

О. В. ВАЩІЛІНА, І. В. ЛЕБЕДЄВА

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ У ЗАДАЧІ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ КОЛОНИ У В'ЯЗКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті досліджено стійкість явної та неявної скінченно-різницевої схем, побудованих для чисельного розв'язання задачі торсійних автоколивань пружної колони у в'язкому середовищі. Розглянута математична модель описує динаміку протяжної пружної системи з урахуванням інерційних, пружних і дисипативних ефектів та є типовою для прикладних задач механіки бурових колон і інших інженерних конструкцій. Основну увагу зосереджено на аналізі стійкості різницевої алгоритму за методом фон Неймана, який дозволяє дослідити спектральні властивості похибки чисельного розв'язку без виконання повномасштабних обчислювальних експериментів. Для явної різницевої схеми отримано характеристичне рівняння та показано, що вона є умовно стійкою. Встановлено існування критичного значення кроку інтегрування за часом, перевищення якого призводить до втрати стійкості чисельного процесу. У найгіршому спектральному режимі критичний крок визначається з умови досягнення граничного значення модуля спектрального параметра та еквівалентно може бути знайдений з рівності нулю дискримінанта характеристичного рівняння. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку інтегрування узгоджується з чисельними оцінками. Для неявної різницевої схеми проведено аналітичне дослідження характеристичного рівняння та доведено, що для довільних значень кроків дискретизації за часом і простором модулі його коренів не перевищують одиниці. Це дозволяє зробити висновок про безумовну стійкість неявної схеми за методом фон Неймана. Побудовані графіки залежності спектрального параметра від кроку інтегрування наочно підтверджують аналітичні результати. Отримані висновки можуть бути використані для обґрунтованого вибору чисельної схеми при моделюванні динамічних процесів у пружних протяжних системах із дисипацією енергії.

Ключові слова: чисельне моделювання, спектральний аналіз, стійкість різницевої схем, торсійні автоколивання, пружна колона, в'язке середовище, явна різницева схема, неявна різницева схема, метод фон Неймана, критичний крок інтегрування.

O. V. VASHCHILINA, I. V. LEBEDYEVA

SPECTRAL STABILITY ANALYSIS OF DIFFERENCE SCHEMES FOR NUMERICAL MODELING OF TORSIONAL SELF-OSCILLATIONS OF AN ELASTIC COLUMN IN A VISCOUS MEDIUM

The paper investigates the stability properties of explicit and implicit finite-difference schemes applied to the numerical solution of the torsional self-excited oscillations of an elastic column in a viscous medium. The considered mathematical model describes the dynamics of a distributed elastic system accounting for inertial, elastic, and dissipative effects and is representative of applied problems in the mechanics of drilling columns and similar engineering structures. The main focus of the study is the stability analysis of the difference schemes using the von Neumann method, which enables the investigation of the spectral behavior of numerical errors without performing large-scale computational simulations. For the explicit finite-difference scheme, the characteristic equation is derived and analyzed. It is shown that the scheme is conditionally stable and that there exists a critical time step beyond which numerical instability occurs. In the most unfavorable spectral mode, the critical time step corresponds to the attainment of the limiting value of the spectral parameter modulus and can equivalently be determined from the condition that the discriminant of the characteristic equation vanishes. The obtained analytical expression for the critical time step is consistent with numerical estimates. For the implicit finite-difference scheme, an analytical study of the characteristic equation is carried out. It is proven that, for arbitrary values of the temporal and spatial discretization steps, the moduli of its roots do not exceed unity. This result indicates unconditional stability of the implicit scheme within the von Neumann framework. Graphical representations of the spectral parameter as a function of the time step provide a clear illustration of the analytical conclusions. The obtained results may be used to justify the choice of efficient numerical schemes for the simulation of dynamic processes in elastic distributed systems with energy dissipation.

Key words: numerical modeling, spectral analysis, stability of difference schemes, torsional self-oscillations, elastic column, viscous medium, explicit difference scheme, implicit difference scheme, von Neumann method, critical integration step.

Вступ. Чисельне моделювання торсійних автоколивань пружних колон у в'язкому середовищі є важливим напрямом досліджень у галузі *нелінійної динаміки та прикладної механіки*. Такі коливальні процеси виникають у протяжних пружних системах під дією *інерційних, пружних і дисипативних сил* та можуть призводити до формування *самозбуджених режимів*, що істотно впливають на динамічну поведінку системи. Узагальнені підходи до аналізу критичних режимів динаміки протяжних пружних систем наведено в монографії [1].

Значний внесок у дослідження нелінійних процесів у пружних системах зроблено в дисертаційній роботі [2], де побудовано математичні моделі коливальних процесів з урахуванням нелінійних ефектів та проаналізовано умови виникнення автоколивань. Показано, що навіть за відносно простих геометричних і матеріальних припущень система може демонструвати складну *часову еволюцію*, включаючи перехід до *релаксаційних режимів*.

У сучасних публікаціях значну увагу приділено *розподіленим моделям торсійних і осьових коливань пружних систем*. Зокрема, в роботі [3] досліджено механізми виникнення самозбуджених коливань у розподілених системах, а в роботі [4] показано суттєвий вплив затримок і сухого тертя на стійкість коливальних режимів. Подальший розвиток цих підходів представлено в [5], де враховано регенеративні ефекти взаємодії та показано їх роль у формуванні автоколивань. Окремі особливості руху елементів пружних систем, зокрема вплив конструктивних параметрів на їхню динаміку, розглянуто у [6].

Аналітичне дослідження відповідних нелінійних крайових задач, зазвичай, є суттєво ускладненим або неможливим, що зумовлює необхідність застосування чисельних методів. При цьому вибір різницевої схеми інтегрування має принципове значення, оскільки він може впливати не лише на точність, а й на стійкість чисельного розв'язку та коректність відтворення автоколивальних режимів. Відомо, що явні *скінченно-різницевої схеми*, як

правило, є умовно стійкими і потребують обмежень на крок інтегрування за часом, тоді як неявні схеми характеризуються підвищеною стійкістю чисельного процесу [7].

У зв'язку з цим актуальною є задача аналізу стійкості різницевих схем, побудованих для *математичної моделі торсійних автоколиваний* пружної колони у в'язкому середовищі [2]. У даній роботі для цієї мети застосовано *метод фон Неймана* [8], який дозволяє дослідити *спектральні властивості похибки* чисельного розв'язку та отримати кількісні умови стійкості явних і неявних алгоритмів без проведення повномасштабних обчислювальних експериментів. Новизна роботи полягає у застосуванні класичного спектрального підходу до аналізу стійкості різницевих схем для специфічної фізичної моделі торсійних автоколиваний, що дає змогу уточнити критичні значення кроку інтегрування та обґрунтувати вибір ефективної чисельної схеми.

Метою даної роботи є аналіз стійкості явних і неявних скінченно-різницевих схем для задачі торсійних автоколиваний пружної колони у в'язкому середовищі на основі методу фон Неймана та порівняння їх спектральних властивостей. Практична значущість дослідження підтверджується прикладами прикладних задач, зокрема аналізом динамічних режимів бурильного інструменту на нерівному забої свердловини [9] та впливом граничних умов і в'язкості середовища на коливальні процеси у пружних системах [10].

Постановка задачі. Розглянемо торсійні коливання пружної колони довжиною L у в'язкому середовищі. Динаміка системи описується *рівнянням балансу моментів* [2]:

$$GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu \left(\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де $\varphi(z, t)$ – кут пружного закручування колони; z – осьова координата; t – час; G – модуль пружності при зсуві; I_z – полярний момент інерції; ρ – густина матеріалу; ω – кутова швидкість обертання; μ – зведений коефіцієнт в'язкого тертя.

Рівняння доповнюється граничними умовами на кінцях колони та початковими умовами, що задають початковий розподіл кутів закручування і кутових швидкостей. Наявність дисипативного члена з коефіцієнтом μ зумовлює можливість формування автоколивальних режимів у нелінійній постановці задачі. Рівняння (1) доповнюється граничними та початковими умовами.

Граничні умови. На закріпленому верхньому кінці ($z=0$) виконується умова Діріхле:

$$\varphi|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

На нижньому вільному кінці ($z=L$) задається мішана гранична умова, що враховує інерцію навантаження та момент тертя:

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=L} + GI_z \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=L} + M^{тер} = 0, \quad (3)$$

де J – момент інерції навантаження на нижньому кінці колони; $M^{тер}$ – момент тертя, прикладений на нижньому кінці колони внаслідок дії робочого процесу чи інструменту, який моделює реальне навантаження системи (рис. 1).

Початкові умови задають кут та кутову швидкість в момент часу $t=0$:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(z). \quad (4)$$

Нелінійний характер цієї системи зумовлений залежністю моменту сил тертя від кутової швидкості обертання. Саме ця нелінійність визначає можливість виникнення самозбудованих коливальних режимів і ускладнює чисельний аналіз задачі.

Після розкриття дужок рівняння (1) набуває еквівалентного вигляду:

$$GI_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \mu \omega. \quad (5)$$

У рівнянні руху (5) перший доданок описує пружний опір кручення колони, другий – дисипацію енергії внаслідок в'язкого тертя, а третій – інерційні властивості системи. Права частина рівняння відповідає зовнішньому технологічному моменту. Таким чином, рівняння (5) чітко розділяє внесок пружних, демпфувальних, інерційних та зовнішніх сил, що є зручним для побудови скінченно-різницевої схеми і подальшої чисельної реалізації. Таким чином, задача зводиться до розв'язання крайової задачі для рівняння (5) з граничними умовами (2), (3) та початковими умовами (4).

Чисельна дискретизація та аналіз стійкості. Для чисельного розв'язання рівняння у частинних похідних

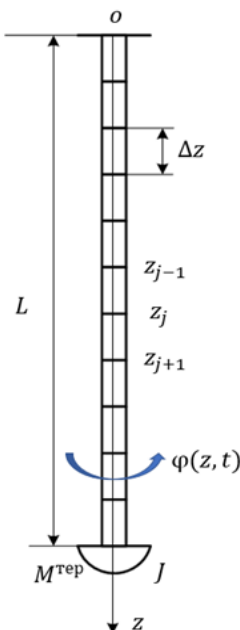


Рис. 1 – Механічна модель пружної колони та її скінченно-різницева дискретизація вздовж осі z .

(5) застосовують скінченно-різницеві методи. Інтервал $0 \leq z \leq L$, який відповідає довжині колони (рис. 1), поділяється на N рівних відрізків довжиною $\Delta z = L/N$. У кожному вузлі просторової сітки $z_j = j \cdot \Delta z$ ($j = 0, 1, \dots, N$) неперервне рівняння замінюється його різницеvim аналогом. Це дозволяє виконувати обчислення у дискретні моменти часу $t^m = m \cdot \Delta t$, де $m = 0, 1, 2, \dots, M$ – номер часової сітки. Похідні за просторовою координатою та часом апроксимуються різницеvими виразами, що дає змогу побудувати чисельні алгоритми для моделювання динаміки системи. Такий підхід передбачає використання двох основних схем інтегрування: *явної* та *неявної*, які відрізняються способом апроксимації похідних та стійкісними властивостями.

Явна різницева схема (explicit scheme). У явній схемі нові значення функції φ_j^{m+1} обчислюються безпосередньо через відомі значення на попередніх часових шарах m та $m-1$. Для побудови явної скінченно-різницевої схеми здійснюється апроксимація похідних у точці $z = z_j$ на часовому шарі t^m . Використовуються такі різницеvі вирази:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{t=t^m} \approx \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2}. \quad (6)$$

У цих виразах нижній індекс j відповідає положенню точки по координаті z , верхній індекс m – номеру часової сітки. Вважається, що $m-1 = t^m - \Delta t$, $m+1 = t^m + \Delta t$, де Δt – фіксований крок інтегрування. Підставивши апроксимації (6) у рівняння (5), отримуємо його дискретизовану форму:

$$GI_z \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = \mu \omega. \quad (7)$$

Аналогічно перетворюються і граничні умови (2), (3). При цьому рівняння (5) зводиться до вигляду:

$$J \left. \frac{\varphi_N^{m+1} - 2\varphi_N^m + \varphi_N^{m-1}}{\Delta t^2} \right|_L + GI_z \left. \frac{\varphi_N^m - \varphi_{N-1}^m}{\Delta z} \right|_L - M_z^{mep} \Big|_L = 0. \quad (8)$$

Побудована система алгебраїчних рівнянь (7), (2), (8) доповнюється початковими умовами, які визначають положення φ_j^0 та швидкості $\dot{\varphi}_j^0$ усіх точок системи ($0 \leq j \leq N$) у початковий момент часу $t^0 = 0$.

Важливо відзначити, що кожне з рівнянь (7), (2), (8) містить лише одну невідому змінну φ_j^{m+1} , яка відповідає наступному часовому шару $t^{m+1} = t^m + \Delta t$. Усі інші величини виражені через значення функції у попередніх моментах часу t^m та t^{m-1} . Таким чином, якщо стан системи у моменти t^m та t^{m-1} відомий, то нове значення φ_j^{m+1} може бути отримане за допомогою простих арифметичних операцій додавання та віднімання. Обчисливши всі шукані змінні φ_j^{m+1} , ми визначаємо стан системи у момент часу t^{m+1} . Далі рівняння (7), (2), (8) переписуються для нового шару, і, оскільки стани системи при t^m та t^{m-1} уже відомі, аналогічними перерахунками можна знайти значення змінних у момент часу $t^{m+2} = t^m + 2\Delta t$. Продовжуючи цей процес послідовно, отримуємо розв'язок для всіх наступних моментів часу в межах розглянутого інтервалу. Як було зазначено, для реалізації схеми необхідно знати стани системи на двох попередніх часових кроках, які завжди визначені, за винятком перших двох кроків. У цих випадках значення функції φ_j^0 та її похідної $\dot{\varphi}_j^0$ задаються початковими умовами.

Для аналізу стійкості та чисельних властивостей скінченно-різницевої схеми застосовано метод фон Неймана [8]. Зазначений підхід є стандартним інструментом дослідження лінійних чисельних схем та дозволяє отримати якісні і кількісні характеристики їхньої стійкості без виконання повномасштабних обчислювальних експериментів. Права частина рівняння (5), що відповідає зовнішньому технологічному моменту, не впливає на стійкість схеми і надалі не враховується.

В основу аналізу покладено припущення про гармонічну форму похибки чисельного розв'язку у вигляді плоскої хвилі:

$$\varphi_j^m = \xi^m e^{ikj\Delta z}, \quad (9)$$

де ξ – спектральний параметр, що характеризує зростання або згасання гармонічної складової похибки за один часовий крок; k – хвильове число; j – номер вузла; m – номер часового шару; Δz – просторовий крок сітки. Тоді

$$\varphi_{j+1}^m = \varphi_j^m e^{ik\Delta z}, \quad \varphi_{j-1}^m = \varphi_j^m e^{-ik\Delta z}, \quad \varphi_j^{m+1} = \xi \varphi_j^m, \quad \varphi_j^{m-1} = \xi^{-1} \varphi_j^m. \quad (10)$$

Підстановка виразів (9), (10) у просторову та часову різницю (6) приводить до співвідношень:

$$\begin{aligned}\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m &= \varphi_j^m \left(e^{ik\Delta z} - 2 + e^{-ik\Delta z} \right) = -4\varphi_j^m \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right), \\ \varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1} &= \varphi_j^m (\xi - \xi^{-1}) = \varphi_j^m \xi^{-1} (\xi^2 - 1), \\ \varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1} &= \varphi_j^m (\xi - 2 + \xi^{-1}) = \varphi_j^m \left((\sqrt{\xi})^2 - 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \right)^2 \right) = \varphi_j^m \left(\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right)^2 = \varphi_j^m \frac{(\xi - 1)^2}{\xi}.\end{aligned}\quad (11)$$

Як зазначено вище, беремо однорідну частину схеми (7):

$$GI_z \frac{\varphi_{j+1}^m - 2\varphi_j^m + \varphi_{j-1}^m}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = 0.\quad (12)$$

Після підстановки (11) в однорідну схему (12) та скорочення на спільний множник φ_j^m , отримуємо характеристичне рівняння відносно ξ :

$$A_{\text{exp}} \xi^2 + B_{\text{exp}} \xi + C_{\text{exp}} = 0,\quad (13)$$

де

$$A_{\text{exp}} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{\mu}{2\Delta t}, \quad B_{\text{exp}} = -\frac{2\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{4GI_z}{\Delta z^2} \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right), \quad C_{\text{exp}} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} - \frac{\mu}{2\Delta t}.\quad (14)$$

Схема вважається стійкою, якщо для всіх допустимих значень k корені рівняння (13) задовольняють умову:

$$|\xi| \leq 1.\quad (15)$$

Це гарантує, що амплітуда похибки не зростає з часом, тобто чисельний розв'язок є збіжним і не розбігається при переході до наступних часових шарів. Таким чином, аналіз стійкості зводиться до дослідження властивостей коренів характеристичного рівняння (13).

Згідно з підходом фон Неймана, найсуворіші обмеження на крок інтегрування за часом виникають для найкоротшої гармоніки, яку може відтворити просторово-дискретна сітка. Такий режим відповідає умові:

$$k\Delta z = \pi, \quad \text{звідки} \quad \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) = 1.\quad (16)$$

Фізично це означає, що короткохвильові збурення є найбільш чутливими до чисельних похибок і першими виявляють нестійкість схеми. Тому саме цей режим визначає критичне значення кроку інтегрування $\Delta t_{\text{кр}}$.

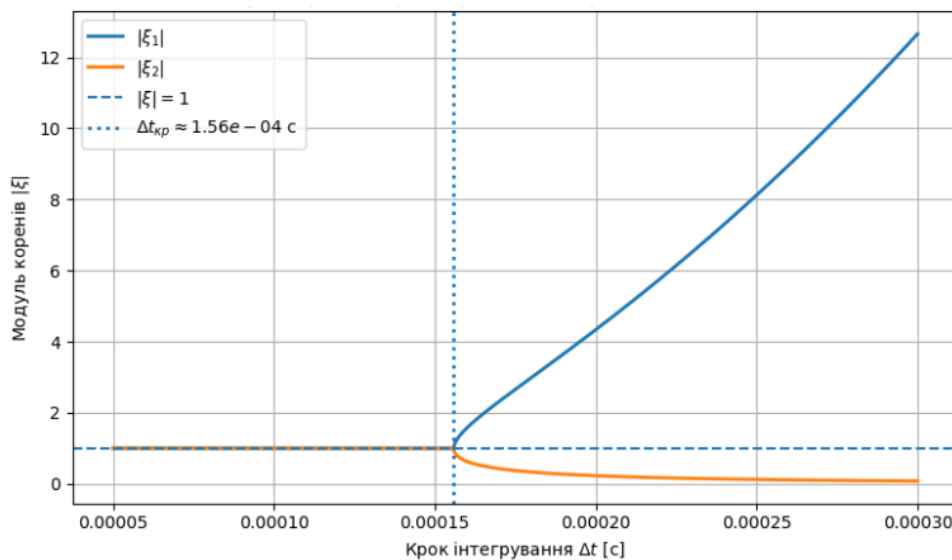


Рис. 2 – Залежність модулів коренів характеристичного рівняння від кроку Δt .

При малих значеннях кроку інтегрування за часом дискримінант

$$D = B_{\text{exp}}^2 - 4A_{\text{exp}}C_{\text{exp}}\quad (17)$$

характеристичного рівняння (13) є від'ємним, і корені рівняння

$$\xi_{1,2} = \frac{-B_{\text{exp}} \pm \sqrt{D}}{2A_{\text{exp}}}$$

утворюють комплексно-спряжену пару. У цьому випадку еволюція похибки має осцилюючий характер, а за наявності дисипативного члена ($\mu > 0$) модуль спектрального параметра є строго меншим за одиницю, що відповідає асимптотично стійкому режиму.

Із зростанням кроку інтегрування Δt дискримінант збільшується і при досягненні певного значення стає рівним нулю. У цій точці комплексно-спряжені корені зливаються у кратний дійсний корінь, модуль якого дорівнює одиниці. Такий режим відповідає межі стійкості явної різницевої схеми. Подальше збільшення кроку часу призводить до появи дійсного кореня з модулем, більшим за одиницю, що зумовлює експоненціальне зростання похибки та втрату стійкості чисельного розв'язку. Графік залежності модулів коренів характеристичного рівняння від кроку Δt для параметрів, характерних для сталеві бурильної колони [1]: $G = 80,77 \cdot 10^9$ Па, $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu = 10$ Н·с, $\Delta z = 0,5$ м, $k\Delta z = \pi$ представлено на рис. 2.

Таким чином, для розглянутої явної різницевої схеми критичне значення кроку інтегрування за часом $\Delta t_{кр}$ визначається умовою рівності нулю дискримінанта (17) характеристичного рівняння (13). У найгіршому спектральному режимі (16) ця умова дозволяє отримати аналітичний вираз для $\Delta t_{кр}$. Після підстановки коефіцієнтів (14) та виконання алгебраїчних перетворень одержуємо:

$$\Delta t_{кр} = \frac{\Delta z}{\sqrt{G/\rho}} \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \Delta z^2}{16\rho G I_z^2}}. \quad (18)$$

Аналітичне значення (18) для $\Delta t_{кр}$ було перевірено чисельно шляхом знаходження коренів рівняння

$$\max(|\xi|) = 1.$$

Варто зазначити, що отриманий вираз (18) узагальнює *класичну умову CFL (Courant–Friedrichs–Lewy)* стійкості для явних схем, що застосовується при моделюванні хвильових процесів [8]. У випадку відсутності дисипації ($\mu = 0$) формула (18) переходить у відоме співвідношення

$$\Delta t_{CFL} = \frac{\Delta z}{\sqrt{G/\rho}} = \frac{\Delta z}{c},$$

яке відповідає обмеженню на крок інтегрування за часом, визначеному швидкістю поширення хвилі c . Наявність демпфування ($\mu > 0$) призводить до зменшення допустимого кроку, хоча для фізично реалістичних значень коефіцієнта дисипації відповідна поправка є незначною, що узгоджується з результатами проведеного чисельного спектрального аналізу.

Для заданих параметрів задачі значення критичного кроку $\Delta t_{кр}$, знайдені обома способами, збігаються з високою точністю, що підтверджує еквівалентність критеріїв $D = 0$ та $\max(|\xi_1|, |\xi_2|) = 1$ для розглянутої явної різницевої схеми.

Отже, проведений аналіз показав, що явна різницева схема є умовно стійкою, а її межа стійкості в розглянутій задачі визначається моментом досягнення дискримінантом характеристичного рівняння нульового значення. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку інтегрування (18) за часом узгоджується з чисельними результатами та дає наочне пояснення механізму втрати стійкості з точки зору спектральних властивостей похибки.

Неявна різницева схема (implicit scheme). У такій схемі нові значення функції φ_j^{m+1} визначаються через невідомі на поточному часовому шарі, що теоретично має забезпечити підвищену стійкість чисельного процесу. На відміну від явної схеми, де апроксимація похідних виконується на попередніх часових рівнях, у неявній схемі просторові та часові похідні беруться на новому шарі t^{m+1} . Слід зазначити, що застосування неявної різницевої схеми пов'язане з необхідністю розв'язання на кожному часовому кроці системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це значно ускладнює реалізацію чисельного алгоритму порівняно з явною схемою. Особливістю отриманої системи рівнянь є її матриця, яка має вигляд тридіагональної стрічкової структури, тобто ненульові елементи зосереджені лише на головній діагоналі та двох прилеглих до неї. Така структура дозволяє застосовувати *метод прогонки (метод Томаса)*, що забезпечує ефективне розв'язання системи з лінійною обчислювальною складністю [7, 11].

Однорідне різницеве рівняння для дослідження стійкості неявної схеми має вигляд:

$$G I_z \frac{\varphi_{j+1}^{m+1} - 2\varphi_j^{m+1} + \varphi_{j-1}^{m+1}}{\Delta z^2} - \mu \frac{\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^{m-1}}{2\Delta t} - \rho I_z \frac{\varphi_j^{m+1} - 2\varphi_j^m + \varphi_j^{m-1}}{\Delta t^2} = 0. \quad (19)$$

Для дослідження стійкості неявної схеми за методом фон Неймана застосуємо стандартну підстановку похибки (9). Виконуючи аналогічні перетворення, що і у випадку явної схеми, дістанемо характеристичне рівняння

$$A_{imp}\xi^2 + B_{imp}\xi + C_{imp} = 0, \quad (20)$$

де

$$A_{imp} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} + \frac{\mu}{2\Delta t} + \frac{4GI_z}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right), \quad B_{imp} = -\frac{2\rho I_z}{\Delta t^2}, \quad C_{imp} = \frac{\rho I_z}{\Delta t^2} - \frac{\mu}{2\Delta t}. \quad (21)$$

Проаналізуємо корені цього рівняння. Поділимо його на $A_{imp} > 0$, дістанемо нормалізоване рівняння

$$\xi^2 + p\xi + q = 0, \quad (22)$$

де

$$p = -\frac{2\rho I_z}{\rho I_z + \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{4GI_z\Delta t^2}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)}, \quad q = \frac{\rho I_z - \frac{\mu\Delta t}{2}}{\rho I_z + \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{4GI_z\Delta t^2}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)}. \quad (23)$$

Для квадратного рівняння (22) з дійсними коефіцієнтами корені $\xi_{1,2}$ задовольняють умову $|\xi_{1,2}| \leq 1$ тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$|q| \leq 1, \quad 1 + p + q \geq 0, \quad 1 - p + q \geq 0, \quad (24)$$

що впливає з умов стійкості для лінійних різницевих рівнянь другого порядку [8]. Безпосередня перевірка показує, що для значень p і q , які визначаються формулами (23), умови (24) виконуються для довільних значень кроків дискретизації Δt , Δz та хвильового числа k .

Таким чином, неявна різницева схема є безумовно стійкою згідно з методом фон Неймана. Для нульової просторової моди ($k = 0$) реалізується нейтральна стійкість ($|\xi| = 1$), тоді як для ненульових мод за наявності дисипації ($\mu > 0$) має місце згасання похибки з часом. Наявність демпфувального члена з коефіцієнтом μ додатково підвищує чисельну стійкість схеми.

На рис. 3 представлено залежність максимального за модулем спектрального параметра $|\xi|$ від інтегрування за часом Δt для явної та неявної скінчено-різницевої схем при значеннях параметрів, характерних для сталеві буровий колоні [1]:

$$G = 80,77 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad I_z = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 10 \text{ Н} \cdot \text{с}, \quad \Delta z = 0,5 \text{ м}.$$

Штрихова горизонтальна лінія відповідає граничному значенню $|\xi| = 1$. Вертикальною пунктирною лінією позначено критичне значення кроку інтегрування $\Delta t_{кр} \approx 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Для явної схеми при $\Delta t < \Delta t_{кр}$ виконується умова стійкості $|\xi| \leq 1$, тоді як при $\Delta t > \Delta t_{кр}$ спостерігається різке зростання $|\xi|$, що відповідає втраті стійкості. Для неявної схеми модуль спектрального параметра залишається меншим за одиницю в усьому розглянутому діапазоні значень Δt , що узгоджується з аналітичним висновком про її безумовну стійкість.

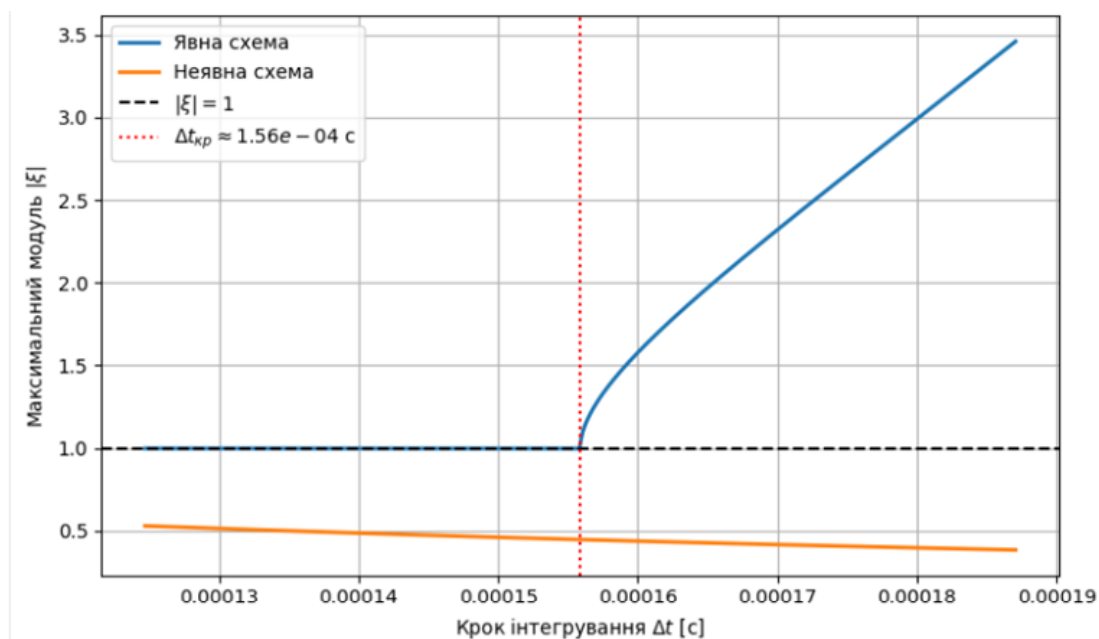


Рис. 3 – Порівняльний аналіз стійкості явної та неявної різницевої схем.

Слід зазначити, що аналіз стійкості за методом фон Неймана виконується для лінійної частини різницевої схеми в нескінченній області, оскільки метод спрямований на дослідження еволюції гармонічних похибок у внутрішніх вузлах сітки за однорідної дискретизації. Вплив граничних умов обмежується вузлами на межі області та не змінює спектрального критерію стійкості: $|\xi| \leq 1$. Тому граничні умови в межах аналізу фон Неймана не враховуються, що дозволяє здобути універсальне характеристичне рівняння без втрати загальності висновків щодо стійкості схеми.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані з поширенням спектрального аналізу на нелінійні різницеві схеми для задачі торсійних автоколиваний з урахуванням реальної залежності моменту тертя від кутової швидкості. Доцільним є також аналіз впливу складніших граничних умов та неоднорідності параметрів колони на стійкість і збіжність чисельних алгоритмів. Отримані підходи можуть бути узагальнені для просторових моделей і задач із комбінованими типами демпфування.

Висновки. У роботі досліджено стійкість явної та неявної скінчено-різницевої схем, застосованих для чисельного розв'язання рівняння, що описує торсійні автоколивання пружної колони у в'язкому середовищі. Аналіз виконано за методом фон Неймана на основі спектральних властивостей характеристичних рівнянь відповідних різницевої схем.

Показано, що явна різницева схема є умовно стійкою та потребує обмеження на крок інтегрування за часом. Для розглянутої задачі в найгіршому спектральному режимі втрата стійкості відповідає злиттю коренів характеристичного рівняння та досягненню граничного значення модуля спектрального параметра. Критичне значення кроку інтегрування може бути визначено як з умови досягнення граничного значення модуля спектрального параметра характеристичного рівняння, так і з рівності нулю дискримінанта характеристичного рівняння, причому обидва підходи дають однаковий результат. Отриманий аналітичний вираз для критичного кроку узгоджується з чисельними результатами.

Для неявної різницевої схеми доведено безумовну стійкість за методом фон Неймана. Встановлено, що для довільних значень кроків дискретизації за часом і простором модулі коренів характеристичного рівняння не перевищують одиниці, а за наявності дисипативного члена забезпечується згасання похибки з часом.

Отримані результати дозволяють обґрунтовано обирати тип чисельної схеми та параметри дискретизації залежно від поставленої задачі. Явна схема може бути ефективною при малих кроках інтегрування за часом, тоді як неявна схема є більш придатною для довготривалих розрахунків і моделювання процесів із суттєвою дисипацією. Запропонований підхід до аналізу стійкості може бути використаний для дослідження інших класів скінчено-різницевої схем у задачах математичного моделювання коливальних процесів у технічних системах.

Список літератури

1. Gulyayev V., Glazunov S., Glushakova O., Vashchilina E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. – Cambridge Scholars Publishing, 2019. – 512 с.
2. Глазунов С. М. Квазістатичні та динамічні фрикційні ефекти при бурінні глибоких свердловин : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 – будівельна механіка. – Національний транспортний університет. – Київ, 2018. – 210 с.
3. Aarsnes U. J. F., van de Wouw N. Axial and torsional self-excited vibrations of a distributed drill-string // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol. 458. – P. 1 – 20. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.12.028.
4. Liu X., Meng G., Balachandran B. Drill-string stability and stress localization: Influence of complex delay effects and dry friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – Vol. 151. – P. 104 – 118. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104559.
5. Faghihi M. A., Mohammadi H., Yazdi E. A., Eghtesad M., Tashakori S. Distributed model for the drill-string system with multiple regenerative effects in the bit-rock interaction // Journal of Sound and Vibration. – 2024. – Vol. 550. – P. 117 – 134. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.118120.
6. Ваціліна О. В., Лебедєва І. В. Деякі особливості руху елементів буриньних установок // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : фізико-математичні науки. – 2020. – № 1–2. – С. 57 – 60. DOI: 10.17721/1812-5409.2020/1-2-9.
7. Thomas J. W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. – New York : Springer Science & Business Media, 2013. – 437 р.
8. LeVeque R. J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. – Philadelphia : SIAM, 2007. – 339 с.
9. Gulyayev V. I., Vashchilina O. V., Glazunov S. M. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Динаміка та міцність машин. – 2016. – № 46. – С. 81 – 84. DOI: 10.20998/2078-9130.2016.46.88055.
10. Шеховцов А. В. Вплив твердих границь та в'язкості середовища на внесок інерційної та вихрової компонент нормальній сили пластини, що обертається. Частина 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 212 – 217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
11. Ваціліна О. В., Жижарєва Ю. І., Шолохов О. В. Чисельні методи : навч. пос. – Київ : КНУ імені Тараса Шевченка, 2025. – 325 с. – Режим доступу : <https://ais.knu.ua/інформаційна-довідка-викладача>. – Дата звертання : 05 жовтня 2025 р.

References (transliterated)

1. Gulyayev V., Glazunov S., Glushakova O., Vashchilina E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. Cambridge, Scholars Publishing, 2019. – 512 c.
2. Glazunov S. M. *Kvazistatychni ta dynamichni fryktsiyni efekty pry burinni glybokyykh sverdlovyh : dys. kand. tekhn.nauk 05.23.17* [Quasi-static and dynamic frictional effects in deep borehole drilling. Candidate eng. sci.diss. (Ph. D.)]. Kyiv, 2018. 210 p. Manuscript.
3. Aarsnes U. J. F., van de Wouw N. Axial and torsional self-excited vibrations of a distributed drill-string. *Journal of Sound and Vibration*. 2019, Vol. 458, pp. 1–20. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.12.028.
4. Liu X., Meng G., Balachandran B. Drill-string stability and stress localization: Influence of complex delay effects and dry friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023, Vol. 151, pp. 104–118. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104559.
5. Faghihi M. A., Mohammadi H., Yazdi E. A., Eghtesad M., Tashakori S. Distributed model for the drill-string system with multiple regenerative effects in the bit–rock interaction. *Journal of Sound and Vibration*. 2024, Vol. 550, pp. 117–134. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.118120.
6. Vashchilina O. V., Lebedyeva I. V. Deyaki osoblyvosti rukhu elementiv buryl'nykh ustanovok [Some peculiarities of the drilling rigs elements movement]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv Physics and Mathematics]. 2020, no. 1–2, pp. 57–60. DOI: 10.17721/1812-5409.2020/1-2-9.
7. Thomas J. W. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. New York, Springer Science & Business Media, 2013. 437 p.
8. LeVeque R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia, SIAM, 2007. 339 p.
9. Gulyayev V. I., Vashchilina O. V., Glazunov S. M. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya: *Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and Strength of Machines]. 2016, no. 46, pp. 81–84. DOI: 10.20998/2078-9130.2016.46.88055.
10. Shekhovtsov A. V. Vplyv tverdykh granyt ta v'yazkosti seredovyshha na vnesok inertsynoyi ta vykhrovoyi komponent normal'noyi syly plastyny, shho obertaet'sya. Chastyna 1 [Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, no. 1, pp. 212–217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
11. Vashchilina O. V., Zhykharyeva Yu. I., Sholokhov O. V. *Chysel'ni metody : navch. pos.* [Numerical Methods : textbook]. Kyiv, Taras Shevchenko National University of Kyiv Publ., 2025. 325 p. Available at: <https://ais.knu.ua/інформаційна-довідка-викладача> (accessed 5 October 2025).

Надійшла (received) 10.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.12.2026; До публікації (for publication) 15.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Ваціліна Олена Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладних інформаційних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 413-23-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6867-6216>; e-mail: olenavashchilina@knu.ua.

Vashchilina Olena Valeriivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Applied Information Systems, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 413-23-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6867-6216>; e-mail: olenavashchilina@knu.ua.

Лебедєва Ірина Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 999-17-98; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7150-1310>; e-mail: lebedyevaiv@knu.ua.

Lebedyeva Iryna Valeriivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 999-17-98; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7150-1310>; e-mail: lebedyevaiv@knu.ua.