

О. С. КУЦЕНКО, С. В. КОВАЛЕНКО

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПОСТАЧАННЯ МНОЖИНИ ПОВ'ЯЗАНИХ АБОНЕНТІВ

На даний час проблема енергозбереження є однією з найактуальніших. Особливого значення проблема енергозбереження набуває стосовно сфери забезпечення комфортного існування як в домашніх умовах, так і в робочий час в офісних або інших виробничих приміщеннях. Побудова адекватної математичної моделі процесу теплопостачання є складною математичною задачею. Основною складністю є наявність великої кількості конструктивних та теплофізичних параметрів, які необхідно встановити для чисельної реалізації існуючих математичних моделей. Метою даної роботи є розробка простої математичної моделі процесу теплопостачання багатоабонентного споживача теплової енергії, що має теплову взаємодію між суміжними абонентами. Пропонується математична модель, заснована на квазістатичному підході до опису складних динамічних процесів, що дозволило мінімізувати розмірність моделі при врахуванні основних теплових процесів та конфігурації будівлі. Таке спрощення дозволило без особливих труднощів отримати основні співвідношення між геометричними характеристиками окремих абонентів, конструкційними матеріалами, параметрами опалювальних приладів, витратами і температурами теплоносія, а також врахувати вплив температури навколишнього середовища. Отримана математична модель є лінійною системою рівнянь зв'язку між температурами і тепловими потоками всіх абонентів. Матриця лінійного оператора системи складається з теплових провідностей між суміжними абонентами та між абонентами та навколишнім середовищем. Елементи матриці взаємодії легко знаходяться, виходячи з відомих співвідношень теплотехніки. Наведено аналітичні рішення, як задачі аналізу, так і задачі синтезу керуючих параметрів. Одним із результатів є оцінка перерозподілу теплового потоку кожного з абонентів, що надходить через відповідні опалювальні прилади на корисний тепловий потік та тепловий потік розсіювання між суміжними абонентами. Отримані співвідношення дозволяють оцінити перерозподіл оплати за споживану теплову енергію.

Ключові слова: теплопостачання будівель, математична модель, матриця теплових провідностей, розсіювання теплових потоків, електрична модель системи теплопостачання, основне рівняння системи теплопостачання.

O. S. KUTSENKO, S. V. KOVALENKO

MATHEMATICAL MODEL OF THE HEAT SUPPLY PROCESS OF A SET OF CONNECTED SUBSCRIBERS

Currently, the problem of energy saving is one of the most relevant. The problem of energy saving acquires particular importance in relation to the sphere of ensuring a comfortable existence both at home and during working hours in office or other production premises. Building an adequate mathematical model of the heat supply process is a complex mathematical problem. The main difficulty is the presence of a large number of constructive and thermophysical parameters that must be established for the numerical implementation of existing mathematical models. The purpose of this work is to develop a simple mathematical model of the heat supply process of a multi-subscriber consumer of thermal energy, which has thermal interaction between adjacent subscribers. A mathematical model is proposed based on a quasi-static approach to the description of complex dynamic processes, which allowed minimizing the dimensionality of the model while taking into account the main thermal processes and the configuration of the building. Such simplification allowed us to obtain without any particular difficulties the basic relationships between the geometric characteristics of individual subscribers, structural materials, parameters of heating devices, flow rates and temperatures of the coolant, as well as to take into account the influence of the ambient temperature. The resulting mathematical model is a linear system of equations relating the temperatures and heat flows of all subscribers. The matrix of the linear operator of the system consists of thermal conductivities between adjacent subscribers and between subscribers and the environment. The elements of the interaction matrix are easily found based on the known relations of heat engineering. Analytical solutions are given, both to the analysis problem and to the problem of synthesis of control parameters. One of the results is the assessment of the redistribution of the heat flow of each subscriber, which comes through the corresponding heating devices to the useful heat flow and the heat flow of dissipation between adjacent subscribers. The obtained relations allow us to assess the redistribution of payment for the consumed thermal energy.

Key words: heat supply of buildings, mathematical model, thermal conductivity matrix, heat flux dissipation, electrical model of the heat supply system, basic equation of the heat supply system.

Вступ. Інфраструктура систем життєзабезпечення, як одна з основних компонент, містить системи розподілу енергетичних та матеріальних ресурсів. Так склалося, що електричні та гідравлічні мережі досить глибоко досліджені як на макрорівні, так і на рівні розподілу ресурсів у рамках окремих підсистем, таких як офісні комплекси, багатоквартирні будівлі, виробничі приміщення та інші, що характеризуються окремим обмеженим місцезнаходженням. Електричним та гідравлічним мережам присвячені численні наукові фундаментальні та прикладні дослідження, що дозволило отримати безліч реальних практичних результатів, спрямованих на економію енергетичних ресурсів та витрат на водозабезпечення виробничого та житлово-комунального комплексів. Більшість результатів досліджень у галузі електричних та гідравлічних мереж отримано завдяки адекватним математичним моделям відповідних мережевих процесів та наявності обґрунтованої інформації про параметри моделей. Крім того, на даний час набули широкого поширення *індивідуальні лічильники* витрат електричної енергії, холодної та гарячої води, що дозволило впровадити нові сучасні *методи контролю* та управління витратами відповідних ресурсів.

Що ж до *процесів теплопостачання*, то тут основні наукові результати пов'язані з гідравлічними процесами як у зовнішніх, так і внутрішніх локальних будинкових мережах. Більш проблемною з погляду теплопостачання є частина загального процесу, пов'язана з теплопередачею від опалювальних приладів до внутрішнього повітря, від внутрішнього повітря до елементів конструкції будівель і далі в навколишнє середовище. Математичні моделі процесів теплопередачі описуються *диференціальними рівняннями у часткових похідних* та містять безліч теплофізичних та конструктивних параметрів будівель. Як правило, частина цих параметрів недоступна

для вимірювання, а їх ідентифікація вимагає проведення численних дорогих експериментів, що не гарантують достатнього ступеня достовірності результатів.

У цій статті надається *системний підхід* до побудови простих математичних моделей окремих елементів та процесів системи теплопостачання *комплексом взаємопов'язаних абонентів*, підключених до загального теплового пункту із незалежним підключенням до зовнішньої теплової мережі.

Огляд джерел інформації. Завдяки величезній практичній значущості та багаторічній історії, теплові процеси стосовно теплопостачання середовищ існування, таких як житлові, виробничі та офісні приміщення стали об'єктом широкого фронту наукових досліджень.

Численні публікації у спеціалізованих виданнях, монографії, патенти на винаходи свідчать про глибокі наукові та прикладні дослідження, а також про значні практичні результати, що спрямовані на вдосконалення теплових процесів *систем централізованого теплопостачання*. Природно системи централізованого теплопостачання розглядаються як дві підсистеми: зовнішня тепла мережа та внутрішня [1]. Особливості цих підсистем детально розглянуті у відповідній літературі, а наукові результати широко застосовуються при розрахунку реальних конструкцій елементів зазначених підсистем [2 – 4].

Процеси у зовнішніх теплових мережах є відносно простими, оскільки вони є перебігом рідини по трубах, що описується добре відомими законами гідравліки і теплопередачі. З цих фундаментальних законів розраховуються параметри конструкцій трубопроводів з погляду їхньої пропускної спроможності, міцності та теплоізоляції [3, 5].

Що ж стосується процесів у внутрішній підсистемі теплопостачання, то тут виникають значні труднощі для *математичного моделювання* теплових процесів, оскільки процес теплопостачання розпадається на транспортування теплоносія від точки введення до опалювальних приладів і теплопередачу від опалювальних приладів до внутрішнього повітря і далі до огорож, через які теплота передається в навколишнє середовище [5, 6].

Останнім часом широкого поширення набули електричні моделі теплових процесів в огорожах приміщень, що обігриваються [6 – 8]. Ці моделі вимагають великого обсягу вихідної інформації про теплофізичні параметри конструкційних матеріалів, а також інформації про початкові та крайові умови для інтегрування підсистем диференціальних рівнянь високої розмірності. Ці обставини дозволяють, в загальному випадку, вирішувати задачу аналізу теплових процесів. Розв'язання задач синтезу конструктивних параметрів системи теплопостачання дуже складне.

Теплові процеси в елементах будівель не можуть бути відірвані від процесів теплопостачання у складній системі: котельня, тепловий пункт, опалювальні прилади, абоненти. Таким чином, математичну модель теплових процесів опалювальної будівлі необхідно доповнити моделями процесів у тепловому пункті та опалювальних приладах окремих абонентів.

Таке розширення математичної моделі передбачає включення до системи диференціальних рівнянь опалювальної будівлі додаткових диференціальних рівнянь тепломасообміну в системі транспортування теплової енергії від входу будівлі до теплового пункту та від теплового пункту до опалювальних приладів кожного з абонентів. Очевидно, що така модель у повному обсязі без різних припущень та спрощень не може бути реалізована.

Математична модель процесу теплопостачання. Нехай A_1, A_2, \dots, A_n – множина абонентів, які споживають теплову енергію від загального теплового пункту. Будемо також припускати, що абоненти можуть бути у тепловому контакті між собою, а також із навколишнім середовищем. Кожен із A_k має власну підсистему опалювальних приладів та індивідуальний *теплочисельник*.

Введемо такі позначення: L – структурна матриця:

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ і } A_j \text{ знаходяться у тепловому контакті,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку;} \end{cases}$$

G – симетрична матриця провідностей

$$g_{ij} = \begin{cases} g_{ij} - \text{теплова провідність між } A_i \text{ і } A_j, & \text{якщо } l_{ij} = 1, \\ 0, & \text{якщо } l_{ij} = 0; \end{cases}$$

$g = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ – вектор теплових провідностей між абонентами та навколишнім середовищем;

$T = (T_1, T_2, \dots, T_n)^T$ – вектор температур внутрішнього повітря абонентів;

$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ – вектор теплових потоків, що підводяться до абонентів через відповідні опалювальні прилади.

Рівняння теплового балансу для i -го абонента запишемо у вигляді:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} + Q_{io}, \quad (1)$$

де Q_i – тепловий потік i -го опалювального приладу; Q_{ij} – тепловий потік між i -м та j -м абонентами; Q_{io} – тепловий потік від i -го абонента у навколишнє середовище. Ці теплові потоки у першому наближенні [9] можна представити у наступному вигляді:

$$Q_{ij} = g_{ij}(T_i - T_j), \quad (2)$$

$$Q_{io} = g_i(T_i - T_{oc}). \quad (3)$$

Підставляючи (2) та (3) у (1), отримаємо

$$Q_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}(T_i - T_j) + g_i(T_i - T_{oc}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Після розкриття дужок у (4) отримаємо

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n g_{ij}T_j + T_i \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_iT_i - g_iT_{oc}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

У матричній формі система рівнянь (5) для $i = \overline{1, n}$ набуде вигляду:

$$Q = -GT + \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_i \right\} T - gT_{oc}. \quad (6)$$

Введемо позначення:

$$\bar{G} = -G + \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij} + g_i \right\}. \quad (7)$$

Тоді остаточно (6) можна подати у вигляді:

$$Q = \bar{G}T - gT_{oc}. \quad (8)$$

Далі будемо матрично-векторне рівняння (8) називати *основним рівнянням теплопостачання (ОРТ)*.

На основі ОРТ можна проводити оціночні розрахунки параметрів багатоабонентних систем теплопостачання: знаходити розподіл температур теплових потужностей залежно від конструктивних параметрів будівлі та температури довкілля.

ОРТ у формі (8) являє собою розв'язок прямої задачі теплопостачання: для заданого розподілу температур T_1, T_2, \dots, T_n та температури навколишнього середовища знайти відповідні теплові потужності Q_1, Q_2, \dots, Q_n , що підводяться до абонентів.

Для вирішення *зворотної задачі*: за заданим вектором Q і T_{oc} знайти вектор T температур внутрішнього повітря абонентів, необхідно розв'язати лінійну систему (8) щодо T .

Теплова потужність опалювального приладу \bar{Q} залежить від ефективної площі поверхні ОП S , коефіцієнта теплопередачі α , масової витрати теплоносія F та температур теплоносія T_G і T_X на вході та виході ОП відповідно, а також від температури внутрішнього повітря \bar{T} . Відповідно до [10], тепловий потік \bar{Q} можна представити у вигляді:

$$\bar{Q} = \alpha S \frac{T_G - T_X}{\ln \frac{T_G - \bar{T}}{T_X - \bar{T}}}. \quad (9)$$

З іншого боку, цей же тепловий потік можна виразити через зміну *ентальпії* теплоносія на вході та виході ОП:

$$\bar{Q} = Fc(T_G - T_X). \quad (10)$$

Виключаючи з (9) та (10) температуру T_X , отримаємо:

$$\bar{Q} = \alpha S \varphi(f)(T_G - \bar{T}), \quad (11)$$

де $f = \frac{Fc}{\alpha S}$ – безрозмірна масова витрата теплоносія, а

$$\varphi(f) = f \left(1 - e^{-\frac{1}{f}} \right).$$

Неважко бачити, що $\varphi(f)$ змінюється від 0 до 1 за зміни витрати f від 0 до ∞ . Можна сказати, що величина

$$R(f) = (\alpha S \varphi(f))^{-1}$$

є керованим (вибором f) тепловим опором опалювального приладу.

У ряді випадків, згідно з [5], замість *середньологарифмічної температури* можна скористатися середньою температурою теплоносія \hat{T} :

$$\bar{T} = \frac{T_G + T_X}{2}.$$

Тоді система рівнянь для визначення величин \bar{Q} і T_X набуде вигляду:

$$\bar{Q} = \alpha S \left(\frac{T_G + T_X}{2} - \bar{T} \right), \quad (12)$$

$$\bar{Q} = Gc(T_G - T_X). \quad (13)$$

Розв'язуючи систему (12) та (13) щодо \bar{Q} і T_X , отримаємо

$$\bar{Q} = \alpha S \psi(f)(T_G - \bar{T}), \quad (14)$$

де

$$\psi(f) = \frac{2f}{1+2f}. \quad (15)$$

Функція $\psi(f)$ так само як і $\varphi(f)$ змінюється від 0 до 1 за зміни f від 0 до ∞ .

Тепловий опір ОП у цьому випадку запишеться як

$$R(f) = (\alpha S \psi(f))^{-1}. \quad (16)$$

Таблиця 1 – Таблиця значень функцій $\varphi(f)$ та $\psi(f)$

f	0,1	0,5	1	2	5	10
φ	0,1	0,43	0,64	0,78	0,9	1
ψ	0,17	0,5	0,66	0,79	0,91	1

У таблиці наведено значення функцій $\varphi(f)$ та $\psi(f)$ від безрозмірної витрати теплоносія f . З наведених результатів можна дійти висновку про досить хороший збіг зазначених функцій. Таким чином, з метою спрощення обчислювальних процесів допустимо як регульовану теплову провідність опалювального приладу використовувати функцію $\psi(f)$, яка легко дозволяє знайти необхідну безрозмірну витрату теплоносія f :

$$f = \frac{\psi}{2(1-\psi)}.$$

Системи рівнянь (11) або (14), та (8) при заданих f , T_G , T_{oc} є лінійними системами $2n$ рівнянь щодо $2n$ невідомих компонент векторів T і Q . У векторно-матричній формі ця система набуде вигляду:

$$\begin{pmatrix} \bar{G} & -E \\ E & \text{diag}\{R\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gT_{oc} \\ T_G \\ \vdots \\ T_G \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тоді задача аналізу процесу тепlopостачання полягає у розв'язанні системи (17) при заданих теплових опорах опалювальних приладів $R_k(f_k)$.

З практичної точки зору більший інтерес представляє задача синтезу, яка полягає у знаходженні витрат теплоносія, що забезпечують заданий розподіл температур абонентів, що відповідають температурам T_G і T_{oc} . Замість витрат теплоносія шукатимемо теплові опори R_k , що пов'язані з витратами f_k співвідношенням (16). Тоді

$$Q_k = \frac{T_G - T_k}{R_k}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Враховуючи ОПТ (8), отримаємо величини теплових потоків кожного з абонентів:

$$Q_k = (\bar{G}T - \bar{g}T_{oc})_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Після підстановки (19) в (18) отримаємо необхідну величину теплового опору k -го опалювального приладу:

$$R_k = \frac{T_G - T_k}{Q_k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Отримані значення R_k дозволяють, виходячи із співвідношень (16) та (15), знайти витрати теплоносія f_k , що забезпечують заданий розподіл температур абонентів. Таким чином, задачу знаходження витрат теплоносія, що забезпечують заданий розподіл температур абонентів вирішено.

Зауважимо, що ОПТ (8) дає нам лінійну залежність між вектором теплових потоків Q та вектором температур T абонентів A_1, A_2, \dots, A_n . У загальному випадку лінійне перетворення, що пов'язує Q і T невироджене. Отже, матрицю

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial Q} = \bar{G}^{-1}$$

можна вважати *матрицею чутливості змін температури* абонентів щодо змін теплових потоків.

Систему рівнянь (8) та (18) для визначення параметрів системи опалення можна представити у вигляді електричної аналогії (рис. 1):

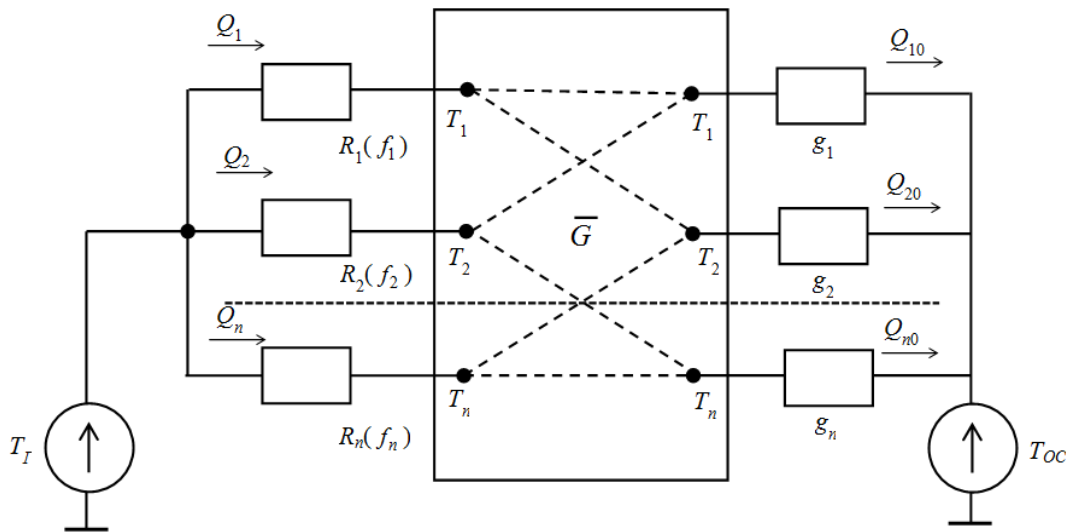


Рис. 1 – Спрощена електрична модель системи теплопостачання.

Введемо на розгляд матрицю \tilde{Q} , кожен елемент якої q_{ik} являє собою тепловий потік між i -м та k -м абонентами та має вигляд:

$$q_{ik} = g_{ik} (T_i - T_k)$$

або в матричній формі:

$$\tilde{Q} = \text{diag}\{T\} \cdot G - G \cdot \text{diag}\{T\}.$$

Повний тепловий потік i -го абонента \hat{Q}_i знаходиться у вигляді суми теплового потоку Q_i , що підводиться від ОП i -го абонента та суми теплових потоків від суміжних абонентів:

$$\hat{Q}_i = Q_i + \sum_{k=1}^n q_{ik}. \quad (20)$$

Врахуємо, що тепловий лічильник кожного абонента вимірює тепловий потік опалювального приладу Q_i у формулі (20). Реальний тепловий потік \hat{Q}_i згідно (20) складається з вимірюваного потоку Q_i та перерозподіленого потоку, обумовленого відмінністю температур сусідніх абонентів

$$\Delta Q_i = \sum_{k=1}^n q_{ik}.$$

Величина ΔQ_i залежить як від конструкції будівлі, так і від температур суміжних абонентів і вказує на перерозподіл теплових потоків між абонентами, а отже і на перерозподіл оплати за теплову енергію. В ідеальному випадку $\Delta Q_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$), що відповідає рівності температур приміщень всіх абонентів.

Крім того, з косиметричності матриці \tilde{Q} отримаємо очевидний результат:

$$\sum_{k=1}^n \Delta Q_i = 0.$$

Таким чином, співвідношення (20) ілюструє перерозподіл теплових потоків між абонентами.

Побудуємо скалярний критерій міри розсіювання теплоти в системі теплопостачання взаємозв'язаних абонентів. Для цього розглянемо розв'язок ОРТ (8) у випадках теплопостачання без зв'язків між абонентами та при їх наявності. У першому випадку усі g_{ij} дорівнюють нулю, а T_{oc} приймаємо також нулевою. Тоді ОРТ для множини одиничних теплових потоків $Q = E$ можна записати як

$$-\text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \hat{T} + E = 0. \quad (21)$$

Розв'язок рівняння (21) має вигляд:

$$\hat{T} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \quad (22)$$

де $r_k = g_k^{-1}$ – тепловий опір k -го абоненту відносно зовнішнього середовища.

Якщо матриця G в ОРТ буде недіагональною, то в загальному вигляді розв'язок (8) буде

$$\tilde{T} = -\bar{G}^{-1}. \quad (23)$$

Стовпчики матриці \tilde{T} є вектори температур абонентів при одиничних векторах підведення теплоти. Таким чином, пропонується міра довершеності конструкції опалювального об'єкту у вигляді критерію розсіювання теплоти τ :

$$\tau = \frac{\text{tr} \tilde{T}}{\text{tr} \hat{T}} \leq 1. \quad (24)$$

Чим ближче значення τ до одиниці, тим вище ступень організації процесів опалення.

Приклад. Розглянемо двовимірний комплекс абонентів. У цьому випадку матриця \bar{G} прийме вигляд:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -(g_1 + g_{12}) & g_{12} \\ g_{21} & -(g_2 + g_{12}) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Нехай $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Тоді розв'язок рівняння (21) можна записати як

$$\hat{T} = \text{diag}\{r_1, r_2\} = \text{diag}\{1, 1/2\}.$$

Якщо $g_{12} = g_{21} = 1$, то матриця \bar{G} (25) у нашому випадку прийме вигляд:

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

а матриця \tilde{T} – матричний розв'язок рівняння (8) набуде вигляду:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, критерій розсіювання теплоти (24) у нашому випадку буде $\tau = \frac{2}{3} < 1$.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження будуть пов'язані з розробкою автоматизованих обчислювальних методів аналізу і синтезу теплових процесів, які враховують конструктивні параметри, матеріали огорожень, вентиляцію приміщень та скління. Також отримає подальший розвиток адаптація моделі притаманно до процесів керування тепловим станом системи пов'язаних абонентів.

Висновки. 1. У роботі запропоновано та обґрунтовано спрощену математичну модель теплових процесів опалюваних будівель. Модель заснована на квазістатичному поданні теплових процесів і є лінійною системою рівнянь щодо температур і теплових потоків абонентів – споживачів теплової потужності.

2. В отриманій математичній моделі частина параметрів матриці лінійного перетворення визначається на підставі архітектури будівлі та конструкційних матеріалів. Інша частина – залежить від конструкції опалювальних приладів та від вибраних витрат теплоносія кожним з абонентів. Таким чином, можна сформулювати задачу управління теплопостачанням як задачу управління з параметрами, постановка якої та шлях вирішення наведені в [11, 12].

3. Отримана математична модель дозволяє оцінити перерозподіл теплового потоку, що підводиться до кожного з абонентів, на корисний потік, що йде на підтримку власної температури, і на тепловий потік, що передається через перегородки суміжним абонентам.

Практична значущість отриманого результату полягає у можливості оцінки перевитрат з оплати теплової енергії, що вимірюється теплотічильником кожного з абонентів.

Список літератури

1. Соколов Е. Я. Теплофикация и тепловые сети : учеб. для вузов. – М. : МЭИ, 2001. – 472 с.

2. Вороновский Г. К. Усовершенствование практик оперативного управления крупными теплофикационными системами в новых экономических условиях. – Харьков : Харьков, 2002. – 240 с.
3. Беляйкина И. В., Витальев В. П., Громов Н. К. Водяные тепловые сети : справочное пособие по проектированию. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 376 с.
4. Громов Н. К. Абонентские установки водяных тепловых сетей : проектирование и эксплуатация. – М. : Энергия, 1968. – 320 с.
5. Тяттор И. Отопительные системы : пер. с нем. – М. : ТЕХНОСФЕРА : ЕВРОКЛИМАТ, 2006. – 272 с.
6. Kutsenko O., Tovazhnyansky V., Kovalenko S. Synthesis of a Mathematical Model of Thermal Processes of Buildings. Systems Approach // IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing. – Kyiv, 2020. – pp. 276 – 281. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239144.
7. Atam E., Helsen L. Control-Oriented Thermal Modeling of Multizone Buildings: Methods and Issues: Intelligent Control of a Building System // IEEE Control Systems Magazine. – 2016. – Vol. 36. – № 3. – pp. 86 – 111. DOI: 10.1109/MCS.2016.2535913.
8. Lehmann B., Gyalistras D., Gwerder M., Wirth K., Carl S. Intermediate complexity model for model predictive control of integrated room automation // Energy and Buildings. – 2013. – Vol. 58. – pp. 250 – 262. DOI: 10.1016/j.enbuild.2012.12.007.
9. Куценко О. С., Коваленко С. В., Товажнянский В. И. Системный подход к математическому моделированию тепловых процессов зданий // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 4/4(70). – С. 9 – 12. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.26200.
10. Табуничиков Ю. А., Бродач М. М. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. – М. : АВOK-ПРЕСС, 2002. – 194 с.
11. Куценко О. С., Коваленко С. В. Управління квазістатичними процесами : монографія / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : ФОП Панов А. М., 2024. – 156 с.
12. Kutsenko A. S., Kovalenko S. V., Kovalenko S. M. Generalization of the thermodynamic approach to multi-dimensional quasistatic processes // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2023. – № 1. – С. 62 – 77. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.05.

References (transliterated)

1. Sokolov E. Ya. *Teplofikatsiya i teplovye seti* [District heating and thermal networks]. Moscow, MEI Publ., 2001. 472 p.
2. Voronovskiy G. K. *Usovershenstvovanie praktik operativnogo upravleniya krupnymi teplofikatsionnymi sistemami v novykh ekonomicheskikh usloviyakh* [Improvement of operational management practices of large district heating systems in new economic conditions]. Kharkiv, Kharkiv Publ., 2002. 240 p.
3. Belyaykina I. V., Vital'ev V. P., Gromov N. K. *Vodyanye teplovye seti: spravochnoe posobie po proektirovaniyu* [Water heating networks: design reference guide]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1988. 376 p.
4. Gromov N. K. *Abonentskie ustanovki vodyanykh teplovykh setey: proektirovanie i ekspluatatsiya* [Subscriber installations of water heating networks: design and operation]. Moscow, Energiya Publ., 1968. 320 p.
5. Tietor I. *Otopitel'nye sistemy* [Heating systems]. Translated from German. Moscow, Technosfera; Euroklimat Publ., 2006. 272 p.
6. Kutsenko O., Tovazhnyansky V., Kovalenko S. Synthesis of a mathematical model of thermal processes of buildings. Systems approach. *Proceedings of the IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing*. Kyiv, 2020, pp. 276–281. DOI: 10.1109/SAIC51296.2020.9239144.
7. Atam E., Helsen L. Control-oriented thermal modeling of multizone buildings: methods and issues. *IEEE Control Systems Magazine*, 2016, Vol. 36, no. 3, pp. 86–111. DOI: 10.1109/MCS.2016.2535913.
8. Lehmann B., Gyalistras D., Gwerder M., Wirth K., Carl S. Intermediate complexity model for model predictive control of integrated room automation. *Energy and Buildings*. 2013, Vol. 58, pp. 250–262. DOI: 10.1016/j.enbuild.2012.12.007.
9. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V., Tovazhnyansky V. I. Sistemnyy podkhod k matematicheskomu modelirovaniyu teplovykh protsessov zdaniy [System approach to mathematical modeling of thermal processes of buildings]. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [Eastern-European Journal of Enterprise Technologies]. 2014, no. 4/4(70), pp. 9–12. DOI: 10.15587/1729-4061.2014.26200.
10. Tabunshchikov Yu. A., Brodach M. M. *Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya teplovykh effektivnosti zdaniy* [Mathematical modeling and optimization of thermal efficiency of buildings]. Moscow, AVOK-PRESS Publ., 2002. 194 p.
11. Kutsenko O. S., Kovalenko S. V. *Upravlinnya kvazistatichnyimi protsesami* [Control of quasistatic processes]. Kharkiv, FOP Panov A. M. Publ., 2024. 156 p.
12. Kutsenko A. S., Kovalenko S. V., Kovalenko S. M. Generalization of the thermodynamic approach to multi-dimensional quasistatic processes. *Systemni doslidzhennya ta informatsiyi tekhnologiyi* [System Research & Information Technologies]. 2023, no. 1, pp. 62–77. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2023.1.05.

Nadiiushla (received) 22.11.2025; Dooprac'ovana (finalized) 05.01.2026; Do nulykatsii (for publication) 12.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Куценко Олександр Сергійович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 681-21-06; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6059-3694>; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@kphi.edu.ua.

Kutsenko Oleksandr Serhiyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 681-21-06; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6059-3694>; e-mail: Oleksandr.Kutsenko@kphi.edu.ua.

Коваленко Сергій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 646-13-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8763-0862>; e-mail: Serhii.Kovalenko@kphi.edu.ua.

Kovalenko Serhii Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Information-Analytical Technologies, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 646-13-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8763-0862>; e-mail: Serhii.Kovalenko@kphi.edu.ua.