

**О. П. НЕЧУЙВИТЕР, Є. Л. ХУРДЕЙ, В. В. ІВАНОВ, А. С. ШНИЦАР, О. Р. ГИЩАК, А. В. ЗАБОРНИЙ**

**АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ НА ЛІНІЯХ ЗАЛЕЖНО ВІД ВИДУ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ, ШВИДКОСТІ ЗРОСТАННЯ ФАЗИ ТА АМПЛІТУДИ**

Важливою задачею математичного моделювання наразі є чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Через складність самих функцій або області інтегрування виникає необхідність застосування ефективних чисельних методів. Основна проблема чисельного інтегрування функцій багатьох змінних полягає в зростанні обчислювальних витрат зі збільшенням розмірності області інтегрування. Це спонукає до пошуку ефективних методів, які дозволяють зберігати баланс між обчислювальною складністю та точністю результатів. Особливий інтерес становлять методи чисельного інтегрування, розроблені з використанням інформаційних операторів, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних у точках, на лініях, площинах тощо. На основі таких операторів будуються кубатурні формули для наближеного обчислення багатовимірних інтегралів, у тому числі і для інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Однак не було приділено достатньо уваги приділено вивченню впливу на точність обчислень таких характеристик фази та амплітуди як швидкість зростання. Метою даної статті є проведення аналізу точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також від швидкості зростання фази та амплітуди.

**Ключові слова:** математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування, швидкоосцилюючі функції багатьох змінних, кубатурна формула, інформаційні оператори, оператори інтерлінації.

**O. P. NECHUIVITER, YE. L. KHURDEI, V. V. IVANOV, A. S. SHNITSAR, O. R. HISHCHAK, A. V. ZABORNIY**

**ACCURACY ANALYSIS OF COMPUTING DOUBLE INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATORY FUNCTIONS BASED ON LINE DATA WITH RESPECT TO THE TYPE OF INFORMATION OPERATORS, GROWTH RATE OF THE PHASE AND AMPLITUDE**

An important task in mathematical modelling today is the numerical integration of functions of several variables. Due to the complexity of the functions themselves or the domain of integration, there is a need to apply efficient numerical methods. The main problem with the numerical integration of functions of several variables lies in the increase in computational cost as the dimension of the integration domain increases. This prompts the search for efficient methods that allow a balance to be maintained between computational complexity and the accuracy of the results. Of particular interest are numerical integration methods developed using information operators, which reconstruct intermediate values of quantities based on a given set of known values of a multivariable function at points, on lines, in planes, etc. Based on such operators, cubature formulas are constructed for the approximate calculation of multidimensional integrals, including integrals of rapidly oscillating functions of general form. However, insufficient attention has been paid to studying the influence of phase and amplitude characteristics, such as the rate of increase, on the accuracy of the calculations. The aim of this article is to analyze the accuracy of the calculation of double integrals of rapidly oscillating functions of general form based on data specified on lines, depending on the type of information operators, as well as on the rate of increase of phase and amplitude.

**Key words:** mathematical modeling of processes, digital image processing, numerical integration, highly oscillating functions of many variables, cubature formula, information operators, interlineation operators.

**Вступ.** Розвиток *інформаційних технологій* зумовлює зростаючий інтерес до задач цифрової обробки зображень. У сучасних *методах цифрової обробки зображень*, зокрема в дифракційній томографії, оптичній когерентній томографії та фазоконтрастній візуалізації, формування зображення ґрунтується на *хвильовій природі випромінювання* та його взаємодії з об'єктом. Загалом цей процес включає такі етапи: генерація та поширення хвильового поля, вимірювання інтенсивності, побудова математичної моделі прямої задачі та чисельна реконструкція зображення. Прямая, так і обернена задачі відновлення зображень зводяться до багаторазового обчислення швидкоосцилюваних інтегралів узагальненого вигляду [1]. Традиційні *методи чисельного інтегрування* виявляються малоєфективними через недостатню точність. Особливий інтерес становлять задачі, де вхідна інформація про функцію задається лише на певних лініях. У зв'язку з цим актуальним є розроблення та дослідження нових підходів, зокрема *кубатурних формул*, які дозволяють враховувати специфіку відомої інформації. Наразі існують методи чисельного інтегрування, в тому числі *методи чисельного інтегрування швидкоосцилюваних функцій декількох змінних*, які розроблені з використанням інформаційних операторів, що відновлюють проміжні значення функцій за відомими значеннями функції на лініях, площинах, смугах тощо. До таких інформаційних операторів відносять *оператори О. М. Литвина*: оператори *інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації* та інші. Точність таких інформаційних операторів значною мірою залежить від виду інформаційних операторів, а також від способу відновлення функції між лініями спостереження. При цьому суттєвий вплив на точність обчислень мають характеристики фази та амплітуди. У даній роботі проводиться аналіз точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також швидкості зростання фази та амплітуди.

**Аналіз останніх досліджень.** Чисельне інтегрування швидкоосцилюваних функцій є дуже важливим напрямком, який досліджується вченими усього світу. Найбільш відомі з них – *Arieh Iserles, Daan Huybrechs, Ben Adcock, Alfredo Deaño, Валерій Задірака* та інші, які давно присвячують свої дослідження цій тематиці. Дослі-

дження не втрачають актуальності, про що свідчать нещодавні публікації цих авторів [2 – 9], де висвітлено методи для обчислення багатовимірних високоосциляційних інтегралів. Однак такі кубатурні формули не дають можливості використовувати дані на площинах, лініях.

Детальніше зупинимося на чисельному інтегруванні швидкоосцильованих функцій у випадку, коли інформація про функції задається значеннями функції на лініях, площинах. До таких методів відносяться кубатурні формули, які будуються з використанням різних інформаційних операторів (операторів інтерлінації, інтерфлетації) [10, 11]. У роботі [12] розглядається наближене обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій двох змінних та отримані оцінки похибки наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних. Більше результатів щодо обчислення  $2D$ -коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій було опубліковано в [13]. У монографії зроблено класифікацію кубатурних формул за типом завдання інформації про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій трьох змінних з використанням інформаційних операторів детально представлено в роботах [14, 15]. Кубатурні формули для наближеного обчислення  $3D$ -коефіцієнтів Фур'є будуються з використанням операторів інтерфлетації та інтерлінації. У своїй побудові інформаційні оператори використовували значення функцій на взаємно перпендикулярних площинах, лініях.

Обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду за даними на площинах та лініях представлено в статтях [16 – 19]. Роботи присвячені застосуванню інформаційних операторів до більш загального виду інтегралів від швидкоосцильованих функцій. Однак в жодній з вищезазначених робіт не досліджувалося питання впливу на точність обчислень таких властивостей фази та амплітуди як швидкість зростання.

**Метою** даної статті є проведення аналізу точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду за даними, заданими на лініях, залежно від виду інформаційних операторів, а також від швидкості зростання фази та амплітуди.

**Постановка задачі.** Розглянемо  $H^{2,1}(M, \tilde{M}) = H^{2,1}(M_u, \tilde{M}_u)$  – клас дійсних функцій, визначених на  $G = [0, 1]^2$  і таких, що  $|u^{(1,0)}(x, y)| \leq M_u$ ,  $|u^{(0,1)}(x, y)| \leq M_u$ ,  $|u^{(1,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}_u$ .

Для наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій двох змінних загального виду

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (1)$$

провести порівняльний аналіз точності кубатурних формул, які в своїй побудові використовують оператори кусково-сталі та лінійної сплайн-інтерлінації. Проаналізувати вплив властивостей фази та амплітуди на точність обчислення швидкоосцилюючих інтегралів загального виду із застосуванням кубатурних формул, побудованих на основі даних, заданих на лініях.

**Точність обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій за даними на лініях залежно від виду інформаційного оператора.** Проведемо дослідження точності наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючих функцій загального виду (1) за допомогою кубатурних формул, побудованих на основі даних, заданих на лініях. У межах дослідження розглядаються дві формули, отримані із використанням різних інформаційних операторів. Наведемо оператор інтерлінації, який відновлює функцію за даними на лініях і використовує кусково-сталі сплайни у вигляді допоміжних функцій.

**Означення.** Під слідом функції на заданих лініях розуміють обмеження цієї функції на відповідні лінії, унаслідок чого вона зводиться до функції однієї змінної, визначених уздовж кожної з цих ліній.

Введемо позначення:

$$h_{10k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_{1k}, \\ 0, & x \notin X_{1k}, \end{cases} \quad H_{10j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_{1j}, \\ 0, & y \notin Y_{1j}, \end{cases}$$

$$X_{1k} = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_{1j} = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad k, j = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1/\ell_1,$$

$$h_{20p}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_{2p}, \\ 0, & x \notin X_{2p}, \end{cases} \quad H_{20s}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_{2s}, \\ 0, & y \notin Y_{2s}, \end{cases}$$

$$X_{2p} = [x_{p-1/2}, x_{p+1/2}], \quad Y_{2s} = [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}],$$

$$x_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad y_s = s\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad p, s = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1/\ell_2.$$

Розглянемо оператори

$$Tf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h_{10k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H_{10j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h_{10k}(x) H_{10j}(y);$$

$$Eg(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x) + \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y) - \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y).$$

Кубатурна формула

$$\Phi_1(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Tf(x, y) e^{i\omega Eg(x, y)} dx dy \quad (2)$$

пропонується для наближеного обчислення інтеграла (1).

**Теорема 1.** [16] Нехай  $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$ , тоді

$$|I(\omega) - \Phi_1(\omega)| = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Tf(x, y) e^{i\omega Eg(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M}_f}{16\ell_1^2} + \tilde{M}_f \min \left( 2; \frac{\omega(\tilde{M}_g)}{16\ell_2^2} \right).$$

Розглянемо інший інформаційний оператор О. М. Литвина (оператор інтерлінації), який відновлює функцію за даними на лініях і використовує лінійні сплайни у вигляді допоміжних функцій.

Введемо наступні позначення:

$$h_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad H_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y-y_1}{-\Delta_1}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1\mu}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\mu-1}, \\ \frac{x-x_{\mu-1}}{\Delta_1}, & x_{\mu-1} < x < x_{\mu}, \\ \frac{x-x_{\mu+1}}{-\Delta_1}, & x_{\mu} \leq x < x_{\mu+1}, \\ 0, & x \geq x_{\mu+1}, \end{cases} \quad H_{1\nu}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\nu-1}, \\ \frac{y-y_{\nu-1}}{\Delta_1}, & y_{\nu-1} < y < y_{\nu}, \\ \frac{y-y_{\nu+1}}{-\Delta_1}, & y_{\nu} \leq y < y_{\nu+1}, \\ 0, & y \geq y_{\nu+1}, \end{cases}$$

$$h_{1\ell_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell_1-1}, \\ \frac{x-x_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1} < x < x_{\ell_1}, \\ 0, & x \geq x_{\ell_1}, \end{cases} \quad H_{1\ell_1}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell_1-1}, \\ \frac{y-y_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1} < y < y_{\ell_1}, \\ 0, & y \geq y_{\ell_1}, \end{cases}$$

$$\mu, \nu = \overline{1, \ell_1 - 1}, \quad x_{\mu} = \mu\Delta_1, \quad y_{\nu} = \nu\Delta_1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}.$$

Аналогічно визначаються сліди функції  $g(x, y)$  та функції  $h_{21r}(x), H_{21q}(y)$  на прямих  $x_r = r\Delta_2, y_q = q\Delta_2, r, q = \overline{0, \ell_2}, \Delta_2 = 1/\ell_2$ .

Розглянемо два інформаційні оператори

$$Jf(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\ell_1} f(x_{\mu}, y) h_{1\mu}(x) + \sum_{\nu=0}^{\ell_1} f(x, y_{\nu}) H_{1\nu}(y) - \sum_{\mu=0}^{\ell_1} \sum_{\nu=0}^{\ell_1} f(x_{\mu}, y_{\nu}) h_{1\mu}(x) H_{1\nu}(y)$$

та

$$Og(x, y) = \sum_{r=0}^{\ell_2} g(x_r, y) h_{21r}(x) + \sum_{q=0}^{\ell_2} g(x, y_q) H_{21q}(y) - \sum_{r=0}^{\ell_2} \sum_{q=0}^{\ell_2} g(x_r, y_q) h_{21r}(x) H_{21q}(y).$$

Для обчислення інтеграла (1) пропонується кубатурна формула:

$$\Phi_2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \quad (3)$$

**Теорема 2.** [17] Нехай  $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$  та функції  $f(x, y), g(x, y)$  задані слідами  $f(x_{\mu}, y), f(x, y_{\nu}), \mu, \nu = \overline{0, \ell_1}$ , та  $g(x_r, y), g(x, y_q), r, q = \overline{0, \ell_2}$ , на системах взаємно перпендикулярних

прямих  $x_\mu = \mu\Delta_1$ ,  $y_\nu = \nu\Delta_1$ ,  $\Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}$  та  $x_r = r\Delta_2$ ,  $y_q = q\Delta_2$ ,  $\Delta_2 = 1/\ell_2$  в області  $G = [0, 1]^2$ . Тоді для кубатурної формули (3) справедлива наступна оцінка похибки наближення (1):

$$\rho(I(\omega), \Phi_2(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M}_f}{9} \frac{1}{\ell_1^2} + \tilde{M}_f \min\left(2; \frac{\tilde{M}_g \omega}{9} \frac{1}{\ell_2^2}\right).$$

Ефективність чисельного інтегрування функцій декількох змінних суттєво залежить від класу гладкості підінтегральних функцій. Порядок диференційовності визначає можливість отримання більш точних теоретичних оцінок похибки та обґрунтовує вибір параметрів дискретизації, що продемонстровано, наприклад, у роботі [14]. Однак і при фіксованому порядку диференційовності функцій важливо знати залежність точності наближення від параметрів осциляції та кількості задіяних в обчисленнях ліній.

Нехай амплітуда та фаза відповідно задаються наступними функціями:

$$f(x, y) = \cos(x + y) \text{ та } g(x, y) = \sin(x + y).$$

На рис. 1 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 2 – зображення дійсної та уявної складової всієї підінтегральної функції  $F(x, y) = f(x, y) e^{i\omega g(x, y)}$  при  $\omega = 40\pi$ .

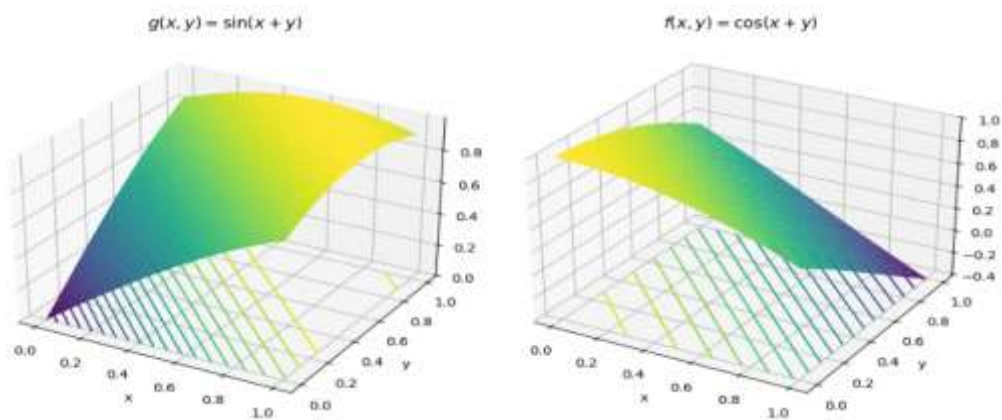


Рис. 1 – Зображення амплітуди  $g(x, y) = \sin(x + y)$  та фази  $f(x, y) = \cos(x + y)$ .

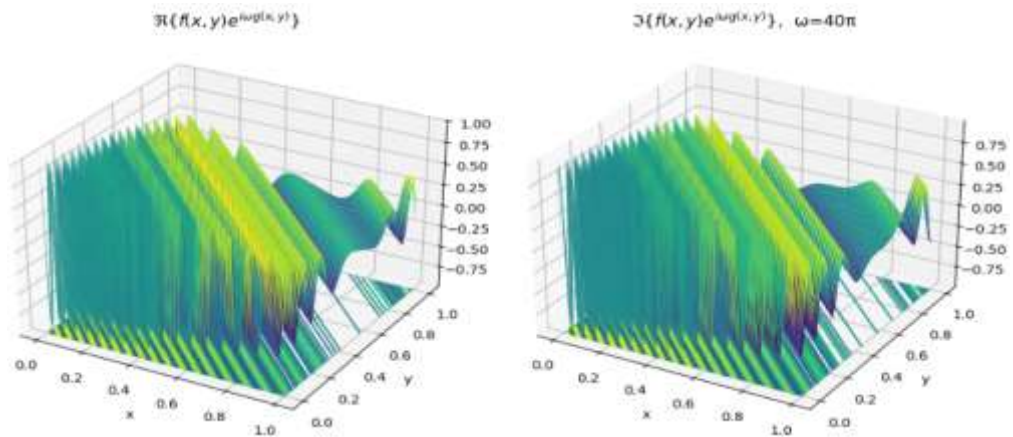


Рис. 2 – Зображення  $\text{Re}F(x, y)$ ,  $\text{Im}F(x, y)$  при  $\omega = 40\pi$ .

Для заданих функцій маємо  $M = M_f = M_g = \tilde{M}_f = \tilde{M}_g = 1$ . Згідно з теоремами 1 та 2 точність наближення інтеграла (1) за формулою (2) на класі  $H^{2,1}(M, \tilde{M})$  при  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  дорівнює

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\ell, \omega) = \frac{1}{16\ell^2} + \min\left(2; \frac{\omega}{16\ell^2}\right), \tag{4}$$

а за формулою (3) відповідно

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\ell, \omega) = \frac{1}{9\ell^2} + \min\left(2; \frac{\omega}{9\ell^2}\right). \tag{5}$$

Залежності (4) та (5) показують, що в даному експерименті при обчисленні інтеграла (1) за допомогою кубатурної формули (2) забезпечується менша похибка, ніж при обчисленні інтегралу (1) за кубатурною формулою (3). У табл. 1 наведено значення теоретичних похибок  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$  для амплітуди  $f(x, y) = \cos(x + y)$  та фази  $g(x, y) = \sin(x + y)$  при різних значень  $\omega$  і  $\ell$ .

Незважаючи на те, що кусково-сталі апроксимації забезпечують кращі теоретичні оцінки похибки, використання кусково-лінійних сплайнів є доцільним, оскільки вони точніше відтворюють локальну зміну функції між лініями спостереження.

Таблиця 1 – Значення теоретичних похибок  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$  при  $\omega = 20\pi, 60\pi, 100\pi$ 

$\ell$	$\omega$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
64	$\omega = 20\pi$	$9,74 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{-3}$
128	$\omega = 20\pi$	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$4,32 \cdot 10^{-4}$
256	$\omega = 20\pi$	$6,08 \cdot 10^{-5}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$
512	$\omega = 20\pi$	$1,52 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-5}$
1024	$\omega = 20\pi$	$3,80 \cdot 10^{-6}$	$6,76 \cdot 10^{-6}$
256	$\omega = 60\pi$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$3,21 \cdot 10^{-4}$
512	$\omega = 60\pi$	$4,51 \cdot 10^{-5}$	$8,03 \cdot 10^{-5}$
1024	$\omega = 60\pi$	$1,12 \cdot 10^{-5}$	$2,00 \cdot 10^{-5}$
512	$\omega = 100\pi$	$7,51 \cdot 10^{-5}$	$1,33 \cdot 10^{-4}$
1024	$\omega = 100\pi$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$3,34 \cdot 10^{-5}$

### Вплив швидкості зростання фази та амплітуди на похибки кубатурних формул для подвійних швидкоосцилюючих інтегралів загального виду за даними на лініях.

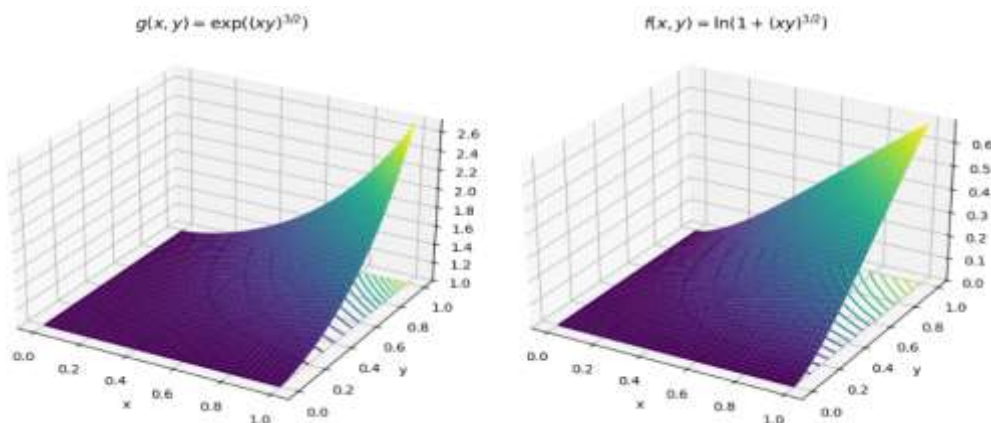
Проведемо дослідження для двох пар функцій, а саме пари

$$f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}), \quad g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}} \quad (6)$$

та пари

$$f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}, \quad g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}). \quad (7)$$

Розглянемо випадок (6), коли амплітуда є повільно зростаючою функцією, а фаза – швидко зростаючою. На рис. 3 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 4 – зображення дійсної та уявної складових усїєї підінтегральної функції  $F(x, y) = f(x, y)e^{i\omega g(x, y)}$  при  $\omega = 40\pi$ .

Рис. 3 – Зображення фази  $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$  та амплітуди  $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ .

Для запропонованих пар функцій (6) та (7) знайдено значення інтеграла (1) за формулою (2) для відповідних параметрів дослідження  $\omega = 20\pi, 40\pi, 80\pi, 160\pi, 1000\pi$ . Отримані результати систематизовано у табл. 2 – 6 та табл. 7 – 11 відповідно, де наведено чисельні значення інтегралів, обчислені з використанням Python, а також відповідні похибки наближення. Еталонні значення інтеграла (1) отримані з використанням цього ж програмного середовища, що забезпечує можливість коректного порівняння результатів і об'єктивної оцінки точності запропонованого методу.

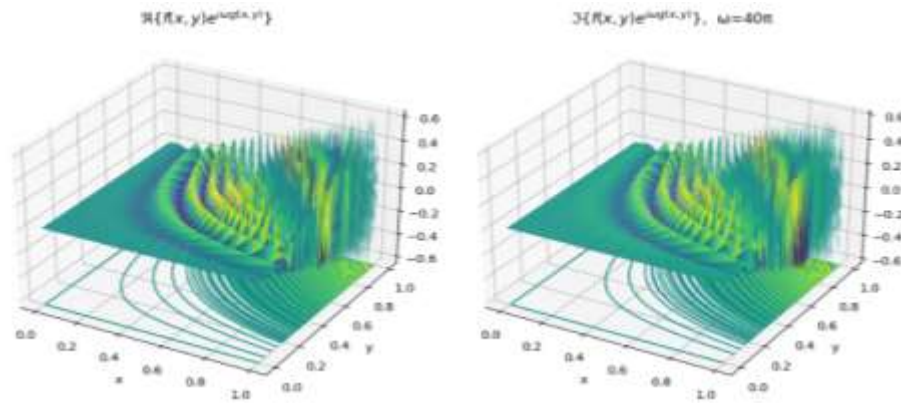


Рис. 4 – Зображення  $\text{Re}F(x, y)$ ,  $\text{Im}F(x, y)$  при  $\omega=40\pi$ .

Таблиця 2 – Результати обчислення  $I(20\pi) = -0.00101372942276758016 + 0.00137343489762060413i$

$\ell$	$\Phi_1(20\pi)$	$ I(20\pi) - \Phi_1(20\pi) $
16	$-0.00103546040567006371 + 0.00163166754178107167i$	$2.59145391871078189291e - 04$
32	$-0.00093415366481342942 + 0.00145806089852109234i$	$1.16163080547939228109e - 04$
64	$-0.00101333145504985101 + 0.00137322168577591521i$	$4.51483770550175938226e - 07$
128	$-0.00101371495411228265 + 0.00137342845507920576i$	$1.58381919987112965473e - 08$
256	$-0.00101372861245022311 + 0.00137343454323474211i$	$8.84422726040246696727e - 10$
512	$-0.00101372937402112689 + 0.00137343487612204967i$	$5.32766792343087229562e - 11$
1024	$-0.00101372941985486387 + 0.00137343489628675855i$	$3.20360113351990219281e - 12$

Таблиця 3 – Результати обчислення  $I(40\pi) = -0.00040075556579444600 + 0.00047452579133147268i$

$\ell$	$\Phi_1(40\pi)$	$ I(40\pi) - \Phi_1(40\pi) $
16	$-0.00177232499452210012 - 0.00068805757649440186i$	$1.79799966211500062557e - 03$
32	$-0.00043449650443687165 + 0.00048951664051198704i$	$3.69212201806069903378e - 05$
64	$-0.00037662958912901506 + 0.00044405371904614372i$	$3.88665658300708507047e - 05$
128	$-0.00040071183090982520 + 0.00047456203140918140i$	$5.67986211551636638136e - 08$
256	$-0.00040075409107432779 + 0.00047452711417854626i$	$1.98109156959975376583e - 09$
512	$-0.00040075548411553041 + 0.00047452586585357775i$	$1.10566673978140064169e - 10$
1024	$-0.00040075556093913280 + 0.00047452579587636514i$	$6.65057243538921743378e - 12$

Таблиця 4 – Результати обчислення  $I(80\pi) = -0.00015221354963387498 + 0.00016379028876953736i$

$\ell$	$\Phi_1(80\pi)$	$ I(80\pi) - \Phi_1(80\pi) $
16	$-0.00334668108065046353 + 0.00040292378806100872i$	$3.20340563107493524544e - 03$
32	$-0.00068693807183014080 + 0.00055404736327407901i$	$9.25459900809608333738e - 04$
64	$-0.00017579763844707892 + 0.00016090865302268530i$	$2.37594837849357915730e - 05$
128	$-0.00015740831222624174 + 0.00017342122876120040i$	$1.09426031415777598162e - 05$
256	$-0.0001522060800284241 + 0.00016379124862705752i$	$7.12333481870523736347e - 09$
512	$-0.00015221379734590699 + 0.00016379031761832273i$	$2.49386253070518523347e - 10$
1024	$-0.00015221356364832696 + 0.00016379029035777569i$	$1.41041612752991056444e - 11$

Таблиця 5 – Результати обчислення  $I(160\pi) = -0.00005564227890693021 + 0.00005553651327752942i$

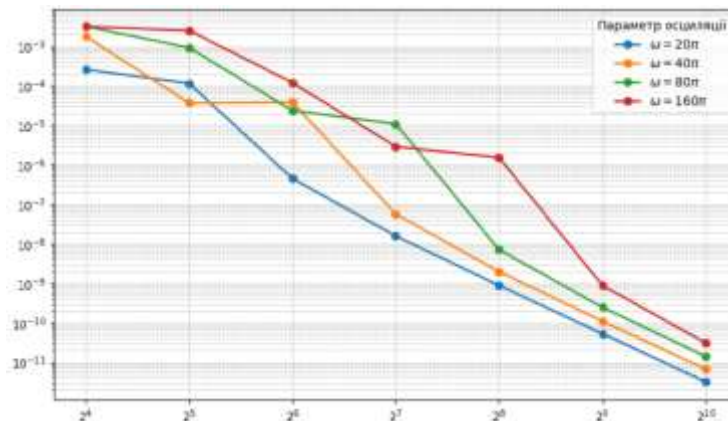
$\ell$	$\Phi_1(160\pi)$	$ I(160\pi) - \Phi_1(160\pi) $
16	$-0.00181340378650704428 - 0.00260618682797360886i$	$3.18974868335449761661e - 03$
32	$-0.00164427152387240194 - 0.00190946450946483863i$	$2.52685019289591384153e - 03$
64	$-0.00003063356381273761 + 0.00014066927133488227i$	$1.21206879059897578224e - 04$
128	$-0.00005280183635234283 + 0.00005493360980349352i$	$2.90372286985439164066e - 06$
256	$-0.00005671450968095379 + 0.00005662366826697828i$	$1.52695278376469147997e - 06$
512	$-0.00005564206483543352 + 0.00005553737679897108i$	$8.89660545324502390546e - 10$
1024	$-0.00005564227186889776 + 0.00005553654346505848i$	$3.09971097262836882080e - 11$

Таблиця 6 – Результати обчислення  $I(1000\pi) = -0.00000359054631166343 + 0.00000315278022942381i$ 

$\ell$	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$-0.00057568876885848467 + 0.00313954373702194246i$	$3.18814124688526333989e-03$
32	$-0.00078834038282489180 - 0.00088390638892442853i$	$1.18435901460978523260e-03$
64	$-0.00065212386961098088 + 0.00004244734170477825i$	$6.49722659287174154376e-04$
128	$-0.00030923533555227216 - 0.00019130576156473929i$	$3.62260764735360802063e-04$
256	$0.00012179970511385138 - 0.00001888127538845200i$	$1.27311487146782888451e-04$
512	$-0.00000753679965004781 + 0.00000431932126198412i$	$4.11506177248370284903e-06$
1024	$-0.00000365479843231814 + 0.00000322157179727225i$	$9.41308388131861515201e-08$
2048	$-0.00000359207999159832 + 0.00000314886386272420i$	$4.20596032654694016064e-09$

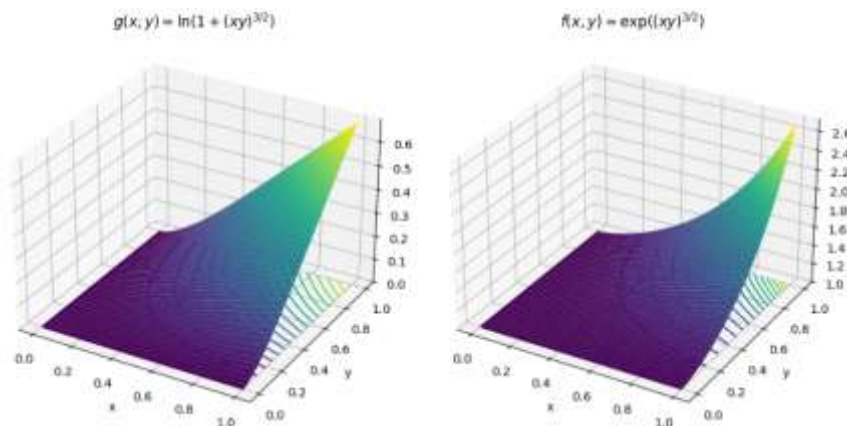
Результати обчислень, представлених у табл. 2 – 5, узагальнено, та графічно побудовано залежність похибки наближення від параметра розбиття при різних значеннях параметра осциляції для випадку, коли амплітуда  $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$  – повільно зростаюча функція, а фаза  $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$  – швидко зростаюча.

На графіку (рис. 5) спостерігається збіжність при  $\ell \rightarrow \infty$ , при фіксованому  $\ell$  похибка зростає зі збільшенням  $\omega$ , при фіксованому  $\omega$  похибка зменшується зі збільшенням  $\ell$ .

Рис. 5 – Залежність абсолютної похибки  $|I(\omega) - \Phi_1(\omega)|$  від параметра розбиття від  $\ell$  при різних значеннях  $\omega$ 

для  $f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$  та  $g(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ .

Розглянемо випадок (7), коли амплітуда  $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$  – швидко зростаюча функція, а фаза  $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$  – повільно зростаюча. На рис. 6 наведено зображення амплітуди та фази в заданій області, а на рис. 7 – зображення дійсної та уявної складових усієї підінтегральної функції  $F(x, y) = f(x, y)e^{i\omega g(x, y)}$  при  $\omega = 40\pi$ .

Рис. 6 – Зображення фази  $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$  та амплітуди  $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$ .

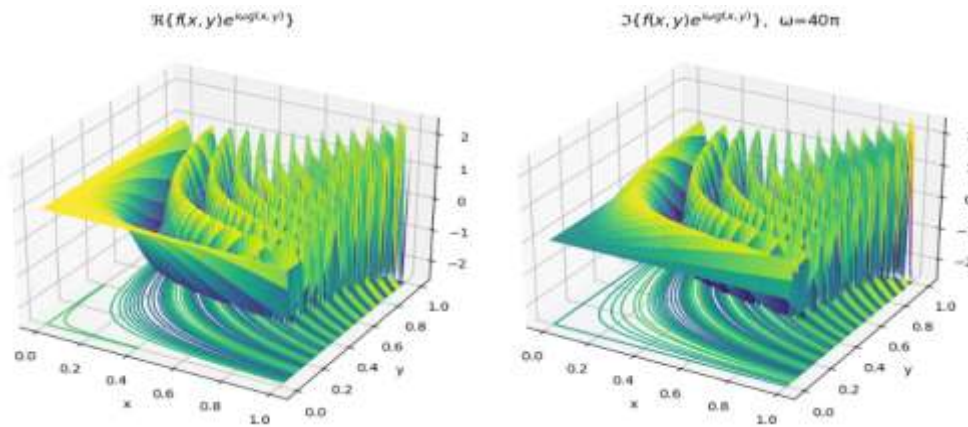


Рис. 7 – Зображення  $\text{Re}F(x, y)$ ,  $\text{Im}F(x, y)$  при  $\omega=40\pi$ .

Таблиця 7 – Результати обчислення  $I(20\pi) = 0.15274913923483027234 + 0.15288078794789364268i$

$\ell$	$\Phi_1(20\pi)$	$ I(20\pi) - \Phi_1(20\pi) $
16	0.15274115513172059622 + 0.15286213900510398078i	2.02861768117608148464e - 05
32	0.15274874358889076187 + 0.15287974161245621030i	1.11863915409658644401e - 06
64	0.15274911556834883108 + 0.15288071671878922242i	7.50578953896321240712e - 08
128	0.15274913775184545406 + 0.15288078219946424352i	5.93663916103354425250e - 09
256	0.15274913913871734916 + 0.15288078735709728639i	5.98563303750385163712e - 10
512	0.15274913922817631717 + 0.15288078787007269854i	7.81048939895516634811e - 11
1024	0.15274913923429950247 + 0.15288078793580370252i	1.21015854222732222538e - 11

Таблиця 8 – Результати обчислення  $I(40\pi) = 0.10550000916001549267 + 0.11000679484621385396i$

$\ell$	$\Phi_1(40\pi)$	$ I(40\pi) - \Phi_1(40\pi) $
16	0.10455953129902798016 + 0.11011493648270417878i	9.46674823025547883600e - 04
32	0.10549864231417172000 + 0.11000486523516031512i	2.36467045876965286608e - 06
64	0.10549994370503992802 + 0.11000667385503298812i	1.37561694062985951917e - 07
128	0.10550000527867707534 + 0.11000678480895829947i	1.07615652660707646132e - 08
256	0.10550000891710513418 + 0.11000679375752119016i	1.11546275530412842253e - 09
512	0.10550000914423431075 + 0.11000679469640368968i	1.50639075350480430875e - 10
1024	0.10550000915891494246 + 0.11000679482239898721i	2.38402829021250596385e - 11

Таблиця 9 – Результати обчислення  $I(80\pi) = 0.07202037600349145419 + 0.07807303287980528472i$

$\ell$	$\Phi_1(80\pi)$	$ I(80\pi) - \Phi_1(80\pi) $
16	0.07209614374857274688 + 0.07767701894968918885i	4.03196954404047797158e - 04
32	0.07184065843789561034 + 0.07810884729583850161i	1.83251400484407705625e - 04
64	0.07202017157589100937 + 0.07807294354190319474i	2.23096177854894506414e - 07
128	0.07202036631501654296 + 0.07807302140221988873i	1.50200370381631290407e - 08
256	0.07202037543006850617 + 0.07807303122775562099i	1.74873724977757491123e - 09
512	0.07202037596752403070 + 0.07807303261283948803i	2.69377787048494962752e - 10
1024	0.07202037600113656013 + 0.07807303283421368478i	4.56523768394460082147e - 11

Таблиця 10 – Результати обчислення  $I(160\pi) = 0.04875154221840095892 + 0.05476277427981546958i$

$\ell$	$\Phi_1(160\pi)$	$ I(160\pi) - \Phi_1(160\pi) $
16	0.04917485652388003947 + 0.05519029258669602700i	6.01636853875537453394e - 04
32	0.04860807712231115379 + 0.05492790009804085494i	2.18743616228359954957e - 04
64	0.04873553955748714112 + 0.05476363231559142064i	1.60256476223410049709e - 05
128	0.04875155312905574828 + 0.05476277488511894359i	1.09274324627668765206e - 08
256	0.04875154276905841605 + 0.05476277208367063415i	2.26412803818312970654e - 09
512	0.04875154225068843022 + 0.05476277381096519847i	4.69960697846684891704e - 10
1024	0.04875154222028230816 + 0.05476277419263903684i	8.71967310173741273845e - 11

Таблиця 11 – Результати обчислення  $I(1000\pi) = 0.01695653639669083071 + 0.02057127591480053738i$ 

$\ell$	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$0.02950929466230916773 + 0.03191050410642269630i$	$1.69159639411039230961e - 02$
32	$0.01514968066180856845 + 0.01487174584129794322i$	$5.97907774706412428051e - 03$
64	$0.01697857670862053595 + 0.01522472340190508810i$	$5.34659794154176189890e - 03$
128	$0.01695100614364110012 + 0.02055732683075606887i$	$1.50053538603293385470e - 05$
256	$0.01695495876484755249 + 0.02056850462855113956i$	$3.18887906779590355852e - 06$
512	$0.01695653580187374970 + 0.02057127389406641915i$	$2.10646000114779766147e - 09$
1024	$0.01695653638350208200 + 0.02057127537840931428i$	$5.36553340606828344260e - 10$
2048	$0.01695653639598573501 + 0.02057127581713230624i$	$9.76707762550816978808e - 11$

Результати обчислень, представлених у табл. 7 – 10, узагальнено, та графічно побудовано залежність похибки наближення від параметра розбиття при різних значеннях параметра осциляції для випадку, коли амплітуда  $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$  – швидко зростаюча функція, а фаза  $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$  – повільно зростаюча.

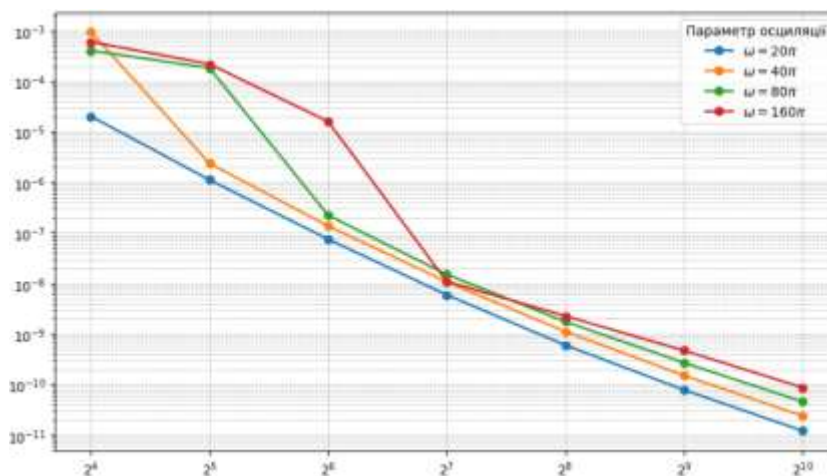


Рис. 8 – Залежність абсолютної похибки  $|I(\omega) - \Phi_1(\omega)|$  від параметра розбиття  $\ell$  при різних значеннях  $\omega$  для  $f(x, y) = e^{(xy)^{3/2}}$  та  $g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2})$ .



Рис. 9 – Порівняння абсолютних похибок для різних пар функцій (6), (7) в залежності від параметра розбиття  $\ell$  при  $\omega = 1000\pi$ .

На рис. 8, як і на рис. 5, спостерігається збіжність похибки при  $\ell \rightarrow \infty$ , при фіксованому  $\ell$  похибка зростає зі збільшенням  $\omega$ , при фіксованому  $\omega$  похибка зменшується зі збільшенням  $\ell$ .

Однак в першому випадку, тобто для пари (6), логарифмічна амплітуда не підсилює похибки порівняно з випадком (7), коли маємо експоненціальну амплітуду. У випадку (7) спостерігається підсилювання локальних помилок, але повільна фаза дозволяє методу це компенсувати.

Проведений чисельний експеримент показав, що при обчисленні інтегралу від швидкоосцилюючої функції (1) за кубатурною формулою (2), швидкість збіжності методу істотно залежить від поведінки фазової функції. Тобто для даного методу поведінка фази важливіша за ріст амплітуди.

Результати обчислень, представлених у табл. 6 та табл. 11, узагальнено, та графічно побудовано на рис. 9 залежність похибки наближення від параметра розбиття  $\ell$  при  $\omega = 1000\pi$  для пар (6) та (7).

Проведемо чисельне дослідження обчислення двовимірного швидкоосцилюючого інтеграла (1) при  $\omega = 1000\pi$  для функцій, що відрізняються лише характером фазової залежності, тобто для пари (6) та (8):

$$f(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}), \quad g(x, y) = \ln(1 + (xy)^{3/2}). \quad (8)$$

На рис. 10 та рис. 11 наведено зображення  $\text{Re} F(x, y)$ ,  $\text{Im} F(x, y)$  при  $\omega = 160\pi$  для пари (6) та для пари (8) відповідно.

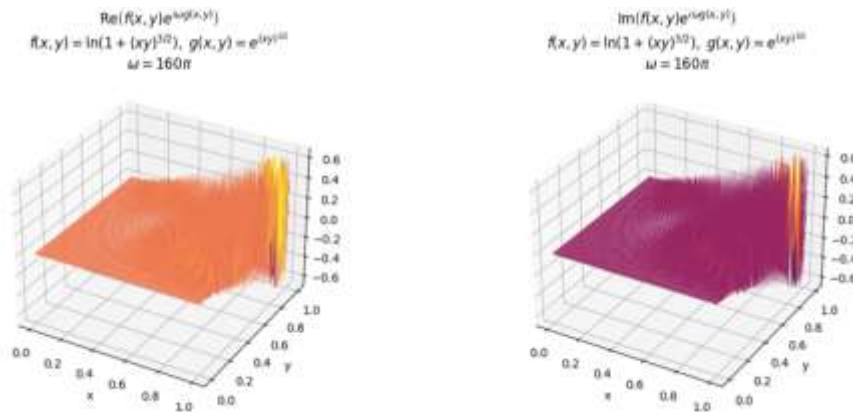


Рис. 10 – Зображення  $\text{Re} F(x, y)$ ,  $\text{Im} F(x, y)$  для пари (6) при  $\omega = 160\pi$ .

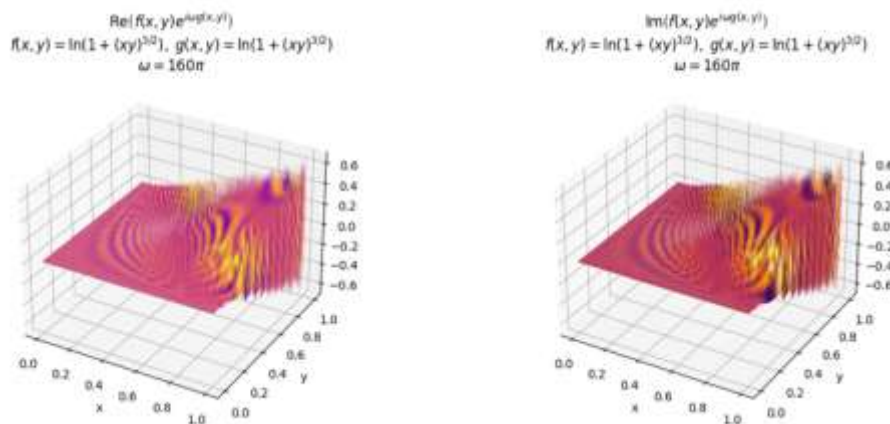


Рис. 11 – Зображення  $\text{Re} F(x, y)$ ,  $\text{Im} F(x, y)$  для пари (8) при  $\omega = 160\pi$ .

Результати обчислень інтеграла (1) для пари (6) та пари (8), представлених у табл. 6 та табл. 12, узагальнено, та графічно побудовано (рис. 12) залежність похибки наближення від параметра розбиття  $\ell$  при  $\omega = 1000\pi$ .

Таблиця 12 – Результати обчислення  $I(1000\pi) = -0.00000348022601246453 + 0.00000320746981592664i$

$\ell$	$\Phi_1(1000\pi)$	$ I(1000\pi) - \Phi_1(1000\pi) $
16	$0.00403957828826545691 + 0.00162547267266734716i$	$4.35638227641442759425e - 03$
32	$0.00006181500986759383 - 0.00153226012656000111i$	$1.53685529811661250772e - 03$
64	$-0.00003735561309608193 - 0.00136877422316165486i$	$1.37239983522138907050e - 03$
128	$-0.00000406611112269398 + 0.00000039614617569807i$	$2.87172456417682715496e - 06$
256	$-0.00000378374933102675 + 0.00000266035141393928i$	$6.25671599726429954775e - 07$
512	$-0.00000348039292084224 + 0.00000320780290185098i$	$3.72564946747841741856e - 10$
1024	$-0.00000348023037112280 + 0.00000320747821199797i$	$9.46001668439337217209e - 12$
2048	$-0.00000348022626938049 + 0.00000320747026869185i$	$5.20578667502241695215e - 13$

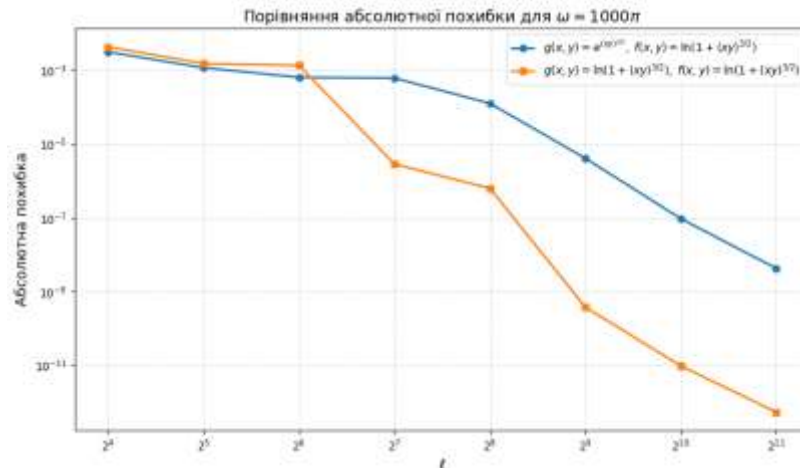


Рис. 12 – Порівняння абсолютних похибок для різних пар функцій (6), (8) в залежності від параметра розбиття  $l$  при  $\omega = 1000\pi$ .

Аналіз отриманих результатів показує суттєвий вплив властивостей фазової функції на швидкість збіжності методу та величину похибки.

**Перспективи подальших досліджень.** Стаття присвячена аналізу абсолютних похибок кубатурних формул для наближеного обчислення подвійних швидкоосцилюючих інтегралів за даними на лініях залежно від зростання фази, амплітуди та типу апроксимації. У подальшому планується провести більш детальне дослідження та аналіз похибки кубатурних формул за даними на площинах залежно від зростання фази, амплітуди та типу апроксимації. Таке дослідження сприятиме виявленню потенційної спроможності формул в одному класі функцій.

**Висновки.** В статті для наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій двох змінних загального виду (1) проведено порівняльний аналіз точності кубатурних формул, які в своїй побудові використовують оператори О. М. Литвина (оператори кусково-сталої та лінійної сплайн-інтерлінації). Зазначені кубатурні формули в своїй побудові використовують дані для амплітуди та фази на відповідних лініях. Проаналізовано вплив швидкості зростання фази та амплітуди на точність обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду.

Теоретичні результати порівняльного аналізу кубатурних формул за таким критерієм, як точність, свідчать про перевагу формули, побудованої з використанням кусково-сталої інтерлінації. Зокрема, встановлено, що застосування цього типу наближення забезпечує менші значення похибки обчислення порівняно з альтернативним підходом. Незважаючи на кращі теоретичні оцінки похибки для формули з використанням кусково-сталої інтерлінації, застосування кусково-лінійної сплайн-інтерлінації при наближеному обчисленні інтеграла (1) є доцільним, оскільки точніше відтворюються локальні зміни підінтегральної функції між лініями спостереження.

Чисельні експерименти, проведені в даному дослідженні, показують, що швидкість збіжності методу, в даному випадку кубатурної формули на основі кусково-сталої інтерлінації, істотно залежить від поведінки фазової функції. Для логарифмічної фази збіжність є швидкою і майже монотонною навіть при великих значеннях параметра осциляції, для експоненціальної фази потрібні значно більші параметри розбиття.

#### Список літератури

1. Shi D., Anastasio M., Huang Y., Gbur G. Intensity diffraction tomography for phase objects // Proc. SPIE 5368, Medical Imaging 2004: Physics of Medical Imaging, (6 May 2004). – 2004. – pp. 795 – 802. DOI: 10.1117/12.534461.
2. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives // Proc. Royal Soc. – 2005. – Vol. 461. – Is. 2057. – pp. 1383 – 1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
3. Khoromskij B., Veit A. Efficient computation of highly oscillatory integrals by using QTT tensor approximation // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 16. – Is. 3. – pp. 145 – 159. DOI: 10.1515/cmam-2015-0033.
4. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators // Computational Science and Its Applications – ICCSA 2021. – Springer, Cham, 2021. – vol. 12950. – pp. 622 – 629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1\_45.
5. Gao J., Chang G. A bivariate Filon-Clelland-Curtis method of the highly oscillatory integrals on a square // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2024. – vol. 439. – pp. 115599. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115599.
6. Gao J., Iserles A. On an extended Filon method for highly oscillatory integrals over a simplex // A Mathematics of Computation. – 2023. – Vol. 92. – pp. 867 – 893. DOI: 10.1090/mcom/3797.
7. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions // Cybernetics and Systems Analysis. – 2024. – No. 60. – pp. 276 – 284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
8. Garcke J., Griebel M. Sparse Grids in a Nutshell // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2013. – vol. 88. – pp. 57 – 80. DOI: 10.1007/978-3-642-31703-3-3.

9. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals // *Bit Numer Math.* – 2025. – Vol. 65(36). – P. 1 – 29. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
10. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review) // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2018. – no. 54(1), – pp. 21 – 30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
11. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* – Springer, 2021. – 378 p. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.
12. Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення  $2D$  – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // *Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки.* – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
13. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Лутвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
14. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
15. Nechuyviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
16. Mezhukeyev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // *U.P.B. Sci. Bull., Series A.* – 2018. – Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. – Режим доступу: – [https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev\\_docs\\_arhiva/full772\\_104997.pdf](https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf). – Дата звертання: 17.09.2025.
17. Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions // *Cybern Syst Anal.* – 2025. – no. 61. – pp. 589 – 595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
18. Хурдей Є. Л., Іванов В. В. Кубатурні формули для осциляційних інтегралів із заданими слідами функції на лініях // *Cybernetics and Computer Technologies.* – 2025. – № 3. – С. 59 – 67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.5.
19. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions Using Reconstruction Operators Based on Data On Lines // *Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences.* – 2025. – Is. 28. – pp. 137 – 154. DOI : 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

## References (transliterated)

1. Shi D., Anastasio M., Huang Y., Gbur G. Intensity diffraction tomography for phase objects. *Proc. SPIE 5368, Medical Imaging 2004: Physics of Medical Imaging, (6 May 2004).* 2004, pp. 795–802. DOI: 10.1117/12.534461.
2. Iserles A., Nørsett S.P. Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *Proc. Royal Soc.* 2005, Vol. 461, Is. 2057, pp. 1383–1399. DOI: 10.1098/rspa.2004.1401.
3. Khoromskij B., Veit A. Efficient computation of highly oscillatory integrals by using QTT tensor approximation. *Computational Methods in Applied Mathematics.* 2016, Vol. 16, Is. 3, pp. 145–159. DOI: 10.1515/cmam-2015-0033.
4. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic Quadrature Based Numerical Integration of Stochastic Damped Oscillators. *Computational Science and Its Applications – ICCSA 2021.* Springer, Cham, 2021, vol. 12950, pp. 622–629. DOI: 10.1007/978-3-030-86960-1\_45.
5. Gao J., Chang G. A bivariate Filon–Clenshaw–Curtis method of the highly oscillatory integrals on a square. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2024, vol. 439, 115599. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115599.
6. Gao J., Iserles A. On an extended Filon method for highly oscillatory integrals over a simplex. *A Mathematics of Computation.* 2023, Vol. 92, pp. 867–893. DOI : 10.1090/mcom/3797.
7. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2024, No. 60, pp. 276–284. DOI: 10.1007/s10559-024-00668-5.
8. Garcke J., Griebel M. Sparse Grids in a Nutshell. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* 2013, vol. 88, pp. 57–80. DOI: 10.1007/978-3-642-31703-3-3.
9. Iserles A., Maierhofer G. An accelerated Levin–Clenshaw–Curtis method for the evaluation of highly oscillatory integrals. *Bit Numer Math.* 2025, Vol. 65(36), pp. 1–29. DOI:10.1007/s10543-025-01079-4.
10. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018, no. 54(1), pp. 21–30. DOI: 10.1007/s10559-018-0004-5.
11. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* Springer, 2021. 378 p. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.
12. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya  $2D$  – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannnyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating  $2D$  Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
13. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'ni alhorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvannyam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
14. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
15. Nechuyviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2020, Vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
16. Mezhukeyev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A.* 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. Available at : [https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev\\_docs\\_arhiva/full772\\_104997.pdf](https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf) (accessed 17 September 2025).
17. Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Double Integrals of Highly Oscillating Functions of General Type Using the Cubature Formula of Optimal Order of Accuracy on a Class of Differentiable Functions. *Cybern Syst Anal.* 2025, no. 61, pp. 589–595. DOI: 10.1007/s10559-025-00794-8.
18. Khurdei Ye. L., Ivanov V. V. Kubaturni formuly dlia ostsylyatsiynykh integrahlyv iz zadanymy slidamy funktsiyi na liniyakh [Cubature Formulas for Oscillatory Integrals with Given Function Traces on Lines]. *Cybernetics and Computer Technologies.* 2025, no. 3, pp. 59–67. DOI: 10.34229/2707-451X.25.3.
19. Khurdei Y. L., Nefodova I. V., Zaborniy A. V., Letuta A. A. Numerical Integration of Rapidly Oscillating Functions Using Reconstruction Operators Based on Data On Lines. *Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences.* 2025, Is. 28, pp. 137–154. DOI: 10.32626/2308-5878.2025-28.137-154.

Надійшла (received) 30.11.2025; Доопрацьована (finalized) 15.01.2026; До публікації (for publication) 05.02.2026

**Нечуйвітер Олеся Петрівна** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: [olesia.nechuiviter@gmail.com](mailto:olesia.nechuiviter@gmail.com).

**Nechuiviter Olesia Petrivna** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: [olesia.nechuiviter@gmail.com](mailto:olesia.nechuiviter@gmail.com).

**Хурдей Євгенія Леонідівна** – старший викладач кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (098) 501-63-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8317-8194>; e-mail: [yevheniia.khurdei@karazin.ua](mailto:yevheniia.khurdei@karazin.ua).

**Khurdei Yevheniia Leonidivna** – Senior Lecturer at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (098) 501-63-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8317-8194>; e-mail: [yevheniia.khurdei@karazin.ua](mailto:yevheniia.khurdei@karazin.ua).

**Іванов Владислав Вікторович** – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: [vladyslav.ivanov@karazin.ua](mailto:vladyslav.ivanov@karazin.ua).

**Ivanov Vladyslav Viktorovych** – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: [vladyslav.ivanov@karazin.ua](mailto:vladyslav.ivanov@karazin.ua).

**Шніцар Андрій Степанович** – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: [andriy.shnitsar@karazin.ua](mailto:andriy.shnitsar@karazin.ua).

**Shnitsar Andriy Stepanovych** – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: [andriy.shnitsar@karazin.ua](mailto:andriy.shnitsar@karazin.ua).

**Гіщак Остап Романович** – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: [ostap.hishchak@karazin.ua](mailto:ostap.hishchak@karazin.ua).

**Hishchak Ostop Romanovych** – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: [ostap.hishchak@karazin.ua](mailto:ostap.hishchak@karazin.ua).

**Заборний Антон Віталійович** – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: [anton.zaborny@karazin.ua](mailto:anton.zaborny@karazin.ua).

**Zaborniy Anton Vitaliiovich** – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: [anton.za-borny@karazin.ua](mailto:anton.za-borny@karazin.ua).