

Ю. М. АНДРЕЄВ, Г. В. ШАБАНОВ

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ ШЕСТИСТУПЕНЕВИХ КУТОВИХ МАНІПУЛЯТОРІВ З УРАХУВАННЯМ НЕСПІВВІСНОСТЕЙ

У цій статті представлено розвиток аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики для кутових маніпуляторів із шістьма ступенями вільності типу PUMA-560, попередні версії якого були викладені авторами в попередніх публікаціях. Алгоритм базується на умові Піпера, згідно з якою осі обертання трьох останніх ланок перетинаються в одній точці. Це дозволяє розкласти задачу визначення узагальнених координат маніпулятора на дві підзадачі: задачу позиціонування, тобто розміщення центру зап'ястя в заданій точці, та задачу орієнтації, тобто вирівнювання кінцевого ефектора із заданою його просторовою орієнтацією. Вказані положення для кожного моменту часу повинні визначатися з умов використання маніпулятором виробничого завдання. Розбиття всієї задачі на транспортну і орієнтаційну зводить проблему визначення шести кутів відносних поворотів ланок до аналітичного визначення тільки 3-х невідомих в кожній підзадачі. Для моделей маніпуляторів, які повністю задовольняють умову Піпера, обидві підзадачі розв'язуються точно за формулами замкнутої форми, запропонованими в статті. Для моделей, в яких умова Піпера виконується лише частково, а саме, коли осі п'ятої та шостої ланок перетинаються, але їхня точка перетину не збігається з віссю обертання четвертої ланки, задачі позиціонування та орієнтації розв'язуються за допомогою простої ітераційної процедури оцінки кута повороту четвертої ланки. Показано, що для розглянутих моделей цей процес сходиться за три ітерації. Сама задача орієнтації тут розв'язується за допомогою кватерніонних рівнянь і тому не містить проблем виродження, пов'язаних із сингулярністю. Ефективність запропонованого алгоритму демонструється шляхом розв'язання задач оберненої кінематики для трьох моделей маніпуляторів: PUMA-560, ABB (IRB 460) та маніпулятора, розробленого Vertical. Основні відмінності між запропонованим алгоритмом та попередніми підходами авторів полягають у використанні більш прозорих геометричних міркувань, включенні випадків, що стосуються порушень умови Піпера, та застосуванні кватерніонів для розв'язання задачі орієнтації. Отримані формули та алгоритми були перевірені шляхом порівняння результатів розв'язків прямої та зворотної кінематики для трьох моделей роботів.

Ключові слова: кінематика роботів, пряма і обернена задача кінематики, аналітичні рішення, кутовий маніпулятор, кватерніони орієнтації, кватерніонні рівняння, метод простої ітерації.

YU. M. ANDRIEIEV, H. V. SHABANOV

ANALYTICAL SOLUTION OF THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM FOR SIX-DEGREE-OF-FREEDOM ARTICULATED MANIPULATORS WITH AXIS MISALIGNMENTS

This article presents the development of an analytical algorithm for solving the inverse kinematics problem for angular manipulators with six degrees of freedom of the PUMA-560 type, previous versions of which were presented by the authors in previous publications. The algorithm is based on the Pieper condition, according to which the axes of rotation of the last three links intersect at a single point. This makes it possible to decompose the problem of determining the generalized coordinates of the manipulator into two subproblems: a positioning problem, i.e. placing the wrist center at a prescribed point, and an orientation problem, i.e., aligning the end-effector with a prescribed spatial orientation. For each instant of time, these prescribed position and orientation parameters are determined by the requirements of the manipulator's operating task. Such a decomposition reduces the problem of determining all six relative joint angles to the analytical determination of only three unknowns within each subproblem. For manipulator models that fully satisfy the Pieper condition, both subproblems are solved exactly by the closed-form formulas proposed in the paper. For models in which the Pieper condition is satisfied only partially, namely when the axes of the fifth and sixth links intersect but their intersection point does not coincide with the axis of rotation of the fourth link, the positioning and orientation problems are solved within a simple iterative procedure for evaluating the rotation angle of the fourth link. It is shown that, for the models considered, this process converges in three iterations. The orientation problem itself is solved here using quaternion equations and is therefore free from singularity-related degeneracy issues. The performance of the proposed algorithm is demonstrated by solving the inverse kinematics problems for three manipulator models: the PUMA-560, ABB (IRB 460), and a manipulator developed by Vertical. The main differences between the proposed algorithm and the authors' earlier approaches are the use of more transparent geometric reasoning, the inclusion of cases involving violations of the Pieper condition, and the application of quaternions to solve the orientation problem. The derived formulas and algorithms were verified by comparing the results of the forward and inverse kinematics solutions for the three robot models.

Key words: robot kinematics, forward and inverse kinematics, analytical solution, articulated manipulator, orientation quaternions, quaternion equations, simple iteration method.

Вступ. Для розв'язання оберненої задачі кінематики кутових 6-ступеневих маніпуляторів типу ПУМА-560 у цій статті розвивається аналітичний алгоритм, попередні версії якого публікувалися авторами в статтях [1 – 3]. Вказані алгоритми базуються на відомому підході Піпера [4, 5], який використовує факт перетину осей обертання останніх трьох ланок в одній вузловій точці механізму. Це дозволяє розбити всю задачу для визначення 6 узагальнених координат пристрою на транспортну задачу доставки вузлової точки в задане положення та орієнтаційну задачу збігання вихідної ланки з її заданим просторовим положенням. Такі положення вузлової точки і вихідної ланки повинні визначатися з умов використання маніпулятором виробничого завдання. Розбиття всієї оберненої задачі на транспортну і орієнтаційну зводить проблему визначення 6-ти узагальнених координат (кутів відносних поворотів ланок) до того, що в кожній з підзадач визначається тільки по 3 невідомим. Причому в моделях маніпуляторів, де повністю виконується умова Піпера, обидві задачі за пропозиціями тут прямими формулами розв'язуються точно. У моделях, де умова Піпера задовольняється частково (перетинаються осі 5-ї та 6-ї ланки і точка їх перетинання не збігається з віссю повороту 4-ї), транспортна та орієнтаційна задачі розв'язуються в рамках простого ітераційного процесу розрахунку кута повороту 4-ї ланки. Такий процес збігається за 3 ітерації. Сама орієнтаційна задача розв'язується тут за допомогою кватерніонних рівнянь, тому позбавлена проблем виродження. Формули переходу від отриманого кватерніону орієнтації вихідної ланки щодо 3-ї ланки до кутів повороту ланок № 4, 5 та 6 аналізуються на виродження і однозначність. Робота запропонованого

алгоритму демонструється розв'язанням обернених задач кінематики 3-х моделей 6-ступеневих кутових маніпуляторів (ПУМА-560, IRB 460 та фірми Vertical). Відмінності пропонованого тут алгоритму від пропонованих і розглянутих раніше [1 – 3] полягають у використанні більш прозорих геометричних викладках, включенні в алгоритм випадків порушення умов Піпера, використанні кватерніонів для розв'язання орієнтаційної задачі.

Перевірку отриманих формул та алгоритмів було проведено шляхом порівняння результатів розв'язань прямої і оберненої задачі кінематики для трьох моделей роботів-маніпуляторів.

Аналіз останніх досліджень. Незважаючи на те, що 6-ступеневі маніпулятори з'явилися більше півстоліття тому, проблеми розв'язання їх задач динаміки та кінематики і сьогодні є популярними [1 – 20]. Розв'язання задач оберненої кінематики є ключовим кроком у розробці систем керування для роботів та маніпуляторів [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Сьогодні обернена задача кінематики роботів та маніпуляторів розв'язуються як аналітичними [1 – 3, 5], так і числовими методами [1, 11, 19, 20]. Їх поєднання також є життєздатним підходом [1]. Нещодавно були розроблені методи, які в деяких випадках продемонстрували свою ефективність і поєднують традиційні підходи з методами штучного інтелекту [12, 13]. Незважаючи на ці досягнення, класичні аналітичні та числові методи залишаються основним засобом розв'язання таких задач. Геометричні методи широко використовуються [1, 2, 3, 14 – 16]. Одним із підходів, який отримав широке поширення в останні роки, є реалізація алгебри кватерніонів [2, 3] та бікватерніонів [17, 18]. Їх використання в деяких випадках зменшує обчислювальну складність та усуває сингулярності [17].

У багатьох випадках використовуються числові методи [1, 11, 19, 20]. Хоча в найзагальніших випадках отримання рішень без їх використання неможливе, одним з їхніх головних недоліків є відсутність числової стійкості та необхідність великої кількості обчислювальних операцій для досягнення збіжності рішень. При використанні будь-яких методів може виникати питання нормалізації значень кутів у кінематичних парах [1]. Починаючи з фундаментальної статті Денавіта та Хартенберга [21], яка встановила стандартний формалізм для опису механізмів з кінематичними парами п'ятого класу, більшість досліджень застосовують цей підхід (див. нещодавні публікації, наприклад, [10]).

Постановка задачі. У статті поставлено задачу побудови універсального аналітичного алгоритму розв'язання оберненої задачі кінематики 6-ступеневих кутових маніпуляторів, які відповідають умові Піпера. Протестувати його роботу на трьох моделях маніпуляторів: класичному – ПУМА-560 та сучасних – IRB 460 і спроектованому в фірмі Vertical. Дослідити його працездатність та ефективність. Особливістю цих моделей є те, що в них має місце неспіввідповідності деяких сусідніх кінематичних пар. Зазвичай такий факт призводить до руйнування чисто аналітичних методів. Але в даному випадку запропоновано невеличке ускладнення – додається ітераційний процес визначення кута повороту четвертої ланки. У статті розглядається швидкість збіжності такого ітераційного процесу.

Обернена задача кінематики маніпуляторів полягає у визначенні узагальнених координат робота при відомому положенні та орієнтації кінцевої ланки [22]. За узагальнені координати в кутових маніпуляторах, приклади яких розглядаються в даній статті, найчастіше приймають відносні кути поворотів ланок одна відносно однієї. Навпаки, пряма задача кінематики таких пристроїв дає можливість розрахувати положення і орієнтацію будь-якої ланки за відомими узагальненими координатами. Якщо задавати положення і орієнтацію ланок робота за допомогою чотиривимірних матриць (наприклад, як в методі Денавіта-Хартенберга [21, 22]), то визначення положення кінцевої ланки через такі кути для моделей, що тут розглядаються, можна зробити за формулою:

$$T_{(6)}^{(0)} = T_{(1)}^{(0)} \{\varphi_1\} \cdot T_{(2)}^{(1)} \{\varphi_2\} \cdot T_{(3)}^{(2)} \{\varphi_3\} \cdot T_{(4)}^{(3)} \{\varphi_4\} \cdot T_{(5)}^{(4)} \{\varphi_5\} \cdot T_{(6)}^{(5)} \{\varphi_6\}, \quad (1)$$

де $T_{(i)}^{(j)}$ – позначення матриць перетворення координат точок, заданих у системі координат i – i ланки, в системі координат j – j (нулем позначена абсолютна система координат «стійки»); елементи таких матриць виражаються через геометричні параметри ланок і кути їх поворотів $\varphi_1 - \varphi_6$.

Таким чином, якщо пряма задача розв'язується безпосередньою підстановкою в праву частину (1) кутів $\varphi_1 - \varphi_6$, то розв'язання оберненої задачі пов'язано з пошуком розв'язків трансцендентних рівнянь високого ступеня (1), де задане положення і орієнтація вихідної ланки визначає ліву частину, а невідомі кути $\varphi_1 - \varphi_6$ входять до правої частини.

Відоме аналітичне розв'язання оберненої задачі Крейга для ідеальної моделі маніпулятора ПУМА-560 [4].

У даній статті ставиться наступна задача: дати узагальнений підхід для аналітичного розв'язання оберненої задачі кінематики маніпуляторів, у яких виконано (або майже виконано) умову Піпера [20] при врахуванні неспіввідповідностей кінематичних пар.

Основна ідея такого підходу полягає у розбитті задачі на транспортну і орієнтаційну. Вихідними даними для транспортної задачі є задане положення в просторі останньої ланки – робочого інструменту або захвату, яке визначається із виробничого завдання робота, що виконується. Оскільки при конструктивному виконанні умови Піпера осі обертання трьох останніх ланок перетинаються в одній вузловій точці, то стають відомими її декарто-

ві координати в абсолютному просторі. З іншого боку, положення цієї точки повністю визначається кутами повороту лише перших трьох ланок. Шляхом розв'язання трикутників, що створюються цими ланками, вдається безпосередньо визначити три кути їх повороту. Це забезпечує розв'язання *транспортної задачі*. Одночасно, знання цих трьох кутів задає *орієнтацію* третьої ланки в абсолютному просторі. Тоді орієнтація останньої ланки визначається трьома кутами повороту її відносно третьої, положення якої вже визначено. У статті отримано кватерніонне рівняння відносно останніх трьох кутів і дано його аналітичний розв'язок.

У статті [1] нами для розрахунку останніх трьох кутів складалося матричне рівняння з відомою матрицею орієнтації останньої ланки щодо абсолютної системи координат і невідомою – матрицею орієнтації останньої ланки щодо третьої, абсолютна орієнтація якої задана кутами повороту перших трьох ланок. Після визначення такої невідомої отримувалися і кути повороту останніх ланок. Показано, що вдається на основі геометричних перетворень записати явні формули знаходження спочатку перших трьох кутів, а після них – останніх трьох.

У даній статті розв'язання орієнтаційної задачі здійснюється розв'язанням не матричного, а кватерніонного рівняння.

У випадку неспіввідності останніх ланок розв'язати транспортну задачу можливо тільки при відомому куті φ_4 . Тому розглядається можливість розв'язання задачі за допомогою спеціальної процедури на базі ітераційного визначення цього кута.

Таким чином, у роботі наступна задача: побудувати розв'язання транспортної задачі в умовах існування певних неспіввідностей, які порушують умову Піпера. А розв'язання орієнтаційної задачі будується тут через розв'язання кватерніонного рівняння, що має безумовні переваги відносно використання матричного. Конкретний вигляд вказаних рівнянь визначається конструкцією робота, тому на моделях трьох маніпуляторів демонструється розв'язання всієї оберненої задачі кінематики вказаного класу маніпуляторів.

Математична модель робота ПУМА. Почнемо з класичної моделі таких маніпуляторів – маніпулятора ПУМА-560. На рис. 1 показана схема маніпулятора ПУМА, його ступені свободи та системи координат ланок. У цьому маніпуляторі виконано умову Піпера – на рис. 1 вузлова точка помічена літерою K (білим кольором).

Розглянемо системи координат ланок (рис. 1):

- базова – $OXYZ$ (збігається з показаною системою $Ox_0y_0z_0$ на рис. 1): початок у точці O – проєкції осі першої кінематичної пари на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – доповнює систему координат до правої;
- першої ланки – «колони» – початок у точці O , повернута на кут φ_1 навколо вертикальної осі OA базової;
- другої ланки – «плеча» – початок у точці B , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі AB ;
- третьої ланки – «передпліччя» – початок у точці C , повернута відносно другої на кут φ_3 щодо осі, яка паралельна AB і проходить через точку C ;
- четвертої ланки – «зап'ястя» – початок у точці K – вузловій точки, де перетинаються осі повороту останніх трьох ланок, повернута на кут φ_4 навколо осі CK ;
- п'ятої ланки – «кисті» – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі перпендикулярної CK ;
- шостої ланки – «захвату» – початок у точці K , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо повздовжній осі захвату.

Відлік усіх кутів (крім φ_2) вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається. Обраний знак кута φ_2 в усіх розглянутих у статті моделях зумовлений тим, що при цьому деяка перевага надається конфігураціям маніпуляторів «лікоть зверху» [22], хоча це і не принципово.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від горизонтального напрямку «вперед» для паркувального положення маніпулятора;
- φ_2 – від горизонтальної осі до осі симетрії плеча;
- φ_3 – від осі симетрії ланки 2 до осі симетрії ланки 3;
- φ_4 – від горизонтального положення осі Ky_4 ;
- φ_5 – від осі, що перпендикулярна CK і розташована в вертикальній площині;
- φ_6 – від осі Ky_5 до осі Ky_6 .

Розв'язання транспортної задачі для маніпулятора ПУМА. Визначимо кути повороту перших трьох ланок механізму $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для заданого положення в просторі вузлової точки K . Побачимо, що така задача розв'язується повністю аналітично. Нижче наведені формули для конфігурації маніпулятора, яка відповідає кла-

сифікації [22], як «права рука» та «лікоть зверху». Отримати відповідні формули для інших конфігурацій за допомогою запропонованого тут методу нескладно.

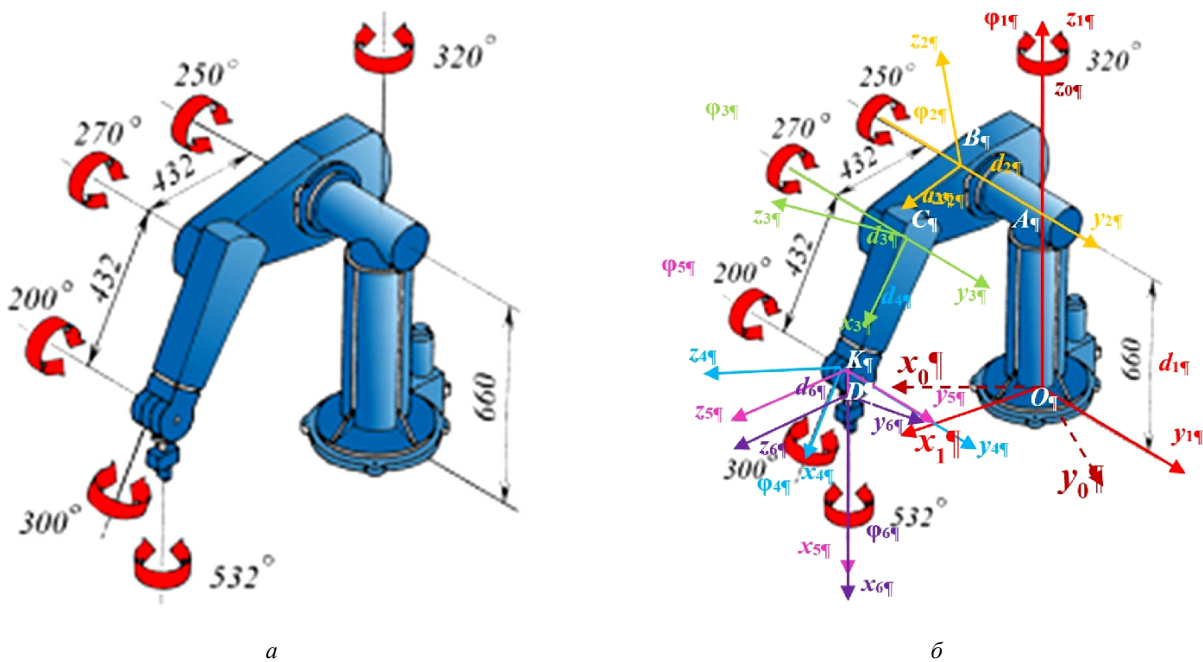


Рис. 1 – Схема маніпулятора ПУМВ: а – ступені вільності робота; б – системи координат ланок.

Конструктивною особливістю маніпулятора ПУМА є те, що вертикальна площина, в якій рухається вісь симетрії системи координат 3-ї ланки (рис. 1, б), не проходить через вісь обертання колони.

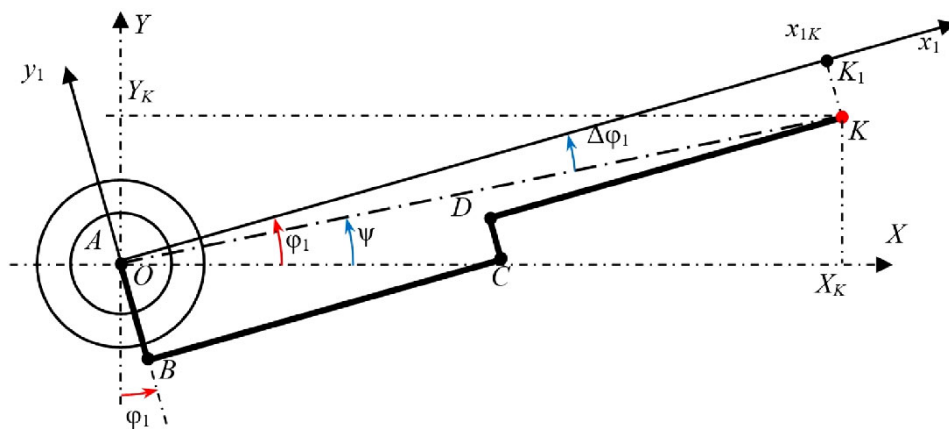


Рис. 2 – До визначення кута φ_1 – кута повороту колони.

тя (DC) та вузлової точки (K).

Проекції цих точок на горизонтальну площину позначені на рис. 2 цими самими літерами, що і самі точки. Звідси можна отримати формули, що дають нам кут повороту першої ланки:

$$KK_1 = AB - DC = d_2 - d_3; \quad y_{1K} = -KK_1; \quad x_{1K} = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 - y_{1K}^2}; \quad \Delta\varphi_1 = \arcsin \frac{KK_1}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}};$$

$$\psi = a \tan 2(Y_K, X_K); \quad \varphi_1 = \psi + \Delta\varphi_1. \quad (2)$$

Розглянемо рис. 3. Тут показано проекцію осей і характерних точок механізму ПУМА на координатну площину Ox_1z_1 системи координат першої ланки. Ще однією конструктивною особливістю ПУМА є те, що продовження осі обертання 4-ї ланки не перетинається з віссю повороту 3-ї. Має місце деяка відстань $C_2C_3 = a_3$. Це дещо ускладнює розв'язання трикутників для визначення кутів φ_2 та φ_3 . Побудуємо формули, що дадуть кути повороту другої та третьої ланки, що разом з визначеним раніше кутом повороту першої ланки φ_1 забезпечують збігання початку системи координат четвертої ланки із положенням вузлової точки K , яке визначено з умов використання маніпулятором цільового руху.

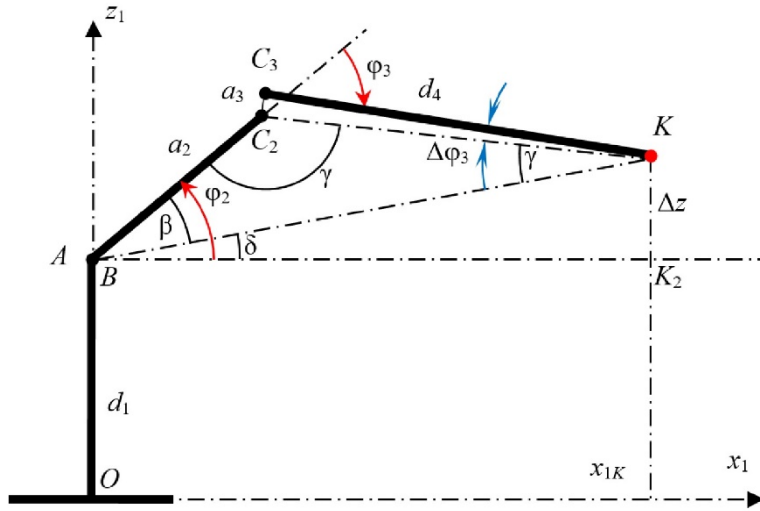


Рис. 3 – Проекція перших трьох ланок на площину Ox_1z_1 .

З рис. 3 послідовно знайдемо:

$$AC_2 = a_2; \quad C_2C_3 = a_3; \quad C_3K = d_4;$$

$$C_2K = \sqrt{d_4^2 + a_3^2}; \quad \Delta z = Z_K - d_1;$$

$$AK = \sqrt{x_{1K}^2 + (\Delta z)^2}. \quad (3)$$

Тоді з ΔAC_2K , ΔKC_2C_3 та ΔAKK_2

знайдемо кути:

$$\beta = \arccos \frac{(AC_2)^2 + (AK)^2 - (C_2K)^2}{2AC_2 \cdot AK};$$

$$\gamma = \arccos \frac{(AC_2)^2 + (C_2K)^2 - (AK)^2}{2AC_2 \cdot C_2K};$$

$$\delta = a \tan 2(\Delta z, x_{1K}); \quad \Delta \varphi_3 = a \tan 2(a_3, d_4);$$

$$\varphi_2 = \beta + \delta; \quad \varphi_3 = \pi - \gamma + \Delta \varphi_3. \quad (4)$$

Розв'язання орієнтаційної задачі для маніпулятора ПУМА за допомогою кватерніонів. Отримані вище за формулами (2) – (4) кути φ_1 , φ_2 і φ_3 визначають, крім розташування точки K відносно стійки маніпулятора, ще й орієнтацію у просторі системи координат «ліктя» CK (рис. 1, б).

Запишемо вираз для кватерніону повороту «ліктя» відносно абсолютної системи координат відповідно до послідовності поворотів на кути φ_1 , φ_2 і φ_3 множенням кватерніонів елементарних поворотів систем координат перших трьох ланок на ці кути:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(-\varphi_2) \circ \Lambda_y(\varphi_3) = \Lambda_z(\varphi_1) \circ \Lambda_y(\varphi_3 - \varphi_2), \quad (5)$$

де $Cxyz$ – скорочене позначення системи координат $Cx_3y_3z_3$ третьої ланки (рис. 1, б); Λ_y , Λ_z – кватерніони, що відповідають поворотам ланок навколо відповідних осей координат, кути в дужках беруться відповідно їхніх знаків відліку.

Кватерніони, що входять праворуч до виразу (5), є елементарними і задаються формулами:

$$\Lambda_z(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right); \quad \Lambda_y(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right).$$

Таким чином, кватерніон (5) отримує вигляд:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) - i_1 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_2 \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right). \quad (6)$$

Для отримання орієнтації «захвату» («робочого інструменту») «лікоть» треба повернути (рис. 1, б) на кути φ_4 , φ_5 і φ_6 у кінематичних парах, пов'язаних з точкою K . Орієнтація системи координат $Dx_6y_6z_6$ захвату в абсолютній системі координат (яка в подальшому для стислості позначена $Dxyz$) може визначатися через задану орієнтацію вихідної системи координат, а може – через кути поворотів ланок маніпулятора φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , φ_5 , φ_6 в кінематичних парах. Кватерніон орієнтації вихідної системи координат $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ відносно абсолютної представляється в цьому випадку добутком кватерніонів повороту від абсолютної системи координат $OXYZ$ до системи координат $Cxyz$ «ліктя» $\left(\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}\right)$ та повороту від системи координат $Cxyz$ «ліктя» до системи координат $Dxyz$ «захвату» $\left(\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}\right)$:

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}, \quad (7)$$

де кватерніон повороту від абсолютної системи координат до системи координат $Cxyz$ «ліктя» $\left(\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}\right)$ задається формулою (6).

Сформуємо кватерніон повороту системи координат $Cxyz$ «ліктя» до системи координат $Dxyz$ «захвату» за допомогою кватерніонів послідовності поворотів, які здійснюються при такому повороті на кути φ_4 , φ_5 і φ_6 (рис. 1, б):

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \Lambda_x(\varphi_4) \circ \Lambda_y(\varphi_5) \circ \Lambda_x(\varphi_6).$$

Відповідно до цього отримаємо вираз:

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_1 \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right) + i_2 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right) + i_3 \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \quad (8)$$

Таким чином, у рівнянні (7) невідомим буде кватерніон $\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}$, бо кватерніон $\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}$ задається формулою (6), а кватерніон $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ можна знайти з умов орієнтації «захвату» в робочому процесі (за положенням трьох точок захвату), як наведено в статтях [2, 3].

Запишемо розв'язок рівняння (7):

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(abs)}^{(Cxyz)} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}, \quad (9)$$

де $\tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} = \Lambda_{(abs)}^{(Cxyz)}$ – спряжений кватерніон кватерніону (6).

Проста форма (8) шуканого кватерніона (9) дозволяє знайти кути φ_4 , φ_5 , φ_6 останніх ланок маніпулятора.

Позначимо λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 – компоненти кватерніона $\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)}$, що отримуються через праву частину в формулі (9). З іншої сторони, їх можна знайти з виразу (8):

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); & \lambda_1 &= \cos\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 + \varphi_6}{2}\right); \\ \lambda_2 &= \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right); & \lambda_3 &= \sin\left(\frac{\varphi_5}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_6}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Звідси можна визначити кути φ_4 , φ_5 , φ_6 . На перший погляд здається, що

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 &= \cos^2 \frac{\varphi_5}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_5}{2} = \cos \varphi_5; \\ a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) + a \tan 2(\lambda_3, \lambda_4) &= \varphi_4; & a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) - a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2) &= \varphi_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Але тут може бути кілька особливих випадків. У другій та третій формулах виразу (11) це буде, коли або $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, або $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Розглянемо ці випадки.

1) $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Це може бути, коли

$$\cos \frac{\varphi_5}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi_5}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_5 = \pm \pi.$$

Але зауважимо, що такий випадок конструктивно не реалізується (φ_5 не може бути рівним $\pm \pi$)!

2) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Це може бути, коли

$$\sin \frac{\varphi_5}{2} = 0 \Rightarrow \varphi_5 = 0.$$

З формул для λ_0 та λ_1 рівнянь (10) можна знайти тільки суму кутів

$$\varphi_4 + \varphi_6 = 2a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0). \quad (12)$$

Що цілком зрозуміло. Якщо це реалізується при проході такого положення механізму, то або φ_4 можна взяти з попереднього кроку розрахунків і знайти з (12) φ_6 , або навпаки – задати φ_6 , а знайти φ_4 . Якщо потрібно реалізувати окреме таке положення механізму, ці кути можна взяти будь-якими, щоб сума дорівнювала величині, визначеній за формулою (12). Наприклад, можна взяти $\varphi_4 = \varphi_6$, тоді $\varphi_4 = a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2)$.

В інших випадках будемо використовувати формули:

$$\varphi_4 = a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) + a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2); \quad \varphi_5 = \arccos(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2); \quad \varphi_6 = a \tan 2(\lambda_1, \lambda_0) - a \tan 2(\lambda_3, \lambda_2). \quad (13)$$

Таким чином, розв'язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (2) – (4) та (13), де X_K , Y_K , Z_K , d_2 , d_3 , d_4 , a_3 – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 – параметри кватерніона

$$\Lambda_{(Dxyz)}^{(Cxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Cxyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)},$$

який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої ланки $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$.

Математична модель робота фірми Vertical. Для моделей цього робота, у яких виконується умова Піпера, розв'язання оберненої задачі кінематики розглянуто авторами в статті [1]. Тут розглянемо випадок порушення умови Піпера і отримаємо результати, що узагальнюють розглянуті в статті [1].

На рис. 4, а, б показана схема маніпулятора *Vertical*, що зібраний за схемою ПУМА, але відрізняється розмірами і конкретним виконанням ланок і кінематичних пар.

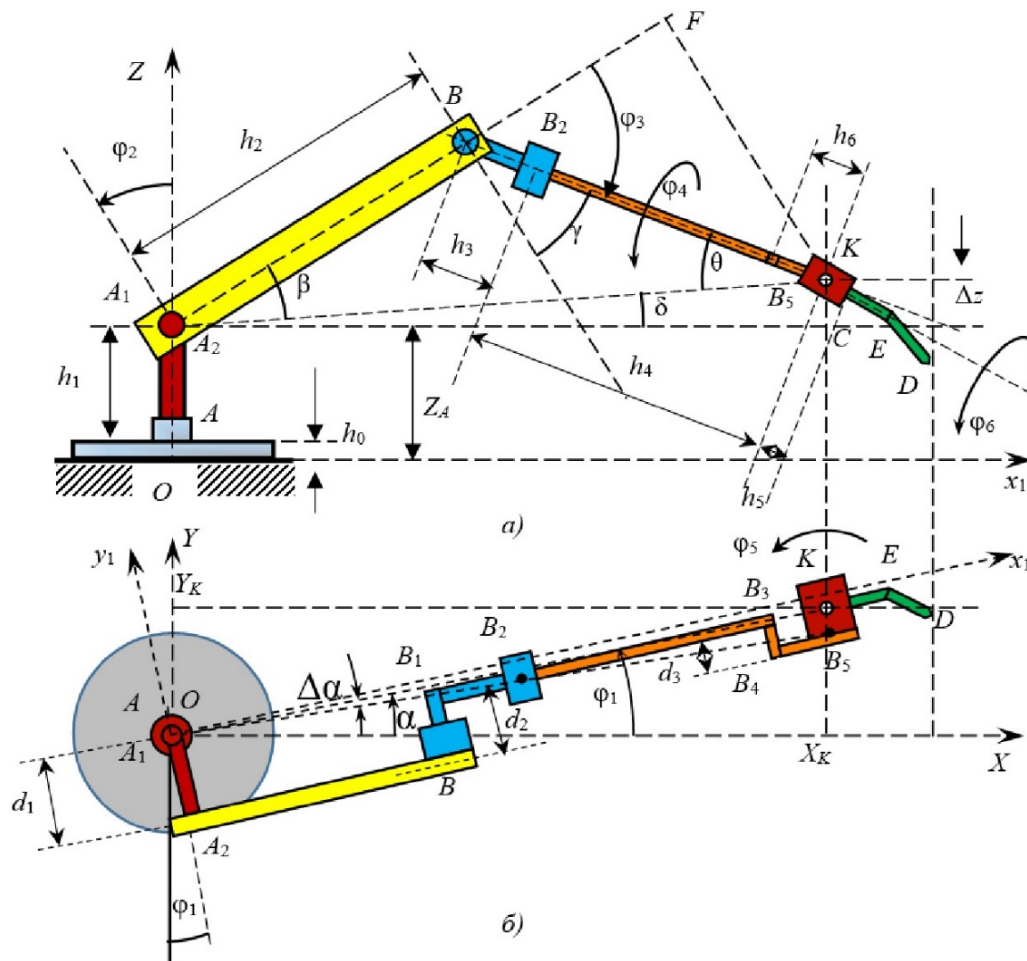


Рис. 4 – Схема робота Vertical: а – вигляд збоку; б – вигляд зверху.

Введемо системи координат ланок (рис. 4, а, б):

- базова: початок у точці O – проекції осі першого шарніра на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – горизонтально від нас;
- першої ланки – початок у точці A (на висоті h_0 над точкою O), повернута навколо базової на кут φ_1 щодо вертикальної осі AA_1 ;
- другої ланки – початок у точці A_1 , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі A_2A_1 (це її ось A_2y_2);
- третьої ланки – початок у точці B , повернута навколо другої на кут φ_3 щодо осі BB_1 паралельної A_2A_1 (це її ось B_2y_3);
- четвертої ланки – початок у точці B_2 , повернута навколо третьої на кут φ_4 щодо осі B_2B_3 (це її ось B_2x_4);
- п'ятої ланки – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі B_5K (це її ось Ky_5);
- шостої ланки – початок у точці K , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо осі KE (це її ось Kx_6).

Відлік усіх кутів, крім кута φ_2 , вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від перпендикуляра до осі першої кінематичної пари напрямку «вперед» для паркувального положення маніпулятора;
- φ_2 – від осі A_1z_1 до площини, що перпендикулярна осі симетрії ланки 2;
- φ_3 – від осі симетрії ланки 2 до осі симетрії ланки 3;
- φ_4 – від осі B_2y_3 до осі B_2y_4 ;
- φ_5 – від осі B_5x_4 до осі B_5x_5 ;
- φ_6 – від осі Ky_5 до осі Ky_6 .

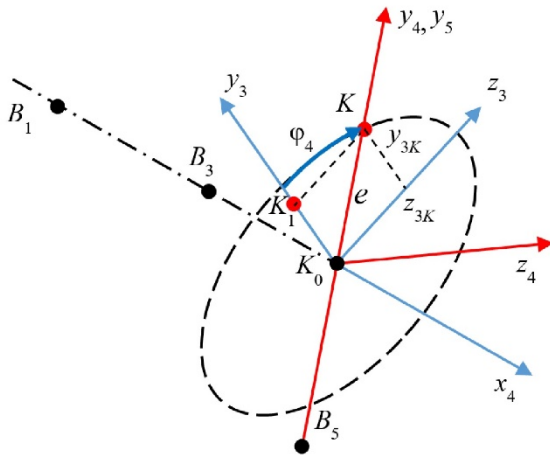


Рис. 5 – Розташування вузлової точки і осей координат при неспіввідності.

ординат ланки 3 (та ланки 4 при $\varphi_4 = 0$) – K_0y_3 та K_0z_3 , кут $\varphi_4 > 0$, положення повернутих осей системи координат 4-ї ланки – K_0y_4 та K_0z_4 , координати на осі K_0y_3 та K_0z_3 вузлової точки K для такого кута і неспіввідності e .

Вказані координати вузлової точки в осях φ_6 системи координат третьої ланки складають:

$$K_0K_1 = y_{3K} = e \cos \varphi_4; \quad K_1K = z_{3K} = e \sin \varphi_4. \quad (14)$$

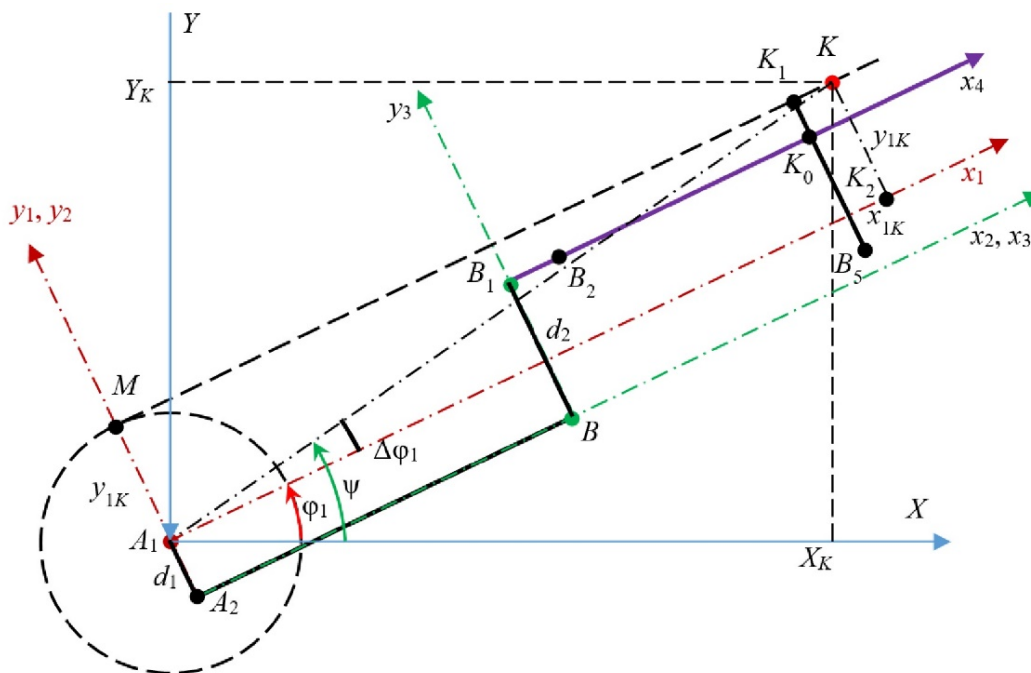


Рис. 6 – До отримання значень кута повороту першої ланки φ_1 .

Розв'язання транспортної задачі для маніпулятора фірми Vertical. Конструктивні особливості маніпулятора *Vertical* суттєво ускладнюють розв'язання оберненої задачі кінематики для нього. Це пояснюється наявністю паралельного зміщення осі B_2x_4 від площини OZx_1 (рис. 4, б) та розбіжності точок перетину осей повороту 5-ї ланки з осями повороту 4-ї та 6-ї (рис. 5). На підставі того, що величини цих зсувів можна задати: перше – в горизонтальній площині, а друге – як функцію кута повороту 4-ї ланки, існує точне аналітичне розв'язання задачі, яке зводиться до пошуку цього кута φ_4 на кожному кроці з неявно заданого трансцендентного рівняння. Покажемо це для цієї моделі маніпулятора.

На рис. 5, показано вісь повороту 4-ї ланки $B_1B_3x_4$, вузлова точка при відсутності неспіввідності – K_0 , положення напрямків осей ординат та аплікват системи координат ланки 3 (та ланки 4 при $\varphi_4 = 0$) – K_0y_3 та K_0z_3 , кут $\varphi_4 > 0$, положення повернутих осей системи координат 4-ї ланки – K_0y_4 та K_0z_4 , координати на осі K_0y_3 та K_0z_3 вузлової точки K для такого кута і неспіввідності e .

Вказані координати вузлової точки в осях φ_6 системи координат третьої ланки складають:

$$K_0K_1 = y_{3K} = e \cos \varphi_4; \quad K_1K = z_{3K} = e \sin \varphi_4. \quad (14)$$

Неспіввідність e виникає тому, що відстані $B_3B_4 = B_5K_0 = d_3$ та $B_5K = d_4$ відрізняються (рис. 4, б). Таким чином, $e = d_4 - d_3$.

Для представлення другої неспіввідності розглянемо рис. 6, де показано проєкції характерних точок та відрізків перших 5-ти ланок механізму маніпулятора на горизонтальну площину AXY .

Друга неспіввідність виникає тому, що відстані $A_1A_2 = d_1$ та $BB_1 = d_2$ відрізняються (рис. 4, б).

Запишемо необхідні формули, які дозволяють знайти кут φ_1 , який забезпечить суміщення проєкцій на площині AXY вузлової точки K механізму з її заданого положення, що визначається через положення і орієнтацію інструмента з умов виконання виробничої операції. Таким чином, нам відомі координати X_K та Y_K точки K та величини A_1A_2 , BB_1 , K_0K_1 , через які можна визначити неспіввідності. Таким чином,

$$y_{1K} = BB_1 - A_1A_2 + K_0K_1 = (d_2 - d_1) + (d_4 - d_3) \cos \varphi_4; \quad (15)$$

$$\Delta\varphi_1 = \arcsin \frac{y_{1K}}{\sqrt{X_K^2 + Y_K^2}}; \quad \psi = a \tan 2(Y_K, X_K); \quad \varphi_1 = \psi - \Delta\varphi_1. \quad (16)$$

Одночасно знайдемо для подальшого абсцису точку K в системі координат Ax_1y_1 :

$$x_{1K} = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2 - (y_{1K})^2}. \quad (17)$$

Розглянемо рис. 7, де показано проєкцію маніпулятора на площину Ox_1Z .

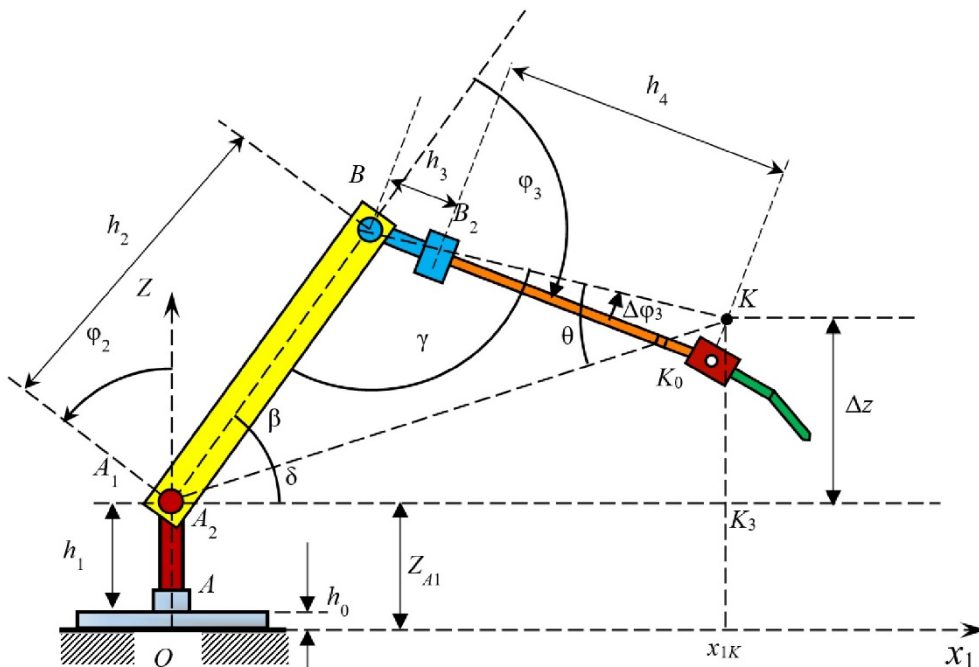


Рис. 7 – Проєкція механізму робота на вертикальну площину Ax_1Z .

Звідси послідовно отримаємо:

$$A_2B = h_2; \quad BK_0 = h_3 + h_4; \quad KK_0 = (d_4 - d_3) \sin \varphi_4; \\ BK = \sqrt{(BK_0)^2 + (KK_0)^2}; \quad \Delta z = Z_K - h_1 - h_0; \quad A_2K = \sqrt{x_{1K}^2 + (\Delta z)^2}. \quad (18)$$

Тоді з ΔA_2BK , ΔA_2KK_0 , ΔBKK_0 визначимо кути:

$$\beta = \arccos \frac{(A_2B)^2 + (A_2K)^2 - (BK)^2}{2A_2B \cdot A_2K}; \quad \gamma = \arccos \frac{(A_2B)^2 + (BK)^2 - (A_2K)^2}{2A_2B \cdot BK}; \\ \delta = a \tan 2(\Delta z, x_{1K}); \quad \Delta\varphi_3 = \arctg \frac{KK_0}{BK_0}; \quad \varphi_2 = \beta + \delta; \quad \varphi_3 = \pi - \gamma + \Delta\varphi_3. \quad (19)$$

Розв’язання орієнтаційної задачі для маніпулятора фірми Vertical в кватерніонах. Розв’язання такої задачі нічим не відрізняється від розв’язку для маніпулятора ПУМА і задається формулами (5) – (13). Тільки в формулах (5) – (9) треба замінити позначення систем координат в кватерніонах:

$$\Lambda_{(Cxyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}; \Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}; \Lambda_{(Exyz)}^{(abs)} \rightarrow \Lambda_{(K_2xyz)}^{(abs)}. \quad (20)$$

Тут, як і для маніпулятора ПУМА, використано спрощене позначення систем координат – B_2xyz та $Kxyz$ – замість повних $B_2x_3y_3z_3$ та $Kx_6y_6z_6$, відповідно.

Як бачимо, в тому випадку, коли відстань між точками K_0 і K (рис. 5 та формули (13)) буде дорівнювати нулю (буде виконано умову Піпера), відстані K_0K_1 та K_1K також будуть рівними нулю незалежно від величини кута φ_4 , то за формулами (15) – (19), та (6), (9), (12) або (13) з урахуванням перепозначень (20) одразу отримаємо розв'язок оберненої задачі кінематики такого маніпулятора. Проте при зазначеному порушенні умови Піпера, тобто коли параметр $e = d_4 - d_3$ в формулах (14) не буде нульовим, весь ланцюжок вказаних формул може бути розрахований тільки при заданій величині кута φ_4 . Тому пропонується виконати тут алгоритм простої ітерації – задати якесь значення такого кута, провести розрахунок за формулами (15) – (19), та (6), (9), (12) або (13) з урахуванням перепозначень (20), отримати значення всіх кутів, у тому числі і кута φ_4 . Взяти його за нове наближення і знову провести вказані розрахунки. І так, поки різниця між початковим і розрахованим його значенням на поточному кроці ітерації не буде відрізнятися із заданою точністю. Наші багаточисельні розрахунки показали, що такий процес (див. результати розрахунків нижче) досить швидко збігається (за 3 – 4 ітерації) і може бути рекомендований.

Таким чином, розв'язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (15) – (19) та (13), де $X_K, Y_K, Z_K, d_1, d_2, d_3, d_4, h_3, h_4$ – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметри кватерніону $\Lambda_{(Kxyz)}^{(B_2xyz)} = \tilde{\Lambda}_{(B_2xyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$, який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(B_2xyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої $\Lambda_{(Kxyz)}^{(abs)}$.

Математична модель палетизатора IRB 460. На рис. 8 показана схема маніпулятора *IRB 460*, що зібраний за схемою ПУМА, але відрізняється розмірами і конкретним виконанням ланок і кінематичних пар.

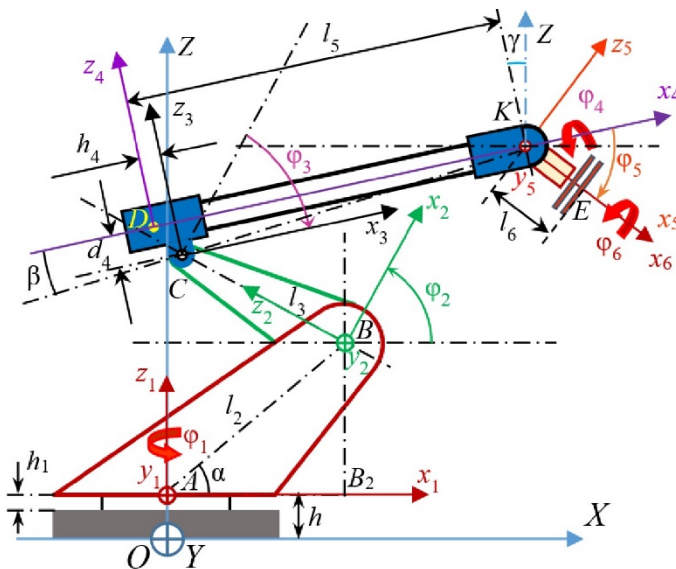


Рис. 8 – Кінематична схема робота *IRB 460*.

- третьої ланки – початок у точці C , повернута навколо другої на кут φ_3 щодо осі, яка паралельна осі OY та проходить через точку C (це її ось Cy_3);
- четвертої ланки – початок у точці K , повернута навколо третьої на кут φ_4 щодо осі Dx_4 – осі симетрії 4-ї ланки;
- п'ятої ланки – початок у точці K , повернута навколо четвертої на кут φ_5 щодо осі Ky_5 – осі симетрії 5-ї ланки;
- шостої ланки – початок у точці E , повернута навколо п'ятої на кут φ_6 щодо осі Ex_6 .

Відлік усіх кутів, крім кута φ_2 , вважається позитивним при повороті відповідної ланки проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця координатної осі ланки, навколо якої вона обертається.

Величини кутів відраховуються:

- φ_1 – від перпендикулярного осі першої кінематичної пари напрямку «вперед» для паркувального поло-

Введемо системи координат ланок:

- базова система координат: початок у точці O – проекції осі першої кінематичної пари на горизонтальну площину, вісь OX – горизонтально вперед у площині симетрії робота в паркувальному положенні, вісь OZ – вертикально вгору по осі першої кінематичної пари, вісь OY – горизонтально від нас;
- першої ланки – початок у точці A (на висоті $h + h_1$ над точкою O), повернута навколо базової на кут φ_1 щодо вертикальної осі OA ;
- другої ланки – початок у точці B , повернута навколо першої на кут φ_2 щодо осі, яка паралельна осі OY та проходить через точку B (це її ось B_2y_2);

ження маніпулятора;

- φ_2 – відлік від горизонтального положення ланки 2, коли точка C позаду від точки B ;
- φ_3 – відлік напрямку CD від напрямку BC або перпендикуляру до CD від перпендикуляру до BC ;
- φ_4 – відлік ланки 4 від площини симетрії ланки 3;
- φ_5 – відлік ланки 5 від горизонтального положення її осі;
- φ_6 – відлік від загального перпендикуляру осей повороту 4-ї та 5-ї ланок.

Розв’язання транспортної задачі для маніпулятора IRB 460. Конструктивні особливості маніпулятора IRB 460 суттєво ускладнюють розв’язання оберненої задачі кінематики для нього. Це пояснюється наявністю паралельного зміщення осі Dx_4 від площини OZx_1 (рис. 8) та розбіжністю точок перетину осі повороту 5-ї ланки з осями повороту 4-ї та 6-ї (рис. 9). На підставі того, що величини цих зсувів можна задати: перше – в горизонтальній площині, а друге – як функцію кута повороту 4-ї ланки, існує точне аналітичне розв’язання задачі, яке зводиться до пошуку цього кута φ_4 на кожному кроці з неявно заданого трансцендентного рівняння. Покажемо це для цієї моделі маніпулятора.

Підкреслимо, що відрізок K_0K_1 горизонтальний, а відрізок K_1K належить вертикальній площині, якій перпендикулярна площина кола з центром в точці K_0 .

На рис. 9 показано положення трьох систем координат ланок – № 3, № 4, № 5. Еліпсом показано коло з радіусом b_5 геометричного місця точок можливих положень початку системи координат 5-ї ланки відповідно куту повороту φ_4 4-ї ланки навколо осі Dx_4 . Приведено приклад розташування вузлової точки для якогось значення такого кута і координати такої точки в системі координат, яка відповідає значенню кута $\varphi_4 = 0$. Це будуть відрізки K_0K_1 та K_1K , які є ординатою та аплікатою точки K в такій системі координат, осі якої будуть паралельні осям системи координат 3-ї ланки

$$y_{3K} = b_5 \cos \varphi_4; \quad z_{3K} = b_5 \sin \varphi_4. \quad (21)$$

Розглянемо задачу визначення кутів повороту перших трьох ланок механізму $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ для заданого положення в просторі вузлової точки K у загальному випадку відсутності виконання умови Піпера (очевидно, що при постановці значення $b_5 = 0$ у формули, наведені нижче, отримаємо формули для випадку виконання умови Піпера).

Припустимо, що кут φ_4 повороту 4-ї ланки щодо осі Dx_4 відомий. Через точку K_0 проведемо дві осі, що показано пунктиром, які паралельні осям системи координат 3-ї ланки – це K_0y_3 та K_0z_3 (рис. 9).

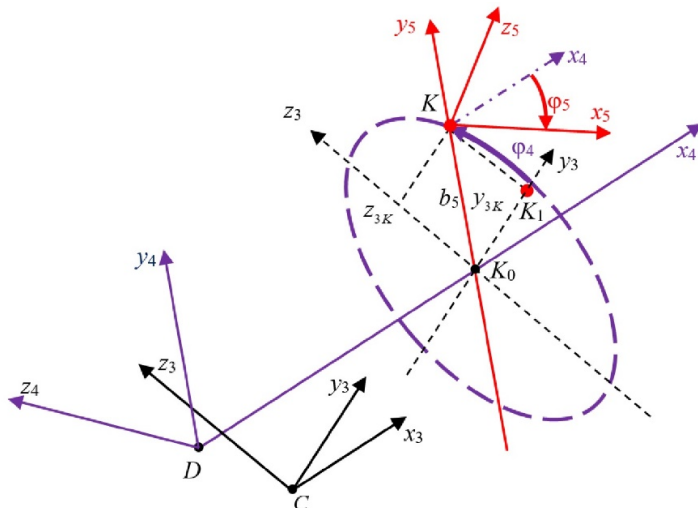


Рис. 9 – Розташування та перетворення систем координат 3-ї, 4-ї та 5-ї ланок.

Зауважимо, що вісь K_0y_3 , як і вісь Cy_3 , горизонтальна, оскільки горизонтальні осі обертання 2-ї та 3-ї ланок (рис. 8). На цій підставі отримаємо наступний рис. 10 шляхом проектування необхідних відрізків і осей механізму на горизонтальну площину (масштаб порушено для наочності). Тому всі точки на рис. 10 – це проєкції відповідних точок на горизонтальну площину.

Тут

$$KK_2 = BB_1 + K_0K_1 = b_2 + b_5 \cos \varphi_4;$$

$$AK = \sqrt{X_K^2 + Y_K^2}; \quad \psi = a \tan 2(Y_K, X_K);$$

$$\Delta \varphi_1 = \arcsin \frac{KK_2}{AK}; \quad \varphi_1 = \psi - \Delta \varphi_1;$$

$$AK_2 = \sqrt{AK^2 - (KK_2)^2};$$

$$B_2K_2 = AK_2 - AB_2. \quad (22)$$

Розглянемо проєкцію механізму робота на вертикальну площину Ax_1z_1 (рис. 11). Тут точка B – ось повороту другої ланки на кут φ_2 щодо першої, C – ось повороту 3-ї ланки на кут φ_3 щодо другої.

Розглянемо ΔBCK . У ньому сторона $BC = l_3$. Сторони BK та CK можна знайти з прямокутних трикутників $\Delta BKK'$ та $\Delta CKD'$.

Тут

Отже, поки різниця між початковим і розрахованим його значенням не буде відрізнятися на поточному кроці ітерації із заданою точністю. Наші багаточисельні розрахунки показали, що такий процес (див. результати розрахунків нижче) досить швидко збігається (за 3 – 4 ітерації) і може бути рекомендований.

Таким чином, розв’язання всієї оберненої задачі такого маніпулятора здійснюється за формулами (22) – (24) та (13), де X_K, Y_K, Z_K, b_2, b_5 – поточні координати вузлової точки та відомі розміри ланок; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – параметри кватерніону $\Lambda_{(Exyz)}^{(Dxyz)} = \tilde{\Lambda}_{(Dxyz)}^{(abs)} \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \} \circ \Lambda_{(Exyz)}^{(abs)}$, який визначається через кватерніон абсолютної орієнтації третьої ланки $\Lambda_{(Dxyz)}^{(abs)}$ і кватерніон орієнтації кінцевої $\Lambda_{(Exyz)}^{(abs)}$.

Результати. Тестування отриманих в роботі рішень обернених задач розглянутих маніпуляторів здійснювалося шляхом порівняння конфігурацій, розрахованих при розв’язанні обернених задач і заданих при вирішенні прямих задач. Наведемо результати для трьох розглянутих випадків для трьох маніпуляторів. Для перевірки аналітичних виразів і взагалі будь-яких нових підходів найбільший інтерес викликають випадки, коли рішення задач можуть мати математичні особливості. Слід зазначити, що наведені в статті формули подані в спрощеному вигляді для полегшення сприйняття. Річ у тому, що у формулах зустрічаються операції ділення, добування квадратного кореня та обчислення арктангенса. При реалізації цих формул обов’язково треба перевіряти їх аргументи на вродженість, що ускладнює їх вигляд і реалізацію. Але це питання не може викликати серйозну проблему. Тому формули надані без таких ускладнень. При викладанні розв’язання орієнтаційної задачі маніпуляторів розглянуто випадки виродження формул для кутів останніх ланок. Тому при тестуванні було спеціально розглянуто випадки їхнього виродження, яке може виникнути при нульових значеннях кутів повороту останніх ланок. Таким чином, у роботі було проведено розв’язання обернених задач кінематики всіх маніпуляторів для трьох випадків. Задавалися значення всіх шести кутів, на базі чого розв’язувалася пряма задача кінематики. Отримувалася відповідна конфігурація механізмів, з якої визначалися положення вузлової точки K (її декартові координати в абсолютній системі координат) та кватерніон орієнтації останньої ланки. Ці дані надавалися як початкові для розв’язання оберненої задачі. Задавалося початкове значення кута повороту четвертої ланки для старту ітераційного процесу її визначення. У рамках кожного кроку такого процесу розв’язувалася обернена задача кінематики та визначалися всі кути, зокрема і кут четвертої ланки. При досягненні заданої точності визначення такого кута отримувалася відповідна конфігурація механізму, яка порівнювалася з вихідною в прямій задачі. Ці конфігурації порівнювалися по значенню отриманих кутів і координат характерних точок механізму. При цьому в усіх проведених розрахунках практично досягалася машинна точність. Це пояснюється тим, що використовувалися точні аналітичні формули. Таким чином, без урахування ітераційного процесу визначення кута повороту четвертої ланки, можна сказати, що представлений у статті підхід дає можливість розв’язувати обернену задачу для широкого кола маніпуляторів аналітичним алгоритмом, подібно до розв’язання прямої задачі – прямим розрахунком невідомих – кутів повороту ланок через відомі – положення та орієнтацію кінцевої ланки і геометричні параметри за отриманими формулами.

Для визначення працездатності розроблених алгоритмів проводилися для кожного маніпулятора розрахунки для таких наборів значень кутів: всі кути нульові; кути перших трьох ланок задавалися зі значеннями $\varphi_1 = 10^\circ, \varphi_2 = 20^\circ, \varphi_3 = 30^\circ$, інші – нульові; кути повороту всіх ланок ненульові зі значеннями $\varphi_1 = 10^\circ, \varphi_2 = 20^\circ, \varphi_3 = 30^\circ, \varphi_4 = 40^\circ, \varphi_5 = 50^\circ, \varphi_6 = 60^\circ$. Окремо контролювалося значення кута φ_4 в ітераційному процесі його визначення. Нижче представлено отримані конфігурації розглянутих маніпуляторів і приклад збігання кута φ_4 . На рис. 12 – 17 показано характерні точки механізмів, що з’єднані прямими.

1. Розрахунки для нульових кутів (рис. 12, 13).

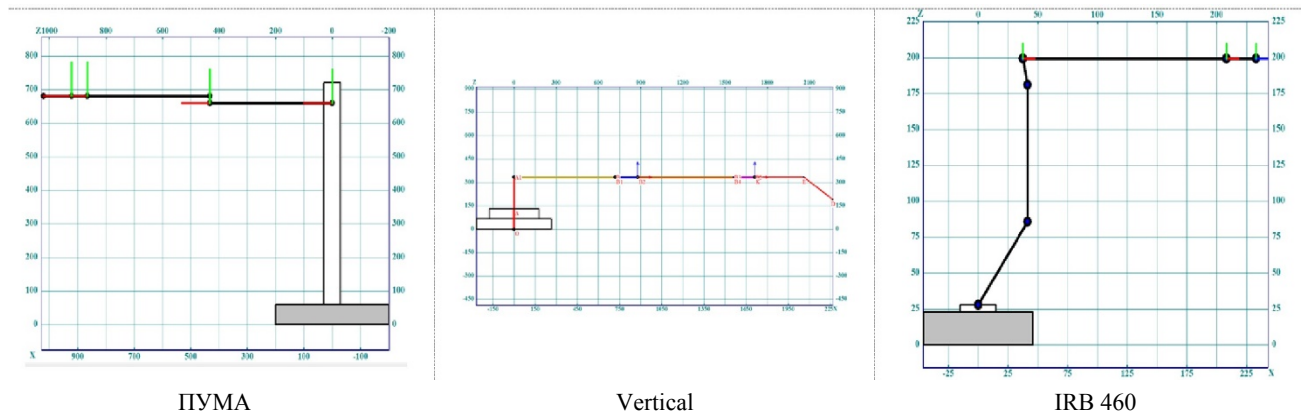


Рис. 12 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

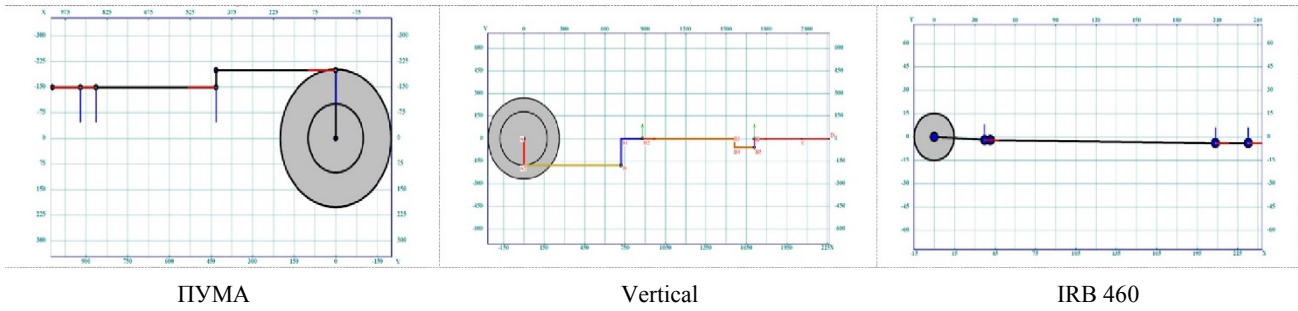


Рис. 13 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

2. Розрахунки для нульових кутів останніх трьох ланок і значень кутів перших $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$ (рис. 14, 15).

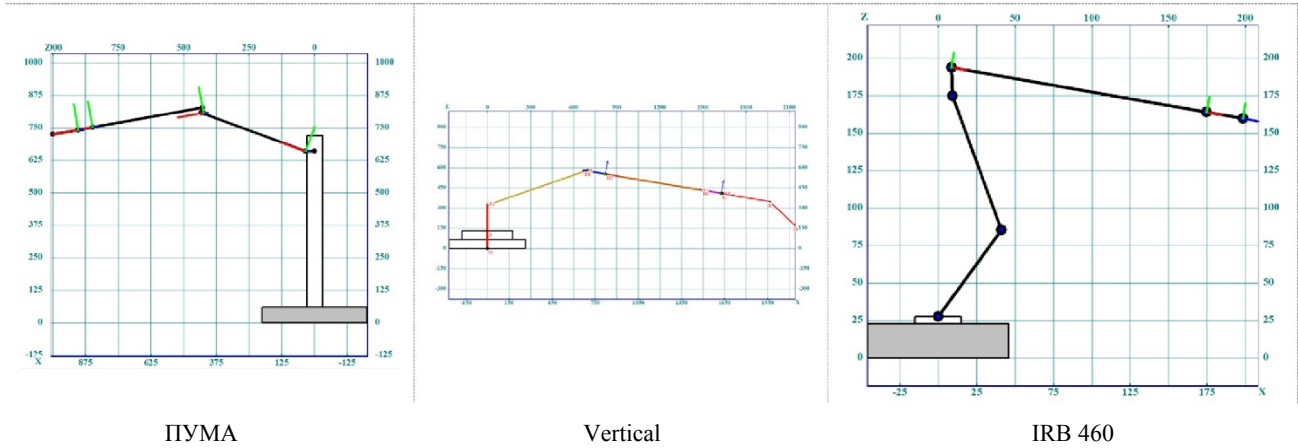


Рис. 14 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

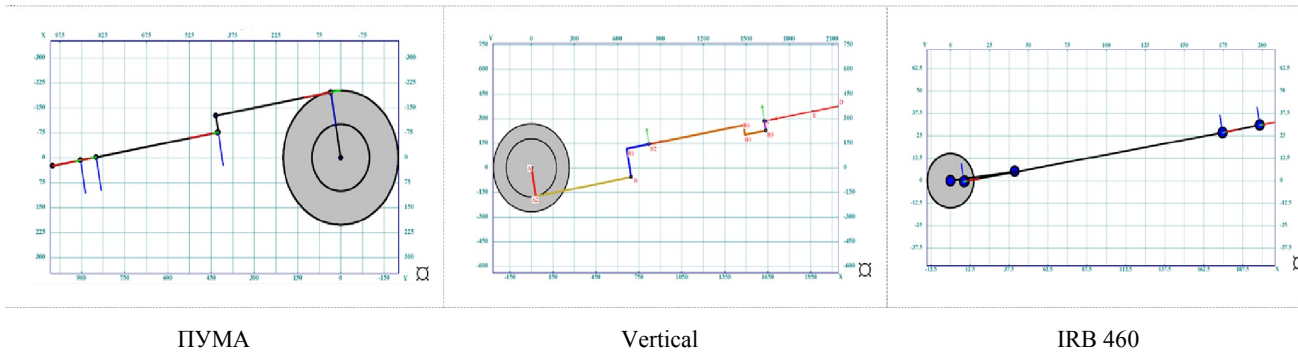


Рис. 15 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

3. Розрахунки для значень кутів $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\varphi_4 = 40^\circ$, $\varphi_5 = 50^\circ$, $\varphi_6 = 60^\circ$ (рис. 16, 17).

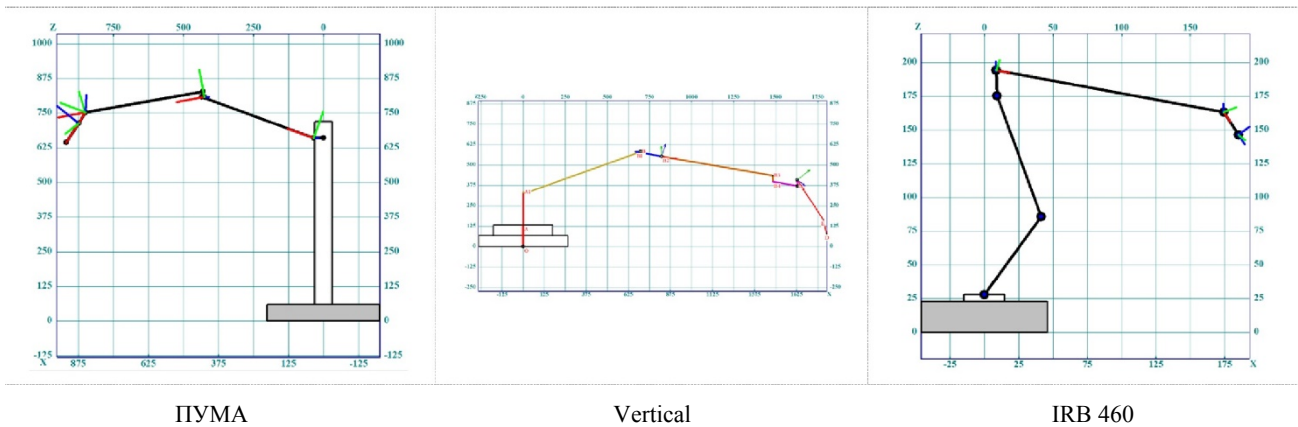


Рис. 16 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд збоку).

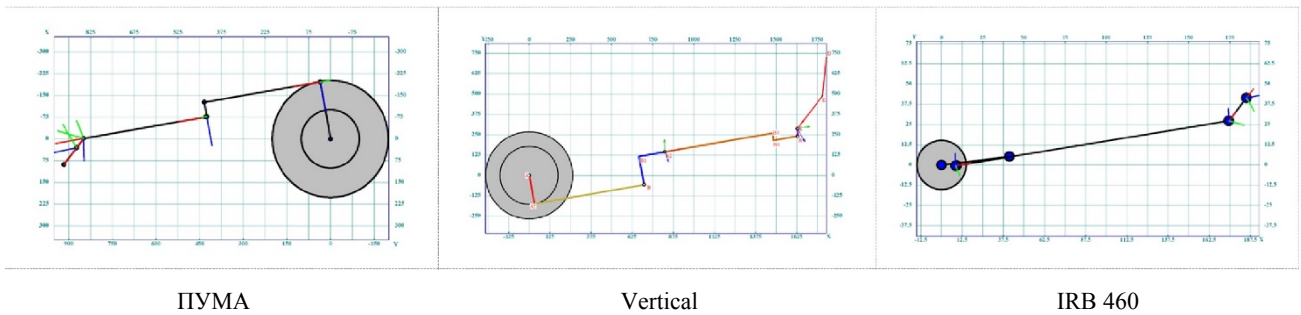


Рис. 17 – Розраховані конфігурації маніпуляторів (вигляд зверху).

Продемонструємо роботу методу простої ітерації в процесі розв'язання оберненої задачі для визначення кутів $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 20^\circ$, $\varphi_3 = 30^\circ$, $\varphi_4 = 40^\circ$, $\varphi_5 = 50^\circ$, $\varphi_6 = 60^\circ$ для робота IRB 460. У табл. 1 показано три варіанти старту ітераційного процесу пошуку значення кута φ_4 , що дорівнює 40° . Стартові значення тут: 0° , 320° , 720° .

Таблиця 1 – Збіжність значення кута φ_4 у методі простої ітерації

Варіанти розрахунків		Номер ітерації			
		1	2	3	4
Варіант 1	Початкове значення кута для поточної ітерації, $^\circ$	0	40,1554	39,9998	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,1554	39,9998	40,0000	40,0000
Варіант 2	Початкове значення кута φ_4 для поточної ітерації, $^\circ$	320	40,4537	39,9994	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,4537	39,9994	40,0000	40,0000
Варіант 3	Початкове значення кута φ_4 для поточної ітерації, $^\circ$	720	40,1554	39,9998	40,0000
	Отримане значення кута φ_4 в результаті поточної ітерації, $^\circ$	40,1554	39,9998	40,0000	40,0000

Перспективи подальших досліджень. Подальша робота може полягати в реалізації отриманих алгоритмів у рамках розв'язання задач управління рухом маніпуляторів розглянутого класу. Також потребує заміни використаний тут метод простої ітерації на більш надійні методи: Ньютона, половинного ділення, золотого перетину тощо, оскільки гарантувати збіжність методу простої ітерації у всіх випадках все ж таки проблематично.

Висновки. У статті розвинуто аналітичний алгоритм розв'язання оберненої задачі кінематики для кутових маніпуляторів із шістьма ступенями вільності типу PUMA-560, попередні версії якого були представлені авторами в попередніх публікаціях [1 – 3]. Алгоритм базується на умові Піпера, що дозволяє поділити задачу на дві підзадачі: задачу позиціонування та задачу орієнтації, що зводить проблему визначення шести кутів відносних поворотів ланок до аналітичного визначення тільки 3-х в кожній підзадачі. Для моделей маніпуляторів, що відповідають умові Піпера, обидві підзадачі розв'язуються точно за отриманими формулами. Для інших розглянутих моделей задача розв'язується за допомогою простої ітераційної процедури пошуку кута повороту четвертої ланки. Задача орієнтації розв'язується за допомогою кватерніонних рівнянь і тому не містить проблем виродження. Ефективність запропонованого алгоритму демонструється шляхом розв'язання задач оберненої кінематики для трьох моделей маніпуляторів: PUMA-560, АВВ (IRB 460) та маніпулятора, розробленого Vertical.

Список літератури

1. Andrieviev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom // Applied Sciences. – 2025. – 15(5):2840. DOI: 10.3390/app15052840.
2. Шабанов Г. В., Ю. М. Андрєєв. Аналітичне рішення оберненого і прямого завдання кінематики просторового кутового маніпулятора АВВ з подальшим 3D-моделюванням // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2 (2024). – С. 30 – 38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
3. Андрєєв Ю. М., Головня О. О., Шабанов Г. В. Автоматичний вибір конфігурації просторового маніпулятора з шістьма ступенями вільності

- сті на підставі енергетичних витрат на заданому русі // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2024. – № 2(7). – С. 13 – 23. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02(7).02.
4. Craig J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. – New Delhi, India : 3/E, Pearson Education, 2009. – 402 p.
 5. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. – John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2020. – 608 p.
 6. Neppalli S., Csencsits M. A., Jones B. A., Walker I. D. Closed-form inverse kinematics for continuum manipulators // *Adv. Robot.* – 2009. – № 23. – P. 2077–2091. DOI: 10.1163/016918609X12518783330274.
 7. Kucuk S., Bingul Z. Robot kinematics: Industrial robotics: Forward and inverse kinematics. In *Industrial Robotics // Theory, Modelling and Control*, INTECH OA. – Publ: London, UK, 2006, pp. 117 – 148.
 8. Kucuk S., Bingul Z. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators // In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, Istanbul, Turkey, 3–5 June 2004*. – 2004. – pp. 274 – 279. DOI: 10.1109/ICMECH.2004.1364441.
 9. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry // *Mech. Mach. Theory*. – 2021. – vol. 159. – 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
 10. Harada K., Yoshida E., Yokoi K. *Motion Planning for Humanoid Robots*. – Berlin/Heidelberg, Germany, Springer, 2010. – 302 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03991-2.
 11. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms // *Appl. Math. Inf. Sci.* – 2016. – vol. 10, 225. DOI: 10.12785/amis/100125.
 12. Csiszar A., Eilers J., Verl A. On solving the inverse kinematics problem using neural networks // In *Proceedings of the 24th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP) Auckland, New Zealand, 21–23 November 2017*. – 2017. – pp. 1 – 6. DOI: 10.1109/M2VIP.2017.8211481.
 13. Zaplana H., Hadfield I. H., Lasenby J. Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra // *Mech. Mach. Theory*. – 2022. – vol. 173. – 104835. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104835.
 14. Dong X., Yu J., Chen B., Zong G. Geometric approach for kinematic analysis of a class of 2-DOF rotational parallel manipulators // *Chin. J. Mech. Eng.* – 2012. – vol. 25. – P. 241 – 247. DOI: 10.3901/CJME.2012.02.241.
 15. Jones B. A., Walker I. D. Kinematics for multisection continuum robots // *IEEE Trans. Robot.* – 2006. – vol. 22. – P. 43–55. DOI: 10.1109/TRO.2005.861458.
 16. Chen L., Zielinska T., Wang J., Ge W. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions // *Int. J. Appl. Math. Comput.* – 2020. – vol. 30. – P. 351 – 361. DOI: 10.34768/amcs-2020-0027.
 17. Godage I. S., Walker I. D. Dual Quaternion based modal kinematics for multisection continuum arms // In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA, 26–30 May 2015*. – IEEE: New York, NY, USA, 2015. – P. 1416 – 1422. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139556.
 18. El-Sherbiny A., Elhosseini M. A., Haikal A. Y. A comparative study of soft computing methods to solve inverse kinematics problem // *Ain Shams Eng. J.* – 2018. – vol. 9. – P. 2535 – 2548. DOI: 10.1016/j.asej.2017.01.007.
 19. Xie S., Sun L., Wang Z., Chen G. A speedup method for solving the inverse kinematics problem of robotic manipulators // *Int. J. Adv. Robot. Syst.* – 2022. – vol. 19. – 17298806221104602. DOI: 10.1177/17298806221104602.
 20. Pieper D. *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Ph.D. Thesis. – Stanford University, Stanford, CA, USA, 1968. – 157 p.
 21. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices // *Int. Appl. Mech.* – 1955. – vol. 22. – no. 2. – pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 22. Фу К., Гонсалес Р., Лу К. *Робототехника* – М.: Мир, 1989. – 621 с. DOI: 10.1036/0070226253.

References (transliterated)

1. Andrieiev Y., Breslavsky D., Shabanov H., Naumenko K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom. *Applied Sciences*. 2025, 15(5), 2840. DOI: 10.3390/app15052840.
2. Shabanov H. V., Andrieiev Yu. M. Analitichne rishennya obrnennogo i pryamogo zavdannya kinematyky prostorovogo kutovogo manipulyatora AVV z podal'shym 3D-modelyuvannam [Analytical solution of the inverse and forward kinematics problems of a spatial articulated ABB manipulator with subsequent 3D modeling]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: *Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkiv: NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2(2024), pp. 30–38. DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.317116.
3. Andrieiev Yu. M., Holovnia O. O., Shabanov H. V. Avtomatychnyi vybir konfigratsiyi prostorovogo manipulyatora z shist'ma stepenyamy vil'nosti na pidstavi energetychnykh vytrat na zadanomu rusi [Automatic selection of the configuration of a spatial manipulator with six degrees of freedom based on energy consumption in a prescribed motion]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: *Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2024, no. 2(7), pp. 13–23. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.02(7).02.
4. Craig J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. New Delhi, India, 3/E, Pearson Education, 2009. 402 p.
5. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 2020. 608 p.
6. Neppalli S., Csencsits M. A., Jones B. A., Walker I. D. Closed-form inverse kinematics for continuum manipulators. *Adv. Robot.* 2009, vol. 23, pp. 2077–2091. DOI: 10.1163/016918609X12518783330274.
7. Kucuk S., Bingul Z. Robot kinematics: Industrial robotics: Forward and inverse kinematics. In *Industrial Robotics. Theory, Modelling and Control*, INTECH OA. Publ: London, UK, 2006, pp. 117–148.
8. Kucuk S., Bingul Z. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, Istanbul, Turkey, 3–5 June 2004*. 2004, pp. 274–279. DOI: 10.1109/ICMECH.2004.1364441.
9. Xiao F., Li G., Jiang D., Xie Y., Yun J., Liu Y., Huang L., Fang Z. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six-dof manipulator with simple geometry. *Mech. Mach. Theory*. 2021, vol. 159, 104265. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.104265.
10. Harada K., Yoshida E., Yokoi K. *Motion Planning for Humanoid Robots*. Berlin/Heidelberg, Germany, Springer, 2010. 302 p. DOI: 10.1007/978-3-642-03991-2.
11. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2016, vol. 10, 225. DOI: 10.12785/amis/100125.
12. Csiszar A., Eilers J., Verl A. On solving the inverse kinematics problem using neural networks. In *Proceedings of the 24th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP) Auckland, New Zealand, 21–23 November 2017*. 2017, pp. 1–6. DOI: 10.1109/M2VIP.2017.8211481.
13. Zaplana H., Hadfield I. H., Lasenby J. Closed-form solutions for the inverse kinematics of serial robots using conformal geometric algebra. *Mech.*

- Mach. Theory*. 2022, vol. 173, 104835. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.104835.
14. Dong X., Yu J., Chen B., Zong G. Geometric approach for kinematic analysis of a class of 2-DOF rotational parallel manipulators. *Chin. J. Mech. Eng.* 2012, vol. 25, pp. 241–247. DOI: 10.3901/CJME.2012.02.241.
 15. Jones B. A., Walker I. D. Kinematics for multisection continuum robots. *IEEE Trans. Robot.* 2006, vol. 22, pp. 43–55. DOI: 10.1109/TRO.2005.861458.
 16. Chen L., Zielinska T., Wang J., Ge W. Solution of an inverse kinematics problem using dual quaternions. *Int. J. Appl. Math. Comput.* 2020, vol. 30, pp. 351–361. DOI: 10.34768/amcs-2020-0027.
 17. Godage I. S., Walker I. D. Dual Quaternion based modal kinematics for multisection continuum arms. In *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, WA, USA, 26–30 May 2015*. IEEE, New York, NY, USA, 2015, pp. 1416–1422. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7139556.
 18. El-Sherbiny A., Elhosseini M. A., Haikal A. Y. A comparative study of soft computing methods to solve inverse kinematics problem. *Ain Shams Eng. J.* 2018, vol. 9, pp. 2535–2548. DOI: 10.1016/j.asej.2017.01.007.
 19. Xie S., Sun L., Wang Z., Chen G. A speedup method for solving the inverse kinematics problem of robotic manipulators. *Int. J. Adv. Robot. Syst.* 2022, vol. 19, 17298806221104602. DOI: 10.1177/17298806221104602.
 20. Pieper D. *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Ph.D. Thesis. Stanford University, Stanford, CA, USA, 1968. 157 p.
 21. Denavit J., Hartenberg R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Int. Appl. Mech.* 1955, vol. 22, no. 2, pp. 215–221. DOI: 10.1115/1.4011045.
 22. Fu K., Gonzalez R., Lee C. *Robototekhnika* [Robotics]. Moscow, Mir Publ., 1989. 621 p. DOI: 10.1036/0070226253.

Надійшла (received) 30.10.2025; Доопрацьована (finalized) 05.01.2026; До публікації (for publication) 17.02.2026

Відомості про авторів / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп’ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: yurii.andriev@khp.edu.ua.

Andriev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: yurii.andriev@khp.edu.ua.

Шабанов Геннадій Вікторович – аспірант кафедри комп’ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: Hennadii.Shabanov@infiz.khp.edu.ua.

Shabanov Hennadii Viktorovich – Graduate Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (050) 596-88-86; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8555-4693>; e-mail: Hennadii.Shabanov@infiz.khp.edu.ua.