УДК 517.929.4; 517.977 **DOI: 10.20998/2222-0631.2026.01(10).02**

О. М. БАШНЯКОВ, К. І. ДЕНИСОВ, В. Т. МАТВІЄНКО, В. В. ПІЧКУР, М. С. ТАІРОВА

СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОСТІЙНИМИ СИМЕТРИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ

У статті висвітлено методику розв'язування задачі стабілізації лінійного матричного диференціального рівняння з постійними симетричними матрицями, а також для важливого випадку таких рівнянь, як матричне рівняння Ляпунова. Матричні диференціальні рівняння виникають у задачах теорії стійкості, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності. Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є лінійні матричні диференціальні рівняння, зокрема матричні рівняння Ляпунова. Постають задачі знаходження аналітичних розв'язків таких рівнянь, проблеми аналізу якісних властивостей розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Для випадків, при яких незбурений розв'язок рівняння є нестійким, виникають задачі стабілізації завдяки вибору матриці керування з оберненим зв'язком. В статті пропонується методика конструювання керувань, які розв'язують задачу стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова та лінійного матричного диференціального рівняння з симетричними матрицями. Метод, розроблений в статті, базується на алгебраїчних властивостях власних чисел симетричних матриць. Побудова керування здійснюється у такий спосіб, щоб забезпечити виконання умов асимптотичної стійкості для матричного рівняння. При цьому розглядається випадок, коли матриці рівняння володіють наперед заданими спектральними властивостями, які дозволяють забезпечити умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку замкненої системи. Крім того, аналізується постановка задачі з обмеженням на матриці підсилення, які визначають матричну функцію керування. Сформульовані теореми носять конструктивний характер.

Ключові слова: матричне диференціальне рівняння, стабілізація, стійкість, власні значення матриці, лінійний обернений зв'язок.

O. M. BASHNIAKOV, K. I. DENYSOV, V. T. MATVIENKO, V. V. PICHKUR, M. S. TAIROVA

STABILIZATION OF LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT SYMMETRIC MATRICES

The article highlights the methodology for solving the problem of stabilizing a linear matrix differential equation with constant symmetric matrices, as well as for an important case of such equations, which is called the matrix Lyapunov equation. Matrix differential equations arise in problems of stability theory, practical stability, optimal control theory, and evaluation of the state of systems under uncertainty. One of the classical types of matrix differential equations is linear matrix differential equations, in particular matrix Lyapunov equations. The problems of finding analytical solutions to such equations, the problems of analyzing the qualitative properties of solutions to matrix differential equations arise. For cases in which the unperturbed solution of the equation is unstable, stabilization problems arise due to the choice of a control matrix with an inverse relationship. The article proposes a method for constructing controls that solve the problem of stabilizing a matrix Lyapunov differential equation and a linear matrix differential equation with symmetric matrices. The method developed in the article is based on the algebraic properties of the eigenvalues of symmetric matrices. The control is constructed in such a way as to ensure that the conditions of asymptotic stability for the matrix equation are met. In this case, the case is considered in which the matrices of the equation have predetermined spectral properties that allow ensuring the conditions of asymptotic stability of the zero solution of the closed-loop system. In addition, the formulation of the problem with the restriction on the gain matrices that determine the matrix control function is analyzed. The formulated theorems are constructive in nature.

Key words: matrix differential equation, stabilization, stability, matrix eigenvalues, linear feedback.

Вступ. *Матричні диференціальні рівняння* є математичним засобом апроксимації пучка розв'язків систем диференціальних рівнянь. Вони виникають в результаті розв'язування задач теорії стійкості, конструювання оптимального керування, оцінювання стану системи за спостереженнями [1 – 4]. Як наслідок, постають питання знаходження *аналітичних розв'язків* таких рівнянь, аналізу якісних властивостей їхніх розв'язків, зокрема існування, єдиності, продовжуваності розв'язку *задачі Коші*, а також знаходження умов стійкості незбурених режимів [4 – 7]. Зазначимо, що *матричні рівняння Ляпунова*, як і лінійні матричні диференціальні рівняння, є одним з тих видів матричних диференціальних рівнянь, які виникають у застосуваннях, зокрема при моделюванні пучка заряджених частинок з використанням методів практичної стійкості [3].

Якщо незбурений розв'язок матричного диференціального рівняння є нестійким, то ставиться задача стабілізації, яка полягає в тому, щоб шляхом включення у *математичну модель* відповідних керуючих впливів з оберненим зв'язком, забезпечити *умови стійкості*. У статті пропонується методика розв'язування задачі стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова і лінійного матричного рівняння з симетричними постійними матрицями в класі лінійних керувань з оберненим зв'язком. Вибір керування здійснюється у такий спосіб, щоб забезпечити виконання *умов асимптотичної стійкості* для лінійного матричного рівняння. При цьому розглядається випадок, коли матриці рівняння володіють наперед заданими *спектральними властивостями*, які дозволяють забезпечити умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку замкненої системи. Така постановка є розвитком *методу модального керування* для лінійних матричних диференціальних рівнянь [8].

У статті використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^{n\times n}$ – множина матриць розмірності $n\times n$ над полем дійсних чисел; M^T – транспонована матриця (вектор) M ; $\lambda_{\max}\left(M\right)$ – максимальне власне число матриці M ; $tr\left(M\right)$ – слід матриці M ; $diag\left(\cdot\right)$ – діагональна матриця з вказаними в дужках діагональними елементами; $I=\left\{1, 2, ..., n\right\}$.

© О. М. Башняков, К. І. Денисов, В. Т. Матвієнко, В. В. Пічкур, М. С. Таірова, 2026

Випадок матричного рівняння Ляпунова. Розглянемо матричне диференціальне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA + U\left(X\right), \tag{1}$$

де $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична матриця з постійними коефіцієнтами; $X\left(t\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця розв'язків рівняння (1); $U\left(X\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця керування. Необхідно знайти таку матрицю керування $U\left(X\right)$, що нульовий розв'язок рівняння (1) є асимптотично стійким. Будемо шукати керування у вигляді:

$$U\left(X\right) = GX + XG, \tag{2}$$

де $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична матриця з постійними коефіцієнтами. При цьому вибір керування вигляду (2) будемо здійснювати так, щоб забезпечити обмеження вигляду:

$$tr\left(G^2\right) \le r^2,\ \ r > 0. \tag{3}$$

Підставимо керування (2) у матричне диференціальне рівняння (1). Одержимо замкнене матричне диференціальне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = \left(A + G\right)X + X\left(A + G\right). \tag{4}$$

Оскільки матриці A та G симетричні, то $A + G = \left(A + G\right)^T$, і власні числа цієї матриці є дійсними [9]. З умови асимтотичної стійкості матричного рівняння Ляпунова [7] маємо, що нульовий розв'язок рівняння (4) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли власні числа матриці $A + G$ є від'ємними. Отже, знайдемо таку матрицю G, що матриця $A + G$ має від'ємні власні числа. Ця умова еквівалентна від'ємній визначеності матриці $A + G$.

Позначимо $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – впорядковані за спаданням власні числа матриці A. Подамо матрицю A у вигляді:

$$A = H^T \Lambda H,$$

де $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетрична матриця; $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – діагональна матриця, елементами якої є λ_1, λ_2, ..., λ_n. Одержимо:

$$A + G = H^T \Lambda H + G = H^T\left(\Lambda + HGH^T\right)H.$$

Матриця H є ортогональною, тому [9]

$$tr\left(G^2\right) = tr\left(H^T HG^2\right) = tr\left(HG^2H^T\right) =$$

$$= tr\left(HGH^T HGH^T\right) = tr\left(\left(HG^2H^T\right)^2\right) = tr\left(F^2\right),$$

де $F = HGH^T$. Отже, необхідно знайти таку симетричну матрицю $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, що матриця

$$H^T\left(\Lambda + F\right)H$$

є від'ємно визначеною та забезпечує виконання обмежень

$$tr\left(F^2\right) \le r^2.$$

Матриця $H^T\left(\Lambda + F\right)H$ є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли матриця $\Lambda + F$ є від'ємно визначеною [9]. Будемо шукати матрицю F у діагональному вигляді так, щоб $\Lambda + F$ була від'ємно визначеною матрицею. Нехай F_{ij} – компоненти матриці F, λ_i – діагональні компоненти матриці Λ, $i, j = 1, 2, ..., n$. Обираємо F_{ij} з умови:

$$F_{ii} + \lambda_i < 0,\ \ i \in I;\ \ F_{ij} = 0,\ \ i, j \in I,\ \ i \ne j.$$

Визначимо сукупність від'ємних чисел $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ так, що $F_{ii} + \lambda_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді

$$F_{ii} = \sigma_i - \lambda_i,\ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

У цьому випадку матриця $\Lambda + F$ є діагональною і від'ємно визначеною,

$$tr\left(F^2\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\sigma_i - \lambda_i\right)^2.$$

Наведемо один зі способів забезпечення виконання обмежень (3). Позначимо:

$$J_- = \left\{i \in I : \lambda_i < 0\right\},\ \ J_0 = \left\{i \in I : \lambda_i = 0\right\},\ \ J_+ = \left\{i \in I : \lambda_i > 0\right\}.$$

Припустимо, що виконується умова

$$s^2 = \sum\nolimits_{i\in J_+}\lambda_i^2 = \sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\max\left(0, \lambda_i\right)\right)^2 < r^2,\ \ s > 0. \tag{6}$$

Це означає, що сума квадратів додатних власних значень матриці Λ менша від r^2. Якщо $i \in J_-$, то виберемо $\sigma_i = \lambda_i$. Якщо $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ задати так, щоб

$$tr\left(F^2\right) = \sum_{i \in J_+} \left(\sigma_i - \lambda_i\right)^2 + \sum_{i \in J_0} \sigma_i^2 \le r^2 , \tag{7}$$

тоді обмеження (3) мають місце. Тому покладемо:

$$\sigma_i = -p\lambda_i,\ i \in J_+;\ \sigma_i = -\varepsilon\left(1+p\right),\ i \in J_0;\ \sigma_i = \lambda_i,\ i \in J_-, \tag{8}$$

де $p > 0$, $\varepsilon > 0$. Підставляючи (8) в (7), одержимо таку оцінку:

$$\left(1+p\right)^2 s^2 + \left(1+p\right)^2 \varepsilon^2 \left|J_0\right| \le r^2 .$$

Тут $\left|J_0\right|$ – кількість елементів множини J_0. Звідси

$$p \le \frac{r}{\sqrt{s^2 + \varepsilon^2 \left|J_0\right|}} - 1 . \tag{9}$$

Зазначимо, що $\varepsilon > 0$ слід задавати достатньо малим так, щоб права частина (9) була додатною. Має місце теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що для власних чисел матриці A виконуються обмеження (6). Керування (2) за обмежень (3) розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (1), якщо G обирається з умови*:

$$G = H^T F H ,$$

де $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональна матриця, яка утворена з ортонормованої системи власних векторів матриці A, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – діагональна матриця, компоненти F_{ij} якої обираються з умови:

$$F_{ii} < -\lambda_i,\ i \in I;\ F_{ij} = 0,\ i, j \in I,\ i \ne j ,$$

зокрема за допомогою (5), (8), (9).

Припустимо, що обмеження (3) відсутні, але необхідно знайти таке керування вигляду (2), яке забезпечує наперед визначений набір власних значень матриці $A+G$ відповідного замкненого матричного рівняння (4). Справджується така теорема.

Теорема 2. *Керування (2) (без врахування обмежень (3)) розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (1) з наперед заданими від'ємними власними значеннями σ_1, σ_2, ..., σ_n матриці $A+G$ рівняння (4), якщо $G = H^T F H$, де $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональна матриця, яка утворена ортонормованою системою власних векторів матриці A, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – діагональна матриця, компоненти F_{ij} якої обираються з умови:*

$$F_{ii} = \sigma_i - \lambda_i,\ i \in I;\ F_{ij} = 0,\ i, j \in I,\ i \ne j .$$

Для представлення матриці A у вигляді $A = H^T \Lambda H$, де $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональна матриця, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – діагональна матриця з власних чисел матриці A, застосовується *метод поворотів Якобі* [10].

Стабілізація лінійного матричного рівняння. Розглянемо лінійне матричне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB + U\left(X\right), \tag{10}$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетричні матриці з постійними коефіцієнтами; $X\left(t\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця розв'язків рівняння (10); $U\left(X\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця керування. Необхідно знайти таке керування $U\left(X\right)$, що нульовий розв'язок рівняння (10) є асимптотично стійким.

Будемо шукати керування у вигляді:

$$U\left(X\right) = PX + XQ , \tag{11}$$

де $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симетричні матриці з постійними коефіцієнтами. Підставимо керування $U\left(X\right)$ у рівняння (10) і одержимо замкнене матричне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = \left(A+P\right)X + X\left(B+Q\right). \tag{12}$$

З умов асимптотичної стійкості випливає, що нульовий розв'язок матричного рівняння (12) є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли [7]

$$\lambda_{\max}\left(A+P\right)+\lambda_{\max}\left(B+Q\right)<0 . \qquad (13)$$

Тоді задача зводиться до знаходження симетричних матриць P, Q, для яких виконується умова (13).

Позначимо λ_1, λ_2, ..., λ_n – впорядковані за спаданням власні числа матриці A та μ_1, μ_2, ..., μ_n – впорядковані за спаданням власні числа матриці B. Подамо матриці A, B у вигляді:

$$A = H_1^T \Lambda H_1,\ \ B = H_2^T M H_2 ,$$

де H_1, $H_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональні матриці,

$$\Lambda = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad M = diag\left(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

– діагональні матриці, що складаються з власних чисел матриць A та B відповідно [9]. Одержимо:

$$A+P = H_1^T\left(\Lambda + H_1 P H_1^T\right)H_1,\ \ B+Q = H_2^T\left(M + H_2 Q H_2^T\right)H_2 .$$

Зробимо заміну:

$$F = H_1 P H_1^T,\ \ G = H_2 Q H_2^T .$$

Будемо шукати матриці $F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ у діагональному вигляді так, щоб

$$\lambda_{\max}\left(\Lambda+F\right)+\lambda_{\max}\left(M+G\right)<0 . \qquad (14)$$

У цьому випадку справджується (13).

Припустимо, що $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ – впорядковані за спаданням від'ємні дійсні числа. Знайдемо таке керування $U\left(X\right)$, що

$$s_k\left(A+P\right)+s_k\left(B+Q\right)=\sigma_k , \qquad (15)$$

де $s_k\left(A+P\right)$, $s_k\left(B+Q\right)$ – власні числа матриць $A+P$, $B+Q$ відповідно, $k=1, 2, ..., n$. Позначимо:

$$\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n} .$$

Умова (15) еквівалентна до

$$\Lambda + F + M + G = \Sigma . \qquad (16)$$

Таким чином, (14) буде виконуватися, оскільки

$$\lambda_{\max}\left(\Lambda+F\right)+\lambda_{\max}\left(M+G\right)=\sigma_1<0 .$$

Покладемо:

$$F = G = \frac{1}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\left(\Lambda + M\right) . \qquad (17)$$

Тоді справджується (16). Враховуючи, що $P = H_1^T F H_1$, $Q = H_2^T G H_2$, одержимо таку теорему.

Теорема 3. *Керування (11) при*

$$P = \frac{1}{2}H_1^T\left(\Sigma - \Lambda - M\right)H_1,\ \ Q = \frac{1}{2}H_2^T\left(\Sigma - \Lambda - M\right)H_2$$

розв'язує задачу стабілізації матричного рівняння (10) з умовою

$$s_k\left(A+P\right)+s_k\left(B+Q\right)=\sigma_k ,$$

де $s_k\left(A+P\right)$, $s_k\left(B+Q\right)$ *– власні числа матриць* $A+P$, $B+Q$ *відповідно,* $k=1, 2, ..., n$, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ *– впорядковані за спаданням від'ємні дійсні числа,* $\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right)$, H_1, $H_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *– ортогональні матриці, які утворені за допомогою ортонормованих систем власних векторів матриць* A *та* B *відповідно.*

Припустимо, що при розв'язуванні задачі стабілізації матричного рівняння (10) в класі керувань з оберненим зв'язком вигляду (11) задано обмеження на матриці P, Q вигляду:

$$tr\left(P^2\right)+tr\left(Q^2\right)\le r^2 , \qquad (18)$$

де $r>0$. У цьому випадку помічаємо, що

$$tr\left(P^2\right)=tr\left(\left(H_1 P H_1^T\right)^2\right)=tr\left(F^2\right),\ \ tr\left(Q^2\right)=tr\left(\left(H_2 Q H_2^T\right)^2\right)=tr\left(G^2\right).$$

Тоді обмеження (18) еквівалентні до

$$tr\left(F^2\right)+tr\left(G^2\right)\le r^2 . \qquad (19)$$

Позначимо:

$$\theta_k = \lambda_k + \mu_k, \ k \in I ;$$

$$I_0 = \{k \in I : \theta_k = 0\}, \ I_- = \{k \in I : \theta_k < 0\}, \ I_+ = \{k \in I : \theta_k > 0\} .$$

Припустимо, що

$$2\sum_{k\in I_+} \theta_k^2 < r^2 .$$

Якщо $k \in I_-$, то в умові (15) покладемо $\sigma_k = \theta_k$. У випадку $k \in I_0$ в (15) визначимо $\sigma_k = -2\varepsilon$. При $k \in I_+$ покладемо $\sigma_k = -\theta_k - 2\varepsilon$. Тут $\varepsilon > 0$.

Матриці F, G визначаємо за формулою (17). Тоді обмеження (19) дають оцінку параметра $\varepsilon > 0$ у вигляді:

$$2\varepsilon^2 |I_0| + 2\sum_{k\in I_+} (\theta_k + \varepsilon)^2 \le r^2 ,$$

яку можемо записати так:

$$\varepsilon^2 \left(|I_0| + |I_+|\right) + 2\varepsilon \sum_{k\in I_+} \theta_k + \sum_{k\in I_+} \theta_k^2 - \frac{1}{2} r^2 \le 0 . \tag{20}$$

Тут $|I_0|$ – кількість елементів множини I_0, $|I_+|$ – кількість елементів множини I_+, $|I_0| + |I_+| > 0$. Нерівність (20) буде мати розв’язок, оскільки

$$\left(\sum_{k\in I_+} \theta_k\right)^2 - \left(|I_0| + |I_+|\right)\left(\sum_{k\in I_+} \theta_k^2 - \frac{1}{2} r^2\right) \ge 0 .$$

Підберемо $\varepsilon > 0$, яке задовольняє нерівності (20). Тоді має місце умова (19). Конструюємо матрицю $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. Далі розв’язування задачі стабілізації матричного рівняння (10) в класі керувань з оберненим зв’язком вигляду (11) при обмеженнях (18) здійснюємо за допомогою теореми 3.

Перспективи подальших досліджень. Надалі дослідження будуть спрямовані на створення методів розв’язування задачі стабілізації лінійного диференціального матричного рівняння з постійними матрицями та з майже постійними матрицями. Передбачається, що це дозволить побудувати алгоритми керування пучком траєкторій систем керування з використанням матричних диференціальних рівнянь.

Висновки. У статті обгрунтовано метод розв’язування задачі стабілізації матричного диференціального рівняння Ляпунова і лінійного матричного рівняння з симетричними постійними матрицями в класі лінійних керувань з оберненим зв’язком. Основна ідея методу полягає в тому, що керування визначає замкнене диференціальне рівняння, матриці якого задовольняють наперед заданим умовам щодо власних чисел, і які забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв’язку (умови обгрунтовані в [7]). Такий підхід є новим і розвиває постановки модального керування на випадок матричних диференціальних рівнянь. Крім того, обгрунтовані в статті результати застосовуються до розв’язування задачі стабілізації матричного рівняння Ляпунова і лінійного матричного диференціального рівняння з обмеженням на матриці функції керування.

Список літератури

1. *Fleming W. H.*, *Rishel R. W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. – Springer, 2012. – 222 p.
2. *Nakonechnyi O.*, *Podlipenko Y.* Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data. – River Publishers, 2021. – 224 p.
3. *Башняков О. М.*, *Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В.* Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
4. *Khalil H. K.* Nonlinear systems. – NJ : Prentice Hall, 2002. – 766 p.
5. *Barbu V.* Differential Equations. – Springer, 2016. – 224 p.
6. *Reid W. T.* Riccati Differential Equations. – Academic Press, 2012. – 226 p.
7. *Денисов К. І.*, *Пічкур В. В.* Аналіз стійкості розв’язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 2(9). – С. 49 – 55. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.02(9).06.
8. *Porter B.*, *Crossley R.* Modal Control. Theory and Applications. – Taylor & Francis, 1972. – 233 p.
9. *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – NY : Chelsea Publishing Company, 1959. – 276 p.
10. *Шахно С. М.* Чисельні методи лінійної алгебри. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 245 с.

References (transliterated)

1. Fleming W. H., Rishel R. W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer, 2012. 222 p.
2. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. *Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data*. River Publishers, 2021. 224 p.
3. Bashniakov O. M., Garashchenko F. G., Pichkur V. V. *Praktychna stiikist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical Stability, Estimations and Optimization]. Kyiv, Kyiv University Publ., 2008. 383 p.

4. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. NJ, Prentice Hall, 2002. 766 p.
5. Barbu V. *Differential Equations*. Springer, 2016. 224 p.
6. Reid W. T. *Riccati Differential Equations*. Academic Press, 2012. 226 p.
7. Denysov K. I., Pichkur V. V. Analiz stiikosti rozvyazkiv liniynogo matrychnogo dyferentsial'nogo rivnyannya z postiynymy koefitsientamy [Stability analysis of solutions of a linear matrix differential equation with constant coefficients]. *Visnyk Natsional'nogho tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychne modeliuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2025, no. 2(9), pp. 49–55. DOI: 10.20998/2222-0631.2025.02(9).06.
8. Porter B., Crossley R. *Modal Control. Theory and Applications*. Taylor & Francis, 1972. 233 p.
9. Gantmacher F. R. *The theory of matrices*. NY, Chelsea Publishing Company, 1959. 276 p.
10. Shakhno S. M. *Chysel'ni metody liniynoyi algebry* [Numerical methods of linear algebra]. Lviv, LNU im. I. Franka Publ., 2007. 245 p.

Надійшла (received) 30.09.2025; Доопрацьована (finalized) 06.01.2026; До публікації (for publication) 15.01.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Башняков Олександр Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0009-0005-2272-0951; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Bashniakov Oleksandr Mykolaiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0009-0005-2272-0951; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Денисов Костянтин Ігорович – студент першого курсу магістратури та інженер кафедри моделювання складних систем факультету комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0009-0001-5525-2753; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Denysov Kostiantyn Ihorovych – first-year Master's student of the Department of Complex Systems Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0009-0001-5525-2753; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Матвієнко Володимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5946-2942; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Matvienko Volodymyr Tyhonovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5946-2942; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5641-8145; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5641-8145; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Таірова Марія Сергіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики, факультет математики, фізики та інформаційних технологій, Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м. Одеса; тел.: +38(048) 723-12-23; ORCID: https://orcid.org/0009-0001-5609-2552; e-mail: mason@onu.edu.ua.

Tairova Mariia Serhiivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Optimal Control and Economic Cybernetics, Odesa I. I. Mechnikov National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Odesa; tel.: +38(048) 723-12-23; ORCID: https://orcid.org/0009-0001-5609-2552; e-mail: mason@onu.edu.ua.