}], \quad Y_{2s} = [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}],$$

$$x_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad y_s = s\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad p, s = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1/\ell_2.$$

Розглянемо оператори

$$Tf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h_{10k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H_{10j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h_{10k}(x) H_{10j}(y);$$

$$Eg(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x) + \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y) - \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y).$$

Кубатурна формула

$$\Phi_1(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Tf(x, y) e^{i\omega Eg(x, y)} dx dy \quad (2)$$

пропонується для наближеного обчислення інтеграла (1).

Теорема 1. [16] Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$|I(\omega) - \Phi_1(\omega)| = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Tf(x, y) e^{i\omega Eg(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M}_f}{16\ell_1^2} + \tilde{M}_f \min \left(2; \frac{\omega(\tilde{M}_g)}{16\ell_2^2} \right).$$

Розглянемо інший інформаційний оператор О. М. Литвина (оператор інтерлінації), який відновлює функцію за даними на лініях і використовує лінійні сплайни у вигляді допоміжних функцій.

Введемо наступні позначення:

$$h_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad H_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y-y_1}{-\Delta_1}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1\mu}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\mu-1}, \\ \frac{x-x_{\mu-1}}{\Delta_1}, & x_{\mu-1} < x < x_{\mu}, \\ \frac{x-x_{\mu+1}}{-\Delta_1}, & x_{\mu} \leq x < x_{\mu+1}, \\ 0, & x \geq x_{\mu+1}, \end{cases} \quad H_{1\nu}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\nu-1}, \\ \frac{y-y_{\nu-1}}{\Delta_1}, & y_{\nu-1} < y < y_{\nu}, \\ \frac{y-y_{\nu+1}}{-\Delta_1}, & y_{\nu} \leq y < y_{\nu+1}, \\ 0, & y \geq y_{\nu+1}, \end{cases}$$

$$h_{1\ell_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell_1-1}, \\ \frac{x-x_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1} < x < x_{\ell_1}, \\ 0, & x \geq x_{\ell_1}, \end{cases} \quad H_{1\ell_1}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell_1-1}, \\ \frac{y-y_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1} < y < y_{\ell_1}, \\ 0, & y \geq y_{\ell_1}, \end{cases}$$

$$\mu, \nu = \overline{1, \ell_1 - 1}, \quad x_{\mu} = \mu\Delta_1, \quad y_{\nu} = \nu\Delta_1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}.$$

Аналогічно визначаються сліди функції $g(x, y)$ та функції $h_{21r}(x), H_{21q}(y)$ на прямих $x_r = r\Delta_2, y_q = q\Delta_2, r, q = \overline{0, \ell_2}, \Delta_2 = 1/\ell_2$.

Розглянемо два інформаційні оператори

$$Jf(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\ell_1} f(x_{\mu}, y) h_{1\mu}(x) + \sum_{\nu=0}^{\ell_1} f(x, y_{\nu}) H_{1\nu}(y) - \sum_{\mu=0}^{\ell_1} \sum_{\nu=0}^{\ell_1} f(x_{\mu}, y_{\nu}) h_{1\mu}(x) H_{1\nu}(y)$$

та

$$Og(x, y) = \sum_{r=0}^{\ell_2} g(x_r, y) h_{21r}(x) + \sum_{q=0}^{\ell_2} g(x, y_q) H_{21q}(y) - \sum_{r=0}^{\ell_2} \sum_{q=0}^{\ell_2} g(x_r, y_q) h_{21r}(x) H_{21q}(y).$$

Для обчислення інтеграла (1) пропонується кубатурна формула:

$$\Phi_2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \quad (3)$$

Теорема 2. [17] Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$ та функції $f(x, y), g(x, y)$ задані слідами $f(x_{\mu}, y), f(x, y_{\nu}), \mu, \nu = \overline{0, \ell_1}$, та $g(x_r, y), g(x, y_q), r, q = \overline{0, \ell_2}$, на системах взаємно перпендикулярних

прямих $x_\mu = \mu\Delta_1$, $y_\nu = \nu\Delta_1$, $\Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}$ та $x_r = r\Delta_2$, $y_q = q\Delta_2$, $\Delta_2 = 1/\ell_2$ в області $G = [0, 1]^2$. Тоді для кубатурної формули (3) справедлива наступна оцінка похибки наближення (1):

$$\rho(I(\omega), \Phi_2(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M}_f}{9} \frac{1}{\ell_1^2} + \tilde{M}_f \min \left(2; \frac{\tilde{M}_g \omega}{9} \frac{1}{\ell_2^2} \right).$$

Ефективність чисельного інтегрування функцій декількох змінних суттєво залежить від класу гладкості підінтегральних функцій. Порядок диференційовності визначає можливість отримання більш точних *теоретичних оцінок похибки* та обґрунтовує вибір параметрів дискретизації, що продемонстровано, наприклад, у роботі [14]. Однак і при фіксованому порядку диференційовності функцій важливо знати залежність точності наближення від параметрів осциляції та кількості задіяних в обчисленнях ліній.

Нехай амплітуда та фаза відповідно задаються наступними функціями:

$$f(x, y) = \cos(x + y) \text{ та } g(x, y) = \sin(x + y).$$

На рис. 1 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 2 – зображення дійсної та уявної складової всієї підінтегральної функції $F(x, y) = f(x, y) e^{i\omega g(x, y)}$ при $\omega = 40\pi$.

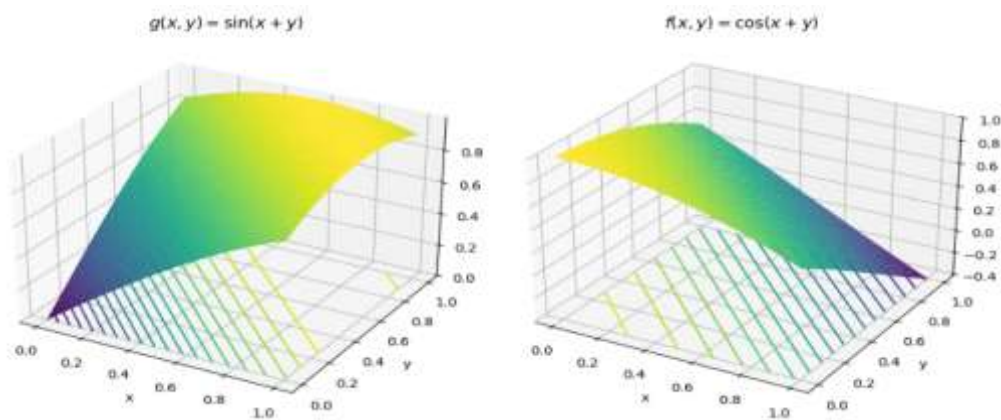


Рис. 1 – Зображення амплітуди $g(x, y) = \sin(x + y)$ та фази $f(x, y) = \cos(x + y)$.

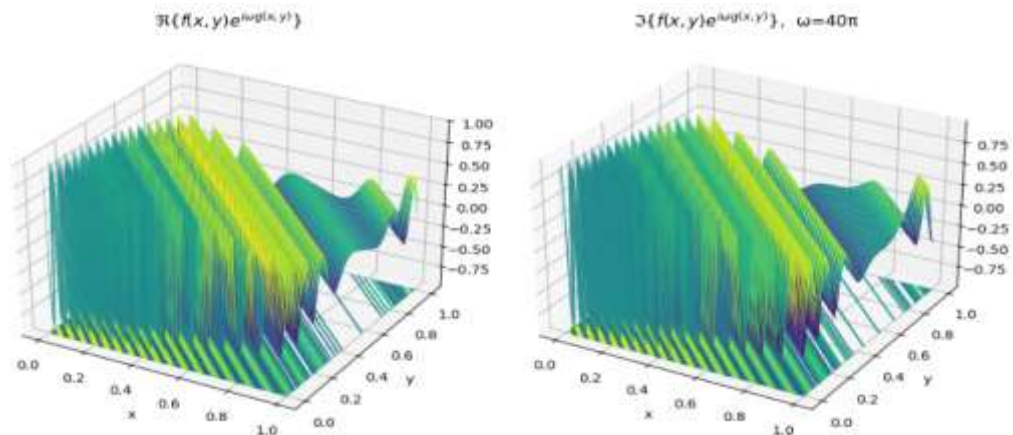


Рис. 2 – Зображення $\text{Re}F(x, y)$, $\text{Im}F(x, y)$ при $\omega = 40\pi$.

Для заданих функцій маємо $M = M_f = M_g = \tilde{M}_f = \tilde{M}_g = 1$. Згідно з теоремами 1 та 2 точність наближення інтеграла (1) за формулою (2) на класі $H^{2,1}(M, \tilde{M})$ при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ дорівнює

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\ell, \omega) = \frac{1}{16\ell^2} + \min \left(2; \frac{\omega}{16\ell^2} \right), \quad (4)$$

а за формулою (3) відповідно

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\ell, \omega) = \frac{1}{9\ell^2} + \min \left(2; \frac{\omega}{9\ell^2} \right). \quad (5)$$

Залежності (4) та (5) показують, що в даному експерименті при обчисленні інтеграла (1) за допомогою кубатурної формули (2) забезпечується менша похибка, ніж при обчисленні інтегралу (1) за кубатурною формулою (3). У табл. 1 наведено значення теоретичних похибок ε_1 та ε_2 для амплітуди $f(x, y) = \cos(x + y)$ та фази $g(x, y) = \sin(x + y)$ при різних значень ω і ℓ .

Незважаючи на те, що кусково-сталі апроксимації забезпечують кращі теоретичні оцінки похибки, використання кусково-лінійних сплайнів є доцільним, оскільки вони точніше відтворюють локальну зміну функції між лініями спостереження.

Таблиця 1 – Значення теоретичних похибок ε_1 та ε_2 при $\omega = 20\pi, 60\pi, 100\pi$

ℓ	ω	ε_1	ε_2
64	$\omega = 20\pi$	$9,74 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{-3}$
128	$\omega = 20\pi$	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$4,32 \cdot 10^{-4}$
256	$\omega = 20\pi$	$6,08 \cdot 10^{-5}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$
512	$\omega = 20\pi$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-5}$
1024	$\omega = 20\pi$	$3,80 \cdot 10^{-6}$	$6,76 \cdot 10^{-6}$
256	$\omega = 60\pi$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$
512	$\omega = 60\pi$	$4,51 \cdot 10^{-5}$	$8,03 \cdot 10^{-5}$
1024	$\omega = 60\pi$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$
512	$\omega = 100\pi$	$7,51 \cdot 10^{-5}$	$1,33 \cdot 10^{-4}$
1024	$\omega = 100\pi$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$3,34 \cdot 10^{-5}$

Вплив швидкості зростання фази та амплітуди на похибки кубатурних формул для подвійних швидкоосцилюючих інтегралів загального виду за даними на лініях.

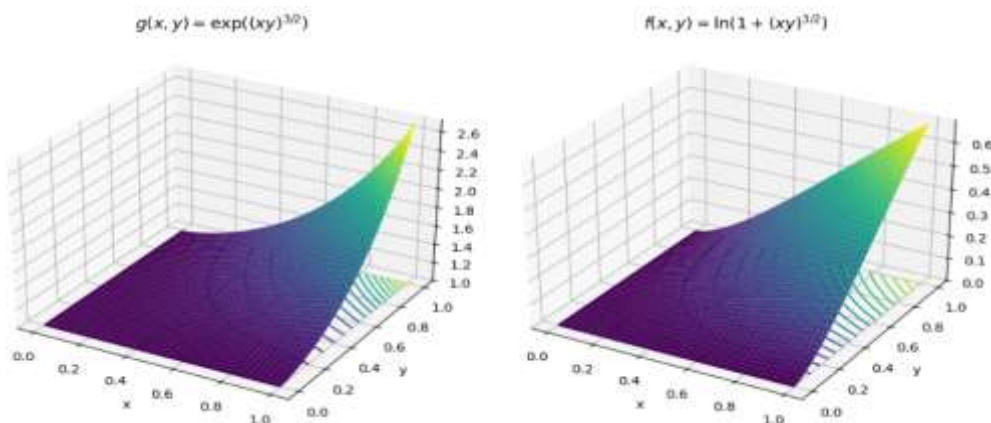
Проведемо дослідження для двох пар функцій, а саме пари

$$f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}), \quad g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}} \quad (6)$$

та пари

$$f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}, \quad g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}). \quad (7)$$

Розглянемо випадок (6), коли амплітуда є повільно зростаючою функцією, а фаза – швидко зростаючою. На рис. 3 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 4 – зображення дійсної та уявної складових усїєї підінтегральної функції $F(x, y) = f(x, y)e^{i\omega g(x, y)}$ при $\omega = 40\pi$.

Рис. 3 – Зображення фази $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ та амплітуди $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$.

Для запропонованих пар функцій (6) та (7) знайдено значення інтеграла (1) за формулою (2) для відповідних параметрів дослідження $\omega = 20\pi, 40\pi, 80\pi, 160\pi, 1000\pi$. Отримані результати систематизовано у табл. 2 – 6 та табл. 7 – 11 відповідно, де наведено чисельні значення інтегралів, обчислені з використанням Python, а також відповідні похибки наближення. Еталонні значення інтеграла (1) отримані з використанням цього ж програмного середовища, що забезпечує можливість коректного порівняння результатів і об'єктивної оцінки точності запропонованого методу.

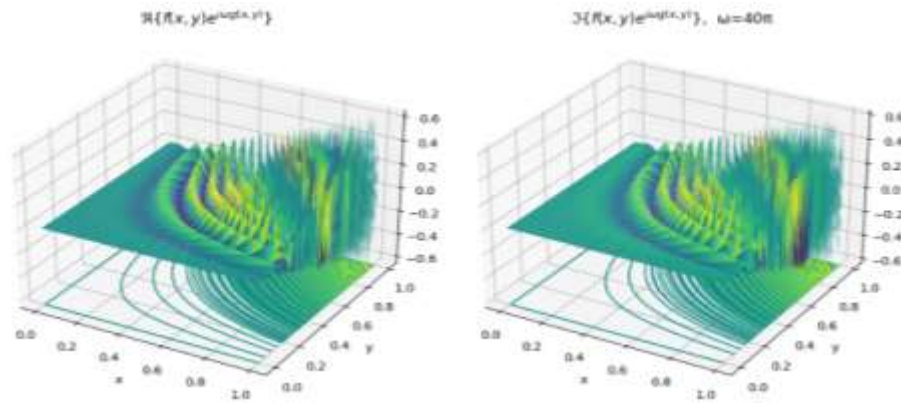


Рис. 4 – Зображення $\text{Re}F(x, y)$, $\text{Im}F(x, y)$ при $\omega=40\pi$.

Таблиця 2 – Результати обчислення $I(20\pi) = -0.00101372942276758016 + 0.00137343489762060413i$

ℓ	$\Phi_1(20\pi)$	$ I(20\pi) - \Phi_1(20\pi) $
16	$-0.00103546040567006371 + 0.00163166754178107167i$	$2.59145391871078189291e - 04$
32	$-0.00093415366481342942 + 0.00145806089852109234i$	$1.16163080547939228109e - 04$
64	$-0.00101333145504985101 + 0.00137322168577591521i$	$4.51483770550175938226e - 07$
128	$-0.00101371495411228265 + 0.00137342845507920576i$	$1.58381919987112965473e - 08$
256	$-0.00101372861245022311 + 0.00137343454323474211i$	$8.84422726040246696727e - 10$
512	$-0.00101372937402112689 + 0.00137343487612204967i$	$5.32766792343087229562e - 11$
1024	$-0.00101372941985486387 + 0.00137343489628675855i$	$3.20360113351990219281e - 12$

Таблиця 3 – Результати обчислення $I(40\pi) = -0.00040075556579444600 + 0.00047452579133147268i$

ℓ	$\Phi_1(40\pi)$	$ I(40\pi) - \Phi_1(40\pi) $
16	$-0.00177232499452210012 - 0.00068805757649440186i$	$1.79799966211500062557e - 03$
32	$-0.00043449650443687165 + 0.00048951664051198704i$	$3.69212201806069903378e - 05$
64	$-0.00037662958912901506 + 0.00044405371904614372i$	$3.88665658300708507047e - 05$
128	$-0.00040071183090982520 + 0.00047456203140918140i$	$5.67986211551636638136e - 08$
256	$-0.00040075409107432779 + 0.00047452711417854626i$	$1.98109156959975376583e - 09$
512	$-0.00040075548411553041 + 0.00047452586585357775i$	$1.10566673978140064169e - 10$
1024	$-0.00040075556093913280 + 0.00047452579587636514i$	$6.65057243538921743378e - 12$

Таблиця 4 – Результати обчислення $I(80\pi) = -0.00015221354963387498 + 0.00016379028876953736i$

ℓ	$\Phi_1(80\pi)$	$ I(80\pi) - \Phi_1(80\pi) $
16	$-0.00334668108065046353 + 0.00040292378806100872i$	$3.20340563107493524544e - 03$
32	$-0.00068693807183014080 + 0.00055404736327407901i$	$9.25459900809608333738e - 04$
64	$-0.00017579763844707892 + 0.00016090865302268530i$	$2.37594837849357915730e - 05$
128	$-0.00015740831222624174 + 0.00017342122876120040i$	$1.09426031415777598162e - 05$
256	$-0.0001522060800284241 + 0.00016379124862705752i$	$7.12333481870523736347e - 09$
512	$-0.00015221379734590699 + 0.00016379031761832273i$	$2.49386253070518523347e - 10$
1024	$-0.00015221356364832696 + 0.00016379029035777569i$	$1.41041612752991056444e - 11$

Таблиця 5 – Результати обчислення $I(160\pi) = -0.00005564227890693021 + 0.00005553651327752942i$

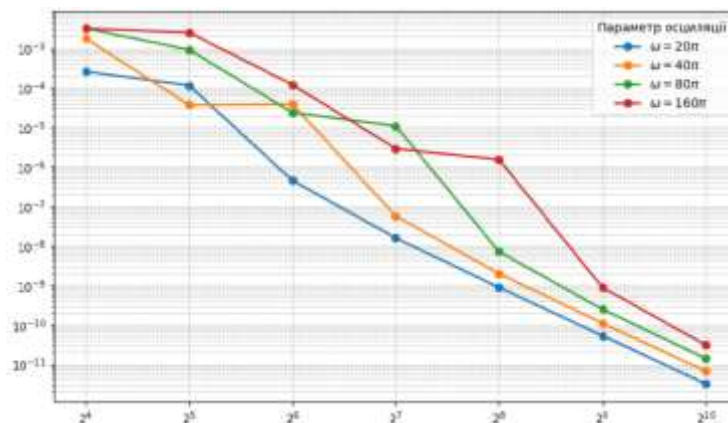
ℓ	$\Phi_1(160\pi)$	$ I(160\pi) - \Phi_1(160\pi) $
16	$-0.00181340378650704428 - 0.00260618682797360886i$	$3.18974868335449761661e - 03$
32	$-0.00164427152387240194 - 0.00190946450946483863i$	$2.52685019289591384153e - 03$
64	$-0.00003063356381273761 + 0.00014066927133488227i$	$1.21206879059897578224e - 04$
128	$-0.00005280183635234283 + 0.00005493360980349352i$	$2.90372286985439164066e - 06$
256	$-0.00005671450968095379 + 0.00005662366826697828i$	$1.52695278376469147997e - 06$
512	$-0.00005564206483543352 + 0.00005553737679897108i$	$8.89660545324502390546e - 10$
1024	$-0.00005564227186889776 + 0.00005553654346505848i$	$3.09971097262836882080e - 11$

Таблиця 6 – Результати обчислення $I(1000\pi) = -0.00000359054631166343 + 0.00000315278022942381i$

ℓ	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$-0.00057568876885848467 + 0.00313954373702194246i$	$3.18814124688526333989e-03$
32	$-0.00078834038282489180 - 0.00088390638892442853i$	$1.18435901460978523260e-03$
64	$-0.00065212386961098088 + 0.00004244734170477825i$	$6.49722659287174154376e-04$
128	$-0.00030923533555227216 - 0.00019130576156473929i$	$3.62260764735360802063e-04$
256	$0.00012179970511385138 - 0.00001888127538845200i$	$1.27311487146782888451e-04$
512	$-0.00000753679965004781 + 0.00000431932126198412i$	$4.11506177248370284903e-06$
1024	$-0.00000365479843231814 + 0.00000322157179727225i$	$9.41308388131861515201e-08$
2048	$-0.00000359207999159832 + 0.00000314886386272420i$	$4.20596032654694016064e-09$

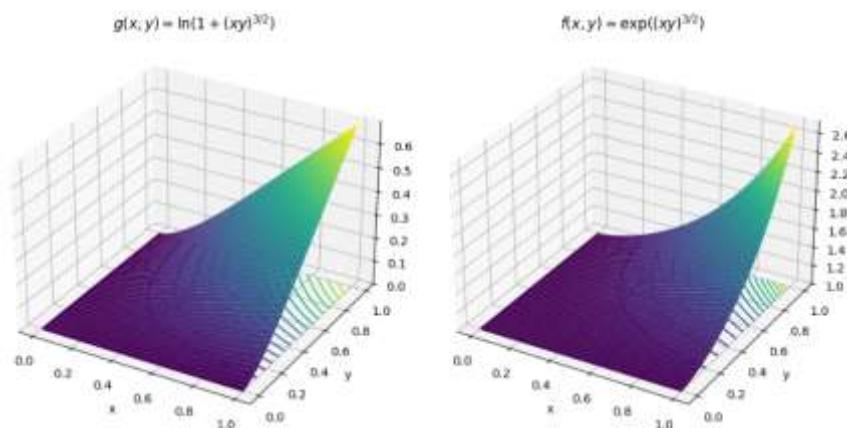
Результати обчислень, представлених у табл. 2 – 5, узагальнено, та графічно побудовано залежність похибки наближення від параметра розбиття при різних значеннях параметра осциляції для випадку, коли амплітуда $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ – повільно зростаюча функція, а фаза $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ – швидко зростаюча.

На графіку (рис. 5) спостерігається збіжність при $\ell \rightarrow \infty$, при фіксованому ℓ похибка зростає зі збільшенням ω , при фіксованому ω похибка зменшується зі збільшенням ℓ .

Рис. 5 – Залежність абсолютної похибки $|I(\omega) - \Phi_1(\omega)|$ від параметра розбиття від ℓ при різних значеннях ω

для $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ та $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$.

Розглянемо випадок (7), коли амплітуда $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ – швидко зростаюча функція, а фаза $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ – повільно зростаюча. На рис. 6 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 7 – зображення дійсної та уявної складових усієї підінтегральної функції $F(x, y) = f(x, y)e^{i\omega g(x, y)}$ при $\omega = 40\pi$.

Рис. 6 – Зображення фази $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ та амплітуди $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$.

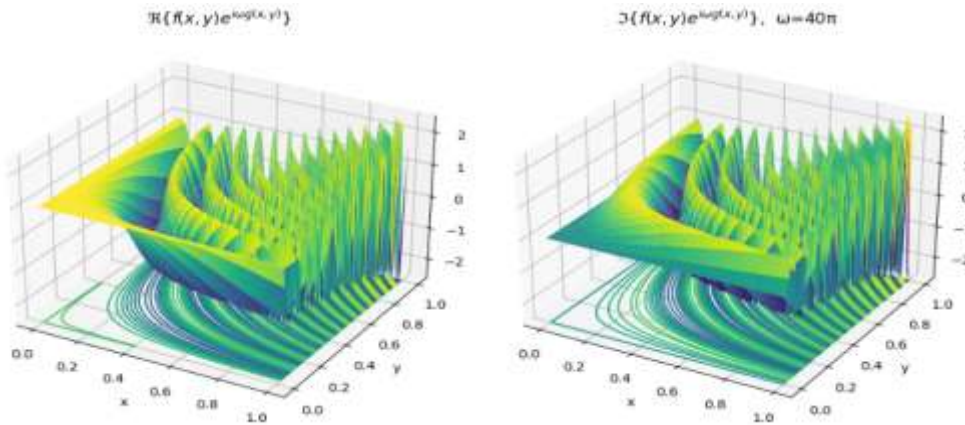


Рис. 7 – Зображення $\text{Re}F(x, y)$, $\text{Im}F(x, y)$ при $\omega=40\pi$.

Таблиця 7 – Результати обчислення $I(20\pi) = 0.15274913923483027234 + 0.15288078794789364268i$

ℓ	$\Phi_1(20\pi)$	$ I(20\pi) - \Phi_1(20\pi) $
16	$0.15274115513172059622 + 0.15286213900510398078i$	$2.02861768117608148464e - 05$
32	$0.15274874358889076187 + 0.15287974161245621030i$	$1.11863915409658644401e - 06$
64	$0.15274911556834883108 + 0.15288071671878922242i$	$7.50578953896321240712e - 08$
128	$0.15274913775184545406 + 0.15288078219946424352i$	$5.93663916103354425250e - 09$
256	$0.15274913913871734916 + 0.15288078735709728639i$	$5.98563303750385163712e - 10$
512	$0.15274913922817631717 + 0.15288078787007269854i$	$7.81048939895516634811e - 11$
1024	$0.15274913923429950247 + 0.15288078793580370252i$	$1.21015854222732222538e - 11$

Таблиця 8 – Результати обчислення $I(40\pi) = 0.10550000916001549267 + 0.11000679484621385396i$

ℓ	$\Phi_1(40\pi)$	$ I(40\pi) - \Phi_1(40\pi) $
16	$0.10455953129902798016 + 0.11011493648270417878i$	$9.46674823025547883600e - 04$
32	$0.10549864231417172000 + 0.11000486523516031512i$	$2.36467045876965286608e - 06$
64	$0.10549994370503992802 + 0.11000667385503298812i$	$1.37561694062985951917e - 07$
128	$0.10550000527867707534 + 0.11000678480895829947i$	$1.07615652660707646132e - 08$
256	$0.10550000891710513418 + 0.11000679375752119016i$	$1.11546275530412842253e - 09$
512	$0.10550000914423431075 + 0.11000679469640368968i$	$1.50639075350480430875e - 10$
1024	$0.10550000915891494246 + 0.11000679482239898721i$	$2.38402829021250596385e - 11$

Таблиця 9 – Результати обчислення $I(80\pi) = 0.07202037600349145419 + 0.07807303287980528472i$

ℓ	$\Phi_1(80\pi)$	$ I(80\pi) - \Phi_1(80\pi) $
16	$0.07209614374857274688 + 0.07767701894968918885i$	$4.03196954404047797158e - 04$
32	$0.07184065843789561034 + 0.07810884729583850161i$	$1.83251400484407705625e - 04$
64	$0.07202017157589100937 + 0.07807294354190319474i$	$2.23096177854894506414e - 07$
128	$0.07202036631501654296 + 0.07807302140221988873i$	$1.50200370381631290407e - 08$
256	$0.07202037543006850617 + 0.07807303122775562099i$	$1.74873724977757491123e - 09$
512	$0.07202037596752403070 + 0.07807303261283948803i$	$2.69377787048494962752e - 10$
1024	$0.07202037600113656013 + 0.07807303283421368478i$	$4.56523768394460082147e - 11$

Таблиця 10 – Результати обчислення $I(160\pi) = 0.04875154221840095892 + 0.05476277427981546958i$

ℓ	$\Phi_1(160\pi)$	$ I(160\pi) - \Phi_1(160\pi) $
16	$0.04917485652388003947 + 0.05519029258669602700i$	$6.01636853875537453394e - 04$
32	$0.04860807712231115379 + 0.05492790009804085494i$	$2.18743616228359954957e - 04$
64	$0.04873553955748714112 + 0.05476363231559142064i$	$1.60256476223410049709e - 05$
128	$0.04875155312905574828 + 0.05476277488511894359i$	$1.09274324627668765206e - 08$
256	$0.04875154276905841605 + 0.05476277208367063415i$	$2.26412803818312970654e - 09$
512	$0.04875154225068843022 + 0.05476277381096519847i$	$4.69960697846684891704e - 10$
1024	$0.04875154222028230816 + 0.05476277419263903684i$	$8.71967310173741273845e - 11$

Таблиця 11 – Результати обчислення $I(1000\pi) = 0.01695653639669083071 + 0.02057127591480053738i$

ℓ	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$0.02950929466230916773 + 0.03191050410642269630i$	$1.69159639411039230961e - 02$
32	$0.01514968066180856845 + 0.01487174584129794322i$	$5.97907774706412428051e - 03$
64	$0.01697857670862053595 + 0.01522472340190508810i$	$5.34659794154176189890e - 03$
128	$0.01695100614364110012 + 0.02055732683075606887i$	$1.50053538603293385470e - 05$
256	$0.01695495876484755249 + 0.02056850462855113956i$	$3.18887906779590355852e - 06$
512	$0.01695653580187374970 + 0.02057127389406641915i$	$2.10646000114779766147e - 09$
1024	$0.01695653638350208200 + 0.02057127537840931428i$	$5.36553340606828344260e - 10$
2048	$0.01695653639598573501 + 0.02057127581713230624i$	$9.76707762550816978808e - 11$

Результати обчислень, представлених у табл. 7 – 10, узагальнено, та графічно побудовано залежність похибки наближення від параметра розбиття при різних значеннях параметра осциляції для випадку, коли амплітуда $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ – швидко зростаюча функція, а фаза $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ – повільно зростаюча.

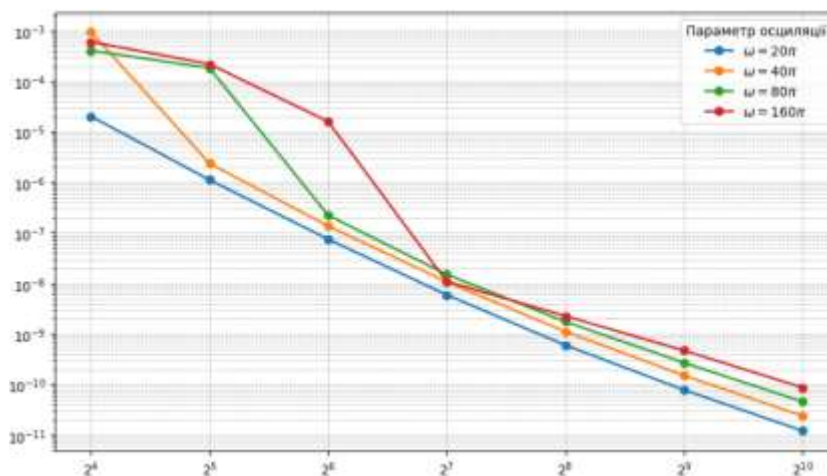


Рис. 8 – Залежність абсолютної похибки $|I(\omega) - \Phi_1(\omega)|$ від параметра розбиття ℓ при різних значеннях ω для $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ та $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$.

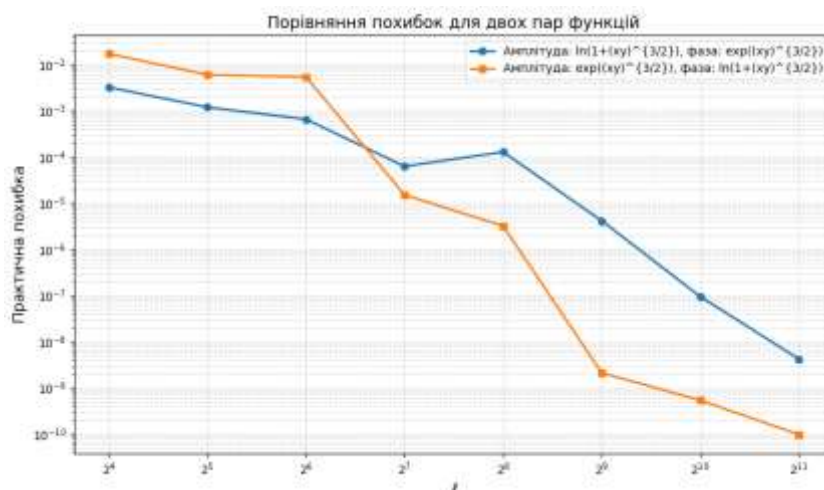


Рис. 9 – Порівняння абсолютних похибок для різних пар функцій (6), (7) в залежності від параметра розбиття ℓ при $\omega = 1000\pi$.

На рис. 8, як і на рис. 5, спостерігається збіжність похибки при $\ell \rightarrow \infty$, при фіксованому ℓ похибка зростає зі збільшенням ω , при фіксованому ω похибка зменшується зі збільшенням ℓ .

Однак в першому випадку, тобто для пари (6), логарифмічна амплітуда не підсилює похибки порівняно з випадком (7), коли маємо експоненціальну амплітуду. У випадку (7) спостерігається підсилювання локальних помилок, але повільна фаза дозволяє методу це компенсувати.

Проведений чисельний експеримент показав, що при обчисленні інтегралу від швидкоосцилюючої функції (1) за кубатурною формулою (2), швидкість збіжності методу істотно залежить від поведінки фазової функції. Тобто для даного методу поведінка фази важливіша за ріст амплітуди.

Результати обчислень, представлених у табл. 6 та табл. 11, узагальнено, та графічно побудовано на рис. 9 залежність похибки наближення від параметра розбиття ℓ при $\omega = 1000\pi$ для пар (6) та (7).

Проведемо чисельне дослідження обчислення двовимірного швидкоосцилюючого інтеграла (1) при $\omega = 1000\pi$ для функцій, що відрізняються лише характером фазової залежності, тобто для пари (6) та (8):

$$f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}), \quad g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}). \quad (8)$$

На рис. 10 та рис. 11 наведено зображення $\text{Re} F(x, y)$, $\text{Im} F(x, y)$ при $\omega = 160\pi$ для пари (6) та для пари (8) відповідно.

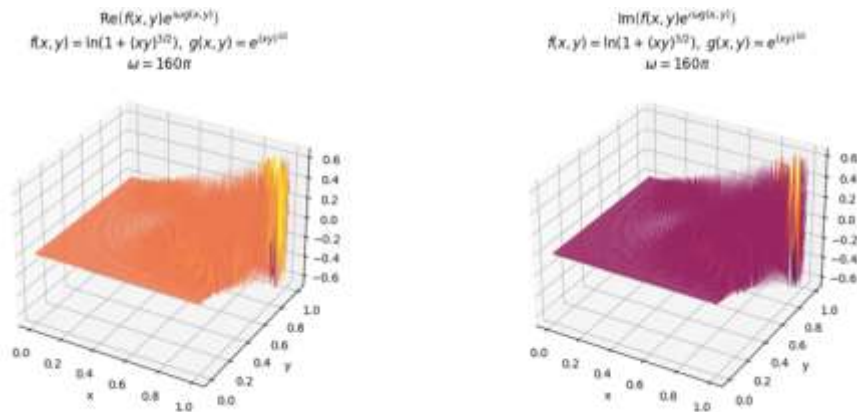


Рис. 10 – Зображення $\text{Re} F(x, y)$, $\text{Im} F(x, y)$ для пари (6) при $\omega = 160\pi$.

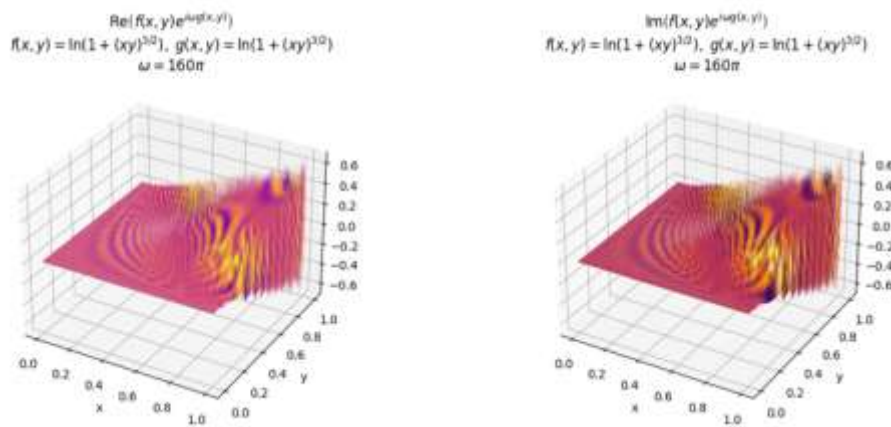


Рис. 11 – Зображення $\text{Re} F(x, y)$, $\text{Im} F(x, y)$ для пари (8) при $\omega = 160\pi$.

Результати обчислень інтеграла (1) для пари (6) та пари (8), представлених у табл. 6 та табл. 12, узагальнено, та графічно побудовано (рис. 12) залежність похибки наближення від параметра розбиття ℓ при $\omega = 1000\pi$.

Таблиця 12 – Результати обчислення $I(1000\pi) = -0.00000348022601246453 + 0.00000320746981592664i$

ℓ	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$0.00403957828826545691 + 0.00162547267266734716i$	$4.35638227641442759425e - 03$
32	$0.00006181500986759383 - 0.00153226012656000111i$	$1.53685529811661250772e - 03$
64	$-0.00003735561309608193 - 0.00136877422316165486i$	$1.37239983522138907050e - 03$
128	$-0.00000406611112269398 + 0.00000039614617569807i$	$2.87172456417682715496e - 06$
256	$-0.00000378374933102675 + 0.00000266035141393928i$	$6.25671599726429954775e - 07$
512	$-0.00000348039292084224 + 0.00000320780290185098i$	$3.72564946747841741856e - 10$
1024	$-0.00000348023037112280 + 0.00000320747821199797i$	$9.46001668439337217209e - 12$
2048	$-0.00000348022626938049 + 0.00000320747026869185i$	$5.20578667502241695215e - 13$

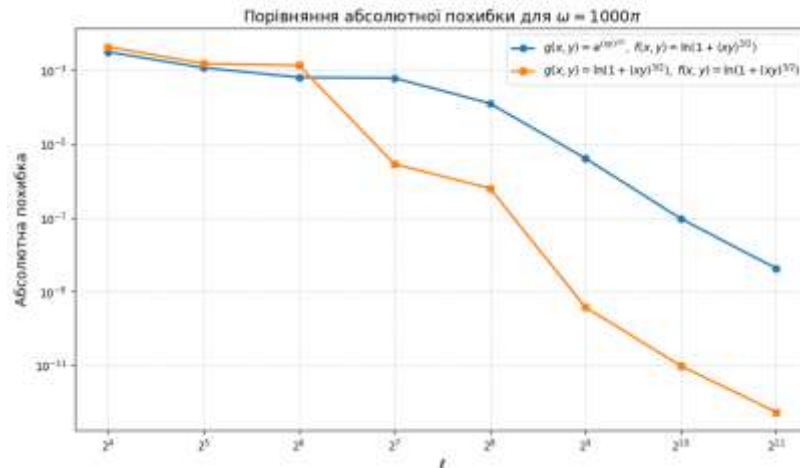


Рис. 12 – Порівняння абсолютних похибок для різних пар функцій (6), (8) в залежності від параметра розбиття l при $\omega = 1000\pi$.

Аналіз отриманих результатів показує суттєвий вплив властивостей фазової функції на швидкість збіжності методу та величину похибки.

Перспективи подальших досліджень. Стаття присвячена аналізу абсолютних похибок кубатурних формул для наближеного обчислення подвійних швидкоосцилюючих інтегралів за даними на лініях залежно від зростання фази, амплітуди та типу апроксимації. У подальшому планується провести більш детальне дослідження та аналіз похибки кубатурних формул за даними на площинах залежно від зростання фази, амплітуди та типу апроксимації. Таке дослідження сприятиме виявленню потенційної спроможності формул в одному класі функцій.

Висновки. В статті для наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій двох змінних загального виду (1) проведено порівняльний аналіз точності кубатурних формул, які в своїй побудові використовують оператори О. М. Литвина (оператори кусково-сталої та лінійної сплайн-інтерлінації). Зазначені кубатурні формули в своїй побудові використовують дані для амплітуди та фази на відповідних лініях. Проаналізовано вплив швидкості зростання фази та амплітуди на точність обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду.

Теоретичні результати порівняльного аналізу кубатурних формул за таким критерієм, як точність, свідчать про перевагу формули, побудованої з використанням кусково-сталої інтерлінації. Зокрема, встановлено, що застосування цього типу наближення забезпечує менші значення похибки обчислення порівняно з альтернативним підходом. Незважаючи на кращі теоретичні оцінки похибки для формули з використанням кусково-сталої інтерлінації, застосування кусково-лінійної сплайн-інтерлінації при наближеному обчисленні інтеграла (1) є доцільним, оскільки точніше відтворюються локальні зміни підінтегральної функції між лініями спостереження.

Чисельні експерименти, проведені в даному дослідженні, показують, що швидкість збіжності методу, в даному випадку кубатурної формули на основі кусково-сталої інтерлінації, істотно залежить від поведінки фазової функції. Для логарифмічної фази збіжність є швидкою і майже монотонною навіть при великих значеннях параметра осциляції, для експоненціальної фази потрібні значно більші параметри розбиття.

Список літератури

1. Shi D., Anastasio M., Huang Y., Gbur G. Intensity diffraction tomography for phase objects // Proc. SPIE 5368, Medical Imaging 2004: Physics of Medical Imaging, (6 May 2004). – 2004. – pp. 795 – 802. DOI: 10.1117/12.534461.
2. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives // Proc. Royal Soc. – 2005. – Vol. 461. – Is. 2057. – pp. 1383 – 1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
3. Khoromskij B., Veit A. Efficient computation of highly oscillatory integrals by using QTT tensor approximation // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 16. – Is. 3. – pp. 145 – 159. DOI: 10.1515/cmam-2015-0033.
4. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2021. – Springer, Cham, 2021. – vol. 12950. – pp. 622 – 629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1_45.
5. Gao J., Chang G. A bivariate Filon-Clelland-Curtis method of the highly oscillatory integrals on a square // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – vol. 439. – pp. 115599. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115599.
6. Gao J., Iserles A. On an extended Filon method for highly oscillatory integrals over a simplex // A Mathematics of Computation. – 2023. – Vol. 92. – pp. 867 – 893. DOI: 10.1090/mcom/3797.
7. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions // Cybernetics and Systems Analysis. – 2024. – No. 60. – pp. 276 – 284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
8. Garcke J., Griebel M. Sparse Grids in a Nutshell // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2013. – vol. 88. – pp. 57 – 80. DOI: 10.1007/978-3-642-31703-3-3.

9. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals // *Bit Numer Math.* – 2025. – Vol. 65(36). – P. 1 – 29. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
10. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review) // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2018. – no. 54(1), – pp. 21 – 30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
11. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* – Springer, 2021. – 378 p. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.
12. Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // *Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки.* – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
13. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : *Наук. думка*, 2017. – 336 с.
14. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
15. Nechuyviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
16. Mezhukeyev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // *U.P.B. Sci. Bull., Series A.* – 2018. – Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. – Режим доступу: – https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf. – Дата звертання: 17.09.2025.
17. Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions // *Cybern Syst Anal.* – 2025. – no. 61. – pp. 589 – 595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
18. Хурдей Є. Л., Іванов В. В. Кубатурні формули для осциляційних інтегралів із заданими слідами функції на лініях // *Cybernetics and Computer Technologies.* – 2025. – № 3. – С. 59 – 67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.5.
19. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions Using Reconstruction Operators Based on Data On Lines // *Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences.* – 2025. – Is. 28. – pp. 137 – 154. DOI : 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

References (transliterated)

1. Shi D., Anastasio M., Huang Y., Gbur G. Intensity diffraction tomography for phase objects. *Proc. SPIE 5368, Medical Imaging 2004: Physics of Medical Imaging, (6 May 2004)*. 2004, pp. 795–802. DOI: 10.1117/12.534461.
2. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. Royal Soc.* 2005, Vol. 461, Is. 2057, pp. 1383–1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
3. Khoromskij B., Veit A. Efficient computation of highly oscillatory integrals by using QTT tensor approximation. *Computational Methods in Applied Mathematics.* 2016, Vol. 16, Is. 3, pp. 145–159. DOI: 10.1515/cmam-2015-0033.
4. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators. *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2021.* Springer, Cham, 2021, vol. 12950, pp. 622–629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1_45.
5. Gao J., Chang G. A bivariate Filon–Clenshaw–Curtis method of the highly oscillatory integrals on a square. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2024, vol. 439, 115599. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115599.
6. Gao J., Iserles A. On an extended Filon method for highly oscillatory integrals over a simplex. *A Mathematics of Computation.* 2023, Vol. 92, pp. 867–893. DOI : 10.1090/mcom/3797.
7. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2024, No. 60, pp. 276–284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
8. Garcke J., Griebel M. Sparse Grids in a Nutshell. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* 2013, vol. 88, pp. 57–80. DOI: 10.1007/978-3-642-31703-3-3.
9. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals. *Bit Numer Math.* 2025, Vol. 65(36), pp. 1–29. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
10. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018, no. 54(1), pp. 21–30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
11. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* Springer, 2021. 378 p. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.
12. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya $2D$ – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannnyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating $2D$ Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
13. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'ni alhorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvannyam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
14. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
15. Nechuyviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2020, Vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
16. Mezhukeyev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A.* 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. Available at : https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf (accessed 17 September 2025).
17. Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybern Syst Anal.* 2025, no. 61, pp. 589–595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
18. Khurdei Ye. L., Ivanov V. V. Kubaturni formuly dlia ostsylyatsiynykh integrahlyv iz zadanymy slidamy funktsiyi na liniyakh [Cubature Formulas for Oscillatory Integrals with Given Function Traces on Lines]. *Cybernetics and Computer Technologies.* 2025, no. 3, pp. 59–67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.
19. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions Using Reconstruction Operators Based on Data On Lines. *Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences.* 2025, Is. 28, pp. 137–154. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

Надійшла (received) 30.11.2025; Доопрацьована (finalized) 15.01.2026; До публікації (for publication) 05.02.2026

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Хурдей Євгенія Леонідівна – старший викладач кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (098) 501-63-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8317-8194>; e-mail: yevheniia.khurdei@karazin.ua.

Khurdei Yevheniia Leonidivna – Senior Lecturer at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (098) 501-63-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8317-8194>; e-mail: yevheniia.khurdei@karazin.ua.

Іванов Владислав Вікторович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Ivanov Vladyslav Viktorovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Шніцар Андрій Степанович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Shnitsar Andriy Stepanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Гіщак Остап Романович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Hishchak Ostop Romanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Заборний Антон Віталійович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.zaborny@karazin.ua.

Zaborniy Anton Vitaliiovich – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.za-borny@karazin.ua.

O. G. NIKOLAEV, M. V. SKITSKA, N. V. DRASHPUL

OPTIMAL CONTROL OF THE THERMOELASTIC STATE OF A BALL WITH A SPHERICAL INCLUSION USING POWER OF DISTRIBUTED INTERNAL HEAT SOURCES

In various fields of engineering and technology, problems arise in creating various types of technical systems with internal heat sources. Their design is based on modeling and optimization of the obtained models, which cannot always be achieved with guaranteed accuracy and completeness using known numerical methods. Therefore, further development of a new effective numerical-analytical method for solving similar problems for composite bodies with complex geometry and arbitrary thermomechanical characteristics of the constituent components, proposed by the authors in one of the previous articles, is an actual task. This is the focus of this paper. Using the example of an elastic body with a certain geometry (a ball with an eccentric spherical inclusion), the problem of optimally controlling its thermoelastic steady-state is solved using the power of distributed heat sources within the inclusion. The objective functional in the problem was chosen to be the functional that expresses the root-mean-square value of the stress on the inclusion surface. An additional limitation is imposed on the mean square power of heat sources. This formulation of the problem is considered for the first time. The solution to the problem is divided into two stages. The first stage solves the direct problem of modeling the thermoelastic state of a ball with an inclusion at a given temperature and external load on its surface, as well as the power of distributed heat sources in the inclusion. In this case, the generalized Fourier method is used, the modified apparatus of which for the specified body geometry was developed by the authors in the work. As a result of the implementation of the first stage, the original problem is replaced by an equivalent problem of optimal control of the state of an object, which is defined by two infinite linear algebraic systems. In this case, the optimization problem is posed with respect to a quadratic functional defined on the Cartesian product of Hilbert spaces of square-summable numerical sequences. The arguments of the functional are the solutions of the specified systems. The fundamental difficulty in solving the equivalent (inverse) problem is the impossibility of analytically expressing the solutions of systems through optimization parameters. The work further develops the method of parametric solution of infinite systems of linear algebraic equations proposed by the authors. As a result of its application, the quadratic functional is expressed in terms of optimization parameters. The problem of finding a conditional extremum of a functional is solved using the Lagrange method. Its application leads to an infinite system of linear algebraic equations with a quadratic constraint, which is solved by the spectral method. All intermediate stages of the implementation of the proposed method are strictly justified by five theorems proven in the work. The numerical implementation of the method was carried out within the framework of an extensive computer experiment, the results of which are presented in the paper. The work shows pictures of optimal temperature fields in a ball and the powers of distributed heat sources in the inclusion, as well as graphs of optimal temperatures and normal stresses on the surface of the inclusion depending on the geometric parameters and three different types of external load. All the main results of the work are new. The analytical justification and calculations performed prove the correctness and effectiveness of the proposed method.

Key words: optimal control, thermoelastic state, power of distributed heat sources, objective functional, modeling, generalized Fourier method, infinite system of linear algebraic equations, parametric solution, rigorous justification.

О. Г. НИКОЛАЄВ, М. В. СКИЦКА, Н. В. ДРАШПУЛЬ

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИМ СТАНОМ КУЛІ ЗІ СФЕРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОТУЖНОСТІ РОЗПОДІЛЕНИХ ВНУТРІШНІХ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

У різних галузях техніки та технології виникають задачі створення різноманітних типів технічних систем із внутрішніми джерелами тепла. Їх конструювання ґрунтується на моделюванні та оптимізації отриманих моделей, що не завжди можна виконати з гарантованою точністю та повнотою відомими чисельними методами. Тому подальший розвиток нового ефективного чисельно-аналітичного методу розв'язання подібних задач для складових тіл зі складною геометрією та довільними термомеханічними характеристиками складових компонентів, запропонованого авторами в одній із попередніх статей, є актуальною задачею. У цьому і полягає суть даної роботи. На прикладі пружного тіла з певною геометрією (куля з ексцентричним сферичним включенням) розв'язується задача оптимального керування його стаціонарним термопружним станом за допомогою потужності розподілених джерел тепла у включенні. Цільовим функціоналом у задачі було обрано функціонал, який виражає середньоквадратичне значення напруження на поверхні включення. Додаткове обмеження накладається на середній квадрат потужності теплових джерел. Така постановка задачі розглядається вперше. Розв'язання задачі розбите на два етапи. На першому – розв'язується пряма задача моделювання термопружного стану кулі з включенням при заданих на межі кулі температурі та зовнішньому навантаженні, а у включенні – потужності розподілених теплових джерел. При цьому використовується узагальнений метод Фур'є, модифікований апарат якого для зазначеної геометрії тіла розроблено авторами в роботі. В результаті реалізації першого етапу вихідна задача замінена на еквівалентну задачу оптимального керування станом об'єкта, який задається двома нескінченними лінійними алгебраїчними системами. При цьому оптимізаційна задача ставиться відносно квадратичного функціонала, визначеного на декартовому добутку гільбертових просторів числових послідовностей, сумовних з квадратом. Аргументами функціонала є розв'язки вказаних систем. Принциповою складністю розв'язання еквівалентної (зворотної) задачі є неможливість аналітичного вираження розв'язків систем через параметри оптимізації. У роботі отримав подальший розвиток запропонований авторами метод параметричного розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Внаслідок його застосування квадратичний функціонал виражається через параметри оптимізації. Задача на умовний екстремум функціонала вирішується методом Лагранжа. Його застосування призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратичним обмеженням, яка розв'язується спектральним методом. Усі проміжні етапи реалізації запропонованого методу строго обґрунтовані п'ятьма доведеними у роботі теоремами. Чисельна реалізація методу проведена в межах розгорнутого комп'ютерного експерименту, результати якого наведено у роботі. У роботі показано рисунки оптимальних температурних полів у кулі та потужностей розподілених джерел тепла у включенні, а також графіки оптимальних температур та нормальних напружень на поверхні включення залежно від геометричних параметрів та трьох різних типів зовнішнього навантаження. Усі основні результати роботи є новими. Аналітичне обґрунтування та проведені розрахунки доводять коректність та ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: оптимальне керування, термопружний стан, потужність розподілених джерел тепла, цільовий функціонал, моделювання, узагальнений метод Фур'є, нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь, параметричний розв'язок, строге обґрунтування.

Introduction. One of the important problems of modern engineering and technology is the development and use of various types of systems with internal heat sources. These include underground storage facilities, geothermal reservoirs, industrial furnaces, thermal elements of nuclear power plants, heat generators, microcircuits, and much more. Purely

spherical elements with internal heat sources have found applications in biomedicine (nano-capsules with core-shell architecture for local heating of tumors), technical chemistry (localized catalysis), ecology (neutralization of organic pollutants), energy (battery components), etc. The creation of such systems is usually preceded by their mathematical modeling with subsequent optimization of the resulting models. In modeling, strength problems come to the fore, in which it is necessary to take into account the interaction of two types of fields: stress-strain and thermal. Moreover, it is the temperature stresses that are decisive for the above systems. It should be emphasized that internal heat sources significantly complicate the modeling process, in which it is necessary to take into account their power, location, and shape. Moreover, the impossibility of parametric representation of models does not allow setting optimization problems with them. Therefore, the development of effective methods for modeling the thermoelastic state of bodies with complex geometry and internal heat sources and the solution of problems of optimal control of this state using heat sources based on the constructed parametric models are very relevant.

In this paper, using the example of an elastic body with a specific geometry (a ball with an eccentric spherical inclusion), we develop a method for solving the problem of optimally controlling the body's steady-state thermoelastic state using the power of internal distributed heat sources. The method is rigorously justified. Numerical modeling and optimization results are presented, confirming the correctness and effectiveness of the proposed method.

Review of previous research results. In [1], an approach to the analysis of spherical inhomogeneities in an infinite matrix under uniaxial and triaxial loading conditions is proposed. The authors apply the decomposition method, considering the inclusion through an equivalent solution for the cavity. The key feature is the use of the principle of compatibility of deformations for statically indeterminate systems, which allows establishing a direct analytical relationship between the displacements of the poles/equator of the inhomogeneity and the contact stresses at the boundary of the inhomogeneities. The study [2] is devoted to the problem of displacement and rotation of a weakly deformed spherical rigid inclusion having the shape of a perturbed sphere. The author uses the small parameter method to describe the surface geometry and solves the problem through decomposition into separate components for arbitrary small displacements and rotations. The mathematical apparatus is based on the use of asymptotic series and expansions in tensor spherical functions, which allows satisfying the boundary conditions at the perturbed interface of media. In [3], the scale dependence of the elastic field inside a nanoscale spherical inclusion due to the influence of interfacial stresses was investigated. The authors apply *the classical Goodier approach*, which is based on the representation of solutions to *the Lamé equation in terms of volume spherical harmonics*. The use of a simplified harmonic basis allowed us to obtain explicit analytical expressions for the displacement fields, which demonstrate the emergence of non-uniformity of the elastic state at the nanoscale even under the condition of spherical symmetry of the problem. A similar approach in [4] solves the problem of the stressed state of an elastic medium with a small spherical cavity. The authors of [5] obtained a closed-form solution for the analysis of the stress distribution around rigid nanoparticles under uniaxial tension. A feature of the model is the explicit consideration of the interfacial spherical layer, the thickness of which is proportional to the inclusion radius, and the elastic characteristics differ from the matrix parameters. By approximating by the leading terms of the displacement and stress distributions, the authors were able to establish the regularities of the transformation of force fields in a three-phase system. In [6], the stress-strain state of a three-phase system consisting of a spherical inclusion and a concentric layer embedded in an infinite matrix under the action of a uniform load was investigated. The author implemented an approach based on the decomposition of the Lamé equation. Assuming a functional dependence of displacements on given deformations at infinity, a system of differential equations was obtained, the solution of which is presented in a closed analytical form. This allows us to effectively assess the influence of the geometric and mechanical parameters of the intermediate layer on the overall state of the composite.

The use of analytical and numerical methods in the study of stationary thermal and thermoelastic fields is typical for plane problems and spatial problems in canonical domains. The authors of [7] implemented a comprehensive approach to the analysis of the thermoelastic state of a semi-infinite body in the presence of stationary heat sources. The method is based on the construction of *Boussinesq functions* by reducing the problem to boundary value problems for harmonic functions in a half-space with different types of mechanical and thermal fixation of the boundary. The obtained analytical relations for displacements and stresses are interpreted as *the corresponding Green's functions*, which allows calculating the stress-strain state for arbitrary heat release in the strip domain. In [8], a method for solving the stationary thermoelasticity problem for an isotropic cylinder of finite length is proposed by decomposing the temperature field into symmetric and antisymmetric components. The authors use double expansions: into Fourier series in the axial coordinate and into *Bessel-Dini series* in the radial variable. This approach allowed reducing the boundary value problem to an infinite system of linear algebraic equations, the solution of which was found using an improved reduction method, which provides high accuracy in determining axisymmetric temperature stresses. In the study [9], a generalized method for calculating the steady-state thermoelastic state in multilayer bodies is proposed, taking into account the temperature dependence of the physical and mechanical characteristics of materials. The methodology is based on the complex application of *the Kirchhoff transformation for linearization of heat conduction equations*, *Newton's iterative algorithm*, and the apparatus of generalized functions and Green's functions. This approach allows modeling the stress-strain state in thermosensitive multilayer systems in the presence of internal heat sources. In [10], analytical solutions of mixed problems of steady-state thermal conductivity and thermoelasticity for a semi-infinite layer under the conditions of smooth contact on the end surface are presented. The research methodology is based on the decomposition of the system

of Lamé equations, which allows us to isolate independent differential equations for further analysis. The application of the method of integral transformations ensured the obtaining of exact solutions that describe the interaction of thermal and mechanical fields in canonical semi-bounded regions. In the study [11], thermal stresses arising from the discrepancy between the coefficients of thermal expansion of the spherical inclusion and the matrix were analyzed. Unlike isotropic models, the author took into account the cubic symmetry of both phases of the material. To solve the problem, the method of *the equivalent Eshelby inclusion* was used, which allowed us to establish the influence of the anisotropy of elastic properties on the local concentration of stresses when the temperature changes.

In a number of studies, finite and boundary element methods and their modifications are used to solve thermoelastic problems. The authors of [12] proposed an approximate method for solving a plane stationary thermoelastic problem for a rectangular cross-section under mixed boundary conditions. The method is based on a combination of a classical solution for a uniform temperature field with the apparatus of boundary integral equations. The unknown deformation components are represented in the form of series in *Cartesian harmonics* with the addition of specific harmonic functions, which allows us to adequately model the features of the stress state at singularity points caused by a change in the type of boundary conditions. In [13], another approach is presented, namely, an effective modification of the boundary element method for solving three-dimensional thermoelasticity problems is implemented. The authors proposed an algorithm for transforming the triple integral, which describes the effect of the temperature field, into a surface integral within the general boundary integral equation. The use of appropriate Green's functions for this procedure allowed to significantly increase the computational efficiency of the method, while maintaining high accuracy of analysis for bodies with complex geometry and anisotropic properties.

Some studies investigate internal heat sources. In [14], the formation of a stationary thermal field in a solid sphere under the condition of a uniform distribution of internal heat sources was investigated. The author conducted a comparative analysis for the cases of constant thermal conductivity and its linear dependence on temperature. Due to the assumption of central symmetry, the thermal conductivity equation, which depends only on the radial coordinate, was integrated in a closed form, which allowed obtaining accurate analytical solutions for both physical models. In [15], an analytical method for solving axisymmetric problems of stationary thermoelasticity for bodies with thin thermally active inclusions was proposed. The authors used a mathematical model in which the plane inhomogeneity is replaced by an equivalent layer of heat sources given by *the Hankel integral transformation*. The solution of the problem is reduced to the analysis of a *singular integral equation with a Bessel kernel*. By using *discontinuous Weber–Schaffheitlin integrals* and expanding functions into series by *orthogonal Jacobi polynomials*, an effective analytical solution was obtained for determining the stress-strain state of the entire array. In the article [16] the authors investigated the thermoelastic state of an unbounded medium containing a single or a group of heat-generating spherical inclusions with a constant density of heat sources. The authors consider a model of thermal inclusions, where the elastic properties coincide, and only the coefficients of thermal conductivity and linear expansion differ. For a single inhomogeneity, an exact solution was obtained based on the fundamental solutions of *the Laplace equation*, while the interaction in the inclusion system was taken into account using the method of superposition of potentials centered in the geometric cells of each object. In [17], an analytical apparatus was developed for constructing Boussinesq functions in thermoelasticity problems for a half-space containing a heat-generating spherical inclusion. The authors consider a wide range of boundary conditions on the surface, from a free to a rigidly fixed boundary under different heat transfer regimes. The technique is based on a combination of thermoelastic displacement potentials with the mirror image method (symmetric or antisymmetric extension), which allowed reducing the problem for a half-space to the analysis of the interaction of two inclusions in an unbounded medium and obtaining exact solutions for a constant source density. In the study [18], the steady-state thermoelastic state of a hollow sphere made of a functional gradient material (FGM) was analyzed. A feature of the model is the consideration of all thermomechanical characteristics as continuous functions of the radial coordinate, described by power laws. Based on *the generalized Hooke's law* taking into account thermal deformations, the authors managed to obtain a closed analytical solution of the system of equations of thermal conductivity and equilibrium, which allows for a detailed study of the influence of the property gradient on the distribution of internal stresses. Similarly, in [19] the thermoelastic state of a hollow cylinder made of a functionally gradient material is defined as defined. The authors in [20] presented a mathematical model of the thermoelastic behavior of a multilayer composite hollow sphere with constant internal heat sources in each layer. The authors implemented an approach in which the temperature field is divided into a transient and a stationary component under the condition of ideal thermal contact at the phase boundaries. Based on the direct integration of the equilibrium equations in the stresses for each layer, the problem is reduced to solving a multiparameter system of linear equations. The emphasis is on the dynamics of the formation of the temperature profile, although the question of the mathematical conditionality of the obtained high-order systems remains open. In the study [21], non-stationary thermal processes in composite structures with spherical inhomogeneities during laser pulse heating were analyzed. The authors implemented a hybrid computational algorithm that combines the Eshelby equivalent inclusion method for describing local fields with the boundary element method for taking into account edge effects. Using the example of a composite disk, the significant influence of the size factor - the ratio of the sample thickness to the radius of the inclusions - on the accuracy of laser measurements of thermophysical characteristics, which is of critical importance for the metrology of inhomogeneous media, is demonstrated. In [22], a numerical-analytical model for evaluating the thermoelastic properties of composites with ellipsoidal and spherical inclusions in a cubic matrix is presented. The authors integrated the Eshelby equivalent inclusion method, which operates on the concepts of natural strains and temperature gradients, into

the general scheme of the boundary element method to satisfy the boundary conditions at the boundaries of the unit cell. The formed model allowed to establish statistical regularities of the influence of the volume fraction and spatial distribution of particles on the effective macroscopic characteristics of a heterogeneous medium. In the article [23] an innovative approach to the analysis of thermomechanical characteristics of two-phase architected materials with different topological configurations is presented. The authors use *the Gilis formula to describe the topology*, and the estimation of effective elastic moduli and thermal conductivity coefficients is carried out using *the Galerkin boundary element method*. A feature of the study is the integration of the obtained data into the feature space for training deep neural networks. This allowed the use of interpreted machine learning algorithms (in particular, *Shapley values*) to identify complex dependencies between the geometric design of the phases, their volume fraction and the final physical and mechanical properties of the composite. In [24], two-dimensional steady-state thermoelasticity problems for an infinite matrix with elliptical inhomogeneity under imperfect contact conditions were solved. The model takes into account weak thermal conductivity and spring coupling between the matrix and the inhomogeneity, which is described by the corresponding interface functions. The authors determined the parameters of these functions, under which the remote heat flux and uniform heating generate linear and constant stress distributions in the inhomogeneity, respectively. The analytical expressions for the temperature and force fields obtained in a closed form allow us to evaluate the influence of defects in the interfacial coupling on the general thermomechanical state of the system. In the study [25], a hierarchical multiscale model was proposed to analyze the influence of thermal stresses on the ductile fracture of polymer nanocomposites. The material degradation process is considered through the mechanism of detachment of spherical nanoparticles from the matrix within a representative volume element containing the interfacial region. The model, verified by experimental data, allows establishing a quantitative relationship between the fracture toughness parameters and a set of thermomechanical characteristics, including the mass fraction of the filler, the coefficients of thermal expansion of the phases, as well as the geometric and stiffness parameters of the ideal contact.

Also, special attention should be paid to optimal control problems. In [26], the problem of speed of operation when heating a thermoelastic plate by internal heat sources is considered. The author formulates a mathematical model of optimal control taking into account strict constraints on both the intensity of the sources and the maximum permissible thermal stresses. The methodology is based on a combination of approaches to solving inverse problems of heat conduction with the apparatus of the finite difference method for analyzing the direct problem of thermoelasticity. This allows us to determine such a time law of energy release that minimizes the duration of heating without violating the strength criteria of the material. In the article [27], an atypical problem of optimal control of a thermoelastic body under conditions of incomplete initial data (lack of information about the initial temperature distribution and displacements) was solved. To overcome this uncertainty, the authors applied *the concept of "lossless control" (Pareto control)* developed by *J.-L. Lyons*. The methodology is based on the introduction of a sequence of cost functionals with a regularizing parameter. It is proved that the limit transition, when this parameter tends to zero, allows transforming the strategy of minimum loss into a full-fledged lossless control, which ensures stable control of deformations even with a deficit of initial information. In [28], based on the apparatus of inverse problems of thermomechanics, a mathematical statement of the problem of optimal heating action speed of thermosensitive bodies of canonical form (layer, cylinder, sphere) was formulated. A feature of the model is the consideration of the dependence of the physical and mechanical properties of the material on temperature and the presence of restrictions on the intensity of control and the limiting tangential stresses in the zone of plastic deformations. The authors developed a stable numerical algorithm for constructing the optimal heating law, which allows minimizing the process time while strictly observing the strength criteria under conditions of inelastic behavior of the material. In the study [29], a method of quasi-static inverse thermoelasticity problem was developed to optimize the heating rate of a long hollow cylinder under conditions of non-stationary non-axisymmetric thermal regime. The authors proposed a control algorithm that takes into account the angular dependence of the temperature field and strict constraints on thermoelastic stresses. The mathematical model was reduced to the Fredholm integral equation of the first kind, for which a stable regularized solution method was developed. This allowed obtaining optimal time and space heating parameters that minimize the duration of transient processes without violating the strength criteria of the structure. In [30], a mathematical formulation was formulated and an algorithm was developed for numerically solving a two-dimensional problem of optimal speed-dependent heating control of a long rectangular parallelepiped. The study is based on a model of elastic-plastic deformation of a thermosensitive material, the properties of which depend on temperature. The authors implemented a strategy for minimizing the heating time while observing restrictions on the intensity of thermal influence and the maximum permissible intensity of tangential stresses in the plasticity zone. This allows optimizing the heat treatment of elements with a rectangular cross-section, preventing their premature failure or undesirable residual deformations. In [31], the problem of determining the optimal temperature regime for heating a piecewise homogeneous cylindrical glass shell under the condition of minimizing meridional and circular normal stresses was investigated. Heating is carried out convectively using external heat sources with a thermally insulated inner surface. The authors proposed a method of step-by-step parametric optimization that allows finding such a law of change in the temperature of the external environment that ensures the achievement of a given thermal state at a fixed point in time while strictly observing the restrictions on the heating rate and the level of thermal stresses. Thanks to the procedure of averaging the characteristics over the shell thickness, the mathematical model was reduced to one-dimensional in spatial coordinates, which significantly simplifies the computational implementation of the algorithm. In [32], a method for optimal control of the axisymmetric thermally stressed state of a solid cylinder by modifying the spatial distribution

of volumetric heat sources is presented. The methodology is based on the application of the variational method of homogeneous solutions, which allows for effective minimization of thermal stresses in closed regions. In [33], a theoretical justification and a numerical algorithm for solving the coupled optimal control problem under conditions of stationary thermoelasticity are presented. The author uses the apparatus of classical variational calculus and *the method of Lagrange* multipliers to derive the necessary optimality conditions that form a system of conjugate differential equations for the temperature field and the displacement field. The practical implementation of the method is based on a combination of the finite element method for spatial discretization and the iterative conjugate gradient method for minimizing the objective functional, which allows for effective optimization of the boundary control for bodies of arbitrary finite shape. In the article [34] proposes a method for determining the optimal stress control of an elastic space containing a coaxial cavity and inclusion using the temperature distribution on the cavity surface. The problem is reduced to an equivalent problem of the conditional extremum of a quadratic functional. A method for parametrically solving infinite systems of linear algebraic equations is also proposed.

The above bibliographic review of the latest research in the field of thermoelasticity and optimal stress control using a temperature field allows us to draw the following conclusions:

- aside from the work of the authors [34], there are virtually no studies of optimal control problems for the thermoelastic state of multiphase bodies with complex geometries;
- the method proposed in [34] for solving problems of optimal control of the thermoelastic state of a body using a temperature field requires further development not only for bodies with different geometries but also for other types of physical control;
- the method for solving the equivalent problem proposed in [34] needs to be expanded to a broader class of controls, which requires a more detailed justification.

Thus, the aim of this work is to further develop the method for optimal control of the thermoelastic state of a composite body using the power of internal distributed heat sources, to verify the correctness and efficiency of the method, and to apply it to the optimal modeling of the thermoelastic state of a ball with an eccentric spherical inclusion.

Mathematical formulation of the problem. Consider an elastic ball centered at a point O_1 of radius R_1 , which has an eccentric spherical elastic inclusion $B_{R_2}(O_2)$ centered at a point O_2 of radius R_2 ($|O_1O_2| + R_2 < R_1$), made of another material. Let us introduce two spherical coordinate systems (r_j, θ_j, φ) ($j=1, 2$), the origins of which are aligned with the points O_j ($|O_1O_2| = z_{12}$), and their axes of symmetry have the direction of the vector $\overline{O_1O_2}$. Let us denote the domains $\Omega_1 = B_{R_1}(O_1) \setminus \overline{B_{R_2}(O_2)}$, $\Omega_2 = B_{R_2}(O_2)$. We will assume that the material of the part of the sphere that occupies the domain has thermomechanical characteristics $(G_j, \nu_j, \alpha_j, k_j)$ ($j=1, 2$), where G is the shear modulus, ν is the *Poisson's ratio*, α is the coefficient of linear thermal expansion, k is the coefficient of thermal conductivity.

At the first stage, we will solve the direct problem of constructing a parametric model of the thermoelastic steady-state of a ball $B_{R_1}(O_1)$, whose surface Γ_1 is under uniform pressure and has a temperature T_0 . We will assume that the conditions of ideal thermomechanical contact are met on the surface of the inclusion Γ_2 , and the inclusion itself releases heat with a density $k_2g(r_2, \theta_2)$. Note that the boundary conditions on the surface may be different, and those chosen in the article do not limit the generality of the model that will be constructed.

The mathematical model of the thermoelastic state of the system under consideration is a boundary value problem for a system of elliptic partial differential equations ($j=1, 2$)

$$\bar{\nabla}^2 \bar{U}_j + \frac{1}{1-2\nu_j} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \bar{U}_j) = \alpha_j \frac{2+2\nu_j}{1-2\nu_j} \bar{\nabla} T_j, \quad \bar{x} \in \Omega_j; \quad (1)$$

$$\bar{\nabla}^2 T_j + \delta_{j,2} g = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_j \quad (2)$$

with boundary conditions

$$(T_1)_{|\Gamma_1} = T_0, \quad (3)$$

$$(F\bar{U}_1)_{|\Gamma_1} = 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n^{(1)} P_n(\cos \theta_1) \bar{e}_{\theta_1} + f_n^{(2)} P_n^{(1)}(\cos \theta_1) \bar{e}_{\theta_1} \right] \quad (4)$$

and the conditions of conjugation of thermomechanical fields

$$(T_1)_{|\Gamma_2} = (T_2)_{|\Gamma_2}, \quad \left(k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_2} \right)_{|\Gamma_2} = \left(k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \right)_{|\Gamma_2}; \quad (5)$$

$$(\bar{U}_1)_{|\Gamma_2} = (\bar{U}_2)_{|\Gamma_2}, \quad (F\bar{U}_1)_{|\Gamma_2} = (F\bar{U}_2)_{|\Gamma_2}. \quad (6)$$

Here T_j , \vec{U}_j ($j=1, 2$) denotes the temperature field and the displacement field in the domain Ω_j , $F\vec{U}_j$ is the stress vector on the surface Γ_j with the normal $\vec{n}_1 = \vec{e}_{r_j}$, corresponding to the displacement vector \vec{U}_j , $\delta_{j,k}$ is Kronecker delta symbol, $\vec{\nabla}$ is the operator of the nabla, $\{\vec{e}_{r_j}, \vec{e}_{\theta_j}\}$ are the unit vectors of the spherical coordinate system with the origin at the point O_j , \vec{x} is the point of three-dimensional space, the Cartesian coordinates of which are related to the spherical coordinates by the formulas

$$x = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 = r_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2, \quad y = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \quad z = r_1 \cos \theta_1 = z_{12} + r_2 \cos \theta_2.$$

At the second stage, using the constructed model, the problem of optimal control of the thermoelastic state using the power of heat sources is solved. The optimal control problem is posed for the objective functional

$$\frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} |F\vec{U}_2|^2 ds \rightarrow \min \quad (7)$$

with a constraint on the mean square of the reduced power of distributed heat sources

$$\frac{1}{|\Omega_2|} \int_{\Omega_2} g^2(r_2, \theta_2) d\vec{x} = D^2. \quad (8)$$

Regarding the function $g(r_2, \theta_2)$, we will assume that it is harmonic in the domain Ω_2 , in the closure of which it is represented by an absolutely and uniformly convergent series

$$g(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^n P_n(\cos \theta_2), \quad (9)$$

where $P_n(x)$ is the Legendre polynomial.

Modeling of temperature and thermoelastic fields. At the first stage, we will solve the direct problem of modeling temperature and thermoelastic fields in the domains Ω_j , assuming that function (9) is given. The solution to problem (2), (3), (5), (9) is constructed in the form

$$T_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(1)} R_1^{-n} w_n^-(r_1, \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(2)} R_2^{n+1} w_n^+(r_2, \theta_2), \quad \vec{x} \in \Omega_1; \quad (10)$$

$$T_2(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_2^{-n} [d_n r_2^2 + c_n] w_n^-(r_2, \theta_2), \quad \vec{x} \in \Omega_2 \quad (11)$$

with unknown parameters $\{t_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2}$, $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Here the axisymmetric basis solutions of the Laplace equation for the exterior $\Omega^+ = \{r > R\}$ and interior $\Omega^- = \{r < R\}$ of the sphere are denoted by

$$w_n^{\pm}(r, \theta) = r^{\mp(n+1/2)-1/2} P_n(\cos \theta), \quad (12)$$

where the sign $+$ ($-$) corresponds to the external (internal) solution.

Let us find the parameters d_n in solution (9) of Poisson's equation (2), for which we apply the Laplace operator to the function $T_2(r_2, \theta_2)$

$$\Delta T_2(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} R_2^{-n} 2(2n+3) d_n w_n^-(r_2, \theta_2).$$

Comparing this result with (2) and (9), we obtain

$$d_n = -\frac{g_n}{2(2n+3)}. \quad (13)$$

Let's use the formulas [35] ($n = 0 \div \infty$)

$$w_n^+(r_2, \theta_2) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n z_{12}^{k-n} w_k^+(r_1, \theta_1), \quad r_1 > z_{12}; \quad (14)$$

$$w_n^-(r_1, \theta_1) = \sum_{k=0}^n C_k^n z_{12}^{n-k} w_k^-(r_2, \theta_2), \quad (15)$$

where C_n^k is the binomial coefficient, to write the temperature field $T_1(\vec{x})$ in coordinate systems with origins at points O_j

$$T_1(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(1)} R_1^{-n} w_n^-(r_1, \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=0}^n C_n^k R_2^{k+1} z_{12}^{n-k} t_k^{(2)}, \tag{16}$$

$$T_1(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(2)} R_2^{n+1} w_n^+(r_2, \theta_2) + \sum_{n=0}^{\infty} w_n^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n R_1^{-k} z_{12}^{k-n} t_k^{(1)}. \tag{17}$$

Satisfying the conditions of conjugation of thermal fields on the surface Γ_2 of the inclusion and the boundary condition on the surface Γ_1 , we arrive at an infinite system of linear algebraic equations with respect to the unknowns

$$\{t_n^{(j)}\}_{n=0, j=1}^{\infty, 2}, \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$t_n^{(1)} + \sum_{k=0}^n u_{n,k}^+ t_k^{(2)} = T_0 \delta_{n,0}, \quad n = 0 \div \infty; \tag{18}$$

$$t_n^{(2)} + K_n^{(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^- t_k^{(1)} = K_n^{(2)} \frac{R_2^2 g_n}{2n+3}, \quad n = 0 \div \infty; \tag{19}$$

$$c_n = t_n^{(2)} + \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^- t_k^{(1)} + \frac{R_2^2 g_n}{2(2n+3)}, \quad n = 0 \div \infty, \tag{20}$$

where

$$u_{n,k}^+ = C_n^k \omega_{n+1,k+1}, \quad u_{n,k}^- = C_k^n \omega_{k,n}, \quad \omega_{n,k} = \left(\frac{z_{12}}{R_1}\right)^n \left(\frac{R_2}{z_{12}}\right)^k, \quad K_n^{(1)} = \frac{(k_2 - k_1)n}{k_2 n + k_1(n+1)}, \quad K_n^{(2)} = \frac{k_2}{k_2 n + k_1(n+1)}.$$

Theorem 1. *The operator of the system (18), (19) is a Fredholm operator in the space l_2^2 under the condition $z_{12} + R_2 < R_1$.*

Proof. To prove the theorem, it is sufficient to show the convergence of the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \omega_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \omega_{k,n}.$$

The latter follows from the condition of the theorem, since

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \omega_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_{12}}{R_1}\right)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{R_2}{z_{12}}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_{12}}{R_1}\right)^n \left(1 + \frac{R_2}{z_{12}}\right)^n$$

and the last series converges as the sum of a geometric sequence with a denominator less than unity.

Now we will solve problem (1), (4), (6) for the temperature field, which is given by formulas (10), (11), (18) – (20). For this purpose, we will use the generalized Fourier method. In the article [36], axisymmetric sets of vector partial solutions of the Lamé equation

$$\{\bar{W}_{1,0}^+(r, \theta), \bar{W}_{1,n}^+(r, \theta), \bar{W}_{2,n}^+(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty} \left\{ \{\bar{W}_{2,0}^-(r, \theta), \bar{W}_{1,n}^-(r, \theta), \bar{W}_{2,n}^-(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty} \right\}$$

for the exterior Ω^+ (interior Ω^-) of the sphere were introduced and it was proved that they form systems of basis solutions in the corresponding domains Ω^{\pm} . Here

$$\bar{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta) = \bar{\nabla} w_n^{\pm}(r, \theta), \tag{21}$$

$$\bar{W}_{2,n}^{\pm}(r, \theta) = \chi_n^{\pm} \bar{V}_n^{\pm}(r, \theta) + \zeta_n^{\pm} \bar{W}_{1,n}^{\pm}(r, \theta), \tag{22}$$

where

$$\bar{V}_n^{\pm}(r, \theta) = \bar{\nabla} \left[r^2 w_n^{\pm}(r, \theta) \right], \tag{23}$$

$$\chi_n^+ = (4\nu - 3)n + 2\nu - 2, \quad \zeta_n^+ = (2n - 1)(2\nu - 2), \quad \chi_n^- = (4\nu - 3)n + 2\nu - 1, \quad \zeta_n^- = (2n + 3)(2\nu - 2). \tag{24}$$

In addition, we introduce the following vector functions

$$\bar{V}_n^{-(1)}(r, \theta) = \bar{\nabla} \left[r^4 w_n^-(r, \theta) \right]. \tag{25}$$

The authors obtained the following result.

Theorem 2. *For vector functions (21) – (23) in spherical coordinate systems with origins at points O_j , the addition theorems hold*

$$\bar{W}_{1,n}^+(r_2, \theta_2) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n z_{12}^{k-n} \bar{W}_{1,k}^+(r_1, \theta_1), \quad r_1 > z_{12}, \quad n = 0 \div \infty; \tag{26}$$

$$\bar{W}_{2,n}^+(r_2, \theta_2) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} \gamma_{n,k}^{+(2)} z_{12}^{k-n} \bar{W}_{2,k}^+(r_1, \theta_1) + \sum_{k=n-1}^{\infty} C_k^{n-1} \gamma_{n,k}^{+(1)} z_{12}^{k-n+2} \bar{W}_{1,k}^+(r_1, \theta_1), \quad r_1 > z_{12}, \quad n = 1 \div \infty; \quad (27)$$

$$\bar{W}_{1,n}^-(r_1, \theta_1) = \sum_{k=0}^n C_n^k z_{12}^{n-k} \bar{W}_{1,k}^-(r_2, \theta_2), \quad n = 1 \div \infty; \quad (28)$$

$$\bar{W}_{2,n}^-(r_1, \theta_1) = \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} \gamma_{n,k}^{-(2)} z_{12}^{n-k} \bar{W}_{2,k}^-(r_2, \theta_2) + \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \gamma_{n,k}^{-(1)} z_{12}^{n-k+2} \bar{W}_{1,k}^-(r_2, \theta_2), \quad n = 0 \div \infty; \quad (29)$$

$$\bar{V}_n^+(r_2, \theta_2) = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \gamma_{n,k}^{+(2)} z_{12}^{k-n} \bar{V}_k^+(r_1, \theta_1) + \sum_{k=n-1}^{\infty} C_{k+1}^n \lambda_{n,k}^{+(1)} z_{12}^{k-n+2} \bar{W}_{1,k}^+(r_1, \theta_1), \quad r_1 > z_{12}, \quad n = 1 \div \infty; \quad (30)$$

$$\bar{V}_n^-(r_1, \theta_1) = \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_{n,k}^{-(2)} z_{12}^{n-k} \bar{V}_k^-(r_2, \theta_2) + \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \lambda_{n,k}^{-(1)} z_{12}^{n-k+2} \bar{W}_{1,k}^-(r_2, \theta_2), \quad n = 0 \div \infty; \quad (31)$$

where

$$\gamma_{n,k}^{-(1)} = \frac{k - 2nk - 3n + 5 - 4\nu_1}{2k + 3}, \quad \gamma_{n,k}^{+(2)} = \frac{2n - 1}{2k - 1}, \quad \gamma_{n,k}^{-(1)} = \frac{2nk + 3k - n - 5 + 4\nu_1}{2k - 1}, \quad \gamma_{n,k}^{-(2)} = \frac{2n + 3}{2k + 3},$$

$$\lambda_{n,k}^{+(1)} = \frac{k + 1 - 2nk - 3n}{(k + 1)(2k + 3)}, \quad \lambda_{n,k}^{-(1)} = \frac{2nk + 3k - n - 1}{(n + 1)(2k - 1)}.$$

As is known, the general solution of the inhomogeneous equation (1) in the domain Ω_j ($j = 1 \div 2$) can be written in the following form:

$$\bar{U}_j(\bar{x}) = \bar{U}_j^G(\bar{x}) + \bar{U}_j^T(\bar{x}), \quad (32)$$

where $\bar{U}_j^G(\bar{x})$ is a general solution of the corresponding homogeneous equation, $\bar{U}_j^T(\bar{x})$ is a partial solution of a non-homogeneous equation (thermal displacements). Due to the basis nature of solutions (21), (22), the general solution of the homogeneous equation (1) in the domains $\{\Omega_j\}_{j=1}^2$ can be written as follows:

$$\bar{U}_1^G(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} R_1^{-n+2} \bar{W}_{1,n}^-(r_1, \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} R_1^{-n} \bar{W}_{2,n}^-(r_1, \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(2)} R_2^{n+3} \bar{W}_{1,n}^+(r_2, \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}^{(2)} R_2^{n+1} \bar{W}_{2,n}^+(r_2, \theta_2), \quad \bar{x} \in \Omega_1; \quad (33)$$

$$\bar{U}_2^G(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} R_2^{-n} \bar{U}_2^G(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} R_2^{-n+2} \bar{W}_{1,n}^-(r_2, \theta_2) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} R_2^{-n} \bar{W}_{2,n}^-(r_2, \theta_2), \quad \bar{x} \in \Omega_2. \quad (34)$$

Here $a_{i,n}^{(j)}$, $b_{i,n}$ are the unknown parameters of the model.

We will look for a partial solution $\bar{U}_j^T(\bar{x})$ in the domain Ω_j in the form

$$\bar{U}_j^T(\bar{x}) = \bar{\nabla} \Phi_j(\bar{x}).$$

Then we obtain the Poisson equation for the function $\Phi_j(\bar{x})$

$$\Delta \Phi_j(\bar{x}) = 2\tilde{\alpha}_j T_j(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_j, \quad \tilde{\alpha}_j = \frac{\alpha_j}{2} \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j},$$

whose solution can be written as:

$$\Phi_1(\bar{x}) = \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_1^{-n} t_n^{(1)}}{2n + 3} r_1^2 w_n^-(r_1, \theta_1) - \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{n+1} t_n^{(2)}}{2n - 1} r_1^2 w_n^+(r_2, \theta_2),$$

$$\Phi_2(\bar{x}) = \tilde{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{-n}}{2n + 3} \left[r_2^2 c_n - \frac{r_2^4 g_n}{4(2n + 5)} \right] w_n^-(r_2, \theta_2).$$

Thus, the vectors of thermal displacements in the domains $(\Omega_i)_{i=1}^2$ are given by the formulas

$$\bar{U}_1^T(\bar{x}) = \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_1^{-n} t_n^{(1)}}{2n + 3} \bar{V}_n^-(r_1, \theta_1) - \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{n+1} t_n^{(2)}}{2n - 1} \bar{V}_n^+(r_2, \theta_2), \quad \bar{x} \in \Omega_1; \quad (35)$$

$$\bar{U}_2^T(\bar{x}) = -\tilde{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{-n} g_n}{4(2n + 5)(2n + 3)} \bar{V}_n^{-(1)}(r_2, \theta_2) + \tilde{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{-n} c_n}{2n + 3} \bar{V}_n^-(r_2, \theta_2), \quad \bar{x} \in \Omega_2. \quad (36)$$

Formulas (26) – (31) allow us to write a vector function $\vec{U}_1(\vec{x})$ in a spherical coordinate system with the origin at the point O_j

$$\begin{aligned} \vec{U}_1(r_1, \theta_1) = & \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=0}^n C_n^k z_{12}^{n-k} R_2^{k+3} a_{1,k}^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} R_1^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_1, \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} R_1^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r_1, \theta_1) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{W}_{2,n}^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} \gamma_{k,n}^{+(2)} z_{12}^{n-k} R_2^{k+1} a_{2,k}^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \gamma_{k,n}^{+(1)} z_{12}^{n-k+2} R_2^{k+1} a_{2,k}^{(2)} \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(1)}}{2n+3} R_1^{-n} \vec{V}_n^-(r_1, \theta_1) - \\ & - \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_n^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_{k,n}^{+(2)} z_{12}^{n-k} \frac{R_2^{k+1} t_k^{(2)}}{2k-1} - \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^+(r_1, \theta_1) \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k \lambda_{k,n}^{+(1)} z_{12}^{n-k+2} \frac{R_2^{k+1} t_k^{(2)}}{2k-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_1(r_2, \theta_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n z_{12}^{k-n} R_1^{-k+2} a_{1,k}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(2)} R_2^{n+3} \vec{W}_{1,n}^+(r_2, \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}^{(2)} R_2^{n+1} \vec{W}_{2,n}^+(r_2, \theta_2) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \vec{W}_{2,n}^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n}^{\infty} C_{k+1}^{n+1} \gamma_{k,n}^{-(2)} z_{12}^{k-n} R_1^{-k} a_{2,k}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n-1}^{\infty} C_{k+1}^n \gamma_{k,n}^{-(1)} z_{12}^{k-n+2} R_1^{-k} a_{2,k}^{(1)} - \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n^{(2)}}{2n-1} R_2^{n+1} \vec{V}_n^+(r_2, \theta_2) + \\ & + \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_n^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n \gamma_{k,n}^{-(2)} z_{12}^{k-n} \frac{R_1^{-k} t_k^{(1)}}{2k+3} + \tilde{\alpha}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \vec{W}_{1,n}^-(r_2, \theta_2) \sum_{k=n-1}^{\infty} C_{k+1}^n \lambda_{k,n}^{-(1)} z_{12}^{k-n+2} \frac{R_1^{-k} t_k^{(1)}}{2k+3}. \end{aligned} \quad (38)$$

According to formulas (34), (36)

$$\begin{aligned} \vec{U}_2(r_2, \theta_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} R_2^{-n+2} \vec{W}_{1,n}^-(r_2, \theta_2) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} R_2^{-n} \vec{W}_{2,n}^-(r_2, \theta_2) + \tilde{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{-n} c_n}{2n+3} \vec{V}_n^-(r_2, \theta_2) - \\ & - \tilde{\alpha}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2^{-n} g_n}{4(2n+3)(2n+5)} \vec{V}_n^{-(1)}(r_2, \theta_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Let us pass in formulas (36) – (38) from displacements to stresses on surfaces Γ_1 and Γ_2 with normal vectors $\vec{n}_1 = \vec{e}_{r_1}$ and $\vec{n}_2 = \vec{e}_{r_2}$ respectively and write them in coordinate form. After satisfying boundary condition (4) and conjugation conditions (6), we obtain an infinite system of linear algebraic equations with respect to unknown

$$\begin{aligned} n(n-1)a_{1,n}^{(1)} + \rho_{1,n}^{-1} a_{2,n}^{(1)} + (n+1)(n+2) \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(1)} a_{1,k}^{(2)} + \rho_{1,n}^{+(1)} \sum_{k=1}^n u_{n,k}^{+(2)} a_{2,k}^{(2)} + (n+1)(n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(3)} a_{2,k}^{(2)} + \\ + \tilde{\alpha}_1 \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} - 2 \right] t_n^{(1)} - \tilde{\alpha}_1 [n(n-1) + 4n - 2] \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(4)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1} - \\ - \tilde{\alpha}_1 (n+1)(n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(5)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1} = f_n^{(1)}, \quad n = 0 \div \infty; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (n-1)a_{1,n}^{(1)} + \rho_{2,n}^{-1} a_{2,n}^{(1)} - (n+2) \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(1)} a_{1,k}^{(2)} + \rho_{2,n}^{+(1)} \sum_{k=1}^n u_{n,k}^{+(2)} a_{2,k}^{(2)} - (n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(3)} a_{2,k}^{(2)} + \tilde{\alpha}_1 \frac{(n+1)t_n^{(1)}}{2n+3} + \\ + \tilde{\alpha}_1 n \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(4)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1} + \tilde{\alpha}_1 (n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(5)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1} = f_n^{(2)}, \quad n = 1 \div \infty; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} -(n+1)a_{1,n}^{(2)} + \beta_{1,n}^{+(1)} a_{2,n}^{(2)} + n \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \beta_{1,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} + n \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} + \tilde{\alpha}_1 \frac{(n-1)t_n^{(2)}}{2n-1} + \tilde{\alpha}_1 (n+2) \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} + \\ + \tilde{\alpha}_1 n \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(5)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} = nb_{1,n} + \beta_{1,n}^{-(2)} b_{2,n} - \tilde{\alpha}_2 \frac{(n+4)g_n R_2^2}{4(2n+3)(2n+5)} + \tilde{\alpha}_2 \frac{(n+2)c_n}{2n+3}, \quad n = 0 \div \infty; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} a_{1,n}^{(2)} + \beta_{2,n}^{+(1)} a_{2,n}^{(2)} + \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \beta_{2,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} + \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} - \tilde{\alpha}_1 \frac{t_n^{(2)}}{2n-1} + \tilde{\alpha}_1 \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} + \\ + \tilde{\alpha}_1 \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(5)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} = b_{1,n} + \beta_{2,n}^{-(2)} b_{2,n} - \tilde{\alpha}_2 \frac{g_n R_2^2}{4(2n+3)(2n+5)} + \tilde{\alpha}_2 \frac{c_n}{2n+3}, \quad n = 1 \div \infty; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)a_{1,n}^{(2)} + \rho_{1,n}^{+(1)} a_{2,n}^{(2)} + n(n-1) \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \rho_{1,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} + n(n-1) \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} - \\ - \tilde{\alpha}_1 \left[\frac{n(n-1) + 4n - 2}{2n-1} \right] t_n^{(2)} + \tilde{\alpha}_1 [(n+1)(n+2) - 4n - 6] \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} + \tilde{\alpha}_1 n(n-1) \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(5)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{G_2}{G_1} \left\{ n(n-1)b_{1,n} + \rho_{1,n}^{-(2)} b_{2,n} - \tilde{\alpha}_2 \frac{[(n+3)(n+4) - 4(2n+5)] g_n R_2^2}{4(2n+3)(2n+5)} + \right. \\ \left. + \tilde{\alpha}_2 \frac{[(n+1)(n+2) - 2(2n+3)] c_n}{2n+3} \right\}, \quad n = 0 \div \infty; \quad (44)$$

$$-(n+2)a_{1,n}^{(2)} + \rho_{2,n}^{+(1)} a_{2,n}^{(2)} + (n-1) \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \rho_{2,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} + (n-1) \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} + \tilde{\alpha}_1 \frac{nt_n^{(2)}}{2n-1} + \\ + \tilde{\alpha}_1 (n+1) \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} + \tilde{\alpha}_1 (n-1) \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(5)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} = \\ \frac{G_2}{G_1} \left\{ (n-1)b_{1,n} + \rho_{2,n}^{-(2)} b_{2,n} - \tilde{\alpha}_2 \frac{(n+3)g_n R_2^2}{4(2n+3)(2n+5)} + \tilde{\alpha}_2 \frac{(n+1)c_n}{2n+3} \right\}, \quad n = 1 \div \infty, \quad (45)$$

where

$$\beta_{1,n}^{+(j)} = -n(n+3-4\nu_j); \quad \beta_{2,n}^{+(j)} = n+4\nu_j-4; \quad \beta_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n+4\nu_j-2); \quad \beta_{2,n}^{-(j)} = n-4\nu_j+5; \\ \rho_{1,n}^{+(j)} = n(n^2+3n-2\nu_j); \quad \rho_{2,n}^{+(j)} = -(n^2+2\nu_j-2); \quad \rho_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n^2-n-2\nu_j-2); \quad \rho_{2,n}^{-(j)} = n^2+2n+2\nu_j-1; \\ u_{n,k}^{+(1)} = C_n^k \omega_{n+3,k+3}; \quad u_{n,k}^{-(1)} = C_n^k \omega_{k-2,n-2}; \quad u_{n,k}^{+(2)} = C_{n-1}^{k-1} \gamma_{k,n}^{+(2)} \omega_{n+1,k+1}; \quad u_{n,k}^{-(2)} = C_{k+1}^{n+1} \gamma_{k,n}^{-(2)} \omega_{k,n}; \quad u_{n,k}^{+(3)} = C_n^{k-1} \gamma_{k,n}^{+(1)} \omega_{n+3,k+1}; \\ u_{n,k}^{-(3)} = C_{k+1}^n \gamma_{k,n}^{-(1)} \omega_{k,n-2}; \quad u_{n,k}^{+(4)} = C_n^k \gamma_{k,n}^{+(2)} \omega_{n+1,k+1}; \quad u_{n,k}^{-(4)} = C_n^k \gamma_{k,n}^{-(2)} \omega_{k,n}; \quad u_{n,k}^{+(5)} = C_{n+1}^k \lambda_{k,n}^{+(1)} \omega_{n+3,k+1}; \\ u_{n,k}^{-(5)} = C_{k+1}^n \lambda_{k,n}^{-(1)} \omega_{k,n-2}.$$

After eliminating unknowns $b_{i,n}$ and some transformations, the system (40) – (45) can be represented as

$$\xi_n a_{1,n}^{(1)} + \eta_n a_{2,n}^{(1)} + d_n^{-(1)} \sum_{k=1}^n u_{n,k}^{+(2)} a_{2,k}^{(2)} = f_n^{(1)} + (n+1) f_n^{(2)} - \tilde{\alpha}_1 (n-1) t_n^{(1)} + 2\tilde{\alpha}_1 (n-1) \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(4)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1}, \quad n = 1 \div \infty; \quad (46)$$

$$-d_n^{+(1)} a_{2,n}^{(1)} + (2n+1)(n+2) \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(1)} a_{1,k}^{(2)} + n(n+2)(2n-1) \sum_{k=1}^n u_{n,k}^{+(2)} a_{2,k}^{(2)} + (2n+1)(n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(3)} a_{2,k}^{(2)} = f_n^{(1)} - \\ -n f_n^{(2)} + \tilde{\alpha}_1 \frac{2(n+2)t_n^{(1)}}{2n+3} + \tilde{\alpha}_1 (n+2)(2n-1) \sum_{k=0}^n u_{n,k}^{+(4)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1} + \tilde{\alpha}_1 (2n+1)(n+2) \sum_{k=1}^{n+1} u_{n,k}^{+(5)} \frac{t_k^{(2)}}{2k-1}, \quad n = 0 \div \infty; \quad (47)$$

$$a_{2,n}^{(2)} + \frac{(1-G_{21})\xi_n}{\Delta_n^{(5)}} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \frac{(1-G_{21})\eta_n}{\Delta_n^{(5)}} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} + \frac{(1-G_{21})\xi_n}{\Delta_n^{(5)}} \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} = \\ = \tilde{\alpha}_1 \frac{(1-G_{21})\xi_n}{(2n+1)\Delta_n^{(5)}} \frac{2t_n^{(2)}}{2n-1} - \tilde{\alpha}_1 \frac{(1-G_{21})\eta_n}{(n+1)\Delta_n^{(5)}} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} - \tilde{\alpha}_1 \frac{(1-G_{21})\xi_n}{\Delta_n^{(5)}} \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(5)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3}, \quad n = 1 \div \infty; \quad (48)$$

$$a_{1,n}^{(2)} + \frac{n(2n-1)}{2n+1} a_{2,n}^{(2)} - \frac{\Delta_n^{(4)}}{(2n+1)\Delta_n^{(3)}} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(2)} a_{2,k}^{(1)} = \tilde{\alpha}_1 \frac{t_n^{(2)}}{2n+1} + \tilde{\alpha}_1 \frac{2}{2n+1} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(4)} \frac{t_k^{(1)}}{2k+3} + \\ + \tilde{\alpha}_2 G_{21} \frac{(2-2\nu_2)g_n R_2^2}{(2n+5)\Delta_n^{-(2)}\Delta_n^{(3)}} - \tilde{\alpha}_2 G_{21} \frac{(4-4\nu_2)c_n}{\Delta_n^{-(2)}\Delta_n^{(3)}}, \quad n = 0 \div \infty; \quad (49)$$

$$b_{i,n} = g_n^{(i,1)} a_{1,n}^{(2)} + g_n^{(i,2)} a_{2,n}^{(2)} + \delta_{i,1} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} a_{1,k}^{(1)} + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_{n,k}^{(i)} a_{2,k}^{(1)} + \delta_{i,1} \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} a_{2,k}^{(1)} + \sigma_n^{(i)} \bar{t}_n^{(2)} + \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\sigma}_{n,k}^{(i)} \bar{t}_k^{(1)} + \\ + \delta_{i,1} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{u_{n,k}^{-(5)}}{2k+3} \bar{t}_k^{(1)} + \nu_n^{(i,1)} \bar{g}_n + \nu_n^{(i,2)} \bar{c}_n, \quad n \in \mathbb{R}; \quad n \geq \delta_{i,1}, \quad (50)$$

where

$$\Delta_n^{-(j)} = 2[(3-4\nu_j)n+1-2\nu_j], \quad j=1,2; \quad d_n^{\pm(j)} = 2[n^2+(1\pm 2\nu_j)n+1\pm \nu_j], \quad j=1,2; \\ \Delta_n^{(5)} = d_n^{-(1)} + G_{21}(n-1)(\Delta_n^{-(1)}+2); \quad \Delta_n^{(3)} = n+2+G_{21} \frac{d_n^{+(2)}}{\Delta_n^{-(2)}}, \quad \Delta_n^{(4)} = d_n^{+(1)} - G_{21} d_n^{+(2)} \frac{\Delta_n^{-(1)}}{\Delta_n^{-(2)}}; \quad G_{21} = \frac{G_2}{G_1}; \\ \xi_n = (n-1)(2n+1), \quad \eta_n = (n-1)(n+1)(2n+3);$$

$$\begin{aligned} g_n^{(1,1)} &= \left[1 - \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(2)}} \beta_{2,n}^{-(2)} \right], \quad g_n^{(1,2)} = \left[\beta_{2,n}^{+(1)} - \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(2)}} \beta_{2,n}^{-(2)} \right], \quad \psi_{n,k}^{(1)} = \left[\beta_{2,n}^{-(1)} - \frac{\Delta_n^{-(1)}}{\Delta_n^{-(2)}} \beta_{2,n}^{-(2)} \right] u_{n,k}^{-(2)}; \\ \sigma_n^{(1)} &= - \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right], \quad \bar{\sigma}_{n,k}^{(1)} = \left[1 + \frac{2\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right] \frac{u_{n,k}^{-(4)}}{2k+3}; \quad \sigma_n^{(1)} = - \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right], \quad \bar{\sigma}_{n,k}^{(1)} = \left[1 + \frac{2\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right] \frac{u_{n,k}^{-(4)}}{2k+3}; \\ v_n^{(1,1)} &= \frac{1}{4(2n+3)(2n+5)} \left[1 + 4 \frac{\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right], \quad v_n^{(1,2)} = - \frac{1}{2n+3} \left[1 + 2 \frac{\beta_{2,n}^{-(2)}}{\Delta_n^{-(2)}} \right]; \\ \sigma_n^{(2)} &= - \frac{1}{\Delta_n^{-(2)}}, \quad \bar{\sigma}_{n,k}^{(2)} = - \frac{2}{\Delta_n^{-(2)}} \frac{u_{n,k}^{-(4)}}{2k+3}; \quad v_n^{(2,1)} = - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)\Delta_n^{-(2)}}, \quad v_n^{(2,2)} = \frac{2}{(2n+3)\Delta_n^{-(2)}}. \end{aligned}$$

We will analyze the solvability of the system in the Hilbert space $l_2^4 = l_2 \times l_2 \times l_2 \times l_2$.

Theorem 3. *The operators of the system (46) – (49) is Fredholm operators in the space l_2^4 under the condition $z_{12} + R_2 < R_1$.*

Proof. Let us consider separately the equations of the system (46) – (49) at $n = 0$ and $n = 1$. When $n = 0$ there are only equations (47), (49) for determining $a_{2,0}^{(1)}$ and $a_{1,0}^{(2)}$. The coefficients $a_{1,0}^{(1)}$ and $a_{2,0}^{(2)}$ are arbitrary (chosen to be zero), since they are at zero solutions. When $n = 1$ from (46) and the static conditions $f_1^{(1)} + 2f_1^{(2)} = 0$ it follows $a_{2,1}^{(2)} = 0$, from (47) we find $a_{2,1}^{(1)}$, (48) is satisfied automatically, from (49) we find $a_{1,1}^{(2)}$, because the other unknown is $a_{2,1}^{(2)} = 0$, the coefficient $a_{1,1}^{(1)}$ is chosen arbitrarily, since the general solution depends on an arbitrary rigid displacement vector. Next, we will consider the equations of the system (46) – (49) when $n \geq 2$. Let us introduce the following notation:

$$\bar{a}_1^{(1)} = \left(a_{1,n}^{(1)} \right)_{n=2}^{\infty}, \quad \bar{a}_2^{(1)} = \left(a_{2,n}^{(1)} \right)_{n=2}^{\infty}, \quad \bar{a}_1^{(2)} = \left(a_{1,n}^{(2)} \right)_{n=2}^{\infty}, \quad \bar{a}_2^{(2)} = \left(a_{2,n}^{(2)} \right)_{n=2}^{\infty}; \quad a = \left(\bar{a}_1^{(1)}, \bar{a}_2^{(1)}, \bar{a}_1^{(2)}, \bar{a}_2^{(2)} \right)^T$$

Let us divide both parts of the system of equations (46) by a non-zero coefficient ξ_n , and divide the system (47) by $-d_n^{+(1)}$. After that, we write the resulting system in matrix form

$$\Phi a = z, \tag{51}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi &= S + U, \quad S = \mathbf{diag}(S_1, S_2), \quad S_1 = \begin{pmatrix} I & D_{12}^{(1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & D_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ U &= \mathbf{adiag}(U_1, U_2), \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & U_{12}^{(2)} \\ U_{21}^{(2)} & U_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} U_{11}^{(1)} & U_{12}^{(1)} \\ 0 & U_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$z = \left(\bar{z}_1^{(1)}, \bar{z}_2^{(1)}, \bar{z}_1^{(2)}, \bar{z}_2^{(2)} \right)^T$ – vector of the right-hand sides of the transformed system, $\mathbf{diag}(\cdot)$ and $\mathbf{adiag}(\cdot)$ are diagonal and anti-diagonal matrices respectively, I is the identity matrix, $D_{12}^{(1)}, D_{22}^{(2)}$ are some diagonal matrices. Here, the system (46) – (49) is written only structurally, since the matrix elements of the corresponding matrices follow from the system itself.

The operator S in the space l_2^4 has a bounded inverse operator $S^{-1} = \mathbf{diag}(S_1^{-1}, S_2^{-1})$, where

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & -D_{12}^{(1)} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad S_2^{-1} = \begin{pmatrix} -D_{22}^{(2)} & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

For the operator U , just as in Theorem 1, its compactness is proved. Then, by the *theorem of S. M. Nikolsky*, the operator Φ is a Fredholm operator.

Statement of an equivalent optimal control problem. After solving the direct problem, we will solve the inverse problem, that is, find the function (9) that satisfies conditions (7), (8). First, let's transform the functional (7). To do this, we substitute the stress vector on surface Γ_2 into functional (7)

$$F\bar{U}_2(r_2, \theta_2) = 2G_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_{1,n}(n-1)n + b_{2,n} \rho_{1,n}^{-(2)} - \frac{(n^2 - n - 8)\bar{g}_n}{4(2n+3)(2n+5)} + \frac{(n^2 - n - 4)\bar{c}_n}{2n+3} \right] P_n(\cos \theta_2) \bar{e}_{r_2} +$$

$$+ 2G_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_{1,n} (n-1) + b_{2,n} \rho_{2,n}^{-(2)} - \frac{(n+3)\bar{g}_n}{4(2n+3)(2n+5)} + \frac{(n+1)\bar{c}_n}{2n+3} \right] P_n^1(\cos \theta_2) \bar{e}_{\theta_2}, \quad (52)$$

where the coefficients g_n, c_n are replaced by normalized coefficients $\bar{g}_n = \tilde{\alpha}_2 g_n R_2^2$, $\bar{c}_n = \tilde{\alpha}_2 c_n$. The value of the objective functional (7) on the vector function (52) is a quadratic form on the infinite-dimensional space of numerical sequences $\{b_{1,n}, b_{2,n}, \bar{g}_n, \bar{c}_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$J[\bar{g}] = \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} |F\bar{U}_2|^2 ds = 2G_2^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^2 \varepsilon_n^{(j,i)} b_{i,n} + \tau_n^{(j)} \bar{g}_n + \mu_n^{(j)} \bar{c}_n \right]^2, \quad (53)$$

where

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(1,1)} &= \frac{n(n-1)}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \varepsilon_n^{(1,2)} = \frac{\rho_{1,n}^{-(2)}}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \varepsilon_n^{(2,1)} = (n-1) \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}}, \quad \varepsilon_n^{(2,2)} = \rho_{2,n}^{-(2)} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}}, \\ \tau_n^{(1)} &= -\frac{(n^2 - n - 8)}{4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{\sqrt{n+1/2}}, \quad \tau_n^{(2)} = -\frac{n+3}{4(2n+3)(2n+5)} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}}, \\ \mu_n^{(1)} &= \frac{n^2 - n - 4}{(2n+3)\sqrt{n+1/2}}, \quad \mu_n^{(2)} = \frac{n+1}{2n+3} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}}, \quad \bar{g} = (\bar{g}_k)_{k=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

The control constraint (8) can be written as follows:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_n^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{3} \tilde{\alpha}_2^2 R_2^4 D^2. \quad (54)$$

Thus, the original optimal control problem is reduced to an equivalent problem in which the state of the object is determined by infinite systems of linear algebraic equations (18) – (20), (46) – (50), and optimal control must determine such coefficients $(\bar{g}_k)_{k=0}^{\infty}$ of the density of heat sources in the domain Ω_2 that give a minimum to the objective functional (53) and satisfy constraint (54).

Solution of the equivalent optimal control problem. The main problem of determining the minimum of the functional (53) under constraint (54) is that it is impossible to explicitly express the variables $\{b_{i,n}, \bar{c}_n\}_{n=0}^{\infty}$ of the quadratic functional through the optimization parameters $(\bar{g}_k)_{k=0}^{\infty}$. To solve this problem, a new method for parametric solution of infinite systems was proposed in [34]. We apply it to systems (18) – (20), (46) – (50).

To simplify further calculations, we will set $T_0 = 0$ (this does not affect the implementation of the method and the generality of the results). Due to the unique solvability of systems (18) – (19) and (46) – (49) with respect to $\{t_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{a_{j,n}^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$, we can conclude that there exist linear infinite matrix operators $P^{(i)} = (p_{j,k}^{(i)})_{j,k=0}^{\infty}$, $Q^{(m,i)} = (q_{j,k}^{(m,i)})_{j,k=0}^{\infty}$, $R = (r_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, for which

$$b_{i,n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[p_{n,k}^{(i)} \bar{g}_k + \sum_{m=1}^2 q_{n,k}^{(i,m)} f_k^{(m)} \right], \quad \bar{c}_n = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k} \bar{g}_k. \quad (55)$$

Note that the unknown coefficients of series (55) can be found using the formulas

$$p_{n,k}^{(i)} = \frac{\partial b_{i,n}}{\partial \bar{g}_k}, \quad q_{n,k}^{(i,m)} = \frac{\partial b_{i,n}}{\partial f_k^{(m)}}, \quad r_{n,k} = \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{g}_k}. \quad (56)$$

Substitute formulas (55) into the functional (53)

$$J[\bar{g}] = 2G_2^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k + F_n^{(j)} \right]^2, \quad (57)$$

where

$$B_{n,k}^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_n^{(j,i)} p_{n,k}^{(i)} + \tau_n^{(j)} \delta_{n,k} + \mu_n^{(j)} r_{n,k}, \quad (58)$$

$$F_n^{(j)} = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_n^{(j,i)} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} q_{n,k}^{(i,m)} f_k^{(m)}. \tag{59}$$

After reducing the functional to a physically dimensionless form, we have:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k + F_n^{(j)} \right]^2 \rightarrow \min, \tag{60}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_n^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{6} \tilde{\alpha}_2^2 R_2^4 D^2. \tag{61}$$

We will solve the problem (60), (61) for the conditional extremum by the Lagrange method, reducing it to the problem for the unconditional minimum of the functional

$$L[\bar{g}] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \bar{g}_k + F_n^{(j)} \right]^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{g}_n^2}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{62}$$

Here $\tilde{\lambda}$ is the Lagrange multiplier. The existence and uniqueness of the solution to problem (60), (61) will be proved further in Theorem 5. The necessary minimum condition of the functional (62) leads to the following system:

$$(\tilde{\lambda} \tilde{D} + B) \bar{g} = -F, \tag{63}$$

where

$$B = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,s}^{(j)} B_{n,k}^{(j)} \right)_{s,k=0}^{\infty}, \tag{64}$$

$$\tilde{D} = \text{diag} \left((2s+1)^{-1} (2s+3)^{-1} \right)_{s=0}^{\infty}, \quad F = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,s}^{(j)} F_n^{(j)} \right)_{s=0}^{\infty}. \tag{65}$$

The Lagrange multiplier is found from the additional condition (61).

Before examining the operator of system (63), we present a practical way of calculating the elements of the matrices B and F . Based on formulas (16) – (18), (46) – (51), we have ($s = 0 \div \infty, i = 1, 2$)

$$\frac{\partial \bar{t}_n^{-(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \sum_{k=0}^n u_{n,k}^+ \frac{\partial \bar{t}_k^{-(2)}}{\partial \bar{g}_s} = 0, \quad n = 0 \div \infty; \tag{66}$$

$$\frac{\partial \bar{t}_n^{-(2)}}{\partial \bar{g}_s} + K_n^{(1)} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^- \frac{\partial \bar{t}_k^{-(1)}}{\partial \bar{g}_s} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha}_2} K_n^{(2)} \frac{\delta_{n,s}}{2n+3}, \quad n = 0 \div \infty; \tag{67}$$

$$\frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{g}_s} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} \left(\frac{\partial \bar{t}_n^{-(2)}}{\partial \bar{g}_s} + \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^- \frac{\partial \bar{t}_k^{-(1)}}{\partial \bar{g}_s} \right) + \frac{\delta_{n,s}}{2(2n+3)}, \quad n = 0 \div \infty, \tag{69}$$

$$\Phi \frac{\partial a}{\partial \bar{g}_s} = \frac{\partial z}{\partial \bar{g}_s}, \quad \Phi \frac{\partial a}{\partial f_s^{(m)}} = \frac{\partial f_t}{\partial f_s^{(m)}}, \tag{70}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{i,n}}{\partial \bar{g}_s} = & g_n^{(i,1)} \frac{\partial a_{1,n}^{(2)}}{\partial \bar{g}_s} + g_n^{(i,2)} \frac{\partial a_{2,n}^{(2)}}{\partial \bar{g}_s} + \delta_{i,1} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} \frac{\partial a_{1,k}^{(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_{n,k}^{(i)} \frac{\partial a_{2,k}^{(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \delta_{i,1} \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} \frac{\partial a_{2,k}^{(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \sigma_n^{(i)} \frac{\partial \bar{t}_n^{-(2)}}{\partial \bar{g}_s} + \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\sigma}_{n,k}^{(i)} \frac{\partial \bar{t}_k^{-(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \\ & + \delta_{i,1} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{u_{n,k}^{-(5)}}{2k+3} \frac{\partial \bar{t}_k^{-(1)}}{\partial \bar{g}_s} + \nu_n^{(i,1)} \delta_{n,s} + \nu_n^{(i,2)} \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{g}_s}, \quad n \in \mathbb{Z}: n \geq \delta_{i,1}, \end{aligned} \tag{71}$$

$$\frac{\partial b_{i,n}}{\partial f_s^{(m)}} = g_n^{(i,1)} \frac{\partial a_{1,n}^{(2)}}{\partial f_s^{(m)}} + g_n^{(i,2)} \frac{\partial a_{2,n}^{(2)}}{\partial f_s^{(m)}} + \delta_{i,1} \sum_{k=n}^{\infty} u_{n,k}^{-(1)} \frac{\partial a_{1,k}^{(1)}}{\partial f_s^{(m)}} + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_{n,k}^{(i)} \frac{\partial a_{2,k}^{(1)}}{\partial f_s^{(m)}} + \delta_{i,1} \sum_{k=n-1}^{\infty} u_{n,k}^{-(3)} \frac{\partial a_{2,k}^{(1)}}{\partial f_s^{(m)}}, \quad n \in \mathbb{Z}: n \geq \delta_{i,1}. \tag{72}$$

Here the system (16) – (18) is written for physically dimensionless coefficients $\bar{t}_n^{(i)} = \tilde{\alpha}_1 t_n^{(i)}, \delta_{i,k}$ – Kronecker's delta symbol.

Remark. In order to find the elements of matrices (64), (65), it is necessary to solve the infinite systems (66), (67), (70). The matrices of these systems are the same as those of systems (16), (17), (46) – (49), only their right-hand sides change.

For further, we will enter the notation

$$\bar{g}_n = \varsigma_n \tilde{g}_n, \quad \tilde{B} = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} \right)_{m,k=0}^{\infty}, \quad \tilde{B}_{n,m}^{(j)} = B_{n,m}^{(j)} \varsigma_m, \quad \tilde{F} = \left(\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} F_n^{(j)} \right)_{m=0}^{\infty}, \quad \varsigma_n = \sqrt{(2n+1)(2n+3)}.$$

In the new notation, system (63) can be written in the form

$$(\tilde{\lambda}I + \tilde{B})\tilde{g} = -\tilde{F}. \quad (73)$$

with a constraint

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_n^2 = \frac{1}{3} \tilde{\alpha}_2^2 R_2^4 D^2. \quad (74)$$

Theorem 4. When the conditions of Theorem 3 are met, the matrix \tilde{B} of system (73) defines a symmetric, positive definite, compact operator in space l_2 .

Proof. The symmetry of the matrix \tilde{B} is obvious. Besides, it is positive since for any vector $x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in l_2$ quadratic form

$$(\tilde{B}x, x) = \sum_{m,k=0}^{\infty} x_m x_k \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,m}^{(j)} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} x_k \right)^2 \geq 0.$$

Let us show that matrix \tilde{B} is positive definite. Let's put $(\tilde{B}\tilde{g}, \tilde{g}) = 0$. Then

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{n,k}^{(j)} \tilde{g}_k \right)^2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k}^{(j)} \tilde{g}_k \right)^2 = 0.$$

On the other hand, the above quadratic form in the absence of external load in accordance with formula (57) coincides with the target functional up to a factor, therefore,

$$J[\bar{g}] = \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} |F\bar{U}_2|^2 ds = 0,$$

whence

$$(F\bar{U}_2)_{\Gamma_2} = 0.$$

The last condition is possible only in the absence of heat sources in the domain Ω_2 , i.e. when $\bar{g} = (\bar{g}_k)_{k=0}^{\infty} = 0$ or $\tilde{g} = 0$. Thus, matrix \tilde{B} is positive definite.

Let us prove that the matrix \tilde{B} defines a compact operator in the Hilbert space l_2 . First, we will prove the compactness of the operator defined by a matrix with elements $\tilde{B}_{n,m}^{(j)}$. Since it is impossible to strictly estimate the matrix elements of this matrix, we will apply the method proposed in the article [34]. In this work it was further developed. Let us introduce the notation for the following infinite matrices:

$$T_g^{(i)} = \left(\frac{\partial \bar{T}_n^{(i)}}{\partial \bar{g}_m} \right)_{n,m=0}^{\infty}, \quad C_g = \left(\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \bar{g}_m} \right)_{n,m=0}^{\infty}, \quad A_i^{(j)} = \left(\frac{\partial a_{i,n}^{(j)}}{\partial \bar{g}_m} \right)_{n,m=0}^{\infty}, \quad B_g^{(i)} = \left(\frac{\partial b_{i,n}}{\partial \bar{g}_m} \right)_{n,m=0}^{\infty}.$$

Systems (66) – (72) can be written in matrix form

$$T_g^{(1)} = -U^+ T_g^{(2)}, \quad T_g^{(2)} + U_1^- T_g^{(1)} = D_1, \quad C_g = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} T_g^{(2)} + U_2^- T_g^{(1)} + D_2, \quad (75)$$

$$A_1^{(1)} + D_{12}^{(1)} A_2^{(1)} + U_{12}^{(2)} A_2^{(2)} = D_g^{(1,1)} T_g^{(1)} + U_{11}^+ T_g^{(2)}, \quad (76)$$

$$A_2^{(1)} + U_{21}^{(2)} A_1^{(2)} + U_{22}^{(2)} A_2^{(2)} = D_g^{(2,1)} T_g^{(1)} + U_{12}^+ T_g^{(2)}, \quad (77)$$

$$A_2^{(2)} + U_{11}^{(1)} A_1^{(1)} + U_{12}^{(1)} A_2^{(1)} = D_g^{(1,2)} T_g^{(2)} + U_{21}^- T_g^{(1)}, \quad (78)$$

$$A_1^{(2)} + D_{22}^{(2)} A_2^{(2)} + U_{12}^{(1)} A_2^{(1)} = D_g^{(2,2)} T_g^{(2)} + U_{22}^- T_g^{(1)} + D_g^{(1)} + D_g^{(2)} C_g, \quad (79)$$

$$B_g^{(i)} = D_b^{(i,1)} A_1^{(2)} + D_b^{(i,2)} A_2^{(2)} + U_b^{(i,1)} A_1^{(1)} + U_b^{(i,2)} A_2^{(1)} + D_{\sigma}^{(i)} T_g^{(2)} + U_{\sigma}^{(i)} T_g^{(1)} + D_b^{(1)} + D_b^{(2)} C_g. \quad (80)$$

For reasons of compactness, the elements of the coefficient matrices are not presented here. They can be reconstructed from systems (66) – (72). They are not needed in this context. Above, the letter D with different indices de-

notes diagonal operators, and the letter U with indices denotes operators with matrix elements $(u_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ for which the series

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} n^s k^r |u_{n,k}| < \infty$$

converges, where s and r are any non-negative numbers. The last condition means that all operators U are not only bounded, but also compact. Matrices $T_g^{(i)}$, C_g , $A_i^{(j)}$ define bounded operators acting in the space l_2 , which follows from the correct solvability of systems (66) – (69). From equation (58) follows the matrix equality

$$\left(\tilde{B}_{n,k}^{(j)}\right)_{n,k=0}^{\infty} = \text{diag}\left(\varsigma_n \varepsilon_n^{(j,1)}\right) B_g^{(1)} + \text{diag}\left(\varsigma_n \varepsilon_n^{(j,2)}\right) B_g^{(2)} + \text{diag}\left(\varsigma_n \tau_n^{(j)}\right) + \text{diag}\left(\varsigma_n \mu_n^{(j)}\right) C_g, \tag{81}$$

If we substitute all the matrices obtained by inverting systems (66) – (69) into formula (81), we obtain two groups of terms. The first includes products of bounded and compact operators, i.e., compact operators. The second includes diagonal operators. Then, to establish the compactness of operators $\left(\tilde{B}_{n,k}^{(j)}\right)_{n,k=0}^{\infty}$, it suffices to prove the compactness of their diagonal operators. Omitting the intermediate, rather cumbersome transformations, we present the matrix elements of the diagonal matrices that make up the matrices $\left(\tilde{B}_{n,k}^{(1)}\right)_{n,k=0}^{\infty}$ and $\left(\tilde{B}_{n,k}^{(2)}\right)_{n,k=0}^{\infty}$, respectively

$$D\tilde{B}_{n,m}^{(1)} = - \left\{ \frac{\tilde{\alpha}_1 (4-4\nu_1)n(n-1)K_n^{(2)}}{\tilde{\alpha}_2 (2n+3)\Delta_n^{(5)}} + \frac{(4-4\nu_2)(n+1)(n+2)\left[(2n+5)K_n^{(2)}+1\right]}{(2n+3)(2n+5)\Delta_n^{-(2)}\Delta_n^{(3)}} \right\} \frac{\varsigma_n \delta_{n,m}}{\sqrt{n+1/2}}, \tag{81}$$

$$D\tilde{B}_{n,m}^{(2)} = - \left\{ \frac{\tilde{\alpha}_1 (4-4\nu_1)(n-1)K_n^{(2)}}{\tilde{\alpha}_2 (2n+3)\Delta_n^{(5)}} - \frac{(4-4\nu_2)(n+2)\left[(2n+5)K_n^{(2)}+1\right]}{(2n+3)(2n+5)\Delta_n^{-(2)}\Delta_n^{(3)}} \right\} \sqrt{\frac{2n(n+1)}{2n+1}} \varsigma_n \delta_{n,m}. \tag{82}$$

As can be seen from formulas (81), (82), the matrix elements of the diagonal matrices $\left(D\tilde{B}_{n,k}^{(j)}\right)_{n,k=0}^{\infty}$ have order $O(n^{-3/2})$ for $n \rightarrow \infty$, which guarantees the compactness of the operators defined by these matrices.

Consequently, the theorem is completely proven.

Remark. Using the same ideas, it is possible to prove that if $f^{(j)} \in l_2$ the column $\tilde{F} \in l_2$.

The further solution of the problem is based on the spectral method. It follows from the properties of the operator \tilde{B} that its spectrum consists of a counted sequence of positive eigenvalues

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots,$$

that converges to zero. Let $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a complete orthonormal system of eigenvectors of the operator \tilde{B} in the space l_2 corresponding to the eigenvalues of $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Let us denote by $F_n = (\tilde{F}, \varphi_n)$ the Fourier coefficients of the expansion of the vector \tilde{F} into a Fourier series in a system of functions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Theorem 5. Let the conditions of Theorem 3 hold. If

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{\lambda_n^2} \leq \frac{1}{3} \tilde{\alpha}_2^2 R_2^4 D^2, \tag{83}$$

then there is a solution to equation (73) at $\tilde{\lambda} = 0$

$$\tilde{g} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\lambda_n} \varphi_n \in l_2, \tag{84}$$

and constraint (74) is not taken into account. If

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2}{\lambda_n^2} > \frac{1}{3} \tilde{\alpha}_2^2 R_2^4 D^2, \tag{85}$$

then under $\tilde{\lambda} > 0$ there is a unique solution of problem (73), (74) in space l_2 of the form

$$\tilde{g} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\tilde{\lambda} + \lambda_n} \varphi_n. \tag{86}$$

The proof of this theorem is completely analogous to the proof of the corresponding theorem in paper [34], and is therefore not given here.

Remark. When condition (83) is fulfilled, optimal control (84) is a solution of the original problem (1) – (7) without restriction (8).

Computer experiment. The following materials were used in the numerical solution of the problem: steel for the ball Ω_1 and brass for the inclusion Ω_2 . These materials have the following thermomechanical characteristics:

$(G_1 = 82.0 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.28, \alpha_1 = 13.010 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, k_1 = 45.4 \text{ W}/(\text{M} \cdot ^\circ\text{C}))$ for the ball Ω_1 and $(G_2 = 35.2 \text{ GPa}, \nu_2 = 0.35, \alpha_2 = 18.7 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, k_2 = 85.5 \text{ W}/(\text{M} \cdot ^\circ\text{C}))$. The value of the constant $k_2 D$ was chosen equal to $4.28 \cdot 10^4 \text{ W}/\text{M}^3$.

According to the algorithm presented above, when solving the optimal control problem, it is necessary to form and solve a series of infinite systems of linear algebraic equations: (66) – (69), (70), (73). To determine the optimal temperature and deformation fields, using the found optimal value of the vector x , systems (18), (19), and (46) – (49) are solved. Since the Fredholm's property of the operators has been proven for all of the systems listed above, the systems can be solved numerically using the reduction method. At the same time, the numerical algorithm is correct, i.e., with an unlimited increase in the reduction parameter, the numerical solution converges to the exact one.

To test the universality of the proposed approach, three different types of external load were used in a computer experiment.

The first type of external load. In the first case, we will consider a uniform distribution of the load on the surface Γ_1 of the ball

$$\vec{f}(\theta_1) = 2G_1 \sigma \vec{e}_{\theta_1},$$

where the parameter σ was selected so that the external load does not exceed the elastic limit. Figures 1 and 2 show the optimal distributions of the temperature fields in the sphere and in the inclusion and the reduced power of the sources in the inclusion, respectively, for the geometric parameters $R_2/R_1 = 0.5$, $z_{12}/R_1 = 0.3$.

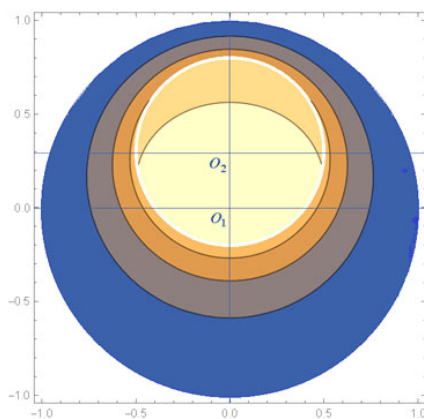


Fig. 1 – Optimal temperature distribution in the ball. The first type of loading.

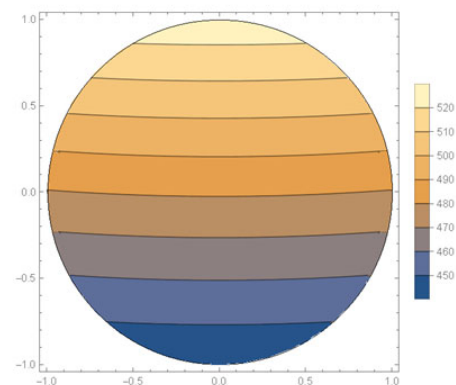


Fig. 2 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The first type of loading.

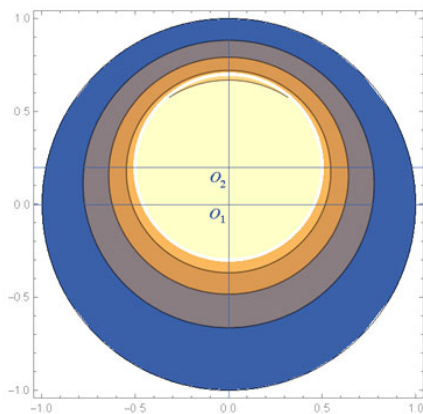


Fig. 3 – Optimal temperature distribution in the ball. The first type of loading.

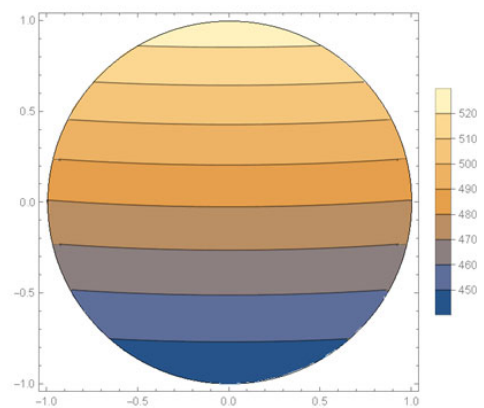


Fig. 4 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The first type of loading.

Figures 3, 4 show a similar distribution of temperature field and the reduced power of heat sources for geometric parameters $R_2 / R_1 = 0.5$, $z_{12} / R_1 = 0.2$.

Figures 5, 6 show a similar distribution of temperature field and the reduced power of heat sources for geometric parameters $R_2 / R_1 = 0.5$, $z_{12} / R_1 = 0.1$.

Fig. 7 shows graphs of the distribution of the optimal temperature on the surface of the inclusion for a ratio of the radii of the inclusion and the sphere equal to $R_2 / R_1 = 0.5$, and different displacements of the center of the inclusion relative to the center of the sphere. Since in the original formulation of the optimization problem the objective functional was a functional expressing the root-mean-square value of stresses on the inclusion surface, it is of interest to trace the distribution of normal (largest in modulus) stresses on this surface. Fig. 8 shows the distribution of normal stresses on the inclusion surface for the geometric parameters indicated in Fig. 7. The graphs presented in Fig. 8 show that optimal voltages when controlling the power of heat sources can reach maximum values that are almost an order of magnitude lower than the voltages in the absence of heat sources.

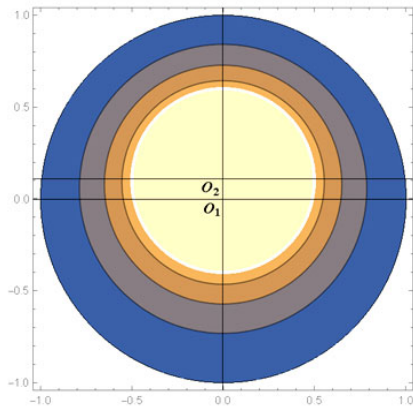


Fig. 5 – Optimal temperature distribution in the ball. The first type of loading.

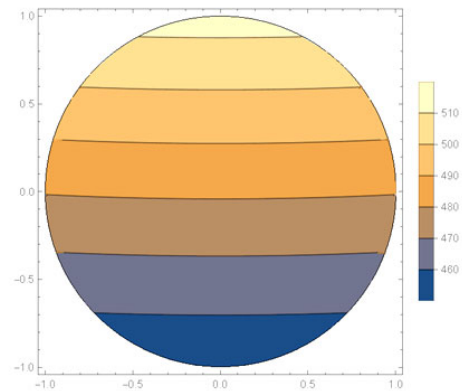


Fig. 6 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The first type of loading.

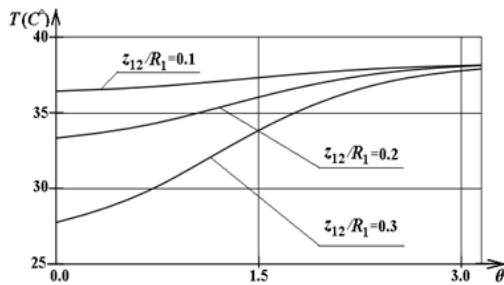


Fig. 7 – Optimal temperature distribution on the inclusion surface. The first type of loading.

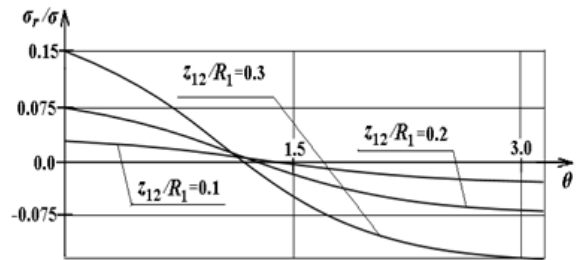


Fig. 8 – Optimal distribution of normal stresses on the inclusion surface. The first type of loading.

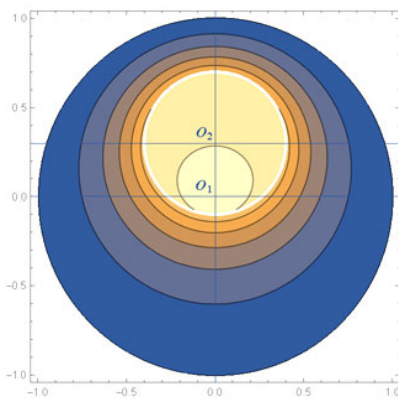


Fig. 9 – Optimal temperature distribution in the ball. The first type of loading.

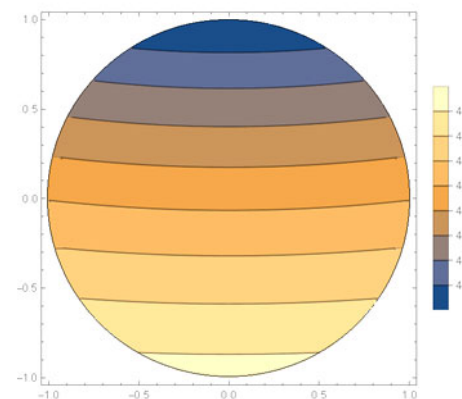


Fig. 10 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The first type of loading.

Figures 9, 10 and 11, 12 show the distributions of temperature fields and reduced powers of heat sources at a fixed distance $z_{12}/R_1 = 0.3$ between the centers O_1 and O_2 for different ratios R_2/R_1 . It is interesting to note that with such a change in the geometric parameters compared to those indicated above, the inclusion areas with maximum and minimum reduced power are reflected relative to the horizontal plane passing through the inclusion center.

The second type of external load. In the second case, the load on the surface Γ_1 was considered, which is given by the formula

$$\vec{f}(\theta_1) = 2G_1\sigma \sin \theta_1 \vec{e}_{\theta_1}.$$

Figures 13 and 14 show the optimal distributions of the temperature field in the sphere and in the inclusion, as well as the reduced power of the sources in the inclusion, respectively, for the geometric parameters $R_2/R_1 = 0.5$, $z_{12}/R_1 = 0.3$ and the second type of loading.

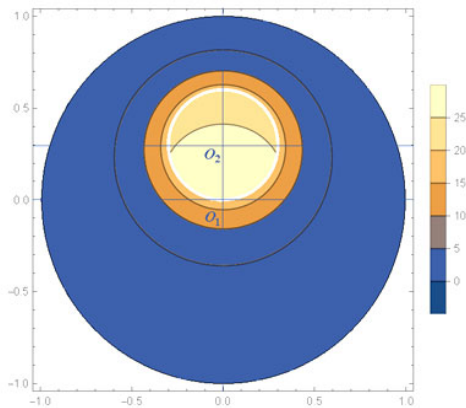


Fig. 11 – Optimal temperature distribution in the ball.
The first type of loading.

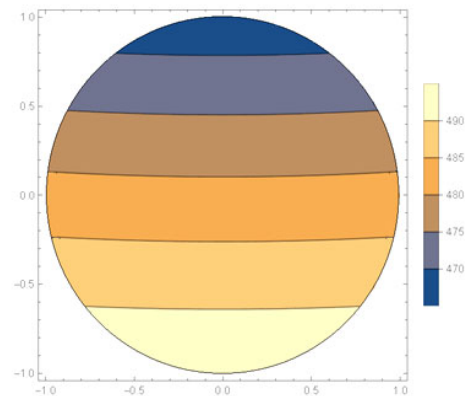


Fig. 12 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The first type of loading.

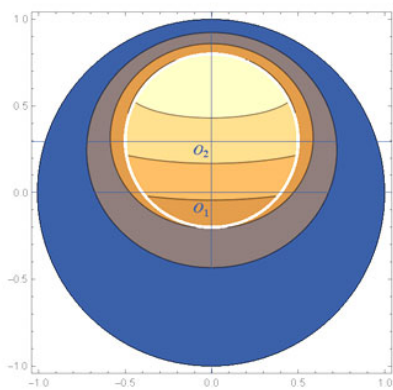


Fig. 13 – Optimal temperature distribution in the ball.
The second type of loading.

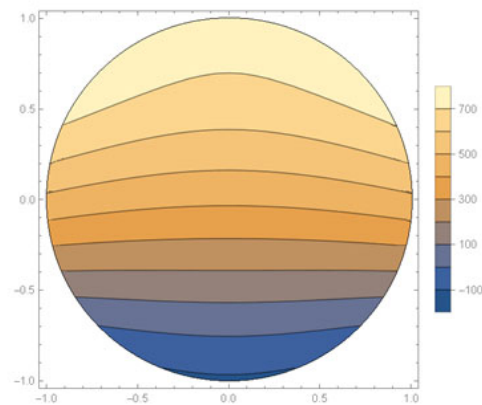


Fig. 14 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The second type of loading.

The third type of external load. In the third case, the load on the surface Γ_1 was considered, which is given by the formula

$$\vec{f}(\theta_1) = 2G_1\sigma \left[3 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \vec{e}_{\theta_1} + \sin^2 \theta_1 \vec{e}_{\theta_1} \right].$$

Figures 15 and 16 show the optimal distributions of the temperature field in the sphere and in the inclusion, as well as the reduced power of the sources in the inclusion, respectively, for the geometric parameters $R_2/R_1 = 0.5$, $z_{12}/R_1 = 0.3$ and the third type of loading.

Figures 17 and 18 show graphs of the optimal temperature and normal stresses on the inclusion surface for three types of external load at $R_2/R_1 = 0.5$, $z_{12}/R_1 = 0.3$. Each type is indicated by the corresponding number on the graph.

Remark. The first two types represent a balanced load for the first component. The third type satisfies the balance condition for two components.

Note that for all types of loads, a continuous dependence of temperatures and stresses on geometric parameters is

observed, which indirectly confirms the correctness of the solved inverse problems.

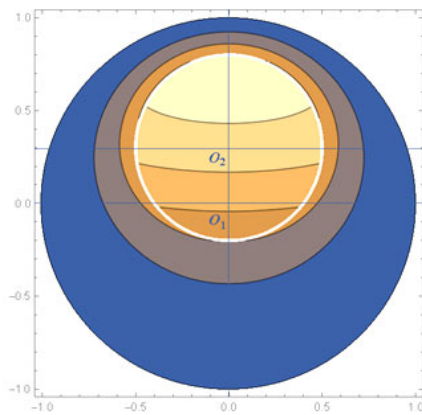


Fig. 15 – Optimal temperature distribution in the ball. The third type of loading.

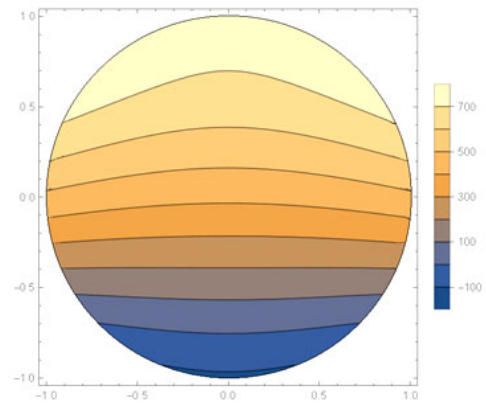


Fig. 16 – Optimal distribution of reduced power of sources in the inclusion. The third type of loading.

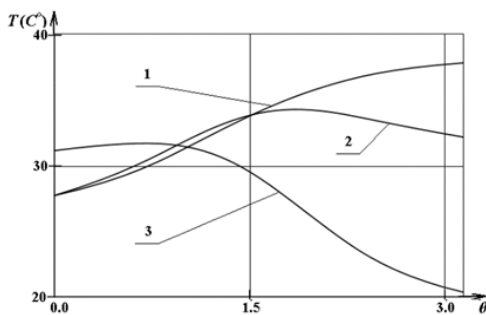


Fig. 17 – Graphs of the distribution of the optimal temperature on the inclusion surface for different types of external load.

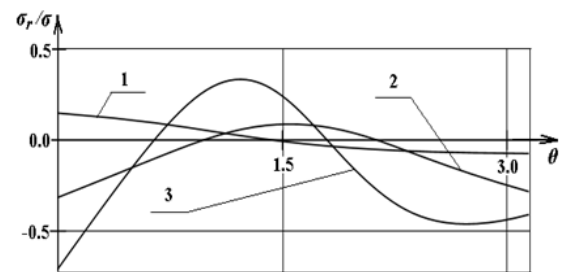


Fig. 18 – Graphs of the distribution of optimal normal stresses on the inclusion surface for different types of external load.

Additionally, the practical convergence of the reduction method was tested in a number of problems. Calculations have shown that the values of temperature and normal stress on the surface of the inclusion retain five upper significant digits after the point at a relative proximity of the surfaces of the sphere and the inclusion equal to

$$1 - z_{12} / R_1 - R_2 / R_1 = 0.2,$$

for the reduction parameter $n_{\max} = 20$ ($n_{\max} + 1$ is the order of each matrix block of the matrix Φ in formula (51)).

Prospects for further research. The method proposed in the work allows for further development both for bodies of other geometries and for problems of optimal control of other types of physical fields. Another direction of its development is related to non-axisymmetric problems.

Conclusions. As a result of the conducted research, the following conclusions can be drawn. The work presents a further development of the method for solving problems of optimal control of the thermoelastic state of a composite body using a temperature field, proposed in [34]. Unlike the work mentioned above, in which it was developed to control the surface temperature of the body, in this article the control is the power of distributed internal heat sources. As far as the authors know, this type of control is being considered for the first time. The method is demonstrated using the example of solving the problem of optimal control of the thermoelastic state of a loaded ball with an eccentric inclusion made of another material, in the region of which thermal field sources are distributed. The objective functional chosen for the problem is a functional that expresses the root-mean-square value of the stress at the inclusion surface. An additional constraint is imposed on the root-mean-square power of the heat sources. The solution to the problem is divided into two stages. At the first stage, the direct problem of modeling the thermoelastic state of a ball with inclusion is solved at a given temperature and external load at the boundary of the ball, and in the inclusion – the power of distributed heat sources. In this case, the generalized Fourier method is used, a modification of the apparatus of which was specially developed by the authors for the specified geometry of the body. As a result of the implementation of the first stage, the problem of modeling the thermoelastic state of the sphere is reduced to solving two infinite systems of linear algebraic equations to determine the parameters of the model, and the original optimal control problem is replaced by an equivalent problem in which the state of the object is already determined by the specified systems. In this case, the opti-

mization problem is posed with respect to a quadratic functional defined on the Cartesian product of Hilbert spaces of square-summable numerical sequences. The arguments of the functional are the solutions of the specified systems. The fundamental difficulty in solving the equivalent (inverse) problem is the impossibility of analytically expressing the solutions of the systems through optimization parameters. This paper further develops the method for parametrically solving infinite systems of linear algebraic equations proposed in [34]. As a result of its application, the quadratic functional was expressed in terms of optimization parameters. The problem of finding the functional's conditional extremum was solved using the Lagrange method. Its application led to an infinite system of linear algebraic equations with a quadratic constraint, which was solved using the spectral method. All intermediate stages of the implementation of the proposed method are strictly justified by five theorems proven in the work. The numerical implementation of the method was conducted as part of an extensive computer experiment, the results of which are presented in the paper. The paper presents images of the optimal temperature fields in the sphere and the powers of the distributed heat sources in the inclusion, as well as graphs of the optimal temperatures and normal stresses on the inclusion surface depending on the geometric parameters and three different types of external load. The analytical justification and calculations performed prove the correctness and effectiveness of the proposed method.

Bibliography

1. *Amstutz H., Vormwald M.* Elastic spherical inhomogeneity in an infinite elastic solid: an exact analysis by an engineering treatment of the problem based on the corresponding cavity solution // *Archive of Applied Mechanics*. – 2021. – Vol. 91. – P. 1577 – 1603. DOI: 10.1007/s00419-020-01842-9.
2. *Rahman M.* The stiffness of an elastic solid with an embedded, nominally spherical inclusion subjected to a small arbitrary motion // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 2542 – 2577. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.042.
3. *Lim C. W., Li Z. R., He L. H.* Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 5055 – 5065. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.007.
4. *Li Z. R., Lim C. W., He L. H.* Stress concentration around a nano-scale spherical cavity in elastic media: effect of surface stress // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2006. – Vol. 25. – P. 260 – 270. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2005.09.005.
5. *Zappalorto M., Salviato M., Quaresimin M.* Stress distributions around rigid nanoparticles // *Int J Fract.* – 2012. – Vol. 176. – no. 1. – P. 105 – 112. DOI: 10.1007/s10704-012-9714-2.
6. *Nomura S.* Stress fields for a three-phase spherical inclusion problem // *Acta Mech.* – 2021. – Vol. 232. – no. 4. – P. 2843 – 2851. DOI: 10.1007/s00707-021-02986-7.
7. *Kit H. S., Ivas'ko N. M.* Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half space in the presence of heat release in a ribbon-shaped domain parallel to its boundary // *J. Math. Sci.* – 2019. – Vol. 236. – no. 2. – P. 172 – 184. DOI: 10.1007/s10958-018-4104-6.
8. *Meleshko V. V., Tokovyy Y., Barber G. R.* Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // *J. Math. Sci.* – 2011. – Vol. 176. – no. 5. – P. 646 – 669. DOI: 10.1007/s10958-011-0428-1.
9. *Protsiuk B. V.* Determination of the Static Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Plate, Cylinder, and Sphere // *J. Math. Sci.* – 2023. – Vol. 274. – no. 6. – P. 678 – 707. DOI: 10.1007/s10958-023-06630-8.
10. *Fesenko A. A.* Mixed Problems of Stationary Heat Conduction and Elasticity Theory for a Semi-infinite Layer // *J Math Sci.* – 2015. – Vol. 205. – P. 706 – 718. DOI: 10.1007/s10958-015-2277-9.
11. *Chiang C. R.* Thermal Mismatch Stress of a Spherical Inclusion in a Cubic Crystal // *Int J Fract.* – 2006. – Vol. 139. – no. 2. – P. 313 – 317. DOI: 10.1007/s10704-006-8377-2.
12. *Al-Ali A. Y., Almutairi K. H., Rawy E. K., Ghaleb A. F., Abou-Dina M. S.* Deformation of a long thermoelastic rod of rectangular normal cross-section under mixed boundary conditions by boundary integrals // *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. – 2016. – Vol. 24. – P. 449 – 457. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.
13. *Shiah Y. C., Tan C. L.* Thermoelastic analysis of 3D generally anisotropic bodies by the boundary element method // *European Journal of Computational Mechanics*. – 2016. – Vol. 25. – no. 1–2. – P. 91 – 108. DOI: 10.1080/17797179.2016.1181038.
14. *Hussein K.* Analytical and numerical study of the temperature distribution for a solid sphere subjected to a uniform heat generation // *International Journal of Computer Applications*. – 2017. – Vol. 168. – no. 2. – P. 30 – 37. DOI: 10.5120/ijca2017914304.
15. *Halazyuk V. A., Kit H. S.* Axially symmetric stress-strain state of a body with plane sheet of heat sources // *J. Math. Sci.* – 2012. – Vol. 183. – P. 162 – 176. DOI: 10.1007/s10958-012-0804-5.
16. *Kit H. S., Chernyak M. S.* Stress state of a body with heat-generating spherical inclusions // *J. Math. Sci.* – 2012. – Vol. 187. – no. 5. – P. 635 – 646. DOI: 10.1007/s10958-012-1089-4.
17. *Kit H., Andriyuk R.* Thermal Stressed State of a Half Space with Heat Generation in a Spherical Domain // *J. Math. Sci.* – 2023. – Vol. 273. – no. 1. – P. 1 – 8. DOI: 10.1007/s10958-023-06488-w.
18. *Pawar S. P., Deshmukh K. C., Kedar G. D.* Thermal stresses in functionally graded hollow sphere due to non-uniform internal heat generation // *Applications and Applied Mathematics*. – 2015. – Vol. 10(1). – P. 552 – 569. – Режим доступу : <https://digitalcommons.pvamu.edu/aam/vol10/iss1/33>. – Дата звертання : 17 вересня 2025.
19. *Rani P., Singh K., Muwal R.* Thermal stresses due to non-uniform internal heat generation in functionally graded hollow cylinder // *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*. – 2021. – Vol. 26. – no. 2. – P. 186 – 200. DOI: 10.2478/ijame-2021-0027.
20. *Pawar S. P., Bikram J. J., Kedar G. D.* Thermoelastic Behavior in a Multilayer Composite Hollow Sphere with Heat Source // *Journal of Solid Mechanics*. – 2020. – Vol. 12. – no. 4. – P. 883 – 901. DOI: 10.22034/jsm.2020.1898267.1583.
21. *Wu C., Yin H.* Transient thermal analysis of composites containing spherical inhomogeneities for the particle size effect on laser flash measurements // *Int. J. Solids Struct.* – 2025. – Vol. 321. – article no.113540. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.
22. *Zhang G., Zhang Y., Wang T., Zhang L., Gao Y.* Thermoelastic behavior analysis of finite composites embedded in ellipsoidal inhomogeneities with inclusion-based boundary element method // *Int. J. Solids Struct.* – 2025. – Vol. 309. – article no.113172. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113172.
23. *Rodopoulos D. C., Karathanasopoulos N.* Thermomechanical performance of double-phase periodic and graded architected materials: Numerical and explainability analysis // *Int. J. Solids Struct.* – 2025. – Vol. 309. – article no. 1131159. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113159.
24. *Wang X., Schiavone P.* An imperfectly bonded elliptical inhomogeneity under uniform heat flux and uniform temperature change // *Journal of Thermal Stresses*. – 2025. – Vol. 48. – is. 4. – P. 458 – 474. DOI: 10.1080/01495739.2025.2473727.
25. *Zeinedini A.* On the role of thermal stress in fracture toughness of polymer nanocomposites: A multiscale theoretical model // *Journal of Thermal Stresses*. – 2025. – Vol. 48. – is. 3. – P. 229 – 250. DOI: 10.1080/01495739.2025.2473731.
26. *Zasadna K. E.* Numerical solution of the problem of optimal control of the heating of a thermoelastic plate by internal heat sources // *Journal of Soviet Mathematics*. – 1993. – Vol. 63. – P. 70 – 74. DOI: 10.1007/BF01103085.

27. Hafidallah A., Ayadi A. Optimal control of a thermoelastic body with missing initial conditions // *International Journal of Control*. – 2020. – Vol. 93. – no. 7. – P. 1570 – 1576. DOI: 10.1080/00207179.2018.1519258.
28. Vigak V. M., Yasins'kii A. V., Yuzyuk N. I. Optimal control of the heating of thermosensitive canonical bodies with constraints on the stress in the plastic zone // *International Applied Mechanics*. – 1995. – Vol. 31. – no. 12. – P. 997 – 1003. DOI: 10.1007/BF0084725.
29. Vigak V. M., Svirida M. I. Optimal Control of Two-dimensional Nonaxisymmetric Temperature Field in a Hollow Cylinder with Thermoelastic Stress Restrictions // *Intl. Appl. Mech.* – 1995. – Vol. 31. – P. 448 – 454. DOI: 10.1007/BF00846797.
30. Кушнір Р. М., Ясінський А. В. Оптимальне керування нагріванням прямокутної термочутливої області за обмежень на напруження у пластичній зоні // *Доповіді Національної академії наук України*. – 2010. – No 1. – С. 59 – 64.
31. Gachkevich O. R., Gachkevich M. G. Optimal Heating of a Piecewisehomogeneous Cylindrical Glass Shell by the Surrounding Medium and Heat Sources // *J. Math. Sci.* – 1999. – Vol. 96. – P. 2935 – 2939. – Режим доступу : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02169010>. – Дата звертання : 17 вересня 2025.
32. Чекурін В. Ф., Постолікі Л. І. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним термопружним станом циліндричних тіл // *Математичні методи і фіз.-мех. поля*. – 2017. – Vol. 60. – no. 2. – С. 105 – 116. DOI: 10.1007/s10958-019-04531-3.
33. Meriç R. A. Coupled optimization in steady-state thermoelasticity // *Journal of Thermal Stresses*. – 1985. – vol. 8. – no. 3. – pp. 333 – 347. DOI: 10.1080/01495738508942240.
34. Nikolaev O., Skitska M. The method of determining optimal control of the thermoelastic state of piece-homogeneous body using a stationary temperature field // *Radioelectronic and Computer Systems*. – 2024. – No. 2(110). – P. 98 – 119. DOI: 10.32620/reks.2024.2.09.
35. Nikolayev A. G., Protsenko V. S. First and second fundamental axisymmetric problems of elasticity theory for doubly-connected domains bounded by the surfaces of a sphere and a spheroid // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1990. – Vol. 54. – is. 1. – P. 51 – 59. DOI: 10.1016/0021-8928(90)90087-Q.
36. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Classical problem about an elastic sphere with a spherical inclusion // *Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – No. 1(8). – P. 107 – 119. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.01(8).13.

References (transliterated)

1. Amstutz H., Vormwald M. Elastic spherical inhomogeneity in an infinite elastic solid: an exact analysis by an engineering treatment of the problem based on the corresponding cavity solution. *Archive of Applied Mechanics*. 2021, Vol. 91, pp. 1577–1603. DOI: 10.1007/s00419-020-01842-9.
2. Rahman M. The stiffness of an elastic solid with an embedded, nominally spherical inclusion subjected to a small arbitrary motion. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, pp. 2542–2577. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.042.
3. Lim C. W., Li Z. R., He L. H. Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, pp. 5055–5065. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.007.
4. Li Z. R., Lim C. W., He L. H. Stress concentration around a nano-scale spherical cavity in elastic media: effect of surface stress. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2006, Vol. 25, pp. 260–270. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2005.09.005.
5. Zappalorto M., Salviato M., Quaresimin M. Stress distributions around rigid nanoparticles. *Int J Fract.* 2012, Vol. 176, no. 1, pp. 105–112. DOI: 10.1007/s10704-012-9714-2.
6. Nomura S. Stress fields for a three-phase spherical inclusion problem. *Acta Mech.* 2021, Vol. 232, no. 4, pp. 2843–2851. DOI: 10.1007/s00707-021-02986-7.
7. Kit H. S., Ivas'ko N. M. Two-dimensional problem of thermoelasticity for a half space in the presence of heat release in a ribbon-shaped domain parallel to its boundary. *J. Math. Sci.* 2019, Vol. 236, no. 2, pp. 172–184. DOI: 10.1007/s10958-018-4104-6.
8. Meleshko V. V., Tokovyy Y., Barber G. R. Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length. *J. Math. Sci.* 2011, Vol. 176, no. 5, pp. 646–669. DOI: 10.1007/s10958-011-0428-1.
9. Protsiuk B. V. Determination of the Static Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Plate, Cylinder, and Sphere. *J. Math. Sci.* 2023, Vol. 274, no. 6, pp. 678–707. DOI: 10.1007/s10958-023-06630-8.
10. Fesenko A. A. Mixed Problems of Stationary Heat Conduction and Elasticity Theory for a Semi-infinite Layer. *J Math Sci.* 2015, Vol. 205, pp. 706–718. DOI: 10.1007/s10958-015-2277-9.
11. Chiang C. R. Thermal Mismatch Stress of a Spherical Inclusion in a Cubic Crystal. *Int J Fract.* 2006, Vol. 139, no. 2, pp. 313–317. DOI: 10.1007/s10704-006-8377-2.
12. Al-Ali A. Y., Almutairi K. H., Rawy E. K., Ghaleb A. F., Abou-Dina M. S. Deformation of a long thermoelastic rod of rectangular normal cross-section under mixed boundary conditions by boundary integrals. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 2016, Vol. 24, pp. 449–457. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.
13. Shiah Y. C., Tan C. L. Thermoelastic analysis of 3D generally anisotropic bodies by the boundary element method. *European Journal of Computational Mechanics*. 2016, Vol. 25, no. 1–2, pp. 91–108. DOI: 10.1080/17797179.2016.1181038.
14. Hussein K. Analytical and numerical study of the temperature distribution for a solid sphere subjected to a uniform heat generation. *International Journal of Computer Applications*. 2017, Vol. 168, no. 2, pp. 30–37. DOI: 10.5120/ijca2017914304.
15. Halazyuk V. A., Kit H. S. Axially symmetric stress-strain state of a body with plane sheet of heat sources. *J. Math. Sci.* 2012, Vol. 183, pp. 162–176. DOI: 10.1007/s10958-012-0804-5.
16. Kit H. S., Chernyak M. S. Stress state of a body with heat-generating spherical inclusions. *J. Math. Sci.* 2012, Vol. 187, no. 5, pp. 635–646. DOI: 10.1007/s10958-012-1089-4.
17. Kit H., Andriyuk R. Thermal Stressed State of a Half Space with Heat Generation in a Spherical Domain. *J. Math. Sci.* 2023, Vol. 273, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10958-023-06488-w.
18. Pawar S. P., Deshmukh K. C., Kedar G. D. Thermal stresses in functionally graded hollow sphere due to non-uniform internal heat generation. *Applications and Applied Mathematics*. 2015, Vol. 10(1), pp. 552–569. Available at : <https://digitalcommons.pvamu.edu/aam/vol10/iss1/33>. (accessed 17 September 2025).
19. Rani P., Singh K., Muwal R. Thermal stresses due to non-uniform internal heat generation in functionally graded hollow cylinder. *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*. 2021, Vol. 26, no. 2, pp. 186–200. DOI: 10.2478/ijame-2021-0027.
20. Pawar S. P., Bikram J. J., Kedar G. D. Thermoelastic Behavior in a Multilayer Composite Hollow Sphere with Heat Source. *Journal of Solid Mechanics*. 2020, Vol. 12, no. 4, pp. 883–901. DOI: 10.22034/jsm.2020.1898267.1583.
21. Wu C., Yin H. Transient thermal analysis of composites containing spherical inhomogeneities for the particle size effect on laser flash measurements. *Int. J. Solids Struct.* 2025, Vol. 321, article no. 113540. DOI: 10.1016/j.joems.2015.09.003.
22. Zhang G., Zhang Y., Wang T., Zhang L., Gao Y. Thermoelastic behavior analysis of finite composites embedded in ellipsoidal inhomogeneities with inclusion-based boundary element method. *Int. J. Solids Struct.* 2025, Vol. 309, article no. 113172. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113172.
23. Rodopoulos D. C., Karathanasopoulos N. Thermomechanical performance of double-phase periodic and graded architected materials: Numerical and explainability analysis. *Int. J. Solids Struct.* 2025, Vol. 309, article no. 1131159. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113159.
24. Wang X., Schiavone P. An imperfectly bonded elliptical inhomogeneity under uniform heat flux and uniform temperature change. *Journal of Thermal Stresses*. 2025, Vol. 48, is. 4, pp. 458–474. DOI: 10.1080/01495739.2025.2473727.

25. Zeinedini A. On the role of thermal stress in fracture toughness of polymer nanocomposites: A multiscale theoretical model. *Journal of Thermal Stresses*. 2025, Vol. 48, is. 3, pp. 229–250. DOI: 10.1080/01495739.2025.2473731.
26. Zasadna K. E. Numerical solution of the problem of optimal control of the heating of a thermoelastic plate by internal heat sources. *Journal of Soviet Mathematics*. 1993, Vol. 63, pp. 70–74. DOI: 10.1007/BF01103085.
27. Hafdallah A., Ayadi A. Optimal control of a thermoelastic body with missing initial conditions. *International Journal of Control*. 2020, Vol. 93, no. 7, pp. 1570–1576. DOI: 10.1080/00207179.2018.1519258.
28. Vigak V. M., Yasins'kii A. V., Yuzvyak N. I. Optimal control of the heating of thermosensitive canonical bodies with constraints on the stress in the plastic zone. *International Applied Mechanics*. 1995, Vol. 31, no. 12, pp. 997–1003. DOI: 10.1007/BF0084725.
29. Vigak V. M., Svirida M. I. Optimal Control of Two-dimensional Nonaxisymmetric Temperature Field in a Hollow Cylinder with Thermoelastic Stress Restrictions. *Intl. Appl. Mech.* 1995, Vol. 31, pp. 448–454. DOI: 10.1007/BF00846797.
30. Kushnir R. M., Yasins'kyy A. V. Optymal'ne keruvannya naghriivannyam pryamokutnoyi termochutlyvoyi oblasti za obmezhen' na napruzhenyia u plastychniy zoni [Optimal control of heating of a rectangular thermosensitive area under stress restrictions in the plastic zone]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 1, pp. 59–64.
31. Gachkevich O. R., Gachkevich M. G. Optimal Heating of a Piecewisehomogeneous Cylindrical Glass Shell by the Surrounding Medium and Heat Sources. *J. Math. Sci.* 1999, Vol. 96, pp. 2935–2939. Available at : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02169010>. (accessed 17 September 2025).
32. Chekurin V. F., Postolaki L. I. Zastosuvannya variatsiynogo metodu odnorodnykh rozv'yazkiv dlya optymal'nogo keruvannya osesymetrychnym termopruzhnym stanom tsylindra [Application of the variational method of homogeneous solutions for optimal control of the axisymmetric thermoelastic state of the cylinder]. *Matematychni metody i fiz.-mekh. polya* [Math. methods and physical-mechanical fields]. 2017, vol. 60, no. 2, pp. 105–116. DOI: 10.1007/s10958-019-04531-3.
33. Meriç R. A. Coupled optimization in steady-state thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses*. 1985, vol. 8, no. 3, pp. 333–347. DOI: 10.1080/01495738508942240.
34. Nikolaev O., Skitska M. The method of determining optimal control of the thermoelastic state of piece-homogeneous body using a stationary temperature field. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2024, No. 2(110), pp. 98–119. DOI: 10.32620/reks.2024.2.09.
35. Nikolayev A. G., Protsenko V. S. First and second fundamental axisymmetric problems of elasticity theory for doubly-connected domains bounded by the surfaces of a sphere and a spheroid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1990, Vol. 54, is. 1, pp. 51–59. DOI: 10.1016/0021-8928(90)90087-Q.
36. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Classical problem about an elastic sphere with a spherical inclusion // *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2025, No. 1(8), pp. 107–119. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.01(8).13.

Надійшла (received) 30.10.2025; Доопрацьована (finalized) 26.12.2025; До публікації (for publication) 27.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Николаев Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Olexsii Georhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Скіцка Марія Вікторівна – доктор філософії, доцент кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (095) 596-30-79; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8945-6069>; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Skitska Mariia Viktorivna – PhD, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (095) 596-30-79; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8945-6069>; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Драшпуль Наталя Володимирівна – старший викладач кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (095) 580-94-01; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8885-8262>; e-mail: n.drashpul@khai.edu.

Drashpul Natalia Volodymyrivna – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (095) 580-94-01; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8885-8262>; e-mail: n.drashpul@khai.edu.

О. Г. РУДНИЦЬКИЙ, М. О. РУДНИЦЬКА, Л. В. ТКАЧЕНКО

ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ПОКРАЩЕННЯ ЯКОСТІ ОПТОАКУСТИЧНОЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ

Оптоакустична томографія – це неінвазивний метод візуалізації, заснований на гібридній технології, що поєднує переваги оптичного та ультразвукового підходів. Вона забезпечує високий оптичний контраст, субміліметровий рівень детектування, неінвазивність, екологічність та глибоке ультразвукове проникнення у досліджуваній об'єкт. Однак висока гетерогенність тканинного фону, що характеризується сильними просторовими варіаціями розсіювання та поглинання звукових та електромагнітних хвиль, суттєво ускладнюють отримання якісних оптико-акустичних зображень. Крім того, якісна реконструкція хромофорів тканин та інших біомаркерів додатково ускладнюється різними наближеними формулами інверсії. Нещодавно нами було запропоновано метод поліпшення якості оптико-акустичних (ОА) зображень, що базується на теоремі Банаха про нерухому точку. У даній роботі ми розвиваємо запропонований метод, використовуючи підхід, подібний до методу Калмана. Для перевірки ефективності розробленого алгоритму було проведено низку числових експериментів оптико-акустичної реконструкції двовимірних числових фантомів різної геометрії – кругові диски різного діаметру, розташовані на різній глибині, та двовимірний модель судинного дерева. Відновлені та покращені за новою схемою оптико-акустичні зображення порівнювалися з реконструкціями, отриманими на основі попередніх ітеративних схем. Збіжність методів та якість покращених вихідних зображень, які аналізувалися в термінах пікового відношення сигнал/шум (PSNR) та індексу структурної подібності (SSIM), показали більшу ефективність нового методу.

Ключові слова: обробка зображень, оптико-акустична томографія, числове моделювання, теорема Банаха, набір інструментів k – Wave, фільтр Калмана.

A. G. RUDNITSKII, M. A. RUDNYTSKA, L. V. TKACHENKO

OPTIMIZATION OF THE ALGORITHM FOR IMPROVING THE QUALITY OF OPTOACOUSTIC VIZUALIZATION

Optoacoustic tomography is a non-invasive imaging method based on a hybrid technology that combines the advantages of optical and ultrasonic approaches. It provides high optical contrast, submillimeter detection level, non-invasiveness, environmental friendliness and deep ultrasonic penetration into the studied object. However, the high heterogeneity of the tissue background, characterized by strong spatial variations in scattering and absorption, significantly complicates the acquisition of high-quality optoacoustic images. In addition, high-quality reconstruction of tissue chromophores and other biomarkers is further complicated by various approximate inversion formulas. Recently, we proposed a method for improving the quality of optoacoustic (OA) images, which is based on the Banach fixed point theorem. In this work, we develop the proposed method using an approach similar to the Kalman method. To verify the effectiveness of the developed algorithm, a series of numerical experiments on optoacoustic reconstruction of two-dimensional numerical phantoms of different geometries were conducted - circular disks of different diameters located at different depths, and a two-dimensional model of the vascular tree. The restored and improved optoacoustic images using the new scheme were compared with the reconstructions obtained using previous iterative schemes. The convergence of the methods and the quality of the improved output images, which were analyzed in terms of peak signal-to-noise ratio (PSNR) and structural similarity index (SSIM), showed the greater effectiveness of the new method.

Key words: image processing, optoacoustics tomography, numerical modeling, Banach theorem, k – Wave toolkit, Kalman filter.

Вступ та аналіз останніх досліджень. *Оптоакустика (ОА)* – це техніка *візуалізації*, заснована на оптико-акустичному ефекті. Цей ефект виникає при поглинанні *імпульсного* або *модульованого світла* абсорбером в досліджуваному зразку. Швидке нагрівання абсорбера викликає його *термопружне розширення* з подальшою генерацією *акустичних хвиль*. З точки зору взаємодії *електромагнітного випромінювання* з речовиною, результуючий акустичний відгук містить інформацію про перехідні процеси, які відбуваються в області, що опромінюється. Таким чином, оптично збуджені акустичні імпульси можуть бути використані як для визначення параметрів середовища, через яке пройшли ці імпульси (коефіцієнти теплового розширення, теплопровідність і так далі), так і для вивчення неоднорідностей в об'єкті, що опромінюється, та на його поверхні. Оскільки різні тканини мають різні оптичні характеристики, отримана структурна і функціональна інформація дозволяє аналізувати різні компоненти біологічних тканин, відображаючи тонкі аномалії таких важливих фізіологічних параметрів, як концентрація гемоглобіну [1], оксигенація [2], швидкість метаболізму кисню [3] і вміст глюкози в крові [4]. Ця технологія пропонує кросмасштабну, багатофункціональну, неруйнівну біомедичну візуалізацію високої роздільної здатності. Поєднуючи переваги *ультразвукових* та *оптичних методів*, біомедична оптико-акустична візуалізація дозволяє отримувати зображення біологічних тканин з *високим контрастом* та *субміліметровою просторовою роздільною здатністю* на глибинах від кількох міліметрів до кількох сантиметрів [5]. При цьому якість зображення значною мірою визначається *алгоритмом оптико-акустичної реконструкції*. Спотворення та артефакти на реконструйованому зображенні можуть виникати як через специфіку *методу реконструкції*, так і через завади та шуми різної природи, неминучі у реальних дослідженнях. Усунення цих спотворень та артефактів є вкрай актуальною проблемою [6], оскільки ОА-зображення, як правило, містять інтенсивний нестационарний фон з невеликим співвідношенням сигнал/завада, артефакти можуть бути структурно подібними корисним сигналам, а реконструйоване цифрове зображення часто має нечіткі границі.

Мотивацією даної роботи є подальше підвищення ефективності методу покращення якості оптико-акустичних образів, заснованого на *теоремі Банаха про нерухому точку*, який було запропоновано в роботах [7, 8].

Постановка задачі. *Просторово-часову залежність* поля тиску звукової хвилі $p(\mathbf{r}, t)$, що згенерована відомими джерелами тепла $H(\mathbf{r}, t)$ в акустично однорідному нескінченному середовищі, при ігноруванні ефек-

тами в'язкості та теплопровідності можна отримати з рівняння [9]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(\mathbf{r}, t) = -\frac{\beta}{c_p} \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

де \mathbf{r} – просторова координата точки; t – час; c – швидкість звуку; β – коефіцієнт ізобаричного розширення; c_p – питома теплоємність при постійному тиску.

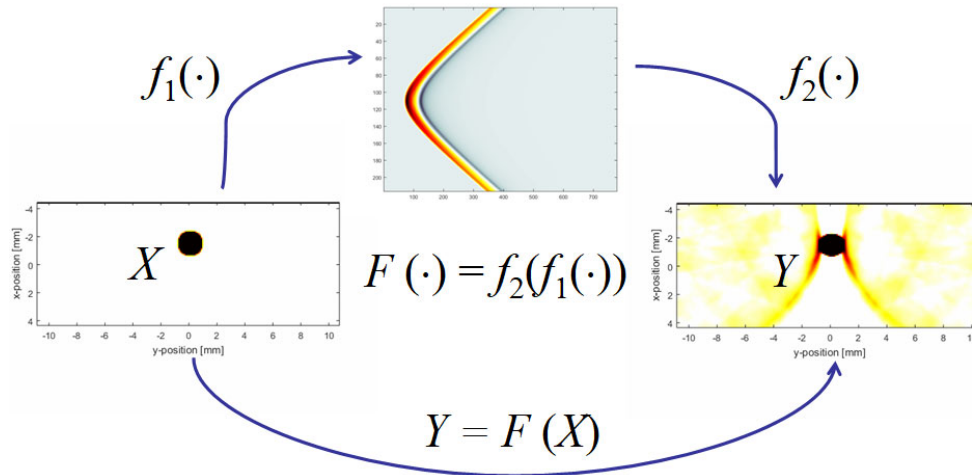


Рис. 1 – Схема оптоакустичної реконструкції.

Відновлення абсорбуючих світло структур всередині освітленого тіла за відомим розподілом акустичного тиску на його поверхні представляє *обернену задачу оптоакустики*.

Існує низка методів відновлення розподілу джерел у середовищі [10 – 13]. Звичайно, переваги та обмеження кожного з них визначаються заданою *математичною моделлю*. Оскільки в реальній ситуації модельні припущення виконуються лише частково, реконструйовані зображення неминуче містять спотворення. Специфіка цих спотворень визначається методом реконструкції, розташуванням акустичних сенсорів та геометрією об'єкта, що реконструюється. Для подолання сильної залежності якості відновленого зображення від цих факторів ми запропонували *метод поліпшення якості реконструйованих ОА-зображень* [7]. Він заснований на теоремі Банаха про нерухому точку [14]. Теорема пропонує конструктивний метод знаходження нерухомої точки та гарантує її існування та єдиність для деяких відображень метричних просторів.

Запропонований підхід ґрунтується на наступних міркуваннях (рис. 1). Нехай X – невідоме зображення, Y – реконструйоване зображення, яке потребує коректування, а $F(\cdot)$ – відображення (оператор), що перетворює вхідне зображення в реконструйоване:

$$Y = F(X), \quad X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

Задача полягає у тому, щоб для заданого $F(X^*)$ визначити найкращу оцінку X^* . Тобто повинна виконуватись умова $X^* = F(X^*)$. При цьому оператор F є результат послідовного застосування функцій $f_1(\cdot)$ і $f_2(\cdot)$: $F(\cdot) = f_2(f_1(\cdot))$, де $f_1(\cdot)$ – оператор, що розв'язує пряму задачу оптоакустики (рівняння (1)), а $f_2(\cdot)$ – оператор, що задає розв'язок оберненої задачі.

Якщо існує явний вигляд $F(\cdot)$, то розв'язок поставленої задачі є очевидним: $X = F^{-1}(F(X))$. Однак в описаній конкретній ситуації знайти обернену функцію досить проблематично – для прийнятої нами фізичної моделі оператор $F(\cdot)$ обчислюється лише у прямому напрямку. Тим не менш, теорема Банаха про нерухому точку дозволяє отримати уточнений розв'язок оберненої задачі оптоакустики. Для цього слід сформулювати послідовність зображень $\{X_q\}$ ($q \geq 1$), таку, що $X_q = F(X_{q-1})$. Тут $F(\cdot)$ перетворює початковий акустичний тиск, що виникає через поглинання оптичними неоднорідностями $X = p_0(\mathbf{r})$, на його нульове наближення $P_0^{(0)}(\mathbf{r}) = Y = X_0$.

Зауважимо, що внутрішня структура оператора $F(\cdot)$ може бути прихована і навіть невідома. Тому алгоритми такого типу називаються напівсліпими. При цьому слід зазначити, що в описаній ітеративній схемі кожна ітерація може займати досить багато комп'ютерного часу, оскільки вимагає обчислення прямої та оберненої задачі оптоакустики.

Тому з практичної точки зору оптимізація алгоритму та пошук компромісу між обчислювальною складністю та ефективністю стають вкрай актуальною проблемою. Для її вирішення ми запропонували підхід, подібний до того, що використовується у *фільтрах Калмана*.

Існує низка ітеративних схем, заснованих на теоремі Банаха про фіксовану точку. У найпростішому випадку схема корекції описується алгоритмом:

$$X_{q+1} = X_q + H_q; \quad H_q = Y - F(X_q); \quad X_0 = Y, \quad (2)$$

який надалі, наслідуючи роботу [15], називатимемо *T-алгоритмом (метод Тао)*. Саме цей алгоритм використовувався нами у попередніх роботах [7, 8] для корекції ОА-зображень. Зауважимо, що цю ітеративну процедуру можна розглядати також і як *байєсівський процес*.

Дійсно, образ $X_0 = Y$, що реконструйовано із зареєстрованих на поверхні даних, можна розглядати як інформацію, отриману з експерименту, а апіорна інформація про процес міститься в прийнятій нами фізичній моделі розповсюдження звукових хвиль (пряма задача оптоакустики), їх реєстрації та алгоритмі розв'язання зворотної задачі оптоакустики. Тобто апіорна інформація сконцентрована в операторі $F(\cdot)$. При цьому, у нашому випадку, помилки експерименту та неточності моделі не залежать від номера ітерації.

У лінійному наближенні та гаусівській статистиці така задача у загальному випадку зводиться до *алгоритму Калмана*, що використовує динамічну модель системи (наприклад, фізичний закон руху), та послідовні експериментальні вимірювання для формування оптимальної оцінки стану.

Тобто, згідно з *Калманівською стратегією*, спочатку обчислюються значення прогнозованого стану системи на основі попередніх даних, а потім цей спрогнозований результат корегується за допомогою спостережених даних.

Отже, алгоритм складається з двох фаз: фази передбачення та фази коригування. На першому етапі розраховується прогноз стану в наступний момент часу (у нас це номер ітерації q). На другому кроці – етапі корекції – після порівняння модельного та експериментального значень відбувається уточнення передбаченого стану.

У наших позначеннях ця схема виглядає так:

– передбачення стану системи: $Y_q = F(X_q)$;

– оновлення оцінки з урахуванням вимірювання експериментальних даних Z_q (оскільки модель не є ідеальною): $X_{q+1} = X_q + \alpha_q \cdot (Z_q - Y_q)$;

– обчислення оптимального коефіцієнта α_q .

Стосовно нашої задачі вимірювання Z_q залишається незмінним із зростанням ітерацій – це нульове наближення зображення, реконструйоване із зареєстрованих на поверхні зразка даних: $Z = X_0$. Оптимальне значення коефіцієнта α_q шукатимемо шляхом мінімізації середньоквадратичного відхилення різниці $H_{q+1} = (Z - Y_{q+1})$.

Тобто шукаємо α_q таке, що доставляє мінімум цільовій функції $\Psi_q = (Z - F(X_q) + \alpha_q(Z - F(X_q)))^2$.

Лінеаризуючи функцію F , отримаємо:

$$F(X_q) + \alpha_q(Z - F(X_q)) \approx F(X_q) + \alpha_q \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_q} (Z - F(X_q)). \quad (3)$$

Явний вигляд функції $F(X)$ нам невідомий, тому безпосередньо ми не зможемо обчислити похідну у виразі (3). Однак ми можемо врахувати ту обставину, що і пряма, і обернена задачі оптоакустики розв'язуються в лінійному наближенні. Невелика нелінійність вноситься лише умовою невід'ємності реконструйованого зображення. Виходячи з цього, кожен q – у ітерацію $F(X_q)$ будемо представляти у вигляді локально-лінійної функції:

$$F(X_{qm}) \approx A_{qm}X_{qm} + B_{qm} = L_{qm}Z + M_{qm},$$

де індекс m відноситься до m – того вікна зображення. У цьому випадку коефіцієнти L_{qm} і M_{qm} можна знайти, розв'язуючи задачу оптимізації:

$$\arg \min_{L_m, M_m} C(L_m, M_m) = \sum_{r \in \Omega_m} (L_m Z + M_m - F(X_r)) + \lambda L_k^2, \quad (4)$$

де λ – регуляризаційний параметр, а r – піксель у m – тому вікні Ω_m , $r \in \Omega_m$ (індекс q , що позначає номер ітерації, ми тут поки що не позначаємо). Власне кажучи, тут використовується алгоритм веденої фільтрації [16], заснований на віконному застосуванні виваженого усереднення значення веденого зображення. При цьому вагові множники обчислюються за допомогою іншого – ведучого зображення. У нашому випадку веденим зображенням є q – а ітерація $F(X_q)$, а ведуче зображення будується з вихідного Z .

Виходячи зі сказаного, для Ψ_q отримуємо:

$$\begin{aligned} \left(Z - F(X_q) + \alpha_q (Z - F(X_q)) \right)^2 + \varepsilon \alpha_q^2 &\approx \left(Z - F(X_q) - \alpha_q \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_q} (Z - F(X_q)) \right)^2 + \varepsilon \alpha_q^2 \approx \\ &\approx (H_q - \alpha_q L_q H_q)^2 + \varepsilon \alpha_q^2. \end{aligned}$$

Звідси оптимальне значення множника α_q визначається виразом:

$$\alpha_q = \frac{L_q H_q^2}{L_q^2 H_q^2 + \varepsilon}, \quad (5)$$

відповідно до якого і коригується прогнозований стан $Y_{q+1} = F(X_{q+1})$. Зауважимо, що коефіцієнт α_q можна обчислювати або для кожного вікна окремо, або для кожної ітерації отримувати усереднене значення α_q для всього зображення. У цій роботі використовувалося усереднене по всіх вікнах значення. Надалі запропонований підхід називатимемо *KL – підходом (Kalman-like approach)*.

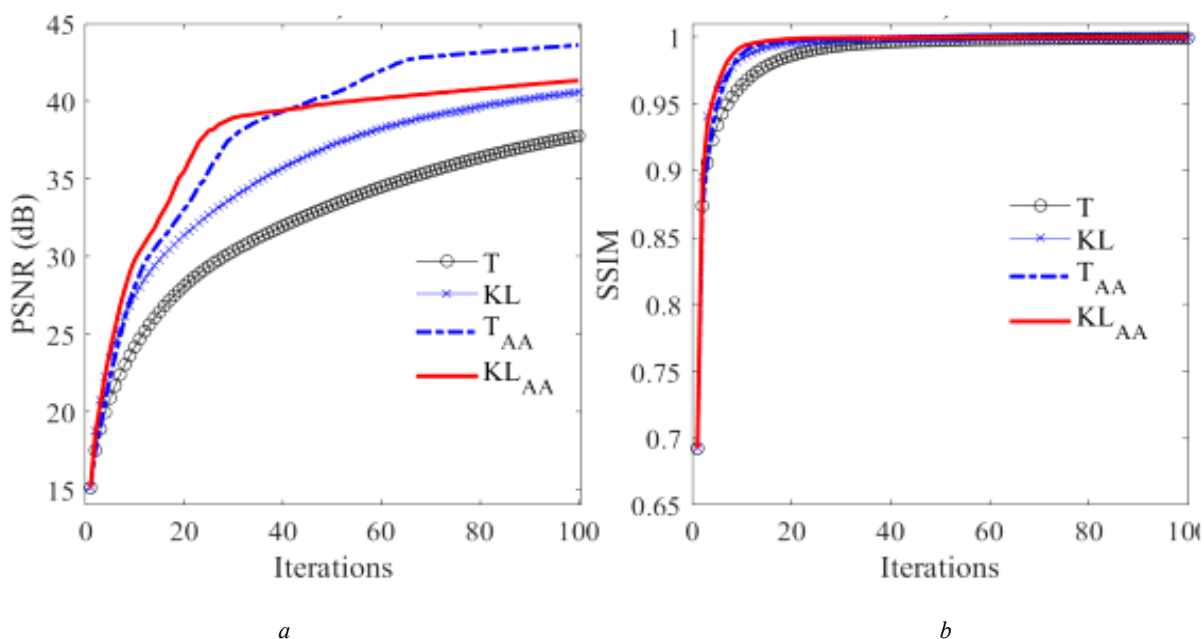


Рис. 2 – Порівняння пікового відношення сигнал/шум (PSNR) (a) та індексу структурної подібності (SSIM) для кругових дисків (b).

Тестування алгоритму. Для перевірки ефективності розробленого алгоритму була проведена низка числових експериментів на фантомах, що моделюють біологічну тканину з абсорберами різної геометрії. Вважалося, що однорідне біологічне середовище має густину $\rho_0 = 1020 \text{ kg/m}^3$ та швидкість звуку $c_0 = 1510 \text{ m/s}$. Тестування проводилося для двовимірних моделей різної геометричної складності: три кругові диски різного діаметра на різній глибині та двовимірну модель судинного дерева (надається програмним пакетом *k-Wave* – набором інструментів для середовища *MATLAB* [17]) на однорідному фоні. При цьому вважалося, що реєструючи сенсори, знаходяться на верхній поверхні прямокутного зразка з розмірами $4.6 \times 10.6 \text{ mm}$ (рис. 1). Для реконструкції використовувався алгоритм зворотних проєкцій із *перетворенням Фур'є*. Частота сигналів тиску становила 7 МГц.

Для моделювання акустичного поля, що виникає у зразку в результаті оптоакустичного ефекту, використовувався підхід, запропонований у [18]. Цей підхід використовує модифікований псевдоспектральний метод розв'язання хвильових рівнянь, що дозволяє суттєво економити обчислювальний час та пам'ять [17].

Оскільки при чисельному моделюванні вихідне зображення відоме, використовувалися такі метрики якості, як пікове відношення сигнал/шум (*PSNR*) та індекс структурної подібності (*SSIM*).

Перша метрика (*PSNR*) вимірює абсолютні помилки у кожному пікселі – вищі значення пікового відношення сигнал/шум свідчать про кращу якість реконструкції. Ця метрика якості досі широко використовується з метою оцінки якості реконструкції, наприклад, [19].

Індекс структурної подібності *SSIM* оцінює якість зображення з урахуванням структурної інформації. Зна-

чення $SSIM$ знаходяться в діапазоні від -1 до 1 , де 1 відповідає точній реконструкції, 0 – відсутності подібності та -1 – ідеальній антикореляції. Цей індекс враховує такі параметри зображення, як яскравість, контрастність та структуру. Ці параметри оцінюються із застосуванням інтенсивності, стандартного відхилення та коваріації порівнюваних зображень у кожному пікселі відповідно. Після усереднення виходить єдина метрика якості всього зображення [20].

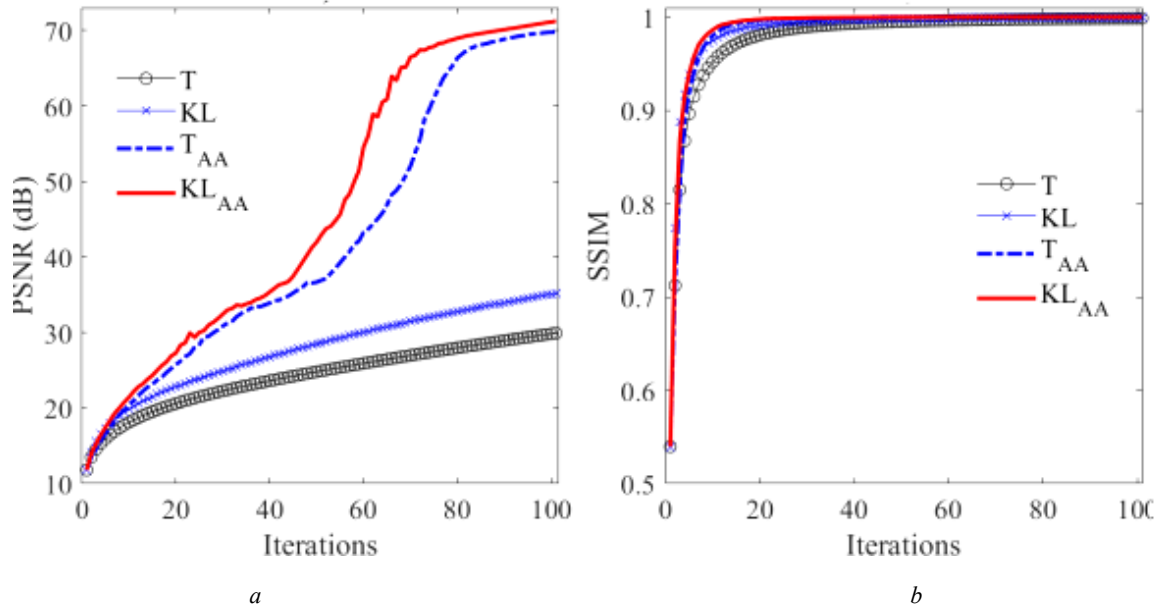


Рис. 3 – Порівняння пікового відношення сигнал/шум (PSNR) (a) та індексу структурної подібності (SSIM) для 2D моделі судинного дерева (b).

Для оцінки ефективності запропонованого методу корекції OA-зображення запропоновані метрики обчислювалися як *функції номера ітерації*. При цьому ефективність запропонованого в цій роботі підходу (KL – метод) порівнювалася з T – методом, описаним у роботах [7, 8]. Крім того, порівнювалися прискорені *методом Андерсена* версії цих підходів – криві T_{AA} та KL_{AA} .

Результати такого порівняння, отримані під час реконструкції кругових дисків та моделі двовимірному судинного дерева, представлені на рис. 2 та рис. 3 відповідно. Криві для T – методу та KL – методу представлені кривими з маркерами, а прискорені методом Андерсена версії цих підходів T_{AA} і KL_{AA} , позначені на рисунках суцільною та штриховою лініями відповідно.

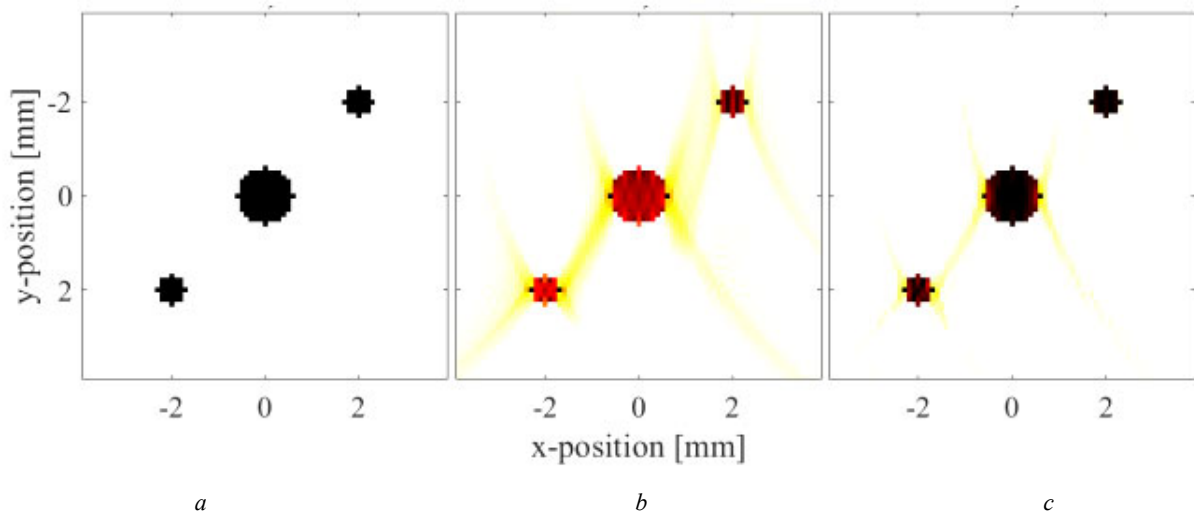


Рис. 4 – Числова модель кругових дисків: a – оригінал; b – k – Wave-реконструкція; c – 6-та ітерація KL_{AA} – методу.

З рис. 2, 3 видно, що всі запропоновані ітеративні схеми дають стійке поліпшення якості зображення зі зростанням номера ітерацій q як у термінах $SSIM$, так і в $PSNR$. При цьому запропоновані в даній роботі алгоритми KL і KL_{AA} забезпечують кращу ефективність як для кругових дисків, так і для $2D$ моделі судинного дерева.

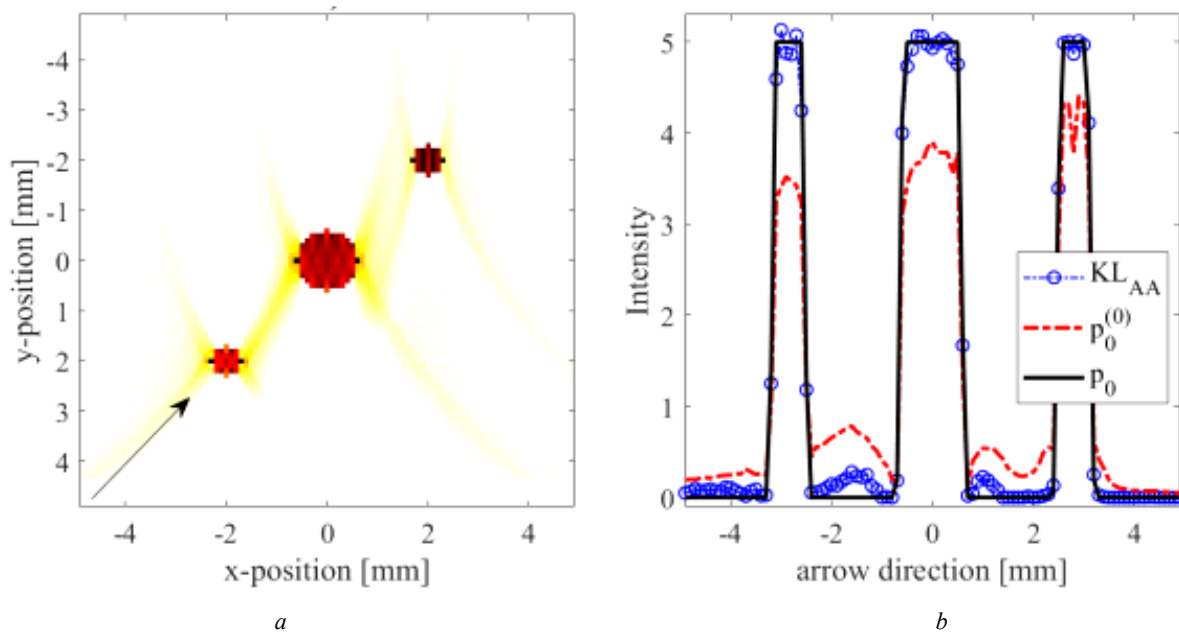


Рис. 5 – a – $2D$ – реконструкція абсорбера алгоритмом пакету k – Wave; b – перерізи відновлених образів вздовж стрілки.

На рис. 5, a : p_0 – оригінал, $p_0^{(0)}$ – k – Wave-реконструкція, KL_{AA} – 6 – та ітерація нашого алгоритму з прискоренням Андерсена.

Також слід зазначити, що для зображень різної геометрії ефективність методу прискорення Андерсена різна. Пікове відношення $PSNR$ для KL_{AA} – метода демонструє кращу ефективність для моделі судинного дерева аж до 100 – і ітерації. Для кругових дисків KL_{AA} – метод зберігає кращу ефективність приблизно до 40 – і ітерації, після чого значення $PSNR$ та $SSIM$ для T_{AA} – методу стають більшими.

Візуально якість реконструкції для обох числових фантомів можна оцінити, аналізуючи рис. 4 – 6.

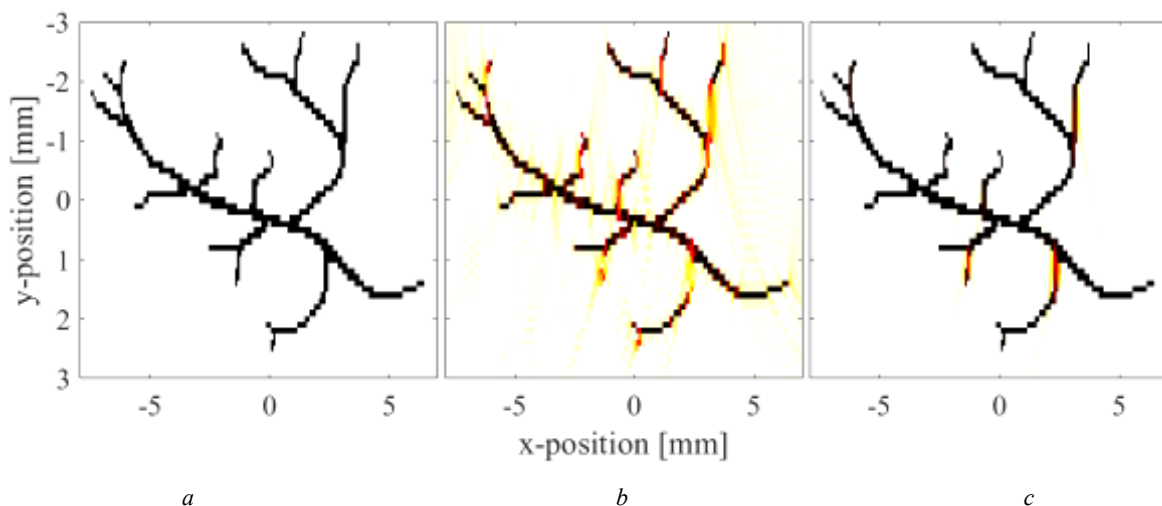


Рис. 6 – Двовимірна модель судинного дерева: a – оригінал; b – k – Wave-реконструкція; c – 6 – та ітерація KL_{AA} – методу.

На рис. 4 наведено вихідне (оригінальне) зображення – три кругові диски різного діаметра на різній глибині (рис. 4, a), результат його реконструкції, виконаної з використанням алгоритму k – Wave (рис. 4, b), та скоригована методом KL_{AA} реконструкція після 6 – і ітерації (рис. 4, c). Невелика кількість ітерацій в останньому випадку обрана для наочності, оскільки з подальшим зростанням ітерацій відмінність між оригіналом і скоригованою версією стає візуально непомітною.

На рис. 4, *b* видно, що k – Wave-реконструкція містить добре помітні спотворення та артефакти у вигляді дуг та плям на фоні, який початково був чистий. При цьому якість зображення погіршується із глибиною джерела (з віддаленням абсорбера від сенсорів, що розташовані на верхній грані об'єкта).

Більш детально порівняти результати реконструкції з оригінальним зображенням дозволяє рис. 5.

Тут рис. 5, *a* представляє k – Wave-реконструкцію кругових дисків $p_0^{(0)}(\mathbf{r}) = Z$ (інтенсивність сигналу відстежується кольором в електронній версії статті та градацією сірого в чорно-білій версії), а рис. 5, *b* дозволяє порівняти перерізи оригінального та реконструйованих зображень, отриманих різними методами.

Перерізи проведені вздовж стрілки на рис. 5, *a*, а вздовж осі ординат на рис. 5, *b* відкладено інтенсивність сигналу.

На рис. 5, *b* добре видно, що якість k – Wave-реконструкції зменшується з віддаленням абсорбера від поверхні зразка. Інтенсивність реконструкції найбільш заглибленого диска (лівий на рис. 5, *b*) мінімальна, а фонові шуми та спотворення максимальні. Застосування запропонованих коригувальних алгоритмів призводить до того, що кромки відновленого зображення стали більш різкими, його інтенсивність практично збіглася з лінійним профілем вихідного об'єкта p_0 , (жирна чорна крива на рис. 5, *b*), а фонові помилки реконструкції, присутні в нульовому наближенні $p_0^{(0)}(\mathbf{r})$ (червона штрихова лінія), стають суттєво меншими (крива з маркерами -o-).

Аналогічні результати були отримані для більш складного 2D фантома судинного дерева (рис. 6).

Висновки. У наданій роботі нещодавно запропонований у роботах [7, 8] алгоритм покращення якості ОА-зображень був удосконалений шляхом знаходження оптимального коефіцієнта корекції розробленої ітераційної схеми. Така модифікація алгоритму єднає його з ширшим класом ітераційних схем, подібних до байесовських (калманівських у лінійному наближенні) алгоритмів. Запропонований підхід, названий нами KL – підходом (Kalman-like approach), був протестований на двовимірних числових фантомах різної геометрії: кругових дисках різного діаметру на різній глибині та двовимірній моделі судинного дерева на однорідному фоні. В якості метрик, що характеризують ефективність поліпшення якості реконструйованих зображень, використовувалися пікове відношення сигнал/шум ($PSNR$) та індекс структурної подібності ($SSIM$).

Проведені числові експерименти продемонстрували, що запропонований у цій роботі метод забезпечує найкращий компроміс з точки зору обчислювальної складності та ефективності. Розвинений KL – метод має приблизно ту ж складність, що раніше запропонований нами T – метод. При цьому KL – підхід є більш ефективним як у термінах $PSNR$ і $SSIM$, так і при суб'єктивній оцінці якості оптоакустичної реконструкції.

Використання запропонованого підходу поліпшення якості тривимірних реконструйованих ОА-зображень вимагає подальшого дослідження. Іншим напрямком майбутньої роботи є використання розроблених нами алгоритмів для роботи із зашумленими ОА-зображеннями.

Список літератури

1. Hacker L., Brunker J., Smith E. S. J., Quiros-Gonzalez I., Bohndiek S. E. Photoacoustics resolves species-specific differences in hemoglobin concentration and oxygenation // *J Biomed Opt.* – 2020;25: 095002. DOI: 10.1117/1.JBO.25.9.095002.
2. Li M., Tang Y., Yao J. Photoacoustic tomography of blood oxygenation: a mini review // *Photoacoustics.* – 2018. – vol. 10. – P. 65 – 73. DOI: 10.1016/j.pacs.2018.05.001.
3. Sun N., Bruce A. C., Ning B., Cao R., Wang Y., Zhong F., Peirce S. M., Hu S. Photoacoustic microscopy of vascular adaptation and tissue oxygen metabolism during cutaneous wound healing // *Biomed Opt Express.* – 2022; 13:2695–706. DOI: 10.1364/BOE.456198.
4. Jin Y., Yin Y., Li C., Liu H., Shi J. Non-invasive monitoring of human health by photoacoustic spectroscopy // *Sensors (Basel).* – 2022;22:1155. DOI: 10.3390/s22031155.
5. Riksen J. J. M., Nikolaev A. V., van Soest G. Photoacoustic imaging on its way toward clinical utility: a tutorial review focusing on practical application in medicine // *J. Biomed Opt.* – 2023;28:121205. DOI: 10.1117/1.JBO.28.12.121205.
6. Sandbichler M., Kraherer F., Berer T., Burgholzer P., Haltmeier M. A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography // *SIAM J Appl Math.* – 2015. – V. 75. – № 6. – P. 2475 – 2494. DOI: 10.48550/arXiv.1501.04305.
7. Rudnitskii A. G. Iterative Image Correction Scheme for Optoacoustic Tomography // *Acoustical Physics.* – 2022. –vol. 68. – № 4. – P. 395 – 402. DOI: 10.1134/S106377102204008X.
8. Rudnitskii A. G. Acceleration of the Iterative Procedure for Correction of Optoacoustic Images // *Journal of Applied Mathematics and Computation.* – 2024. – vol. 8(1). – P. 50 – 58. DOI: 10.26855/jamc.2024.03.006.
9. Гусев В. Е., Карабуртов А. А. Лазерная оптоакустика. – М.: Наука, 1991. – 304 с.
10. Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D. Acoustic inversion in optoacoustic tomography: A review // *Current medical imaging reviews.* – 2013. – vol. 9. – № 4. – P. 318 – 336. DOI: 10.2174/15734056113096660006.
11. Kuchment P. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography // *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer.* – 2009. – P. 819 – 861. DOI: 10.1007/978-0-387-92920-0_19.
12. Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D. Acoustic inversion in optoacoustic tomography: A review // *Current medical imaging reviews.* – 2013. – V. 9. – № 4. – P. 318 – 336. DOI: 10.2174/15734056113096660006.
13. Kuchment P., Kunyansky L. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography // *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer.* – 2011. – pp. 817 – 865. DOI: 10.1007/978-0-387-92920-0_19.
14. Banach Stefan (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // *Fundamenta Mathematicae.* – 1922. 3:3–181. DOI: 10.4064/fm-3-1-133-181.
15. Guang Deng, Fernando Galetto. Fast iterative reverse filters using fixed-point acceleration *Signal // Image and Video Processing.* – 2023. – 17(7):1 – 9. DOI: 10.1007/s11760-023-02584-1.
16. Kaiming He, Jian Sun. Fast guided filter. – Published in arXiv.org 5 May 2015. :1505.00996, 2015. Computer Science.
17. Treeby B. E., Cox B. T. A k-Wave: A MATLAB toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave-fields // *J. Biomed. Opt.* – 2010. – vol. 15(2). – 021314-1-12. DOI: 10.1117/1.3360308.

18. Tabei M., Mast T. D., Wang R. C. A k-space method for coupled first-order acoustic propagation equations // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2002. –vol. 111(1). – P. 53 – 63. DOI: 10.1121/1.1421344.
19. Spann S. M., Kazimierski K. S., Aigner C. S., Kraiger M., Bredies K., Stollberger R. (2017). Spatio-temporal TGV denoising for ASL perfusion imaging // *NeuroImage*. – 2017. – Aug 15:157:81-96. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.05.054.
20. Wang Zhou, Alan C. Bovik, Hamid R. Sheikh, Eero P. Simoncelli. Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2004. – Vol. 13. – № 4. – pp. 600 – 612. DOI: 10.1109/TIP.2003.819861.

References (transliterated)

1. Hacker L., Brunker J., Smith ESJ., Quiros-Gonzalez I., Bohndiek SE. Photoacoustics resolves species-specific differences in hemoglobin concentration and oxygenation. *J Biomed Opt.* 2020;25: 095002. DOI: 10.1117/1.JBO.25.9.095002.
2. Li M., Tang Y., Yao J. Photoacoustic tomography of blood oxygenation: a mini review. *Photoacoustics*. 2018, vol. 10, pp. 65–73. DOI: 10.1016/j.pacs. 2018.05.001.
3. Sun N., Bruce AC., Ning B., Cao R., Wang Y., Zhong F., Peirce SM., Hu S. Photoacoustic microscopy of vascular adaptation and tissue oxygen metabolism during cutaneous wound healing. *Biomed Opt Express*. 2022; 13:2695–706. DOI: 10.1364/BOE.456198.
4. Jin Y., Yin Y., Li C., Liu H., Shi J. Non-invasive monitoring of human health by photoacoustic spectroscopy. *Sensors (Basel)*. 2022;22:1155. DOI: 10.3390/s22031155.
5. Riksen J. J. M., Nikolaev A. V., van Soest G. Photoacoustic imaging on its way toward clinical utility: a tutorial review focusing on practical application in medicine. *J. Biomed Opt.* – 2023;28:121205. DOI: 10.1117/1.JBO.28.12.121205.
6. Sandbichler M., Krahmer F., Berer T., Burgholzer P., Haltmeier M. A novel compressed sensing scheme for photoacoustic tomography. *SIAM J Appl Math*. 2015, vol. 75, no. 6, pp. 2475–2494. DOI: 10.48550/arXiv.1501.04305.
7. Rudnitskii A. G. Iterative Image Correction Scheme for Photoacoustic Tomography. *Acoustical Physics*. 2022, vol. 68, no. 4, pp. 395–402. DOI: 10.1134/S106377102204008X.
8. Rudnitskii A. G. Acceleration of the Iterative Procedure for Correction of Photoacoustic Images. *Journal of Applied Mathematics and Computation*. 2024, vol. 8(1), pp. 50–58. DOI: 10.26855/jamc.2024.03.006.
9. Gusev V. E., Karabutov A. A. *Lazernaya optoakustika* [Laser Optical Acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 304 p.
10. Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D. Acoustic inversion in photoacoustic tomography: A review. *Current medical imaging reviews*. 2013, vol. 9, no. 4, pp. 318–336. DOI: 10.2174/15734056113096660006.
11. Kuchment P. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer*. 2009, pp. 819–861. DOI: 10.1007/978-0-387-92920-0_19.
12. Rosenthal A., Ntziachristos V., Razansky D. Acoustic inversion in photoacoustic tomography: A review. *Current medical imaging reviews*. 2013, vol. 9, no. 4, pp. 318–336. DOI: 10.2174/15734056113096660006.
13. Kuchment P., Kunyansky L. Mathematics of photoacoustic and thermoacoustic tomography. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging Springer*. 2011, pp. 817–865. DOI: 10.1007/978-0-387-92920-0_19.
14. Banach Stefan (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*. 1922. 3:3–181. DOI: 10.4064/fm-3-1-133-181.
15. Guang Deng, Fernando Galetto. Fast iterative reverse filters using fixed-point acceleration Signal // *Image and Video Processing*. 2023, 17(7):1–9. DOI: 10.1007/s11760-023-02584-1.
16. Kaiming He, Jian Sun. *Fast guided filter*. – Published in arXiv.org 5 May 2015. :1505.00996, 2015. Computer Science.
17. Treeby B. E., Cox B. T. A k-Wave: A MATLAB toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave-fields. *J. Biomed. Opt.* 2010, vol. 15(2), 021314-1-12. DOI: 10.1117/1.3360308.
18. Tabei M., Mast T. D., Wang R. C. A k-space method for coupled first-order acoustic propagation equations. *J. Acoust. Soc. Am.* 2002, vol. 111(1), pp. 53–63. DOI: 10.1121/1.1421344.
19. Spann S. M., Kazimierski K. S., Aigner C. S., Kraiger M., Bredies K., Stollberger R. (2017). Spatio-temporal TGV denoising for ASL perfusion imaging. *NeuroImage*. 2017, Aug 15:157:81-96. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2017.05.054.
20. Wang Zhou, Alan C. Bovik, Hamid R. Sheikh, Eero P. Simoncelli. Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2004, Vol. 13, no. 4, pp. 600–612. DOI: 10.1109/TIP.2003.819861.

Надійшла (received) 30.09.2025; Доопрацьована (finalized) 15.12.2025; До публікації (for publication) 15.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Рудницький Олександр Геннадійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-50; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8013-2359>; e-mail: a.rudnitskii@gmail.com.

Rudnitskii Alexandr Gennadievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Institute of hydromechanics NASU, Kyiv; tel.: (093) 375-06-50; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8013-2359>; e-mail: a.rudnitskii@gmail.com.

Рудницька Марія Олександрівна – провідний інженер Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (093) 375-06-53; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2431-0429>; e-mail: mariia.rudnytska@gmail.com.

Rudnytska Maria Alexandrovna – Senior Engineer at the Institute of hydromechanics NASU, Kyiv; tel.: (093) 375-06-53; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2431-0429>; e-mail: mariia.rudnytska@gmail.com.

Ткаченко Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: (066) 450-79-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9779-5852>; e-mail: lusia.tkch@gmail.com.

Tkachenko Ludmila Vlalimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Fellow at the Institute of hydromechanics NASU, Kyiv; tel.: (066) 450-79-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9779-5852>; e-mail: lusia.tkch@gmail.com.

Я. В. ХОДНЕВИЧ, О. М. ТРОФИМЧУК, В. М. КОРБУТЯК

ДОСЛІДЖЕННЯ АГРЕГУВАННЯ ПРОГНОЗІВ АНСАМБЛЮ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ГІДРАВЛІЧНОГО ОПОРУ

Стаття присвячена розробці модифікації методу максимального голосування з метою підтримки задачі моделювання ансамблю нейронних мереж для прогнозування коефіцієнта гідравлічного опору у відкритих руслах річок, відомого як коефіцієнт шорсткості Шезі. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розробки обчислювальних алгоритмів для отримання точних і надійних прогнозів коефіцієнта шорсткості Шезі за допомогою штучних нейронних мереж в умовах обмежених та неповних даних для підтримки математичного моделювання річкових течій для багатьох інженерних та екологічних завдань. Відомо, що застосування ансамблевих методів навчання нейронних мереж забезпечує значне підвищення точності та надійності прогнозів. Запропоновано модель однорідного ансамблю повноз'язних штучних нейронних мереж прямого поширення із сигмоїдною функцією активації в рамках задачі обчислення коефіцієнта шорсткості Шезі на основі обмежених польових даних про гідроморфологічні характеристики відкритих русел річок. Побудова і навчання ансамблю нейронних мереж здійснюється на основі методу Bagging. В рамках такого підходу представлено модифікацію методу максимального голосування на основі вирішення зворотної задачі для реалізації агрегування прогнозів нейронних мереж. Реалізацію алгоритмів побудови моделей ансамблю, ансамблевого навчання, агрегування прогнозів нейронних мереж здійснено за допомогою методів Python. Представлено результати апробації запропонованого ансамблю нейронних мереж із застосуванням модифікованого методу голосування, які показують високу ефективність підходу. Встановлено, що в рамках тестової задачі відносні похибки прогнозів знаходяться в межах від 0,5 % до 3,9 %, коефіцієнт ефективності моделі Неша-Саткліфа становить 0,975.

Ключові слова: ансамблеве навчання, штучні нейронні мережі, агрегування прогнозів, коефіцієнт шорсткості Шезі, метод Bagging, метод максимального голосування, Python.

YA. V. KHODNEVYCH, O. M. TROFYMCHUK, V. M. KORBUTIAK INVESTIGATION OF NEURAL NETWORK ENSEMBLE FORECAST AGGREGATION FOR COMPUTING THE HYDRAULIC RESISTANCE COEFFICIENT

The paper is devoted to the development of a modification of the Max Voting method to support the ensemble modeling of neural networks for predicting hydraulic resistance in open river channels, known as the Chézy roughness coefficient. The relevance of the study is driven by the need to develop computational algorithms for obtaining accurate and reliable Chézy coefficient forecasts using artificial neural networks under conditions of limited and incomplete data to support mathematical modeling of river flows for various engineering and environmental tasks. It is established that the application of ensemble learning methods for neural networks ensures a significant increase in the accuracy and reliability of predictions. A model of a homogeneous ensemble of fully connected feedforward artificial neural networks with a sigmoid activation function is proposed for calculating the Chézy coefficient based on limited field data regarding the hydro-morphological characteristics of open river channels. The construction and training of the neural network ensemble are carried out using the Bagging method. Within this approach, a modification of the Max Voting (Hard Voting) method based on the inverse problem solution is presented to implement the aggregation of neural network ensemble forecasts. The implementation of algorithms for ensemble model construction, ensemble learning, and forecast aggregation is performed using Python. The results of the validation of the proposed neural network ensemble using the modified voting method demonstrate the high efficiency of the approach. It was found that within the test case, the relative prediction errors range from 0.5 % to 3.9 %, and the Nash-Sutcliffe model efficiency coefficient is 0,975.

Key words: ensemble learning, artificial neural networks, forecast aggregation, Chézy roughness coefficient, Bagging method, Max Voting method, Python.

Вступ. Розглядається питання обчислення *емпіричного коефіцієнта гідравлічного опору*, відомого як *коефіцієнт шорсткості Шезі C* , за допомогою ансамблю штучних нейронних мереж для підтримки математичного моделювання річкових потоків на основі обмежених польових даних про їх гідрологічні та гідроморфологічні характеристики. Така задача є продовженням наших досліджень, зокрема, які представлені в [1 – 3] та включали в себе огляд методів обчислення коефіцієнта Шезі, розробку моделі даних для навчання *штучної нейронної мережі (ШНМ)*, розробку базової моделі *нейронної мережі (НМ)* та її модифікацій, розробку алгоритмів навчання НМ та встановлення її прогнозів для нових даних за допомогою *Python*.

Обчислення середніх швидкостей руху водного потоку у відкритому руслі з врахуванням величини гідравлічних опорів є *однією з головних проблем річкової гідравліки* [4]. Основні фактори, що визначають величину гідравлічних опорів: виступи шорсткості, донні гряди та інші руслові перешкоди, повороти і вигини русла, неоднорідність розмірів і форми русла по довжині, зважені та донні наноси, рослинність, льодові явища та ін. Зазвичай для оцінки гідравлічних опорів використовують такі інтегральні характеристики: *коефіцієнти шорсткості Меннінга (Гоклера-Меннінга)*, коефіцієнти Шезі, *коефіцієнти гідравлічного тертя Дарсі-Вейсбаха* [5]. Коефіцієнт шорсткості Шезі вважається досить інформативним і фундаментальним через його здатність враховувати більшість чинників, що визначають гідравлічний опір у відкритих руслах. У річках, для яких характерна постійна мінливість їх морфологічних та гідрологічних параметрів, цей емпіричний коефіцієнт виступає найбільш повною інтегральною характеристикою опору у порівнянні з коефіцієнтом шорсткості Меннінга і коефіцієнтом Дарсі-Вейсбаха, дозволяючи здійснювати адекватне моделювання руху водного потоку на основі одно- та двовимірної математичних моделей гідродинаміки [4, 6, 7].

В умовах змін клімату і антропогенного навантаження точне прогнозування коефіцієнта шорсткості Шезі на основі обмежених та неповних польових даних залишається *актуальним завданням для підтримки математичного моделювання річкових течій* з метою підвищення безпеки та ефективності інфраструктури та водного

господарства для багатьох інженерних та екологічних завдань, включаючи моделювання паводкових потоків, оцінку ризиків повеней [5, 6], прогнозування прориву дамб [7], прогнозування загальної та локальної ерозії русла річки, транспортування та осадження наносів, моделювання транспорту забруднюючих речовин, гідравлічне моделювання для проектування інфраструктури в межах річкового середовища, аналіз параметрів якості води [8], моделювання зв'язку між опадами та стоком в руслах річок тощо [9].

У рамках наших досліджень одним із шляхів *вдосконалення запропонованої ШНМ* для випадку прогнозування емпіричного коефіцієнта шорсткості Шезі у відкритих руслах річок на основі обмежених польових даних є *застосування методів ансамблевого навчання* з метою отримання більш точних і надійних прогнозів [2, 3]. При розробці *ансамблю нейронних мереж (АНМ)* стикнулись з проблемою злиття прогнозів окремих нейронних мереж в один вихідний адекватний результат прогнозування (*агрегування прогнозів*). У нашому випадку суть такої задачі полягає у розробці підходу для виявлення найкращого результату обчислень серед множини прогнозів моделей нейронних мереж, який ґрунтується на *модифікації методу максимального голосування*.

Аналіз останніх досліджень. *Штучні нейронні мережі* вважаються високоефективним інструментом для ідентифікації емпіричних параметрів математичних моделей, зокрема у вирішенні *зворотних задач* [10]. Завдяки здатності до *нелінійного апроксимування*, стійкості до неповних або некоректних даних, при достатній кількості експериментальних даних і належному навчанні ШНМ часто перевершують традиційні емпіричні формули за точністю прогнозу. Їхня головна перевага полягає у можливості моделювати складні реальні явища і процеси без необхідності побудови їх вичерпного фізичного опису, адаптуючись до специфіки експериментальних даних у процесі навчання [11].

Застосування ансамблевих методів навчання (Ensemble Learning), що об'єднують результати функціонування кількох незалежних (індивідуальних) нейронних мереж, забезпечує значне підвищення точності, надійності та узагальнювальної здатності прогностичної системи. Таку ефективність ансамблю нейронних мереж пояснюють тим, що різні моделі НМ можуть робити помилки на різних підмножинах даних, і при агрегуванні або об'єднанні їх індивідуальних прогнозів (наприклад, через голосування або усереднення) ці помилки взаємно компенсуються, що мінімізує вплив випадкових похибок окремих моделей та знижує ризик перенавчання (*overfitting*). *Обґрунтування переваг АНМ* і методів їх побудови наведено у [8, 12, 13]. Показано, що ансамблі зазвичай перевершують за точністю будь-яку окрему модель, яка входить до їхнього складу. Для більшості практичних задач покращення точності становило приблизно $5 \div 20\%$ [12]. Для побудови та навчання ансамблів у задачах апроксимації неперервних функцій, зокрема ідентифікації емпіричних параметрів, зазвичай використовують три основні підходи: *bagging* (*Bagging* або *Bootstrap Aggregating*), *boosting* (*Boosting*), *stacking* (*Stacking*) [13]. Також в теорії ансамблевого навчання ключове значення мають методи агрегування (об'єднання) прогнозів, оскільки саме від способу комбінування результатів залежить підсумкова точність та здатність моделі до узагальнення. Проте АНМ потребують більших обчислювальних ресурсів для навчання та встановлення прогнозів, а також їх складніше інтерпретувати порівняно з індивідуальними НМ.

Ансамблі нейронних мереж успішно застосовуються у різноманітних сферах, зокрема у гідравліці, гідрології та екологічному моделюванні для оцінки водного балансу, обчислення ключових параметрів якості води, заповнення прогалів у гідрологічних даних, прогнозування стоку та рівнів води в річках тощо [8, 9].

Постановка задачі. Метою роботи є *вдосконалення методу максимального голосування* (7) – (9) для виявлення найкращого результату обчислень серед множини прогнозів моделей ансамблю нейронних мереж (1) – (4) (АНМ), який призначений для обчислення емпіричного коефіцієнта шорсткості Шезі у відкритих руслах річок на основі обмежених польових даних про їх гідрологічні та гідроморфологічні характеристики. Ансамбль ШНМ побудовано на основі складеної обчислювальної моделі (1) – (6). *Вхідними даними* для моделі є гідрологічні та гідроморфологічні характеристики русла: n – коефіцієнт шорсткості Гоклера-Меннінга ($\text{с/м}^{1/3}$), Δ – висота виступів шорсткості русла (м), S_f – ухил поверхні води, B – середня ширина потоку (м), h – середня глибина потоку (м), R – гідравлічний радіус (м), Q – витрата води ($\text{м}^3/\text{с}$), або V – середня швидкість водного потоку (м/с). *Цільовою змінною* є коефіцієнт шорсткості Шезі C , який наближено апроксимується АНМ.

Дослідження виконується на основі наборів польових даних про гідроморфологічні та гідрологічні параметри окремих ділянок рівнинних річок Дніпро (нижче за течією від м. Київ), Десна (м. Чернігів), Прип'ять (м. Турів), які були запропоновані в [1, 2] та наведені в табл. 1. Ці ділянки річок характеризуються прямим земляним руслом із простою формою поперечного перерізу та спокійною течією (*число Фруда*, $Fr \ll 1$). В рамках досліджуваної предметної області маємо наступні *межі зміни гідрологічних і гідро-морфологічних параметрів*, які описують особливості руху водного потоку на обраних ділянках річок: витрата води $Q = 48,8 \div 3665,0 \text{ м}^3/\text{с}$, середня швидкість течії $V = Q/A = 0,3362 \div 0,9674 \text{ м/с}$ (A – площа поперечного перерізу потоку (м^2)), ухил поверхні води $S_f = 0,000036 \div 0,00016$, середня глибина $h = 1,0 \div 6,2 \text{ м}$, середня ширина потоку $B = 122,0 \div 611,0 \text{ м}$, коефіцієнт шорсткості Меннінга $n = 0,031 \div 0,045 \text{ с/м}^{1/3}$, ідентифікований (встановлений

згідно з натурними спостереженнями) коефіцієнт шорсткості Шезі $C_o = 27,0 \div 43,7 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$. Відсутня інформація про крупність Δ часток дна та берегів русла для наведених ділянок річок. Приймалася умова, що *мультиколінеарність* між параметрами n , S_f , B , h (або R , якщо $B \gg h$, $R \cong h$) є відсутня або нею можна знехтувати.

Таблиця 1 – Гідроморфологічні дані про характеристики рівнинних річок, використані для навчання та тестування ансамблю ШНМ

Річка, ділянка русла	Q , $\text{м}^3/\text{с}$	A , м^2	B , м	h , м	$S_f \cdot 10^3$	n , $\text{с}/\text{м}^{1/3}$	C_o , $\text{м}^{1/2}/\text{с}$
Дніпро, нижче за течією від Києва (навчання)	657,4	1956	575	3,4	0,046	0,045	27,0
	1123	2403	586	4,1	0,054	0,040	31,4
	3665	3787	611	6,2	0,079	0,031	43,7
Дніпро, нижче за течією від Києва (тестування)	1763	2858	595	4,8	0,063	0,036	35,6
	2601	3320	604	5,5	0,071	0,033	39,7
Десна, Чернігів (навчання)	188	501,8	125	4,0	0,036	0,041	31,1
	249,4	580	129	4,5	0,040	0,040	32,2
	403,7	742,4	135	5,5	0,046	0,039	34,2
	497,5	826,3	138	6,0	0,049	0,038	35,1
Десна, Чернігів (тестування)	321,2	660,3	132	5,0	0,043	0,039	33,3
Прип'ять, Турів (навчання)	48,8	122	122	1,0	0,16	0,032	31,6
	89	195,4	130	1,5	0,128	0,033	32,9
	248,6	437,3	146	3,0	0,087	0,034	35,1
Прип'ять, Турів (тестування)	136,3	273	136	2,0	0,109	0,033	33,8
	189,7	353,8	142	2,5	0,097	0,034	34,5



Рис. 1 – Структура однорідного ансамблю нейронних мереж.

Моделювання ансамблю нейронних мереж. Пропонується система трьох моделей однорідних повнозв'язаних нейронних мереж прямого поширення – ANN-A, ANN-B1 та ANN-B2 (штучні нейронні мережі з позначками А, В1, В2, об'єднання яких представлено на рис. 1). В рамках такого однорідного ансамблю нейронних мереж наближене значення коефіцієнта шорсткості Шезі \tilde{C} визначається згідно обчислювальної моделі:

$$\tilde{C}(x_1, x_2, x_3) = C_A \pm \phi, \quad x_1 \in \{n, \Delta, S_f, B\},$$

$$x_2 \in \{h, R\}, \quad x_3 = V; \quad (1)$$

$$\phi_i = (C_{oi} - \bar{C}) \cdot \xi; \quad (2)$$

$$\xi = 1, \quad C_{oi} > \bar{C}; \quad (3)$$

$$\xi = -1, \quad C_{oi} < \bar{C}, \quad (4)$$

$$C_{oi} \in [C_{\max}, C_{\min}], \quad \bar{C} = \sum_i C_{oi} / m, \quad i = \overline{1, m},$$

де $C_A = f(x_1, x_2, x_3)$ – значення коефіцієнта Шезі в першому наближенні ($\text{м}^{1/2}/\text{с}$), що обчислюється за допомогою базової ШНМ (ANN-A), яка навчається за допомогою прикладів $(x_1, x_2, x_3, C_o)_i$, представлена і апробована в [1 – 3]; $\phi = f(x_1, x_2, x_3)$ – величина уточнення, яка встановлюється за допомогою двох додаткових

ШНМ (ANN-B1, ANN-B2), що побудовані на основі базової моделі мережі та попередньо навчаються на окремих групах прикладів пар входів $(x_1, x_2, x_3)_i$ і еталонних виходів ϕ_i нейронної мережі (тобто, на прикладах $(x_1, x_2, x_3, \phi)_i^{B1}$ та $(x_1, x_2, x_3, \phi)_i^{B2}$); C_{oi} – еталонне значення коефіцієнта Шезі у діапазоні його максимального C_{\max} та мінімального C_{\min} значень в рамках досліджуваної предметної області, \bar{C} – середнє значення всіх C_{oi} базової вибірки навчальних прикладів, m – кількість прикладів в базовій навчальній вибірці, ξ – допоміжний

коефіцієнт, який визначається згідно умов (3), (4) та регулює знак величини ϕ , у випадку моделей ANN-B1 та ANN-B2 в якості їх цільової змінної відповідно обчислюються значення величин $\phi_{B1} = +\phi$, $\phi_{B2} = -\phi$, що використовуються для уточнення C_A згідно (1).

Усі моделі ансамблю нейронних мереж однотипні: в прихованих шарах НМ застосовується сигмоїдна функція активації [10], вихідний нейрон є лінійним, кількість нейронів у вхідному шарі відповідає кількості вхідних гідрологічних та гідроморфологічних параметрів.

Навчання і прогнозування запропонованого однорідного ансамблю нейронних мереж реалізується на основі методу Bagging [13]. Суть методу полягає у навчанні кількох моделей одного типу на окремих підвибірках навчальних даних та об'єднанні їх прогнозів з метою зменшення варіативності (variance reduction). Підвибірки навчальних прикладів $(x_1, x_2, x_3, \phi)_i^{B1}$ та $(x_1, x_2, x_3, \phi)_i^{B2}$ формуються на основі базової навчальної вибірки $(x_1, x_2, x_3, C_o)_i$ з урахуванням умов (2) – (4) та (5), (6):

$$(x_1, x_2, x_3, C_o)_i^{B1}, C_{oi} \in [C_{\max}, C_\alpha], C_\alpha > \bar{C}, \quad (5)$$

$$(x_1, x_2, x_3, C_o)_i^{B2}, C_i \in [C_\beta, C_{\min}], C_\beta < \bar{C}, \quad (6)$$

де C_α , C_β встановлюються експертом за результатами аналізу кожної навчальної вибірки $(x_1, x_2, x_3, C_o)_i$.

Навчальні та тестові приклади для кожної з нейронних мереж побудовані відповідно до принципів нормалізації, безперервності, однорідності на основі обмежених наборів даних польових спостережень за гідрологічними та гідроморфологічними параметрами на окремих ділянках рівнинних річок, які представлені в табл. 1. Навчання моделей НМ здійснюється паралельно на відповідних їм підвибірках навчальних прикладів за допомогою методу зворотного поширення похибки [11, 13].

У нашому випадку агрегування прогнозів моделей НМ ANN-A, ANN-B1 та ANN-B2 в єдиний результат обчислень здійснюється на основі методу максимального голосування (Max Voting, Hard Voting) [13]:

$$Y_p = \text{mod}[C_1(x), C_2(x), \dots, C_k(x)], \quad (7)$$

де остаточною передбаченням Y_p стає клас C_i ($i = 1, \dots, k$), який отримав найбільше голосів.

У рамках задачі апроксимації коефіцієнта шорсткості Шезі на основі АНМ метод максимального або жорсткого голосування (7) передбачає визначення прогнозів для кожної нейронної мережі ансамблю та прогнозування тільки тієї оцінки певної НМ, яка найкраще відповідає вхідним умовам задачі (1).

Розробка алгоритмів побудови моделей НМ однорідного ансамблю, ансамблевого навчання НМ на основі методу Bagging, агрегування прогнозів НМ на основі модифікованого методу максимального голосування здійснено за допомогою методів Python [11] та представлено в [14].

Модифікація методу максимального голосування в задачах апроксимації неперервних функцій. Наближена оцінка досліджуваного емпіричного коефіцієнта Шезі для нових вхідних даних виконується на основі навченого ансамблю нейронних мереж за допомогою агрегування прогнозів окремих його моделей. А саме, учасники ансамблю (моделі ANN-A, ANN-B1 та ANN-B2) створюють прогнози C_A , ϕ_{B1} , ϕ_{B2} (рис. 1), які об'єднуються з урахуванням (1). Ставиться задача – проаналізувати на основі методу максимального голосування прогнози C_A , $C_{B1} = C_A + \phi$, $C_{B2} = C_A - \phi$ для встановлення єдиного прогнозу (результату АНМ), який найкраще відповідає вхідним умовам задачі (1) – (4). При цьому для задачі апроксимації неперервної функції з метою встановлення найкращої оцінки може існувати декілька стратегій аналізу прогнозів окремих нейронних мереж. Але може виявитись, що у зв'язку з особливостями предметної області, не всі ці стратегії дозволяють отримати позитивний результат. У нашому випадку ми й зіткнулися з цією проблемою. Це спонукало нас до пошуку в рамках досліджуваної предметної області альтернативних шляхів модифікації методу максимального голосування для розробки механізму виявлення (голосування) найкращої оцінки серед множини отриманих прогнозів нейронних мереж. У рамках нашого дослідження розглядалися дві гіпотези щодо модифікації методу максимального голосування для встановлення найкращої оцінки коефіцієнта Шезі (1) серед множини прогнозів C_A , C_{B1} , C_{B2} , які дозволяють отримати нейронні мережі ANN-A, ANN-B1 та ANN-B2.

Гіпотеза 1. Згідно з методом Bagging, запропоновані моделі нейронних мереж навчаються на окремих відповідних підвибірках навчальних даних. Припускаємо, що для всіх нових вхідних даних АНМ в межах предметної області (які не включалися в навчальні приклади і для яких потрібно обчислити наближене значення коефіцієнта Шезі), існує їх найкраща наближена відповідність одній з підвибірок навчальних даних. Тоді єдиний результат АНМ обчислюється згідно з (1) за допомогою відповідної НМ, яка навчалася на таких даних.

Гіпотеза 2. Розглядається зворотна задача для обчислення швидкостей водного потоку \tilde{V} та V (м/с) з урахуванням прогнозів значень коефіцієнта Шезі C_A , C_{B1} , C_{B2} та вхідних даних гідрологічних спостережень. Припускаємо, що для найкращої (вихідної) оцінки коефіцієнта Шезі \tilde{C} , яка обирається серед наближених про-

гнозів C_A , C_{B1} , C_{B2} , виконується умова: наближене значення швидкості водного потоку \tilde{V} , яке обчислене за допомогою цієї оцінки \tilde{C} , найменше відхиляється від її еталонного значення V :

$$|\tilde{V}_\gamma - V| \rightarrow \min, \quad (8)$$

де $\tilde{V}_\gamma = \tilde{V}(C_\gamma)$, позначки $\gamma = A, B1, B2$; еталонне значення швидкості водного потоку V відоме згідно з гідрологічними даними, що подаються на вхід ансамблю нейронних мереж; наближені значення швидкості водного потоку \tilde{V} визначаються відповідно до даних гідрологічних спостережень на основі формули Шезі [4]:

$$\tilde{V} = \tilde{C} \cdot \sqrt{R \cdot S_f}, \quad (9)$$

де \tilde{C} – наближені значення коефіцієнта Шезі, які в нашому випадку обираються серед наближених прогнозів C_A , C_{B1} , C_{B2} ; R – гідравлічний радіус (м), $R \cong h$ при $B \gg h$; B – середня ширина потоку (м); h – середня глибина потоку (м); S_f – ухил поверхні води.

Таким чином, запропонована модифікація методу максимального голосування поєднує ансамблеве навчання з фізично обґрунтованими гідравлічними співвідношеннями. Це дозволяє розглядати її як агрегування прогнозів НМ, кероване фізичними закономірностями, на відміну від класичних статистичних схем голосування.

Результати. Перевірка гіпотез 1 та 2 щодо модифікації методу максимального голосування (7) для встановлення найкращої оцінки коефіцієнта Шезі (1) виконувалась на прикладі гідроморфологічних даних на ділянці р. Дніпро нижче за течією від м. Київ (табл. 1, 2).

Перевірка гіпотези 1. Нехай навчання ансамблю нейронних мереж ANN-A, ANN-B1 і ANN-B2 виконувалось в межах гідроморфологічних параметрів рівнинних річок Дніпро (нижче за течією від Києва), Десна (м. Чернігів), Прип'ять (м. Турів), що представлені в табл. 1. Нехай для вхідних векторів даних (табл. 2), що відповідають прикладам гідроморфологічних даних на ділянці р. Дніпро, ансамбль нейронних мереж дозволяє отримати такі наближені оцінки: $C_A = 34,116$, $\varphi_{B1} = 6,025$, $\varphi_{B2} = 3,533$.

Застосувавши алгоритм гіпотези 1 для агрегування прогнозів ансамблю нейронних мереж в один вихідний результат прогнозування коефіцієнта Шезі \tilde{C} , можна побачити, що отримані його значення можуть не відповідати очікуванім. Наприклад, в табл. 2 показано очікувані значення коефіцієнта Шезі \tilde{C}_e , які, на думку експерта в рамках заданої предметної області, найкраще відповідають референтним значенням коефіцієнта Шезі C_{oi} з урахуванням умов формування навчальних вибірок (2) – (4) та (5), (6), де $C_\alpha = 37,24$, $C_\beta = 31,98$. Для вектора вхідних даних під №2 виникла невідповідність між очікуваним і отриманим значеннями \tilde{C} . У цьому випадку вважаємо, що маємо хибний результат, оскільки отримане значення \tilde{C} суттєво відхиляється від референтного коефіцієнта Шезі $C_o = 31,4$ в порівнянні з очікуваним його значенням.

Таблиця 2 – Гідроморфологічні дані (р. Дніпро) для перевірки гіпотези 1

№	Q	B	h	S _f · 10 ³	n	Очікуване \tilde{C}_e		Отримане \tilde{C}	
						вираз	значення	вираз	значення
1.	657,4	575	3,4	0,046	0,045	C_{B2}	30,583	C_{B2}	30,583
2.	1123	586	4,1	0,054	0,04	C_{B2}	30,583	C_{B2}	34,116
3.	1763	595	4,8	0,063	0,036	C_A	34,116	C_A	34,116
4.	2601	604	5,5	0,071	0,033	C_{B1}	40,141	C_{B1}	40,141
5.	3665	611	6,2	0,079	0,031	C_{B1}	40,141	C_{B1}	40,141

Такі результати можна пояснити наступним чином. В умовах неповноти і різноманітності даних про характеристики річок (кількісні та якісні), що визначають особливості поведінки гідравлічного опору, існують випадки, коли деякому вектору гідрологічних та гідроморфологічних параметрів не вдається вірно поставити у відповідність образ, клас (кластер), який описує діапазон поведінки значень коефіцієнта Шезі. У рамках гіпотези 1 такі обставини можуть призвести до хибного встановлення вихідної оцінки коефіцієнта Шезі згідно з обчислювальною моделлю (1). Тому гіпотезу 1 спростовано.

Перевірка гіпотези 2. Нехай навчання АНМ виконувалося згідно з даними та умовами предметної області, що були використані для перевірки гіпотези 1. Тоді для вхідних векторів даних з табл. 2, що включають параметри Q , B , h , S_f , n , ансамбль НМ ANN-A, ANN-B1 і ANN-B2 дозволяє отримати такі три наближені оцінки коефіцієнта Шезі: $C_A = 34,116$, $C_{B1} = 40,141$, $C_{B2} = 30,583$. Для агрегування прогнозів C_A , C_{B1} , C_{B2} в один вихідний результат прогнозування коефіцієнта Шезі \tilde{C} розглядається зворотна задача (1), (8), (9). Результати

обчислень згідно з алгоритмом гіпотези 2 представлено в табл. 3, де $\Delta V_\gamma = |\tilde{V}(C_\gamma) - V|$, позначка $\gamma = A, B1, B2$. Оцінки $\Delta V_A, \Delta V_{B1}, \Delta V_{B2}$ обчислюються згідно з (8), (9) з урахуванням даних польових спостережень за витратою води Q . Для деякого вхідного вектора одна з наближених оцінок C_A, C_{B1}, C_{B2} обирається в якості вихідного значення АНМ \tilde{C} , якщо для неї виконується умова (8).

Таблиця 3 – Зворотна задача для перевірки гіпотези 2

№	$\tilde{V}(C_A)$	$\tilde{V}(C_{B1})$	$\tilde{V}(C_{B2})$	V	ΔV_A	ΔV_{B1}	ΔV_{B2}	\tilde{C}
1.	0,4266	0,5020	0,3824	0,3362	0,0903	0,1657	0,0462	30,583
2.	0,5076	0,5972	0,4550	0,4674	0,0402	0,1298	0,0123	30,583
3.	0,5932	0,6980	0,5318	0,6172	0,0240	0,0807	0,0854	34,116
4.	0,6741	0,7932	0,60435	0,7829	0,1087	0,0102	0,1785	40,141
5.	0,7550	0,8883	0,6768	0,9674	0,2124	0,0790	0,2906	40,141

За результатами обчислень встановлено, що отримані вихідні значення прогнозування коефіцієнта Шезі \tilde{C} в табл. 3 відповідають очікуваним значенням коефіцієнта Шезі \tilde{C}_e , які показані в табл. 2, і, на думку експерта в рамках заданої предметної області, з урахуванням умов (2) – (4) та (5), (6) найкраще відповідають референтним значенням коефіцієнта Шезі C_o з табл. 1. Тому гіпотезу 2 вважаємо підтвердженою.

За підсумками такого дослідження, умови зворотної задачі (8), (9) для модифікації методу максимального голосування (7) з метою встановлення найкращої оцінки коефіцієнта шорсткості Шезі (1) серед множини прогнозів моделей нейронних мереж покладені в основу обчислювального алгоритму для прогнозування коефіцієнта гідравлічного опору за допомогою ансамблю нейронних мереж [14].

Апробацію запропонованого однорідного ансамблю нейронних мереж для обчислення коефіцієнта шорсткості Шезі виконано на основі гідрологічних польових даних окремих ділянок рівнинних річок Дніпро, Десна, Прип'ять, які представлені в табл. 1. Розглядалась задача порівняння спостережуваних Q та обчислених (прогнозованих) значень витрати води Q_p (табл. 4) [4]:

$$Q_p = C_p \cdot A \sqrt{R \cdot S_f}, \quad (10)$$

де C_p – обчислене (прогнозне, передбачене) значення коефіцієнта Шезі, отримане за допомогою ансамблю штучних нейронних мереж; A – площа поперечного перерізу потоку (m^2); R – гідравлічний радіус (м), $R \cong h$ при $B \gg h$; B – середня ширина потоку (м); h – середня глибина потоку (м); S_f – ухил поверхні води.

Таблиця 4 – Результати тестування АНМ для обчислення коефіцієнта Шезі на основі даних про характеристики рівнинних річок

Річка, ділянка русла	Коефіцієнт шорсткості Шезі, $m^{1/2}/c$		Витрата води, m^3/c		Абсолютна похибка, m^3/c	Відносна похибка, %
	Референтне значення C_o	Обчислене АНМ значення C_p	Спостережена Q	Прогнозована Q_p		
Прип'ять, Турів	33,93	34,1166	136,3	137,01	0,7	0,52
Прип'ять, Турів	34,31	34,1166	189,7	188,60	1,09	0,57
Десна, Чернігів	33,19	34,1166	321,2	330,16	8,96	2,79
Дніпро, нижче за течією від Києва	35,49	34,1166	1763,0	1694,39	68,6	3,89
Дніпро, нижче за течією від Києва	39,62	40,1466	2601,0	2635,15	34,15	1,31

Для оцінки прогностичної здатності ансамблю НМ використовувався коефіцієнт ефективності моделі Неша-Саткліффа (NSE), який часто застосовується в гідрологічному моделюванні для оцінки того, наскільки добре модельовані дані збігаються з результатами спостережень ($NSE > 0,8$ або наближається до 1 – зазвичай вважається ознакою високої якості моделювання) [9]:

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k |Q_i - Q_{pi}|}{\sum_{i=1}^k |Q_i - \bar{Q}|}, \quad (11)$$

де Q_i – спостережувані значення витрати води на i -й ділянці русла річки; Q_{pi} – прогнозовані значення витрати води; \bar{Q} – середнє значення спостережень витрати води; k – кількість отриманих результатів.

Результати показують та підтверджують ефективність і високу прогностичну здатність підходу на основі ансамблю нейронних мереж для оцінки гідравлічного опору у відкритих руслах річок в умовах обмежених або

неповних вхідних даних, зокрема, у порівнянні з індивідуальними нейронними мережами. У роботі [2] за підсумками застосування індивідуальної НМ для прогнозування коефіцієнта шорсткості Шезі на основі польових даних для ділянок рівнинних річок, які представлені в табл. 1, показано, що відносні похибки прогнозів знаходяться в межах 0,9 % ÷ 13,9 %, коефіцієнт ефективності моделі Неша-Саткліффа $NSE = 0,906$. Згідно з результатами тестування (також в рамках даних табл. 1) ансамблю НМ для обчислення коефіцієнта Шезі із застосуванням модифікованого методу голосування для агрегування його прогнозів встановлено (табл. 4), що відносні похибки прогнозів знаходяться в межах 0,5 % ÷ 3,9 %, коефіцієнт Неша-Саткліффа $NSE = 0,975$.

Обмеження підходу. Запропонований підхід базується на припущенні квазісталості гідравлічних характеристик русла в межах аналізованих ділянок та відсутності різких морфодинамічних змін під час періоду спостережень. Ансамбль нейронних мереж навчався на обмеженій кількості польових даних, характерних для рівнинних річок з відносно простою геометрією русла та малими значеннями числа Фруда. Тому застосування запропонованої методики для гірських річок, русел зі значною турбулентною структурою потоку або ділянок із активною русловою деформацією потребує додаткової валідації та, ймовірно, розширення навчальної вибірки.

Перспективи подальших досліджень. На нашу думку, доцільним є продовження досліджень, що пов'язані з покращенням узагальнювальної здатності ансамблю нейронних мереж для задачі прогнозування емпіричного коефіцієнта шорсткості Шезі у відкритих руслах річок. У зв'язку з цим плануються: дослідження впливу кількості нейронних мереж в ансамблі та архітектури окремих мереж на загальну ефективність моделювання, дослідження можливості побудови неоднорідного АНМ на основі різних емпіричних моделей для коефіцієнта Шезі, дослідження ефективності застосування регуляризації нейронних мереж шляхом додавання випадкового шуму до вхідних даних або до ваг під час навчання для покращення узагальнюючої здатності АНМ.

Висновки. У роботі досліджено особливості побудови однорідного ансамблю нейронних мереж для прогнозування коефіцієнта гідравлічного опору у відкритих руслах річок, а також запропоновано підхід до агрегування прогнозів ансамблю, що ґрунтується на модифікації методу голосування з використанням фізично обґрунтованих гідравлічних співвідношень. За результатами дослідження отримано такі основні висновки:

1. Розглянуто задачу моделювання однорідного ансамблю нейронних мереж для обчислення емпіричного коефіцієнта шорсткості Шезі на основі польових даних про гідроморфологічні та гідрологічні параметри окремих ділянок рівнинних річок Дніпро (нижче за течією від м. Київ), Десна (м. Чернігів), Прип'ять (м. Турів).

2. Запропоновано модифікацію методу максимального голосування, яка ґрунтується на розв'язанні зворотної гідравлічної задачі, що забезпечує фізично кероване агрегування прогнозів ансамблю нейронних мереж. Застосування цього підходу дозволило зменшити діапазон відносних похибок прогнозування з 0,9 ÷ 13,9 % (для індивідуальної нейронної мережі) до 0,5 ÷ 3,9 % для ансамблю нейронних мереж.

3. Створено алгоритми і відповідне програмне забезпечення для побудови моделей нейронних мереж однорідного ансамблю, ансамблевого навчання на основі методу Bagging (Bootstrap Aggregating), агрегування прогнозів нейронних мереж на основі модифікованого методу максимального голосування за допомогою Python.

4. Проведено апробацію запропонованого ансамблю нейронних мереж у задачі порівняння спостережуваних і прогнозованих значень витрати води. Отримані результати підтверджують високу ефективність підходу: для польових даних рівнинних річок Дніпро, Десна та Прип'ять відносні похибки прогнозування витрати води, визначені на основі обчислених значень коефіцієнта Шезі, становлять 0,5 % ÷ 3,9 %, а коефіцієнт ефективності моделі Неша-Саткліффа (NSE) дорівнює 0,975.

Список літератури

1. Khodnevych Y. V., Stefanyshyn D. V. Data arrangements to train an artificial neural network within solving the tasks for calculating the Chezy roughness coefficient under uncertainty of parameters determining the hydraulic resistance to flow in river channels // Екологічна безпека та природокористування. – 2022. – №42 (2). – С. 59 – 85. DOI: 10.32347/2411-4049.2022.2.59-85.
2. Khodnevych Y., Stefanyshyn D., Korbutiak V. The Chezy Roughness Coefficient Computing Using an Artificial Neural Network to Support the Mathematical Modelling of River Flows // Information and Communication Technologies and Sustainable Development. ICT&SD 2022. Lecture Notes in Networks and Systems. – 2023. – Vol. 809. – P. 444 – 458. DOI: 10.1007/978-3-031-46880-3_26.
3. Khodnevych Y., Stefanyshyn D. Do we need a more sophisticated multilayer artificial neural network to compute roughness coefficient? // Екологічна безпека та природокористування. – 2023. – № 48 (4). – С. 170 – 182. DOI: 10.32347/2411-4049.2023.4.170-182.
4. Sturm T. W. Open Channel Hydraulics. – McGraw-Hill, N.Y., 2001. – 493 p.
5. Papaioannou G., Markogianni V., Loukas A., Dimitriou E. Remote Sensing Methodology for Roughness Estimation in Ungauged Streams for Different Hydraulic/Hydrodynamic Modeling Approaches // Water. – 2022. – Vol. 14 (7). – 1076. DOI: 10.3390/w14071076.
6. De Wrachien D., Mambretti S., Sole A. Mathematical models in flood management: overview and challenges // Flood Recovery, Innovation and Response. – 2010. – Vol. 133. – P. 61 – 72. DOI: 10.2495/FRIAR100061.
7. Wang Yu., Liang Q., Kesserwani G., Hall J. W. A 2D shallow flow model for practical dam-break simulations // Journal of Hydraulic Research. – 2011. – Vol. 49 (3). – P. 307 – 316. DOI: 10.1080/00221686.2011.566248.
8. Zounemat-Kermani M., Batelaan O., Fadaee M., Hinkelmann R. Ensemble machine learning paradigms in hydrology: A review // Journal of Hydrology. – 2021. – Vol. 598. – P. 126266. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2021.126266.
9. Gichamo T., Nourani V., Gökçekuş H., Gelete G. Ensemble of artificial intelligence and physically based models for rainfall–runoff modeling in the upper Blue Nile Basin // Hydrology Research. – 2024. – Vol. 55 (10). – P. 976 – 1000. DOI: 10.2166/nh.2024.189.
10. Aggarwal C. C. Neural Networks and Deep Learning: A Textbook (2nd Edition). – Springer, 2023. – 553 p.

11. Gad A. F., Jarmouni F. E. Introduction to Deep Learning and Neural Networks with Python // A Practical Guide. Elsevier. – 2021. – 285 p.
12. Hansen L. K., Salamon P. Neural network ensembles // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1990. – Vol. 12 (10). – P. 993 – 1001. DOI: 10.1109/34.58871.
13. Mohammed A., Kora R. A comprehensive review on ensemble deep learning: Opportunities and challenges // Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences. – 2023. – Vol. 35. – P. 757 – 774. DOI: 10.1016/j.jksuci.2023.01.014.
14. Khodnevych Ya. Software Implementation of a Computational Algorithm for Training an Ensemble of Neural Networks to Predict the Chezy Roughness Coefficient. – 2025. – Режим доступу: https://github.com/yakhodnevych/ANNE_approximation_C.git. – Дата звернення: 6.09.2025.

References (transliterated)

1. Khodnevych Y. V., Stefanyshyn D. V. Data arrangements to train an artificial neural network within solving the tasks for calculating the Chezy roughness coefficient under uncertainty of parameters determining the hydraulic resistance to flow in river channels. *Ekologichna bezpeka ta pryrodokorystuvannya* [Environmental safety and natural resources]. 2022, Vol. 42 (2), pp. 59–85. DOI: 10.32347/2411-4049.2022.2.59-85.
2. Khodnevych Y., Stefanyshyn D., Korbutiak V. The Chezy Roughness Coefficient Computing Using an Artificial Neural Network to Support the Mathematical Modelling of River Flows. *Information and Communication Technologies and Sustainable Development. ICT&SD 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023, Vol. 809, pp. 444–458. DOI: 10.1007/978-3-031-46880-3_26.
3. Khodnevych Y., Stefanyshyn D. Do we need a more sophisticated multilayer artificial neural network to compute roughness coefficient? *Ekologichna bezpeka ta pryrodokorystuvannya* [Environmental safety and natural resources]. 2023, Vol. 48 (4), pp. 170–182. DOI: 10.32347/2411-4049.2023.4.170-182.
4. Sturm T. W. *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, N.Y., 2001, 493 p.
5. Papaioannou G., Markogianni V., Loukas A., Dimitriou E. Remote Sensing Methodology for Roughness Estimation in Ungauged Streams for Different Hydraulic/Hydrodynamic Modeling Approaches. *Water*. 2022, Vol. 14 (7), 1076. DOI: 10.3390/w14071076.
6. De Wrachien D., Mambretti S., Sole A. Mathematical models in flood management: overview and challenges. *Flood Recovery, Innovation and Response*. 2010, Vol. 133, pp. 61–72. DOI: 10.2495/FRIAR100061.
7. Wang Yu., Liang Q., Kesserwani G., Hall J. W. A 2D shallow flow model for practical dam-break simulations. *Journal of Hydraulic Research*. 2011, Vol. 49 (3), pp. 307–316. DOI: 10.1080/00221686.2011.566248.
8. Zounemat-Kermani M., Batelaan O., Fadaee M., Hinkelmann R. Ensemble machine learning paradigms in hydrology: A review. *Journal of Hydrology*. 2021, Vol. 598, 126266. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2021.126266.
9. Gichamo T., Nourani V., Gökçekuş H., Gelete G. Ensemble of artificial intelligence and physically based models for rainfall–runoff modeling in the upper Blue Nile Basin. *Hydrology Research*. 2024, Vol. 55 (10), pp. 976–1000. DOI: 10.2166/nh.2024.189.
10. Charu C. Aggarwal. *Neural Networks and Deep Learning: A Textbook (2nd Edition)*. Springer. 2023, 553 p.
11. Gad A. F., Jarmouni F. E. *Introduction to Deep Learning and Neural Networks with Python*. A Practical Guide. Elsevier. 2021, 285 p.
12. Hansen L. K., Salamon P. Neural network ensembles. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1990, Vol. 12 (10), pp. 993–1001. DOI: 10.1109/34.58871.
13. Mohammed A., Kora R. A comprehensive review on ensemble deep learning: Opportunities and challenges. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*. 2023, Vol. 35, pp. 757–774. DOI: 10.1016/j.jksuci.2023.01.014.
14. Khodnevych Ya. *Software Implementation of a Computational Algorithm for Training an Ensemble of Neural Networks to Predict the Chezy Roughness Coefficient*. 2025. Available at: https://github.com/yakhodnevych/ANNE_approximation_C.git (accessed 6 September 2025).

Надійшла (received) 27.11.2025; Доопрацьована (finalized) 05.01.2026; До публікації (for publication) 15.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Ходневич Ярослав Васильович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ; тел.: (097) 080-89-49; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5510-1154>; e-mail: ya.v.khodnevych@gmail.com.

Khodnevych Yaroslav Vasylovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (097) 080-89-49; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5510-1154>; e-mail: ya.v.khodnevych@gmail.com.

Трофимчук Олександр Миколайович – доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України, директор Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ; тел.: (050) 330-24-88; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274>; e-mail: Trofymchuk@nas.gov.ua.

Trofymchuk Oleksandr Mykolayovych – Corresponding member of the NAS of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (050) 330-24-88; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3358-6274>; e-mail: Trofymchuk@nas.gov.ua.

Корбутяк Василь Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри землеустрою, кадастру, моніторингу земель та геоінформатики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (097) 650-97-42; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8273-2306>; e-mail: v.m.korbutiak@nuwm.edu.ua.

Korbutiak Vasyl Mykhailovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Land Management, Cadastre, Land Monitoring and Geoinformatics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (097) 650-97-42; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8273-2306>; e-mail: v.m.korbutiak@nuwm.edu.ua.

ЗМІСТ

<i>Андрєєв Ю. М., Шабанов Г. В.</i> Аналітичне розв'язання оберненої задачі кінематики шестиступеневих кутових маніпуляторів з урахуванням неспіввідностей	3
<i>Башняков О. М., Денисов К. І., Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Таїрова М. С.</i> Стабілізація лінійних матричних диференціальних рівнянь з постійними симетричними матрицями	20
<i>Ванін В. А., Кошовий Г. І.</i> Інтегральні характеристики компланарних систем імпедансних стрічок в полі Е-поляризованих хвиль.....	26
<i>Ващільна О. В., Лебедєва І. В.</i> Спектральний аналіз стійкості різницевої схем у задачі чисельного моделювання торсійних автоколиваний пружної колони у в'язкому середовищі.....	39
<i>Кожушко А. П., Лім І. Р., Коваленко О. І., Соколік С. П., Дудка О. Б.</i> Аналіз підходів до моделювання взаємодії пневматичних шин з опорною поверхнею.....	47
<i>Куценко О. С., Коваленко С. В.</i> Математична модель процесу теплопостачання множини пов'язаних абонентів.....	57
<i>Матвієнко О. І., Мірошніченко О. О.</i> Визначення максимального потоку у транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій	64
<i>Мельник О. С., Козаревич В. О.</i> Математичне моделювання нанорозмірних модулів.....	71
<i>Нечуйвітер О. П., Хурдей Є. Л., Іванов В. В., Шніцар А. С., Гіцак О. Р., Заборний А. В.</i> Аналіз точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за даними на лініях залежно від виду інформаційних операторів, швидкості зростання фази та амплітуди.....	76
<i>Nikolaev O. G., Skitska M. V., Drashpul N. V.</i> Optimal control of the thermoelastic state of a ball with a spherical inclusion using power of distributed internal heat sources.....	89
<i>Рудницький О. Г., Рудницька М. О., Ткаченко Л. В.</i> Оптимізація алгоритму покращення якості оптоакустичної візуалізації.....	111
<i>Ходневич Я. В., Трофимчук О. М., Корбутяк В. М.</i> Дослідження агрегування прогнозів ансамблю нейронних мереж для обчислення коефіцієнта гідравлічного опору.....	119

CONTENTS

<i>Andriev YU. M., Shabanov H. V.</i> Analytical solution of the inverse kinematics problem for six-degree-of-freedom articulated manipulators with axis misalignments	3
<i>Bashniakov O. M., Denysov K. I., Matvienko V. T., Pichkur V. V., Tairova M. S.</i> Stabilization of linear matrix differential equations with constant symmetric matrices	20
<i>Vanin V. A., Koshovy G. I.</i> Integral characteristics of planar and co-planar systems of impedance strips in the field of E-polarized waves.....	26
<i>Vashchilina O. V., Lebedyeva I. V.</i> Spectral stability analysis of difference schemes for numerical modeling of torsional self-oscillations of an elastic column in a viscous medium	39
<i>Kozhushko A. P., Lim I. R., Kovalenko O. I., Sokolik S. P., Dudka O. B.</i> Analysis of approaches to modeling the interaction of pneumatic tires with the supporting surface	47
<i>Kutsenko O. S., Kovalenko S. V.</i> Mathematical model of the heat supply process of a set of connected subscribers	57
<i>Matviienko O. I., Miroshnichenko O. O.</i> Determination of the maximum flow in a transport network with fuzzy capacities of communications.....	64
<i>Melnyk O. S., Kozarevych V. O.</i> Mathematical modeling of nano-sized modules	71
<i>Nechuiviter O. P., Khurdei YE. L., Ivanov V. V., Shnitsar A. S., Hishchak O. R., Zaborniy A. V.</i> Accuracy analysis of computing double integrals of rapidly oscillatory functions based on line data with respect to the type of information operators, growth rate of the phase and amplitude	76
<i>Nikolaev O. G., Skitska M. V., Drashpul N. V.</i> Optimal control of the thermoelastic state of a ball with a spherical inclusion using power of distributed internal heat sources	89
<i>Rudnitskii A. G., Rudnytska M. A., Tkachenko L. V.</i> Optimization of the algorithm for improving the quality of optoacoustic vizualization.....	111
<i>Khodnevykh YA. V., Trofymchuk O. M., Korbutiak V. M.</i> Investigation of neural network ensemble forecast aggregation for computing the hydraulic resistance coefficient	119

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

- зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory** (New Jersey, USA);
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний обсяг статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний обсяг** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може бути більше 8-ми осіб. Номер збірника не може містити понад 1-ї статі одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані примірники журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронна версія відразу ж стає доступною у БД «Наукова періодика України» Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та на сайті Науково-технічної бібліотеки Національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://mmtt.khpi.edu.ua>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2. Кафедра вищої математики.

Тел. +38-057-707-60-35

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 1 (10) ' 2026

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.

Технічний редактор Нижник С. Д.

Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук, доц. Набока О. О.

Мовні рецензенти української мови: канд. фіз.-мат. наук, доц. Софронова М.С.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».

Кафедра вищої математики.

Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 26.03.2026 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 1085. Ціна договірна.

Друк : Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Залізнична, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК № 5493 від 22.08.2017 р.