УДК 519.1; 519.85 **DOI: 10.20998/2222-0631.2026.01(10).07**

О. І. МАТВІЄНКО, О. О. МІРОШНІЧЕНКО

ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ У ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ З НЕЧІТКО ЗАДАНИМИ ПРОПУСКНИМИ ЗДАТНОСТЯМИ КОМУНІКАЦІЙ

Метою роботи є застосування апарату теорії нечітких множин та нечіткої логіки для розв'язання задачі визначення максимального потоку у транспортній мережі. Розглядається ситуація, коли частина транспортної мережі пошкоджена, а для відновлення логістики необхідно в найкоротший час оцінити максимальну пропускну здатність її неушкодженої частини. Транспортна мережа представлена у вигляді орієнтованого графа з нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій у вигляді нечітких трикутних чисел. Потрібно визначити величину максимального потоку, який можна пропустити із джерела до стоку за одиницю часу. Використовується підхід Беллмана-Заде, згідно з яким нечітким розв'язком задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини допустимих альтернатив. Для наближеного розв'язання задачі пропонується алгоритм, який зводиться до розв'язання послідовності чітких задач знаходження максимального потоку для різних значень пропускних здатностей дуг методом Форда-Фалкерсона. В результаті отримується значення максимального потоку, який може бути пропущений із джерела до стоку за одиницю часу, значення пропускних здатностей дуг для оптимального плану та ступінь впевненості в тому, що знайдений план є оптимальним. Такий підхід до визначення максимального потоку в транспортних мережах дозволяє оцінити стійкість і надійність логістичної мережі, виявити «вузькі місця», оптимізувати розподіл ресурсів і розробити ефективні стратегії відновлення логістики в післяаварійних ситуаціях.

Ключові слова: максимальний потік, функція належності, нечіткі пропускні здатності, транспортна мережа, алгоритм Форда-Фалкерсона.

O. I. MATVIIENKO, O. O. MIROSHNICHENKO

DETERMINATION OF THE MAXIMUM FLOW IN A TRANSPORT NETWORK WITH FUZZY CAPACITIES OF COMMUNICATIONS

The purpose of the work is the application of the apparatus of fuzzy set theory and fuzzy logic to solve the problem of determining the maximum flow in a transport network. A situation is considered in which part of the transport network is damaged, and for the restoration of logistics it is necessary in the shortest time to estimate the maximum throughput capacity of its undamaged part. The transport network is represented in the form of a directed graph with fuzzily specified capacities of communications in the form of fuzzy triangular numbers. It is required to determine the value of the maximum flow that can be sent from the source to the sink per unit of time. The Bellman–Zadeh approach is used, according to which the fuzzy solution of the problem is the intersection of the fuzzy goal and the fuzzy set of admissible alternatives. For the approximate solution of the problem, an algorithm is proposed that reduces to solving a sequence of crisp problems of finding the maximum flow for different values of arc capacities by the Ford–Fulkerson method. As a result, the value of the maximum flow that can be sent from the source to the sink per unit of time, the values of arc capacities for the optimal plan, and the degree of confidence that the found plan is optimal are obtained. Such an approach to determining the maximum flow in transport networks makes it possible to assess the stability and reliability of the logistics network, identify "bottlenecks," optimize the distribution of resources, and develop effective strategies for restoring logistics in post-accident situations.

Key words: maximum flow, membership function, fuzzy capacities, transport network, Ford–Fulkerson algorithm.

Вступ. *Транспортні мережі* представляють собою сукупність комунікацій (автомобільних доріг, залізничних колій, водних або повітряних маршрутів) та вузлів (станцій, терміналів, розв'язок, логістичних центрів), що забезпечують переміщення вантажів і пасажирів. *Основними показниками* транспортних мереж є довжина комунікацій, їхня пропускна здатність та фактичне навантаження, час руху комунікацією, її надійність, вартість перевезення тощо. Ці показники можуть бути *динамічними*, тобто змінюватися в залежності від часових характеристик (час доби, день тижня, сезон), погодних умов (дощ, ожеледиця, туман), дорожньої ситуації (пробки, аварії, масові заходи), економічних факторів.

В умовах воєнного стану та надзвичайних ситуацій пошкодження транспортної інфраструктури, блокування окремих ділянок доріг, мостів або логістичних вузлів стають частим явищем. Такі порушення призводять до різких змін у функціонуванні транспортної системи, обмеження пропускної здатності окремих маршрутів і необхідності оперативного перерозподілу потоків транспорту та вантажів. В таких умовах виникає потреба у швидкому аналізі стану транспортної мережі для забезпечення неперервності перевезень і мінімізації втрат часу та ресурсів.

У разі виходу з ладу окремих ділянок або цілих гілок транспортної мережі постає задача визначення максимально можливого обсягу перевезень, який може бути здійснений неушкодженою частиною мережі з урахуванням наявних обмежень. Зокрема, необхідно оцінити величину максимального транспортного потоку, що може бути пропущений від пунктів відправлення до пунктів призначення, оминаючи пошкоджені або перевантажені ділянки. Результати такого аналізу дають змогу визначити потенційну пропускну здатність мережі в змінених умовах функціонування та оцінити рівень забезпечення транспортних потреб.

Визначення *максимального потоку* в транспортних мережах має важливе практичне значення: воно дозволяє оцінити стійкість і надійність логістичної системи, виявити «вузькі місця» у структурі маршрутів, оптимізувати розподіл транспортних ресурсів і розробити ефективні стратегії функціонування мережі в умовах пошкодженої інфраструктури або підвищеного навантаження.

Аналіз останніх досліджень. Методи розв'язання задачі знаходження максимального потоку в умовах невизначеності розглядаються у багатьох сучасних наукових дослідженнях. Ці методи характеризуються різноманітними підходами до формалізації невизначеності та використовують різний математичний апарат для моделювання параметрів мережі.

У роботі [1] було представлено розширену версію задачі про максимальний потік для *гіпермереж* з обмеженнями нечітких часових вікон, запропоновано *генетичний алгоритм* її розв'язання.

У роботі [2] розглянуто новий алгоритм дослідження максимального потоку у мережі, що використовує лінгвістичні змінні для моделювання невизначеності. Були введені *трапецієподібні піфагорійські нечіткі числа* з новими арифметичними операціями та *процедурою дефазифікацією*.

У роботі [3] наводиться метод знаходження максимального потоку на мережах з нечіткими пропускними здатностями.

Визначенню максимального потоку на основі реальних даних транспортної мережі присвячено роботу [4].

У роботі [5] розглядалася *задача перешкоджання* максимальному потоку в мережі за *нечіткостохастичних гібридних умов*.

Разом з тим, залишається актуальною потреба в розробці спеціалізованих алгоритмів для транспортних мереж, що враховують специфіку їх функціонування та особливості визначення пропускних здатностей комунікацій. Застосування апарату нечіткої логіки та нечітких множин дозволяє враховувати невизначеність параметрів транспортної системи та отримувати практично значущі результати для планування та оптимізації її роботи.

У даній роботі пропонується *новий підхід* до розв'язання задачі визначення максимального потоку вантажів або пасажирів, який може бути пропущений через частину транспортної мережі, що враховує нечіткі пропускні здатності комунікацій. *Новий алгоритм* є комбінацією алгоритмів *теорії графів* та *теорії нечітких множин*.

Задача про максимальний потік із нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій. Однією із класичних задач теорії графів є задача про максимальний потік [6]. Вона виникає, коли потрібно знайти максимальний (за обсягом або вагою, або ціною тощо) потік цільового продукту, який можна пропустити з джерела в стік в одиницю часу. Передбачається, що в проміжних пунктах цільовий продукт не споживається і не виникає. Пропускні здатності комунікацій є нечіткими і задаються нечіткими числами.

Мережа комунікацій представляється у вигляді кінцевого, зв'язаного, змішаного графа з n пунктами та m комунікаціями (ребрами). Припускається, що множина комунікацій $\Re = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_m, j_m)\}$ певним чином упорядкована. Кожному ребру (i, j) відповідає пропускна здатність, що задана нечітким числом $\tilde{d}_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$ з функцією належності $\mu_{ij}(d)$, визначеною на універсальній множині U можливих значень пропускних здатностей $[0, +\infty)$:

$$U = [0, +\infty) = \left\{ u \in R^m \middle| u_{i_k j_k} \geq 0, k = 1, 2, ..., m \right\}, \tag{1}$$

де $u_{i_k j_k}$ – значення пропускної здатності комунікації (i_k, j_k).

Множиною допустимих планів є нечітка множина $\hat{V}$, визначена на універсальній множині:

$$V = \left\{ v \in R^m \middle| v_{i_k j_k} \geq 0, k = 1, 2, ..., m \right\}, \tag{2}$$

де $v = \left(v_{i_1 j_1}, v_{i_2 j_2}, ..., v_{i_m j_m}\right)$ – план перевезень по всій мережі; $v_{i_k j_k}$ – запланований обсяг перевезень за комунікацією (i_k, j_k).

Максимальний потік на мережі $v^*(u)$ у випадку, коли пропускні здатності комунікацій $u = \left(u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, ..., u_{i_m j_m}\right)$ дорівнює:

$$v^*(u) = \left(v^*_{i_1 j_1}(u), v^*_{i_2 j_2}(u), ..., v^*_{i_m j_m}(u)\right). \tag{3}$$

Функція належності $\mu_{\hat{V}}(v)$ нечіткої множини $\hat{V}$, заданої на універсальній множині V, визначається формулою:

$$\mu_{\hat{V}}(v) = \begin{cases} \max\limits_{\{u \in U | v = v^*(u)\}} \min\limits_{(i_k j_k) \in \Re} \mu_{i_k j_k}\left(u_{i_k j_k}\right), \\ 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases} \tag{4}$$

тобто якщо v є максимальний потік при значеннях пропускних здатностей, що дорівнюють $u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, ..., u_{i_m j_m}$, то його надійність дорівнює $\min\limits_{(i_k j_k) \in \Re} \mu_{i_k j_k}\left(u_{i_k j_k}\right)$, в іншому випадку вона дорівнює нулю. Але один і той же потік може виявитися максимальним при різних значеннях пропускних здатностей комунікацій. $\mu_{\hat{V}}(v)$ – це максимальний зі ступенів впевненості в тому, що v є максимальний потік у розглянутій мережі.

Нечітко визначена мета задачі формалізується нечіткою множиною $V_{\hat{C}}$ з функцією належності $\mu_{\hat{C}}(\nu)$:

$$\mu_{\hat{C}}(\nu) = \frac{S(\nu) - S^{\min}}{S^{\max} - S^{\min}}, \tag{5}$$

де $S(\nu)$ – величина потоку при допустимому плані ν; $\nu^*(u)$ – максимальний потік при пропускних здатностях u; $S(\nu^*(u))$ – величина максимального потоку при пропускних здатностях u; $S^{\min}$ – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій мінімальні, тобто дорівнюють a_{ij}; $S^{\max}$ – величина максимального потоку у разі, коли пропускні здатності всіх комунікацій максимальні, тобто дорівнюють c_{ij}.

Застосовуючи, наприклад, *алгоритм Форда-Фалкерсона* [5], обчислюється $S(\nu^*(u))$.

Функція належності $\mu_{\hat{C}}$ планів нечіткої мети розглядається як показник близькості плану ν до найбільшого за величиною максимального потоку, який характеризується близькістю величини $S(\nu)$ до величини $S^{\max}$.

Нечітким розв'язком задачі є нечітка множина $\hat{D}$ з функцією належності $\mu_{\hat{D}}(\nu)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети:

$$\mu_{\hat{D}}(\nu) = \min\left\{\mu_{\hat{V}}(\nu), \mu_{\hat{C}}(\nu)\right\}. \tag{6}$$

Розв'язком задачі є план ν^*, для якого

$$\mu_{\hat{D}}(\nu^*) = \max_{\nu \in V} \mu_{\hat{D}}(\nu) = \max_{\nu \in V} \min\left\{\mu_{\hat{V}}(\nu), \mu_{\hat{C}}(\nu)\right\}. \tag{7}$$

Математична модель задачі. Математична модель задачі в чіткій постановці:

$$S(\nu) = \sum_i \nu_{si} \to \max, \tag{8}$$

де сума береться по всіх комунікаціях, що йдуть із джерела.

З обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i_k} \nu_{i_k j_k} - \sum\limits_{n_k} \nu_{j_k n_k} = 0, \ i_k \neq 1, \ n_k \neq m, \\ \sum\limits_{j_k} \nu_{1j} = \sum\limits_{n_k} \nu_{n_k m_k} = S(\nu), \end{cases} \tag{9}$$

$$S(\nu) > 0, \ 0 \le \nu_{i_k j_k} \le u_{i_k j_k}, \ k = \overline{1, m}. \tag{10}$$

У лівій частині формули (9) перша сума береться за всіма комунікаціями, для яких $u_{i_k j_k} > 0$ (за якими можна здійснювати підвезення до пункту j); друга сума береться за всіма комунікаціями, для яких $u_{j_k n_k} > 0$ (за якими можна здійснювати вивезення вантажів із пункту j).

Математична модель задачі у нечіткій постановці:

$$\mu_{\hat{D}}(\nu) = \min\left\{\mu_{\hat{V}}(\nu), \mu_{\hat{C}}(\nu)\right\} \to \max_{\nu \in \hat{V}}, \tag{11}$$

З обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i_k} \nu_{i_k j_k} - \sum\limits_{n_k} \nu_{j_k n_k} = 0, \ i_k \neq 1, \ n_k \neq m, \\ \sum\limits_{j_k} \nu_{1j} = \sum\limits_{n_k} \nu_{n_k m_k} = S(\nu), \end{cases} \tag{12}$$

$$S(\nu) > 0, \ 0 \le \nu_{i_k j_k} \le \tilde{d}_{i_k j_k}, \ k = \overline{1, m}, \tag{13}$$

де $\tilde{d}_{i_k j_k}$ – нечітка пропускна здатність комунікації $(i_k j_k)$.

Алгоритм наближеного розв'язання задачі.

1. Задається певний крок $\Delta = \dfrac{1}{N}$, де N – число кроків.

2. Знаходяться (або задаються) такі значення пропускної здатності комунікацій, що $\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta$ для будь якої комунікації (i, j). Тут $\mu_{ij}(u_{ij})$ – ступінь впевненості в тому, що пропускна здатність комунікації (i, j) дорівнює u_{ij}. Отриману мережу позначимо ν^k, маємо: $\mu_{\hat{V}}(\nu^k) = k \cdot \Delta$.

3. Для кожної мережі ν^k знаходиться величина максимального потоку $S\left(\nu^k\right)$ при таких пропускних здатностях з використанням алгоритму Форда-Фалкерсона.

4. Для кожної мережі ν^k знаходиться значення функції належності нечіткої мети $\mu_c\left(\nu^k\right)$ за формулою (5) та значення функції належності нечіткого рішення $\mu_{\hat{D}}\left(\nu^k\right)$ за формулою (6).

5. Із усіх значень $\mu_{\hat{D}}\left(\nu^k\right)$ вибирають максимальне $\mu_{\hat{D}}\left(\nu^*\right)$ за формулою (7). Відповідний цьому значенню максимальний потік і дає наближений розв'язок задачі.

Обчислювальний експеримент. Моделюється ситуація, коли частина транспортної мережі зруйнована. Необхідно оцінити максимальну пропускну здатність неушкодженої її частини для відновлення логістики (рис. 1).

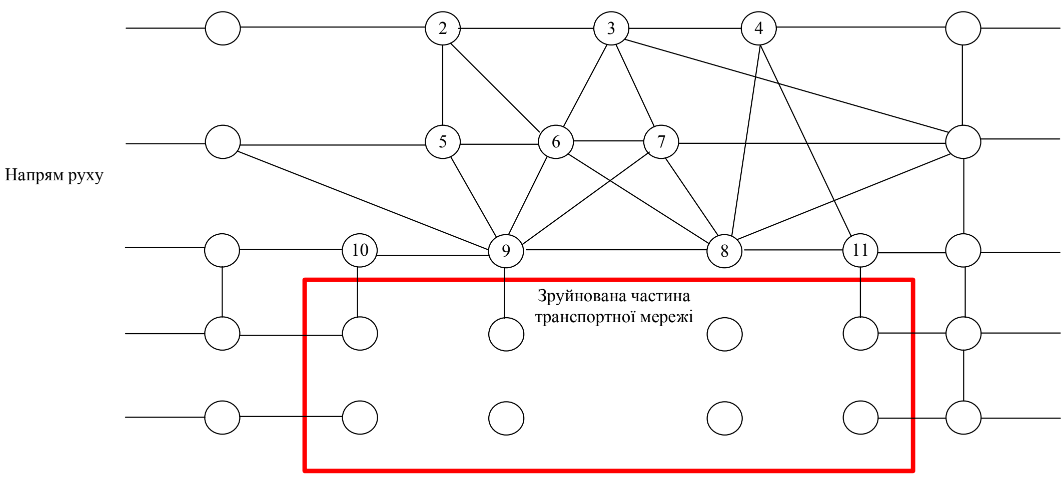

Рис. 1 – Схема транспортної мережі.

Розглядається фрагмент транспортної мережі, що складається з 10 вузлів. До графу цієї мережі додаються два фіктивні вузли (джерело та стік – вершини 1 та 12). Пропускні здатності комунікацій u_{ij} представляються нечіткими числами і при значеннях функції належності, взятих з кроком $0{,}1$, вказані у табл. 1. Необхідно знайти максимальний потік на мережі, схема якої зображена на рис. 2.

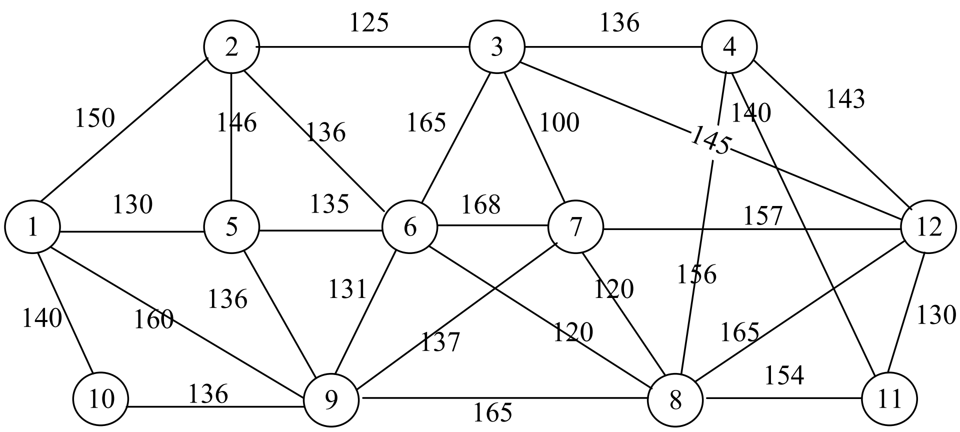

Рис. 2 – Граф транспортної мережі з максимальними значеннями пропускних здатностей.

З останнього рядка табл. 1 видно, що максимальне значення функції належності нечіткого рішення дорівнює $0{,}49$, що відповідає значенню функцій належності пропускних здатностей комунікацій, рівному $0{,}5$. Значення пропускних здатностей комунікацій зазначені у відповідній графі табл. 1.

В останніх трьох рядках табл. 1 наведені $S\left(\nu *^{k}\right)S\left(\nu *\right)$ – значення максимального потоку графа з відповідними пропускними здатностями дуг, $\mu_{c}\left(\nu *^{k}\right)\mu_{c}\left(\nu *\right)$ – значення функції належності нечітко визначеної мети задачі, $\mu_{\hat{D}}\left(\nu *^{k}\right)\mu_{\hat{D}}\left(\nu *\right)$ – значення функції належності нечіткого розв'язку задачі.

Таблиця 1 – Нечіткі пропускні здатності u_{ij} (од/од часу), величина потоку ν_{ij} (од/ од часу) та інші результати обчислень

u_{ij}/ν_{ij}	Значення функцій належності пропускних здатностей $\mu_{\hat{V}}(\nu)$									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_{12}/ν_{12}	150/150	148/148	146/144	140/140	130/130	129/129	128/128	125/125	125/125	122/122	120/120
u_{15}/ν_{15}	130/130	130/130	129/129	127/127	126/126	124/124	120/120	120/120	119/119	118/118	116/116
u_{19}/ν_{19}	160/160	158/158	156/156	155/155	153/153	153/153	145/145	140/140	140/140	139/139	138/138
$u_{1.10}/\nu_{1.10}$	140/136	138/135	137/134	136/132	134/131	134/130	132/129	131/127	131/125	130/125	130/124
u_{23}/ν_{23}	125/14	125/14	124/124	123/10	122/122	121/121	121/0	120/120	118/118	115/115	114/0
u_{25}/ν_{25}	146/0	145/0	143/0	143/0	142/122	141/0	140/128	138/0	137/0	134/123	132/120
u_{26}/ν_{26}	136/136	134/134	132/20	130/130	127/127	125/8	123/0	120/5	115/7	114/114	113/0
u_{34}/ν_{34}	136/14	132/14	132/129	131/10	130/122	129/121	128/0	126/120	124/118	123/115	122/122
u_{36}/ν_{36}	165/136	164/134	163/149	162/130	156/127	155/124	152/120	150/127	149/116	148/114	145/122
u_{37}/ν_{37}	100/0	99/0	98/0	97/0	96/0	95/0	93/0	92/0	92/0	90/0	88/88
$u_{3.12}/\nu_{3.12}$	145/136	144/134	144/144	143/130	142/127	141/124	140/120	139/135	137/116	134/114	132/111
u_{48}/ν_{48}	156/0	154/0	154/0	145/0	144/0	143/0	133/0	132/0	130/0	128/0	128/0
$u_{4.11}/\nu_{4.11}$	140/0	140/0	139/0	138/0	138/0	137/0	136/0	134/0	134/0	132/0	130/0
$u_{4.12}/\nu_{4.12}$	143/14	143/14	142/129	141/10	140/0	139/121	138/0	137/120	136/118	134/115	132/120
u_{56}/ν_{56}	135/130	134/130	132/129	131/127	128/7	125/124	123/120	120/120	116/116	114/11	112/111
u_{59}/ν_{59}	136/0	136/0	135/0	134/0	134/0	132/0	132/128	131/0	131/3	130/0	130/125
u_{67}/ν_{67}	168/130	165/130	152/0	156/127	152/7	149/8	146/127	142/125	140/7	138/136	135/88
u_{68}/ν_{68}	120/0	119/0	118/0	117/0	115/0	114/0	113/0	112/0	112/0	111/0	110/0
u_{69}/ν_{69}	131/0	130/0	130/0	129/0	128/0	128/0	127/127	127/127	126/0	126/125	126/122
u_{78}/ν_{78}	120/120	119/120	118/0	116/116	115/0	114/0	113/113	112/0	112/0	111/0	110/0
u_{79}/ν_{79}	137/136	137/135	137/134	137/132	137/131	137/130	137/128	135/0	133/128	131/0	130/125
$u_{7.12}/\nu_{7.12}$	157/145	155/145	153/134	152/143	151/138	149/138	147/142	145/125	144/135	142/136	140/125
u_{89}/ν_{89}	165/160	163/158	162/156	161/155	156/153	154/153	153/147	151/140	147/125	147/139	146/140
$u_{8.11}/\nu_{8.11}$	154/130	154/120	154/0	153/116	153/0	153/0	152/113	152/0	151/0	151/0	150/0
$u_{8.12}/\nu_{8.12}$	165/160	165/158	163/156	163/155	162/153	161/153	158/147	156/140	155/140	153/139	151/140
$u_{9.10}/\nu_{9.10}$	136/136	135/135	134/134	132/132	131/131	130/130	129/129	127/127	125/125	125/125	124/124
$u_{11.12}/\nu_{11.12}$	130/120	129/120	128/0	125/116	123/0	121/0	120/113	117/0	115/0	113/0	111/0
$S\left(\nu *^{k}\right)$	576	571	565	554	540	536	522	512	509	504	498
$\mu_{c}\left(\nu *^{k}\right)$	1,00	0,94	0,86	0,72	0,54	0,49	0,31	0,18	0,14	0,08	0,00
$\mu_{\hat{D}}\left(\nu *^{k}\right)$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,49	0,31	0,18	0,14	0,08	0,00

Розв'язку задачі відповідає точка перетину графіків на рис. 3 із приблизними координатами $(0,5;0,5)$. Це означає, що варіант із пропускними здатностями із сьомої графи табл. 1 є оптимальним зі ступенем впевненості

$0,5$, що відповідає величині максимального потоку 536 од/од часу.

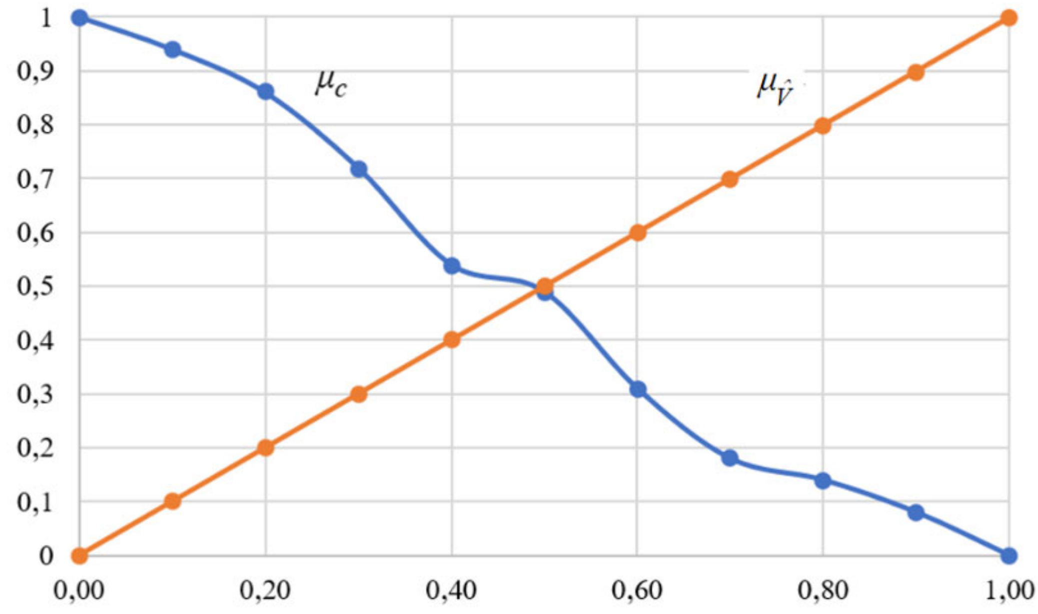

Рис. 3 – Графіки функцій належності $\mu_{\hat{V}}$ та μ_c.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення запропонованого підходу для мереж із пропускними здатностями, що динамічно змінюються. Також доцільно використати інші способи подання невизначеностей.

Висновки. У роботі реалізовано застосування апарату теорії нечітких множин та нечіткої логіки для розв'язання задачі визначення максимального потоку у транспортній мережі з нечітко заданими пропускними здатностями комунікацій.

Отримано такі результати: для заданої мережі визначено величину максимального потоку, який можна пропустити із джерела до стоку за одиницю часу та значення ступеня впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. Для розв'язання цієї задачі можна використати інший підхід: знаходити мінімальний розріз графа. Але такий підхід через високу обчислювальну складність може застосовуватися для графів малої розмірності або для цільного графа (а не фрагменту графа). Підхід, запропонований у цій роботі, використовує простий алгоритм та враховує нечіткість вхідних даних.

Оціночне значення максимального потоку може використовуватися для прийняття оперативних управлінських рішень і попереднього планування відновлювальних заходів.

Розглянуті в роботі математична модель та метод її розв'язання можна застосовувати для розв'язання логістичних задач при плануванні реконструкції логістичних мереж чи ремонту після аварій або руйнувань.

Список літератури

1. *Nasser El-Sherbeny*. Algorithm of fuzzy maximum flow problem with fuzzy time-windows in hyper network // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 116. – № 4. – С. 863 – 874. DOI: 10.12732/ijpam.v116i4.6.
2. *Muhammad Akram*, *Amna Habib*, *Tofigh Allahviranloo*. A new maximal flow algorithm for solving optimization problems with linguistic capacities and flows // Information Sciences. – 2022. – Vol. 612. – P. 201 – 230. DOI: 10.1016/j.ins.2022.08.068.
3. *Shengwei Han*, *Zixiong Peng*, *Shunqin Wang*. The maximum flow problem of uncertain network // Information Sciences. – 2014. – Vol. 265. – P. 167 – 175. DOI: 10.1016/j.ins.2013.11.029.
4. *Çağlar A.*, *Öztemiz F.*, *Yakut S.* Link Prediction and Maximum Flow in Transportation Network // Computer Science. – 2024. – Vol. 9. – №2. – P. 169 – 177. DOI: 10.53070/bbd.1593501.
5. *Bavandi S.*, *Bigdeli H.* A Maximum Flow Network Interdiction Model in Fuzzy Stochastic Hybrid Uncertainty Environments // Yugoslav Journal of Operations Research. – 2023. – Vol. 33(3). – P. 409-424. DOI: 10.2298/YJOR220415038B.
6. *Бардачов Ю. М.*, *Соколова Н. А.*, *Ходаков В. Є.* Дискретна математика. – К. : Вища школа, 2002. – 287 с.

References (transliterated)

1. Nasser El-Sherbeny. Algorithm of fuzzy maximum flow problem with fuzzy time-windows in hyper network. *International Journal of Pure and*

Applied Mathematics. 2017, Vol. 116, no. 4, pp. 863–874. DOI: 10.12732/ijpam.v116i4.6.

2. Muhammad Akram, Amna Habib, Tofigh Allahviranloo. A new maximal flow algorithm for solving optimization problems with linguistic capacities and flows. *Information Sciences*. 2022, Vol. 612, pp. 201–230. DOI: 10.1016/j.ins.2022.08.068.
3. Shengwei Han, Zixiong Peng, Shunqin Wang. The maximum flow problem of uncertain network. *Information Sciences*. 2014, Vol. 265, pp. 167–175. DOI: 10.1016/j.ins.2013.11.029.
4. Çağlar A., Öztemiz F., Yakut S. Link Prediction and Maximum Flow in Transportation Network. *Computer Science*. 2024, Vol. 9, no. 2, pp. 169–177. DOI: 10.53070/bbd.1593501.
5. Bavandi S., Bigdeli H. A Maximum Flow Network Interdiction Model in Fuzzy Stochastic Hybrid Uncertainty Environments. *Yugoslav Journal of Operations Research.* 2023, Vol. 33(3), pp. 409–424. DOI: 10.2298/YJOR220415038B.
6. Bardachov Yu. M., Sokolova N. A., Khodakov V. Ie. *Dyskretna matematyka* [Discrete Mathematics]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 2002. 287 p.

Надійшла (received) 25.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.12.2025; До публікації (for publication) 05.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Матвієнко Ольга Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 715-18-03; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7492-7616; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Matviienko Olha Ivanivna – PhD (Engineering Sciences), Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics, Kharkiv; tel.: (097) 715-18-03; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7492-7616; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Мірошніченко Олександр Олександрович – аспірант кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (096) 165-84-70; ORCID: https://orcid.org/0009-0004-7568-4942; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

Miroshnichenko Oleksandr Okeksandrovich – Postgraduate Student of Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (096) 165-84-70; ORCID: https://orcid.org/0009-0004-7568-4942; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@ nure.ua.