



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХНУ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 2 (9)'2025

**Харків
2025**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№ 2 (9)'2025

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No. 2 (9)'2025

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

**Харків
НТУ «ХПІ», 2025**

**Kharkiv
NTU "KhPI", 2025**

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2025. — № 2 (9). — 162 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проєктування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців у галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Ідентифікатор медіа R30-02563 згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 11.01.2024 №33.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров Є. Є., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Кошовий Г. І., канд. фіз.-мат. наук, доц., ІРЕ НАНУ, Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Мюллер В. Г., д-р прир. наук, проф., Берлінський технічний університет, Німеччина;

Ніколаєв О. Г., д-р фіз.-мат. наук, проф., НАУ «ХАІ», Україна;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук, НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 7 від 26 червня 2025 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math.

Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Koshovy G., PhD, Phys.-Math. Sci., Accoc. Prof., IRE of NASU,

Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University

of Applied Sciences, Austria;

Müller W. H., Dr. rer. Nat, Dr.h.c., Prof., Technische Universität

Berlin, Germany;

Nikolaev O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NAU «KhAI», Ukraine;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE,

Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

О. М. БАШНЯКОВ, В. Т. МАТВИЄНКО, В. В. ПІЧКУР

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПУЧКА ТРАЄКТОРІЙ З НЕГЛАДКИМ КРИТЕРІЄМ ЯКОСТІ

Проблематика аналізу систем за умов детермінованої невизначеності на її початковий стан пов'язана з задачами практичної стійкості і оптимізації пучків траєкторій. Для задач параметричної оптимізації систем один з основних підходів полягає у формулюванні постановок з критеріями у формі максимуму за початковими умовами від функціоналу, який аналізується на розв'язках системи. Це, в свою чергу, спонукає до застосування методів негладкої оптимізації з врахуванням наявності параметричної системи і розробки обчислювальних методів, які є характерними для такої галузі. При цьому застосовується апарат узагальнених похідних і узагальнених диференціалів, обчислювальні методи є модифікаціями ітераційних процедур типу субградієнтного спуску в різних модифікаціях. Слід зазначити, що в таких задачах тільки в окремих випадках можна застосовувати алгоритми, характерні для опуклих функціоналів. У роботі розглядається задача з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу. Автори обґрунтовують теорему про структуру похідної за напрямком, а також необхідні умови екстремуму. На основі теоретичних результатів в роботі побудовано метод найшвидшого спуску. Для випадку лінійної системи з квадратичним критерієм якості застосовується метод координатного спуску і метод еліпсоїдів. Проведений обчислювальний експеримент та представлені результати обчислень. Слід зауважити, що застосування теоретичних результатів, які наводяться в роботі і пов'язані з методами негладкої оптимізації, ускладнюється при здійсненні практичних обчислень через комплексність постановок. Швидкість збіжності таких методів є доволі помірною. Тому важливо, з одного боку, розробляти чисельні методи, які можна було б реалізувати. Для цього доцільно застосовувати методи якісного аналізу, зокрема методи практичної стійкості, для оцінки множини розкиду початкових умов в класі еліпсоїдів, а також методу структурно-параметричної оптимізації систем. З іншого боку, необхідно оцінити якісні характеристики, такі як: початкове наближення, величину кроку, апроксимативні властивості тощо.

Ключові слова: пучок траєкторій, негладка оптимізація, параметрична оптимізація, оптимізація пучка траєкторій, метод найшвидшого спуску, метод еліпсоїдів.

O. M. BASHNIAKOV, V. T. MATVIENKO, V. V. PICHKUR

COMPUTATIONAL METHODS FOR OPTIMIZATION OF A BEAM OF TRAJECTORIES WITH A NON-SMOOTH QUALITY FUNCTIONAL

The problem of analyzing systems under conditions of deterministic uncertainty in the initial state of the system is related to the problems of practical stability and optimization of trajectory bundles. For problems of parametric optimization of systems, one of the main approaches is to formulate statements with criteria in the form of a maximum under initial conditions of the functional, which is analyzed on the solutions of the system. This, in turn, encourages the use of non-smooth optimization methods taking into account the presence of a parametric system and the development of computational methods that are characteristic of such an area. In this case, the apparatus of generalized derivatives and generalized differentials is used, the computational methods are modifications of iterative procedures of the subgradient descent type in various modifications. It should be noted that in such problems only in some cases can algorithms characteristic of convex cases be applied. The paper considers a problem with a quality criterion of the type of maximum under initial conditions of the terminal functional. The authors substantiate the theorem on the structure of the derivative in the direction, as well as the necessary conditions for the extremum. Based on the theoretical results, the method of the fastest descent is constructed in the work. For the case of a linear system with a quadratic quality criterion, the method of coordinate descent and the method of ellipsoids are used. A computational experiment was conducted and the results of the calculations are presented. It should be noted that the application of the theoretical results given in the work and related to the methods of non-smooth optimization is complicated when performing practical calculations due to the complexity of the statements and, therefore, a significant number of calculations at each iteration, the convergence rate of such methods is quite moderate. Therefore, it is important, on the one hand, to develop numerical methods that could be implemented. For this, it is advisable to use methods of qualitative analysis, in particular methods of practical stability, to estimate the set of scatter of initial conditions in the class of ellipsoids, as well as the method of structural-parametric optimization of systems. On the other hand, it is necessary to evaluate qualitative characteristics such as initial approximation, step size, approximative properties, etc.

Key words: beam of trajectories, non-smooth optimization, parametric optimization, trajectory bundle optimization, minimax optimization problems.

Вступ. При побудові математичних моделей складних систем виникає потреба у врахуванні розкиду початкових даних і параметрів за наявності обмежень на фазові координати. Це пов'язано як з необхідністю врахувати детерміновану невизначеність даних, так і з моделюванням групової динаміки систем. Це означає, що слід одночасно аналізувати сукупність розв'язків відповідних математичних співвідношень. У такий спосіб приходимо до поняття пучка траєкторій системи. Природно виникають проблеми, пов'язані з оптимізацією, оптимальним керуванням пучків траєкторій, зокрема і з негладкими критеріями якості [1, 2].

Проблемам негладкої оптимізації, обчислювальним методам присвячено значну кількість робіт, серед яких зазначимо такі роботи [3 – 7]. Зокрема, в [1] висвітлено необхідні і достатні умови оптимальності в задачі оптимального керування пучком траєкторій з негладкими критеріями якості типу максимуму за початковими умовами і часом. В [8] розглянуто обчислювальні методи оптимізації параметричних систем з гладкими критеріями якості. В [9] розроблено методику розв'язування задачі керування пучком траєкторій лінійної дискретної системи зі скінченною кількістю початкових станів на основі властивостей псевдоінверсії.

Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [1]:

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)) \quad (1)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), p, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – вектор стану системи (2); $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$ – вектор параметрів; $f(x, p, t)$ – n – вимірний вектор-функція, яка є неперервно диференційованою за x і p , а також неперервною за $t \in [t_0, T]$. У такий спосіб ми можемо застосувати *теорему про неперервну диференційованість* розв'язків системи (2) від параметра p і початкових умов x_0 . Функція $\Phi: R^n \rightarrow R^1$ є неперервно диференційованою, $M_0 \subset R^n$ – компакт, $x(t_0) = x_0 \in M_0$.

Задача полягає в тому щоб знайти параметр $p_* \in R^m$ такий, що

$$I(p_*) = \inf_{p \in R^m} I(p). \quad (3)$$

Задача (1) – (3) називається задачею параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (2) з функціоналом (3), який є функціоналом типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу

$$J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p)).$$

Тут $x(t, x_0, p)$ є розв'язком системи (2) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, де $x_0 \in R^n$ – деяка точка при фіксованому значенні параметра $p \in R^m$.

Пучком траєкторій системи (2) при фіксованому значенні параметра $p \in R^m$ називають множину розв'язків $x(t, x_0, p)$ системи (2), де точка x_0 пробігає множину $M_0 \subset R^n$. Таким чином, пучок траєкторій є сукупністю функцій в просторі неперервних функцій $C([t_0, T]; R^n)$. За *теоремою про інтегральну лійку* [1] пучок траєкторій є компактом в множині $C([t_0, T]; R^n)$, так як множина початкових умов $M_0 \subset R^n$ є компактом. Множина $X(t, p)$ точок з R^n , яка складається з таких $x \in R^n$, що існує $x_0 \in M_0$ таке, що $x = x(t, x_0, p)$, називається перетином пучка траєкторій системи (2).

За *теоремою про перетин інтегральної лійки* перетин пучка траєкторій є компактною множиною в R^n при кожному фіксованому $t \in [t_0, T]$. Таким чином, пучок траєкторій залежить від вибору параметра p . Задача параметричної оптимізації (1) – (3) полягає в тому, щоб серед усіх значень параметра p вибрати такий, який мінімізує максимальне значення критерія $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$ серед усіх траєкторій пучка.

Виберемо напрямки $h \in R^m$ і позначимо [4 – 6]

$$R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} J(y_0, p) = J(x_0, p) \right\}.$$

Множина $R(p)$ називається *маргінальною множиною*. За *теоремою про похідну за напрямком* від функції максимуму [4 – 6]

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} J'(x_0, p, h), \quad (4)$$

де $J'(x_0, p, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha}$ є похідна за напрямком (*похідна Діні*) функціоналу $J(x_0, p)$. Так як в задачі (1) – (3) функціонал $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$ є диференційованим, то похідна за напрямком співпадає з першою варіацією (*варіацією за Лагранжем*)

$$J'(x_0, p, h) = \delta J(x_0, p, h),$$

де

$$\delta J(x_0, p, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} J(x_0, p + \alpha h) \Big|_{\alpha=0} = \varphi'(0).$$

Тут $\varphi(\alpha) = J(x_0, p + \alpha h) = \Phi(x(T, x_0, p))$.

Знайдемо першу варіацію. Для цього визначимо

$$\varphi'(\alpha) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, \alpha))}{\partial x}, \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle,$$

де $x(T, \alpha) = x(T, \alpha) = x(T, x_0, p + \alpha h)$, $x(T) = x(T, x_0, p)$. Позначимо $z(T) = \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}$ в точці $\alpha = 0$. Тоді

$$\varphi'(0) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle. \quad (5)$$

Знайдемо систему диференціальних рівнянь для $z(t)$. Вона має вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} h, \quad z(t_0) = 0, \quad (6)$$

де $t \in [t_0, T]$. Система (6) називається системою рівнянь у варіаціях для задачі (1) – (3). Тут $f(t) = f(x(t), p, t)$.

Введемо вектор спряжених змінних $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^*$ і накладемо умову

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}. \quad (7)$$

Беручи до уваги систему у варіаціях (6), одержуємо

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= -\langle \psi(T), z(T) \rangle = -(\langle \psi(T), z(T) \rangle - \langle \psi(t_0), z(t_0) \rangle) = \\ &= -\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle \psi(t), z(t) \rangle dt = -\int_{t_0}^T \left(\left\langle \psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t), h \right\rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (8)$$

Тоді

$$\varphi'(0) = -\left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t) dt, h \right\rangle = \partial J(x_0, p, h). \quad (9)$$

Введемо функцію Гамільтона – Понтрягіна для задачі (1) – (3):

$$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle. \quad (10)$$

Тоді

$$\frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial x} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t), \quad \frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial p} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t).$$

Таким чином, ми обґрунтували теорему. При формулюванні теореми ми застосували (4), (7) – (10), а також дві останні рівності.

Теорема 1. Похідна за напрямком $h \in R^m$ функціоналу (1) задачі (1) – (3) має вигляд:

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle -\int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle,$$

де $x(t) = x(t, x_0, p) \in \text{розв'язком системи (2)}$, $x(t_0) = x_0$, $\psi(t) = \psi(t, x_0, p) \in \text{розв'язком спряженої системи}$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, T], \quad (11)$$

$$x_0 \in R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x(T, y_0, p)) = \Phi(x(T, x_0, p)) \right\}, \quad (12)$$

$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle$ – функція Гамільтона – Понтрягіна.

Наслідок 1. Для того, щоб точка p_* була точкою локального мінімуму функціоналу (1) задачі (1) – (3) на R^m необхідно, щоб виконувалася умова

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \quad \forall h \in R^m, \quad (13)$$

де $x(t)$, $\psi(t)$ – розв'язки системи (2) і спряженої системи (11), які відповідають p_* , $R(p_*)$ визначається за (12) при $p = p_*$.

Наслідок 2. Для того, щоб точка p_* була точкою локального мінімуму функціоналу (1) задачі (1) – (3) на D необхідно, щоб виконувалася умова

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \forall h \in C(x_*, D), \quad (14)$$

де $C(x_*, D)$ – конус Булігана в точці x_* до множини D [3]; $x(t)$, $\psi(t)$ – розв’язки системи (2) і спряженої системи (11), які відповідають p_* ; $R(p_*)$ визначається за (12) при $p = p_*$.

Метод найшвидшого спуску. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв’язках системи (2). Розв’яжемо дану задачу методом найшвидшого спуску [4 – 7]. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і розв’язуємо для кожного вузла систему $\frac{dx}{dt} = f(x, p_k, t)$, $x(t_0) = x_0$. При цьому $x(T)$ шукається як чисельний розв’язок системи для відповідного x_0 .

Крок 2. Знаходимо $\psi(t, x_0)$ як чисельний розв’язок системи:

$$\frac{\psi(t, x_0)}{dt} = -\frac{\partial f^*(x, p_k, t)}{\partial x} \psi(t, x_0), \quad \psi(T, x_0) = -\frac{\partial \Phi(x(T, x_0))}{\partial x}.$$

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\}, \quad x_*, x_*;$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T \frac{\partial f^*(x_k, p_k, t)}{\partial p_k} \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$, якщо $z_k^{(*)} = 0$, то p_k – шукане значення параметра p і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k шукається як розв’язок одновимірної оптимізаційної задачі $I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha))$.

Лінійний випадок. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв’язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T]. \quad (15)$$

Розв’яжемо дану задачу *методом найшвидшого спуску*. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$.

Крок 2. Знаходимо $\psi(t, x_0)$ у вигляді $\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}$.

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\};$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t) \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$. Якщо $z_k^{(*)} = 0$, то p_k – шукане значення параметра p і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k шукається як

розв'язок одновимірної оптимізаційної задачі $I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha))$.

Метод еліпсоїдів. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв'язках системи (15). Розв'яжемо дану задачу методом еліпсоїдів [6, 7]. Нехай відомо, що розв'язок задачі $p_* \in K(p_0, R)$, де $K(p_0, R)$ – замкнена куля з центром в точці p_0 і радіусом R . Розглянемо алгоритм розв'язування даної задачі при $n > 1$. Зафіксуємо стартову точку $p_0 \in R^m$. Візьмемо $h_0 = R/(n+1)$. Покладемо $B_0 = I$, де I_m – одинична $(m \times m)$ – матриця. Нехай на k -й ітерації знайдені значення $p_k \in R^m$, h_k і матриця B_k . Перехід до $(k+1)$ -ї ітерації полягає у виконанні такої послідовності кроків:

Крок 1. Спочатку вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$. Також обчислимо $\psi(t, x_0)$ за формулою $\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}$.

Крок 2. Обчислимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$, де

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\};$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t) \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Якщо $z_k^{(*)} = 0$, тоді зупинимося: p_k – розв'язок. Інакше перейдемо до кроку 3.

Крок 3. Визначимо $\zeta_k = \frac{B_k^T z_k^{(*)}}{\|B_k^T z_k^{(*)}\|}$.

Крок 4. Обчислимо наступну точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \zeta_k$.

Крок 5. Обчислимо $B_{k+1} = B_k R_\beta(\zeta_k)$, $\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$, де $R_\beta(\zeta_k)$ – оператор розтягування простору в напрямку ζ_k з коефіцієнтом β .

Крок 6. Обчислимо $h_{k+1} = h_k r$, $r = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Опис алгоритму закінчено.

Метод координатного спуску. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв'язках системи (15). Розв'яжемо дану задачу методом координатного спуску [4]. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$.

Крок 2. Введемо змінну $p_{k,0} = p_k$. Тоді побудуємо послідовно спуск по кожній з координат вектора p_k : $p_{k,l} = p_{k,l-1} - \alpha_{k,l} e_l = p_{k,l}(\alpha_{k,l})$, $l = 1, \dots, m$, де e_l – l -й орт, $\alpha_{k,l}$ шукається як розв'язок одновимірної задачі мінімізації $I(p_{k,l}(\alpha_{k,l})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} I(p_{k,l}(\alpha))$.

Крок 3. Якщо $p_{k,m} = p_k$, то алгоритм зупиняється і шукана точка p_k . Інакше $p_{k+1} = p_{k,m}$.

Обчислювальний експеримент. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \frac{1}{2} \max_{x_0 \in M_0} (x(T, x_0) - x_T)^2 \rightarrow \min \quad (16)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + p, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in M_0, \quad M_0 = [a, b],$$

де a, b, x_T, A – деякі числа, $T > 0$, p – скалярний параметр. Для розв'язування цієї задачі застосуємо метод найшвидшого спуску. Обираємо початкове значення p_0 .

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(T) = \exp(AT)x_0 + p_k \left(\frac{1}{A}(\exp(AT) - 1) \right)$.

Крок 2. Для кожного x_0 знаходимо $\psi(t, x_0)$ у вигляді $\psi(t, x_0) = -\exp(A(T-t))(x_k(T, x_0) - x_T)$.

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} (x_k(T, y_0) - x_T)^2 = (x_k(T, x_0) - x_T)^2 \right\};$$

$$L2(p_k, x_0) = \frac{1}{A} \exp(AT) (x_k(T, x_0) - x_T^T),$$

$$L(p_k) = \left\{ \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} L2(p_k, x_0), \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Оскільки задача одновимірна, то є два випадки:

1. $R(p_k)$ містить більше однієї точки. Тоді $L(p_k) = \alpha(x_1 - x_2) + x_2$, де $x_1, x_2 \in L2(p_k, x_0)$, $x_0 \in M_0$ – крайні точки множини (всі інші точки лежать між ними).

2. $R(p_k)$ містить одну точку. Тоді $L(p_k) = L2(p_k, x_0)$.

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $z_k^{(*)} = \alpha(x_1 - x_2) + x_2$, де $\alpha = \arg \min_{\alpha \in [0, 1]} \|\alpha(x_1 - x_2) + x_2\|$ для випадку 2, або $z_k^{(*)} = L2(p_k, x_0)$ для випадку 1.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k – послідовність,

для якої виконуються умови $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k) = \infty$.

Якщо $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$, де ϵ – наперед задане мале число, то процес закінчується. Інакше переходимо на $(k+1)$ -у ітерацію.

Результати обчислень. Розглядаємо задачу 1 при таких умовах:

початкові параметри:

$$a = 1; \quad b = 2; \quad x_T = 1.4; \quad A = -2; \quad T = 0.9;$$

кількість точок розбиття для дискретної сітки на M_0 : 21;

початкове наближення параметра p : 5;

кількість ітерацій алгоритму: 20;

умова зупинки алгоритму:

$$|p_{k+1} - p_k| < \epsilon, \quad \text{де } \epsilon = 0.1e-3.$$

Результат: оптимальне значення параметра p_* : 2.7604, оптимальне значення критерія якості (16) $I(p_*)$: 0.0034.

На рис. 1 зображений оптимальний пучок $x(t, x_0, p_*)$, $t \in [0, T]$, що виходить з точок розбиття x_0 . Осі абсцис відповідає t . На осі ординат позначені точки x_0 розбиття, з яких бере початок пучок.

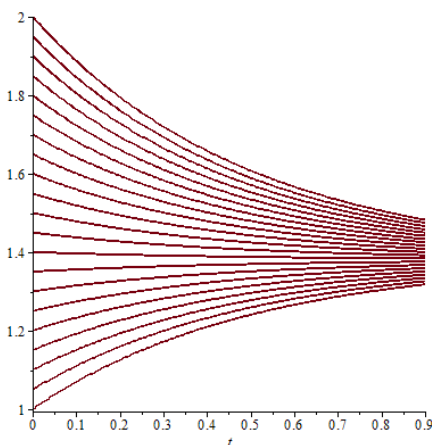


Рис. 1 – Оптимальний пучок.

Висновки. Дана робота присвячена створенню алгоритмів параметричної оптимізації пучка траєкторій з функціоналом типу максимуму. В роботі запропоновано такі результати:

1. Розглянуто задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу.

2. На основі цього для даних типів задач були модернізовані такі алгоритми:

- метод найшвидшого спуску;
- метод еліпсоїдів;

– метод координатного спуску.

3. Створено алгоритми і відповідну програму, що розв'язує задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв'язках лінійної системи.

Проведено ряд обчислювальних експериментів, які показали ефективність розроблених методів.

Список літератури

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Kurzhanski A., Pravin Varaiya. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. – Boston : Birkhauser, 2014. – 457 p.
3. Borwein J. M., Lewis A. S. Convex analysis and nonlinear optimization. – Springer-Verlag, N.Y., 2000. – 273 p.
4. Бейко І. В., Зінко П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації. – К. : Київський університет, – 2012. – 799 с.
5. Shor N. Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. – Boston; Dordrecht; London : Kluwer Academic Publishers, 1998. – 394 p.
6. Shor N. Z., Zhurbenko N. G., Likhovid A. P., Stetsyuk P. I. Algorithms of nondifferentiable optimization : Development and application // Cybernetics and Systems Analysis. – 2003. – Volume 39. – Issue 4. – pp. 537 – 548.
7. Nesterov Yu. Introductory Lectures on Convex Optimization. – Springer, 2004. – 236 p.
8. Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Черній Д. І. Методи оптимізації параметричних систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. – №1 (135). – С. 151 – 157. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.20.
9. Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Черній Д. І. Керування пучком траєкторій лінійної дискретної системи зі скінченними множинами початкових і кінцевих станів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – № 1. – С. 154 – 160. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.23.

References (transliterated)

1. Bashniakov O. M., Harashchenko F. H., Pichkur V. V. *Praktychna stiykist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical stability, evaluations and optimization]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2008. 383 p.
2. Kurzhanski A., Pravin Varaiya. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*. Boston, Birkhauser, 2014. 457 p.
3. Borwein J. M., Lewis A. S. *Convex analysis and nonlinear optimization*. Springer-Verlag, N.Y., 2000. 273 p.
4. Beiko I. V., Zinko P. M., Nakonechnyy O. H. *Zadachi, metody ta alhorytmy optymizatsiyi* [Optimization problems, methods and algorithms]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2012. 799 p.
5. Shor N. Z. *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston; Dordrecht; London : Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
6. Shor N. Z., Zhurbenko N. G., Likhovid A. P., Stetsyuk P. I. Algorithms of nondifferentiable optimization : Development and application. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2003, Volume 39, Issue 4. pp. 537–548.
7. Nesterov Yu. *Introductory Lectures on Convex Optimization*. Springer, 2004. 236 p.
8. Matvienko V. T., Pichkur V. V., Chernii D. I. Metody optymizatsiyi parametrychnykh system [Methods for optimizing parametric systems]. *Zhurnal obchyslyuvanoi ta prykladnoi matematyky* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 2021, No. 1 (135), pp. 151–157. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.20.
9. Matvienko V. T., Pichkur V. V., Chernii D. I. Keruvannya puchkom traektoriy liniynoyi dyskretnoyi systemy zi skinchennymy mnozhynamy pochatkovykh i kintsevykh staniv [Control of a beam of trajectories of a linear discrete system with finite sets of initial and final states]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematyчне modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh*. [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2023, No. 1, pp. 154–160. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.23.

Надійшла (received) 24.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Башняков Олександр Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Bashniakov Oleksandr Mykolaiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Матвієнко Володимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Matvienko Volodymyr Tyhonovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

П. О. ВАСІН, С. О. ДОВГИЙ, О. Г. ЛЕБІДЬ, Д. І. ЧЕРНІЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ СИСТЕМИ КЕРОВАНИХ КРИЛ (ПРОФІЛІВ) У ПОТОЦІ ІДЕАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Стаття присвячена моделюванню обтікання системи керованих крил (профільв) в ідеальній нестисливій рідині. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розробки обчислювальної технології для визначення в режимі реального часу скалярних та векторних характеристик керованого руху розподілених у просторі системи крил, які утворюють коливальний рушій. Режими руху системи крил виходять за межі лінійної теорії. Представлено математичну модель циркуляційної відривної течії навколо рухомих крил, які разом з вихровим слідом утворюють рухомі межі області течії. Обчислювальна технологія базується на застосуванні методу дискретних особливостей. Запропоновано модель нестационарно-відривного обтікання системи M тонких профільв з округленою передньою кромкою в якій враховується нестационарний режим обтікання системи крил. Удосконалено чисельно-аналітичну модель обчислення поля тиску в області змінної зв'язності, що дозволяє визначати як миттєві розподілені аерогідродинамічні характеристики на кожному крилі, так і усереднені інтегральні АГДХ системи крил в цілому. Запропоновано математичну модель керування рухом крил, яка суттєво покращує енергоефективність та тягові характеристики коливального рушія. У системному обчислювальному експерименті виявлено кількісні та якісні закономірності формування та еволюції сліду за системою з керованим рухом крил, визначено умови виникнення когерентних вихрових структур. Представлено порівняння результатів обчислювального експерименту з результатами натурного моделювання.

Ключові слова: ідеальна нестислива рідина, керовані крила, коливальні рухи, циркуляційна потенційна течія, метод дискретних особливостей.

P. O. VASIN, S. O. DOVGYI, O. G. LEBID, D. I. CHERNIY

MODELING THE FLOW AROUND A SYSTEM OF CONTROLLED WINGS (AIRFOILS) IN A STREAM OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

The article is devoted to modeling the flow around a system of controlled wings (profiles) in an ideal incompressible fluid. The relevance of the study is due to the need to develop a computational technology for determining in real time the scalar and vector characteristics of the controlled motion of a system of wings distributed in space, which form an oscillatory engine. The modes of motion of the wing system go beyond the limits of linear theory. A mathematical model of the circulating separation flow around the moving wings, which together with the vortex wake form the moving boundaries of the flow region, is presented. The computational technology is based on the application of the discrete singularity method. A model of unsteady-separated flow around a system of M thin profiles with a rounded leading edge is proposed, which takes into account the unsteady flow regime around the wing system. The numerical-analytical model for calculating the pressure field in the variable connectivity region has been improved, which allows determining both the instantaneous distributed aerohydrodynamic characteristics on each wing and the averaged integral AGDH of the wing system as a whole. A mathematical model for controlling the wing motion has been proposed, which significantly improves the energy efficiency and thrust characteristics of the oscillatory engine. In the system computational experiment, quantitative and qualitative regularities of the formation and evolution of the wake behind the system with controlled wing motion have been revealed, and the conditions for the emergence of coherent vortex structures have been determined. A comparison of the results of the computational experiment with the results of full-scale modeling has been presented.

Key words: ideal incompressible fluid, controlled wings, oscillatory motions, circulating potential flow, discrete singularity method.

Вступ. Коливальні рухи крилових поверхонь зустрічаються в багатьох областях природи та техніки. Серед найважливіших – коливальні рухи крил птахів, коливальні рухи плавників риб та морських ссавців, крил літальних апаратів, несучих гвинтів вертольотів, лопаток турбомашин, закрилків, а також механічних сервозакрилків. Важливою є потреба у розрахунках *розподілених динамічних характеристик течії* для запобігання виникнення *флатера* в авіації, в ракетних системах. Для водних динамічних систем з коливальним рушієм важливою є проблема виявлення режимів його ефективності. Тема *оптимізації коливальних рухів* системи крил є актуальною у зв'язку з необхідністю створення *коливального рушія*. Але, більшість *теоретичних методів розрахунку нестационарних гідроаеродинамічних характеристик крил і крилових систем*, що існують зараз, засновані на *лінеаризованій теорії*, що передбачає малі робочі кути атаки, малі амплітуди коливань, малі деформації поверхні крила. Тим часом для практики істотний інтерес представляють саме режими, що вийшли за межі лінійної теорії.

Розглядається *плоска задача про нестационарний коливальний рух* системи тонких профільв в ідеальній стисливій рідині. Кожен із профільв системи знаходиться в потоці рідини, яка рухається в площині прямолінійно в горизонтальному напрямку (зліва направо) з постійною швидкістю та одночасно здійснює вертикальні коливання за гармонічним законом, крім того, профіль може здійснювати обертальні коливання навколо певної точки. З задньої гострої кромки профілю сходять вихрові пелени. Завдяки коливанням профіль може генерувати силу, спрямовану у бік поступального руху – *силу тяги*.

Теоретична модель течії будується за таких припущень [1 – 5]:

- поверхні профілю та твердих меж передбачаються непроникними та рухомими;
- на задній кромці виконується *постулат Кутта – Жуковського*: швидкість рідини скінченна, а розподіл тиску є неперервним;
- вихрова пелена, що сходить із задньої кромки профілю, вважається нескінченно тонкою поверхнею тангенціального розриву швидкості рідини; форма цієї поверхні наперед невідома;
- на нескінченній відстані від профілю та вихрової пелени потік рідини рухається з постійною швидкістю (зліва направо);

– збурення швидкості, що вносяться рухомим профілем і вільним вихровим шаром у сліді, зменшуються при віддаленні від профілю і пелени та прагнуть до нуля на нескінченності;

– на початок руху профілю вихорів у рідині не було, тобто течія була безвихровою.

Внаслідок останньої умови при зроблених припущеннях щодо рідини справедлива *теорема Лагранжа* про те, що протягом усього часу течія всюди поза профілем і вихровою пеленою залишатиметься безвихровою і в усі наступні моменти часу.

Отже, при умові, що вихровий шар є нескінченно тонким, вихрова течія може бути представлена в наближенні циркуляційної течії, а для фізичної постановки задачі можна використовувати математичний апарат теорії потенційних течій.

Постановки задачі про циркуляційну течію навколо системи непроникних рухомих меж.

Постановка фізичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (тонких профілів). Так, якщо за результатом лабораторного експерименту припускається, що *структуру вихрового сліду* у плоскій течії навколо системи рухомих крил (рис. 1) можна представити у вигляді складок нескінченно тонких ліній розриву швидкостей (рис. 2).



Рис. 1 – Течія навколо рухомої системи M крил ($M = 4$ профілів). Лабораторний експеримент [6].

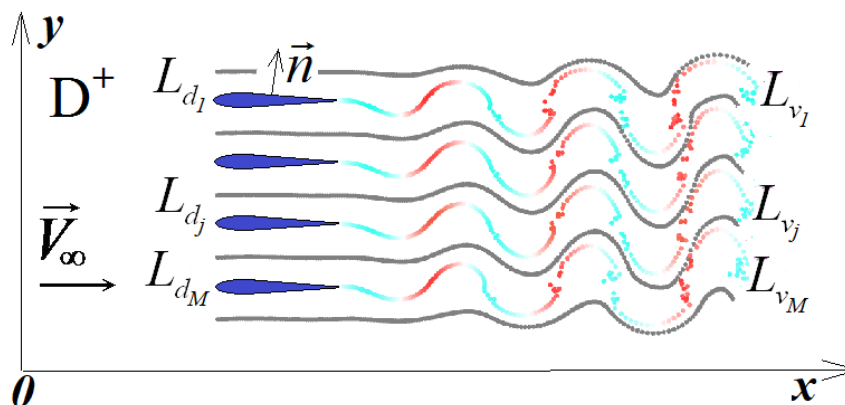


Рис. 2 – Схема течії навколо рухомої системи M крил ($M = 4$ профілів).

Припускаємо, що течія є потенційною в області $D^+(t)$ зовні M рухомих крил (профілів) та вихрових поверхонь: $L_d(t)$ – детермінованих, $L_v(t)$ – вільних. Розглядається фізична задача зі знаходження потенціалу ϕ , для якого швидкість потоку $\vec{V} = \nabla \phi$:

$$t \geq t_0 : \nabla \phi = 0 \quad \text{в } D^+; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = W_n^* \quad \text{на } L_d(t) \text{ – детерміновані границі (профіль крила);} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^- \quad \text{на } L_v(t) \text{ – вільні границі;} \quad (3)$$

$$P^+ = P^- \quad \text{на } L_v, \quad (4)$$

де

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \phi = \vec{V}_\infty; \quad (6)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} P = P_\infty; \quad (7)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t}; \quad (8)$$

$$\text{при } t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, \quad L_v(t_0) = L_{v0}, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0. \quad (9)$$

Розв'язок шукається в класі функцій:

$$|\nabla \phi| < \infty, \quad (10)$$

що на гострих кромках лопатей відповідає умові Жуковського – Кутта.

Нормальна швидкість W_n^* у кожній точці лопаті для умови (2) визначається напрямом нормалі до $\vec{n}$ до лопаті $L_d(t)$ швидкості її руху. Закони руху лопатей:

– при закріпленому лівому кінці:

$$W_n^* = \left(\frac{-A_n^2 R^2 / L_n^2 \phi' \cos(\phi_n) \sin(\phi_n)}{\sqrt{1 - A_n^2 / L_n^2 \sin^2(\phi_n)}}, \phi_n' \frac{R}{L_n} \cos(\phi_n) \right), \quad (11)$$

де A – амплітуда коливання; L – довжина лопатей; R – відстань від точки, у якій знаходиться нормаль, до закріпленого кінця лопаті;

$$\phi_n = \phi_{0n} + \frac{Sh_n \cdot V_\infty}{L_n} t \quad \text{та} \quad \phi_n' = \frac{Sh_n \cdot V_\infty}{L_n}$$

– значення фази та похідної фази по t ; Sh – число Струхала.

– без закріпленого кінця:

$$W_n^* = (0, \phi' \cos(\phi_n)), \quad (12)$$

Постановка математичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (профілів).

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини для всіх точок $\vec{r}(x, y, z)$ області D^+ поза рухомими межами $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (де $L_d(t)$ – обтічна межа, рух якої задається, $L_v(t)$ – вільна межа з вихрових шарів у сліді у вигляді поверхонь розриву дотичних швидкостей) ставиться задача для знаходження функції (від координат та часу) – потенціалу $\phi = \phi(\vec{r}, t)$, для якого швидкість $\vec{V} = \nabla \phi$, а також потенціал задовольняє рівняння та крайові умови

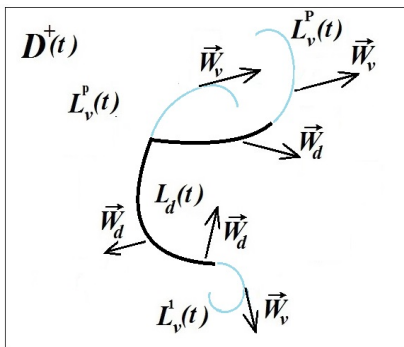


Рис. 3 – Схема взаємодії системи меж з виконанням умови Вілля [2]: поверхня розриву швидкостей в точці відриву від обтічної поверхні має дотичну, що співпадає з дотичною до обтічної поверхні.

$$\text{при } t \geq t_0 : \Delta \phi = 0 \quad \text{для } \vec{r} \in D^+; \quad (13)$$

з крайовими умовами на рухомих межах:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{r_d} = \vec{W}_d, \quad \vec{n} \Big|_{r_d} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t); \quad (14)$$

з крайовими умовами на невідомій вільній межі:

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial n} \Big|_{r_v} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \Big|_{r_v} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} (\phi^+ - \phi^-) \Big|_{r_v} = 0 \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t); \quad (16)$$

з умовами для зовнішньої задачі:

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \phi = \vec{U}_\infty; \quad (17)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, \quad L_v(t_0) = L_{v0}. \quad (18)$$

Розв'язок ϕ задачі розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$, тобто

$$|\nabla \phi| < \infty \quad \text{на } L(t). \quad (19)$$

Для визначення форми області $\bar{D}^+(t)$ має бути визначена зміна в часі геометрії рухомої межі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Переміщення $L_d(t)$ задається або визначається із задачі Коші при заданій правій частині

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t); \quad (20)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}, \quad (21)$$

а зміна вільної межі $L_v(t)$ визначається з розв'язку задачі Коші для частинок $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t))$, які й формують межу $L_v(t)$ та визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (22)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (23)$$

де права частина у (22)

$$\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla\phi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla\phi^-(\vec{r}_v, t)) \quad (24)$$

задовольняє умову (15), оскільки визначається з розв'язку задачі (13) – (24).

Варто зазначити, що задача (13) – (17) з умовами Неймана (14) на $L_d(t)$, з умовами Неймана (15) та умовами типу Діріхле (16) на $L_v(t)$, призводить до розв'язку задачі (22), (23), а також з умовами (19) на ∞ є зовнішньою нелінійною задачею з вільною рухомою межею $L_v(t)$. Особливість таких задач полягає в тому, що на невідомій вільній межі для її визначення задаються одразу дві умови: кінематична (3), (16) та динамічна (4), (16). Рух невідомої вільної межі $L_v(t)$ визначається полем швидкостей $\vec{V} = \nabla\phi$, яке визначається з розв'язку самої задачі (13) – (23).

Розв'язання задач (13) – (18) та (22) – (23) у виділеному класі функцій (19) можливе при виконанні умов гладкості меж. Гладкість меж області в задачі забезпечується врахуванням основного фактора фізичного процесу – виникненням відриву, що задовольняє критерію Вілля [2]: сформована поверхня розриву швидкостей в точці відриву від обтічної поверхні має дотичну, що збігається з дотичною до обтічної поверхні. Таким чином, умова Кутта – Жуковського на всіх зламах та кінцях меж виконується автоматично, за наявності природного виникнення відривів.

Розв'язок задач (13) – (24) відносно потенціалу $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ у деформованій області $D^+(t)$ з рухомою межею $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ дозволяє визначити розподіл тиску в області течії та обчислювати динамічні характеристики на її межах, використовуючи інтегральне співвідношення Коші – Лагранжа:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\phi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (25)$$

Математична модель для циркуляційної течії в області з рухомими межами відповідає випадку, коли течія, рух і відривне обтікання крил починається з моменту часу $t = 0$, а далі, вже при $t > 0$ починається формування та розвиток циркуляційного сліду.

Принципово, що математична модель має інтегральне представлення, яке дозволяє врахувати динаміку непроникних рухомих границь L_d , L_v , а також урахувати утворення нових елементів границі L_v . Але для системи M профілів, на кожному із яких виникає до двох $p = 1, 2$ відривів, необхідно модель удосконалити таким чином, щоб було явним чином враховано кількість граничних елементів L_d , L_v , $d = 1, \dots, M$, $v = 1, \dots, M \times p$.

Для знаходження комплексних потенціалів течії та комплексно спряженої швидкості в багатозв'язній області удосконалене інтегральне представлення має вигляд:

$$\Phi(z, t) = z\bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} f_{vp}(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (26)$$

$$\bar{V}(z, t) = \frac{\partial\Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t)}{z - \omega} d\omega. \quad (27)$$

Задача (3) – (12) розпадається на дві складові частини, які вимагають одночасного (паралельного) розв'язування:

I. Задача розв'язання сингулярного інтегрального рівняння для детермінованих границь – рухомих лопатей L_d :

$$\left\{ \begin{aligned} & z = \omega_d \in \sum_{i=1}^M L_{di}, \quad t \geq t_0, \quad d = 1, \dots, M : \\ & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t) n(\omega_d)}{\omega_d - \omega} d\omega \right\} = W_n^* - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t) n(\omega_d)}{\omega_d - \omega} d\omega + n(\omega_d) \bar{V}_\infty \right\}, \\ & \int_{L_d} f_d(\omega, t) d\omega = - \sum_{p=1}^2 \int_{L_{vp}} f_{vp}(\omega, t) d\omega, \quad d = v, \quad d = 1, \dots, M; \quad v = 1, \dots, M. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

II. Задача Коші – розв’язання інтегро-диференційного рівняння для вільних границь L_v :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_{vp} \in L_{vp}(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_{vp}}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t)}{\omega_{vp} - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \int_{L_v(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t)}{\omega_{vp} - \omega} d\omega + \bar{V}_\infty, \\ d = v, p = 1, 2, \overline{\omega_{vp}} = \overline{\omega_d} : f_{vp}(\omega_{vp}, t) = f_d(\omega_p, t), \\ t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, L_v(t_0) = L_{v0}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Для визначення безрозмірного коефіцієнту тиску (25) маємо формулу:

$$c_p(x, y, t) = \frac{2(P(z, t) - P_\infty)}{\rho |V_\infty|^2} = \operatorname{Re} \left\{ 1 - \frac{\bar{V}(z, t) \overline{V}(z, t)}{V_\infty^2} - \frac{2}{|V_\infty|^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(z, t) - \Phi_\infty) \right\}. \quad (30)$$

Дискретизація математичної моделі та постановки математичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (профільів). Для розв’язання задачі відривного нестационарного обтікання застосовано чисельні методи розв’язування *сингулярних інтегральних рівнянь* в багатозв’язній області та *вихорові технології*. Введено дискретизацію процесів та функцій для застосування в задачі чисельно-аналітичних моделей, методів та алгоритмів [1 – 3, 7].

Дискретизація часу задачі визначається заданим кроком τ_k :

$$0 \leq t_n \leq T, \quad t_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad (31)$$

$$\text{де } \tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad t_N = T, \quad n = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Нормована швидкість набігаючого потоку: $\vec{V}_\infty = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Вважається, що у момент часу $t = 0 \quad n = 0$.

Дійсна частина потенціалу течії визначається як (потенціал набігаючого потоку + потенціал детермінованих границь + потенціал вільних границь):

$$\phi(x, y, t) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_{dj}(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{dj}}{x - x_{dj}} \right) + \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \frac{\gamma_{dm}^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{vm_p}^p(t)}{x - x_{vm_p}^p(t)} \right), \quad (33)$$

$$\vec{V}(x, y, t_n) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) \vec{V}_{dj}(x, y, x_{dj}, y_{dj}) + \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p \vec{V}(x, y, x_{vm_p}^p(t_n), y_{vm_p}^p(t_n)), \quad (34)$$

де швидкість $\vec{V}_j(x, y) = \vec{V}(x, y, x_j, y_j) = (u_j(x, y), v_j(x, y))$ від j -го вихору Ренкіна з одиничною інтенсивністю дорівнює:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_j - y}{R_j^2}, \\ v_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_j}{R_j^2}, \end{array} \right. \quad (35)$$

де $R_j = \max \left\{ \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \delta_j \right\}$, δ_j – радіус дискретності j -го вихору;

$$\Gamma_j = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, N}. \quad (36)$$

На контурі L_d у кожній k -ій точці колокації d -ї лопаті задамо нормаль:

$$\vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) = (n_x(x_{dk}, y_{dk}), n_y(x_{dk}, y_{dk})), \quad d = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (37)$$

З урахуванням дискретизації по часу виконання умови (14) у вигляді системи інтегральних рівнянь (28) зводиться на кожному n -тому кроці (при $t = t_n$) до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} a_{ijdk} = b_{dk}, \\ \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) = - \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p, \quad d = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{array} \right. \quad (38)$$

де

$$a_{ijk} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n_x(x_{dk}, y_{dk})(y_{ij} - y_{dk})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2} + \frac{n_y(x_{dk}, y_{dk})(x_{dk} - x_{ij})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2} \right),$$

$$b_{dk} = W_n^*(x_{dk}, y_{dk}) - (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot \vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) -$$

$$- \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p \vec{V}(x_{dk}, y_{dk}, x_{vm_p}^p(t_n), y_{vm_p}^p(t_n)) \cdot \vec{n}(x_{dk}, y_{dk}). \quad (39)$$

Геометрія області в момент часу t_n визначається геометрією рухомих меж. Для кожного наступного моменту часу t_{n+1} визначається нове положення меж області.

Маємо задачі Коші (щодо руху нового породженого елементу рухомої вільної межі), де у правих частинах (40), (41) визначена швидкість кожного s -го вихору ($s = \overline{1, n}$), який утворився в s -й момент часу. Для чисельного розв'язання системи (40), (41):

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = u(x_s(t), y_s(t)) = \cos(\alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) u_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p u_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)); \quad (40)$$

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = v(x_s(t), y_s(t)) = \cos(\alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) v_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p v_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)); \quad (41)$$

$$t = t_l : x(t_l) = x_l, y(t_l) = y_l \quad (42)$$

застосовується схема предиктор-коректор (метод Ейлера – Коші):

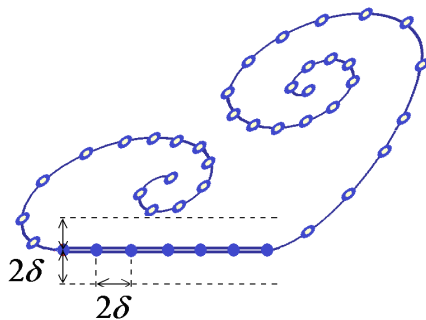


Рис. 4 – Схема для примусового виконання умови непроникнення [4].

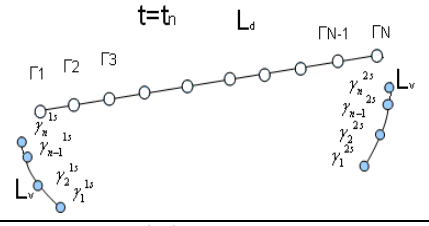
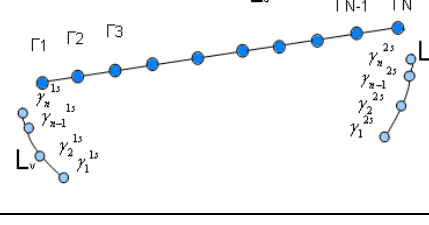
$$\begin{cases} \bar{r}_n = r_n + \tau_n V(t_n, r_n), \\ \bar{r}_{n+1} = r_n + \frac{\tau_n}{2} (V(t_n, r_n) + V(t_{n+1}, \bar{r}_n)). \end{cases} \quad (43)$$

Умова непроникності повинна виконуватися у кожній точці поверхні профілю крила. Тому алгоритмічна реалізація контролю непроникнення – примусове виконання умови, щоб вільні вихори не перетинали поверхню профілю. Виконується [4] примусове віддзеркалення вихорів на відстань не менше ніж 2δ від непроникної детермінованої межі – поверхні профілю крила (рис. 4). Таке удосконалення позбавляє від виникнення нефізичних пульсацій кінематичних та динамічних характеристик на непроникній межі.

Важливим елементом обчислювальних технологій є алгоритм, що визначає послідовність обчислення кінематичних та динамічних характеристик (табл. 1).

Таблиця 1 – Послідовність кроків обчислення кінематичних та динамічних характеристик

I	$t = t_{n-1}$ L_d Γ_{N-1} Γ_N	Для моменту часу $t = t_{n-1}$ маємо відомий розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях і відомий розподіл інтенсивностей вихорів у сліді.
II	$t = t_n$ L_d Γ_{N-1} Γ_N	Для моменту часу $t = t_n$ моделюється відривна течія і рух вихорового сліду: вихори на кромках лопатей відриваються і зміщуються в нове положення $\bar{r}_n = \bar{r}_{n-1} + \vec{V}_{n-1} \tau_n$ на відстань $dr_n^p = \bar{r}_n^p - \bar{r}_{n-1}^p = \vec{V}_{n-1} \tau_n$, після чого змінюється розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях.

Продовження таблиці 1		
III		Для моменту часу $t = t_n$ визначається розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях – розв’язується СЛАР (38), (39).
IV		Після визначення інтенсивностей усіх вихорів (на лопатях і в сліді), при відомій геометрії сліду обчислюється поле безрозмірного тиску. Для моменту часу $t = t_n$ відомий розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях і відомий розподіл інтенсивностей вихорів у сліді. Після визначення нового положення границь, параметр часу змінюється: $t = t_{n+1}$. Виконується повторення процедури обчислень задачі починаючи з етапу II.

Результати комп’ютерного моделювання кінематики та динаміки системи керованих крил. Приклади математичного моделювання та порівняння результатів моделювання з результатами лабораторного експерименту для системи крил представлено на рис. 5 – рис. 14.



Рис. 5 – Лабораторний експеримент [6]: Коливання крила, $P^* = 5.89$, $f = 1.5 \text{ Гц}$.



Рис. 6 – Результат математичного моделювання.



Рис. 7 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання поліплана ($M = 4$), $P^* = 4.71$, $f = 1.2 \text{ Гц}$.

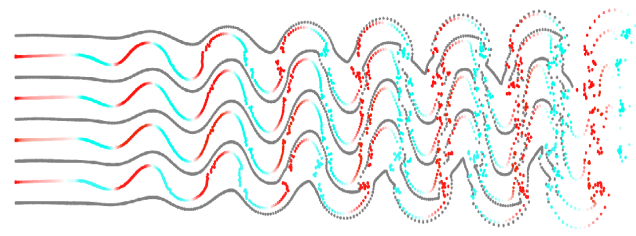


Рис. 8 – Результат математичного моделювання.

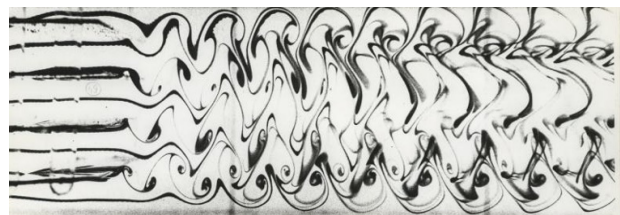


Рис. 9 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання поліплана ($M = 4$), $P^* = 5.86$, $f = 1.5 \text{ Гц}$.

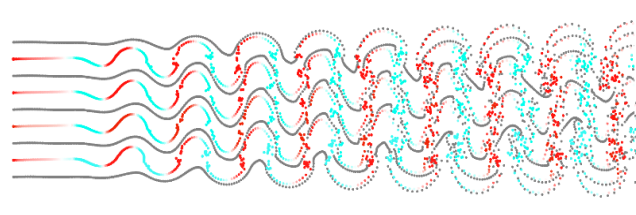


Рис. 10 – Результат математичного моделювання.



Рис. 11 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання біплану ($M = 2$), $P^* = 3.93$, $f = 1.0 \text{ Гц}$.

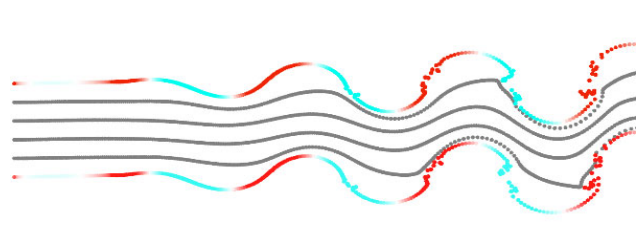


Рис. 12 – Результат математичного моделювання.

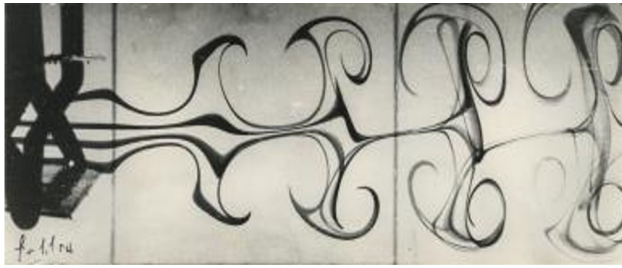


Рис. 13 – Лабораторний експеримент [6]: Протифазні коливання біплану ($M = 2$), $P^* = 3.93$, $f = 1.1$ Гц.

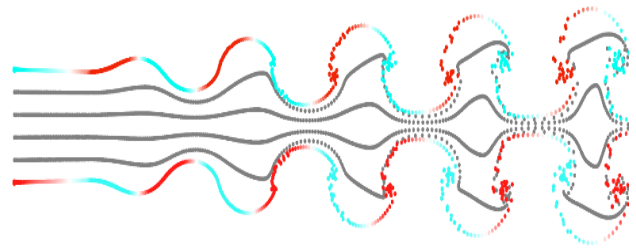


Рис. 14 – Результат математичного моделювання.

Нижче представлено додаткові результати математичного моделювання таких характеристик, як епюри та безрозмірний тиск (рис. 15 – 20).

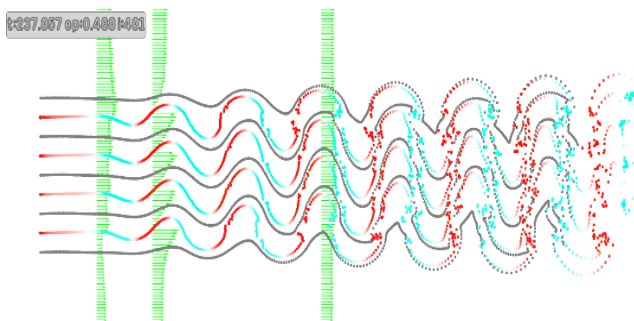


Рис. 15 – Епюри для обчислювального експерименту на (рис. 8).

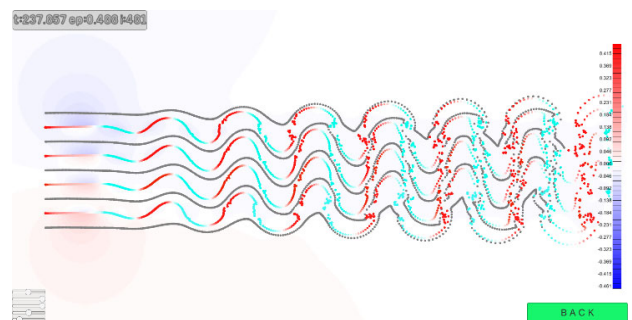


Рис. 16 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 8).

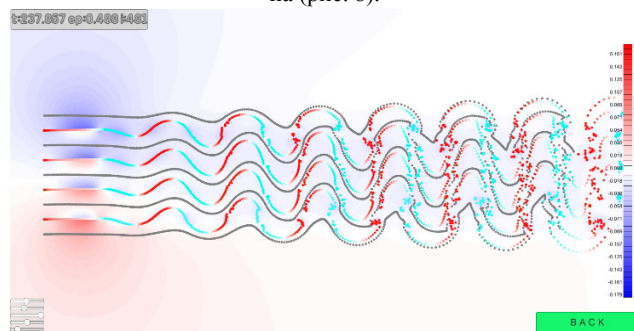


Рис. 17 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 8). Значення максимуму фіксується на 50 % від поточного.

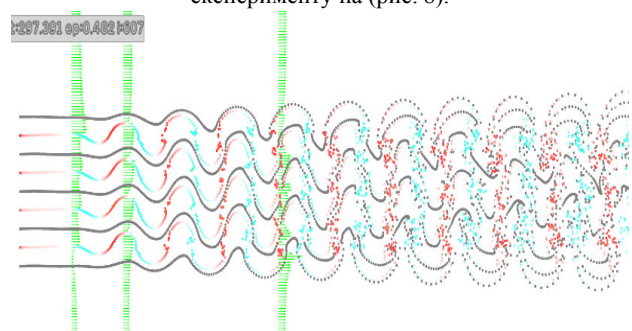


Рис. 18 – Епюри для обчислювального експерименту на (рис. 10).

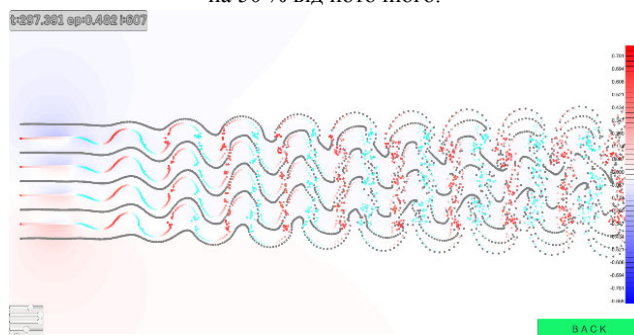


Рис. 19 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 10).

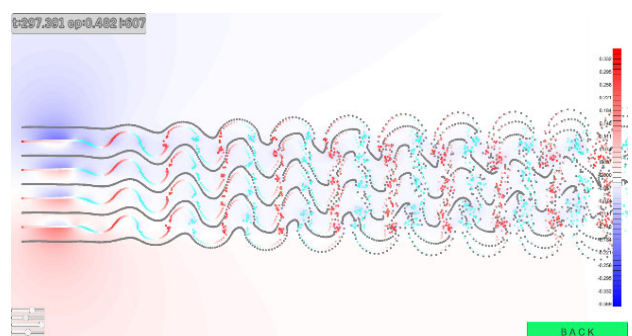


Рис. 20 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 10). Значення максимуму фіксується на 50 % від поточного.

Висновки. Представлено удосконалення, яке сприяє розвитку обчислювальних методів комп'ютерного моделювання, призначених для передпроектного дослідження у процесі розробки конструкцій нових рушіїв і швидкісних динамічних систем, а саме:

1. Розроблено модель нестационарно-відривного обтікання системи M тонких профілів з округленою пе-

редньою кромкою при його нестационарному обтіканні динамічно змінним потоком рідини. Показано різницю між фізичною та математичною постановками задач.

2. Представлено покрововий алгоритм обчислювальної технології, яка надає можливість визначати кінематичні та динамічні характеристики потоку в області течії.

3. Удосконалено чисельно-аналітичну модель обчислення поля тиску в області змінної зв'язності, що дозволяє визначати як миттєві розподілені аерогідродинамічні характеристики на кожному крилі, так і усереднені інтегральні АГДХ системи крил в цілому.

4. Запропоновано математичну модель управління рухом крил, яка суттєво підвищує енергоефективність рушія з системою крил, що коливаються.

5. Показано, що математична модель коректно описує гідродинамічний процес та якісно демонструє прояв закономірностей формування та еволюції сліду за системою з керованим рухом крил. Математичне моделювання надає можливість адекватного віддзеркалення виникнення когерентних вихрових структур.

6. Порівняння результатів обчислювального експерименту з результатами натурного моделювання демонструє, що закон керування коливальним рухом крил впливає на динамічні характеристики рушія із системою рухомих крил.

Список літератури

1. Dovgiiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2017. – Vol. 53. – no. 6. – P. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.
2. Dovgiiy S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. The method of singular integral equations and computational technologies. – Kyiv : "Yuston", 2016. – 308 p.
3. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies // XXXVIII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2023). – 2023. – Page 28. – Режим доступу : http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2023/PDMU-2023_End.pdf. – Дата звертання : 25.05.2025 p.
4. Васин П. О. Алгоритм контролю умови непроникності для методу дискретних особливостей // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 29 – 35. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.05.
5. Васин П. А., Черний Д. И. Моделирование трехмерной вихревой структуры // Компьютерная математика. – Київ : Інститут кібернетики НАНУ, 2018. – № 1. – С. 9 – 16.
6. Довгий С. А. Аэрогидродинамика движущихся крыльев. – Kyiv : "Yuston", 2016. – 276 p.
7. Черний Д. І., Васин П. О., Пилипенко І. Ю. Математичні моделі відірваних течій // Тези. VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». (160-річчя кафедри механіки КНУ). – Київ, Україна, 2023. – С. 67. – Режим доступу : http://lcwf.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2_023_UKR.pdf. – Дата звертання : 26.05.2025 p.

References (transliterated)

1. Dovgiiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017, Vol. 53, no. 6, pp. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.
2. Dovgiiy S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *The method of singular integral equations and computational technologies*. Kyiv, "Yuston" Publ., 2016. 308 p.
3. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies. *XXXVIII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2023)*. 2023, Page 28. Available at : http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2023/PDMU-2023_End.pdf (accessed 25 May 2025).
4. Vasin P. O. Algoritmy kontrolyu umovy nepronyknosti dlya metodu diskretnykh osoblyvostey [Algorithms for control enforcement of the impermeability condition for the method of discrete singularities]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1, pp. 29–35. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.05.
5. Vasin P. A., Cherniy D. I. Modelirovanie tryekhmernoy vikhrevoy struktury [Modeling of a three-dimensional vortex structure]. *Komp'yuternaya matematika* [Computer mathematics]. Kyiv, Instytut kibernetiky NANU Publ., 2018, no. 1, pp. 9–16.
6. Dovgiiy S. A. Aerogidrodinamika dvizhushchikh kryl'ev [Aerohydrodynamics of moving wings]. Kyiv, "Yuston" Publ., 2016. 276 p.
7. Cherniy D. I., Vasin P. O., Pylypchenko I. Yu. Matematychni modeli vidryvnykh techiy [Mathematical models of separated flows]. *Tezy. VII Mizhnarodna naukova konferentsiya "Suchasni problemy mekhaniky" (160-richchya kafedry mekhaniky KNU)* [Abstracts of the VII International Scientific Conference Modern Problems of Mechanics (160th Anniversary of the Department of Mechanics Taras Shevchenko National University of Kyiv)]. Kyiv, Ukraine, 2023. P. 67. Available at : http://lcwf.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2_023_UKR.pdf (accessed 26 May 2025).

Надійшла (received) 29.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Васін Павло Олексійович – асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 765-90-29;

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4480-0347>; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Vasin Pavlo Oleksiiovych – Assistant Professor at the Department of Modeling Complex Systems, Faculty of Computer Science and Cybernetics of Taras Shevchenko National University, Kyiv; tel.: (099) 765-90-29; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4480-0347>; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Довгий Станіслав Олексійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАНУ, завідувач відділу фізичного і математичного моделювання ІТГП НАН України, м. Київ; тел.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Dovgyi Stanislav Oleksiiovych – Doctor of Sciences, Professor, Academician of the NAS of Ukraine, Head of the Department of Physical and Mathematical Modeling, The Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Лебідь Олексій Григорович – доктор технічних наук, старший дослідник, заступник директора ІТГП НАНУ з наукової роботи, м. Київ; тел.: (050) 441-15-58; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068>; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Lebid Oleksii Grygorovych – Doctor of Technical Sciences, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (050) 441-15-58; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068>; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Черній Дмитро Іванович – доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Cherniy Dmytro Ivanovych – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Г. О. ВОРОПАЄВ, О. О. БАСКОВА

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЧАСТКОВОГО ГОФРУВАННЯ НА РОЗВИТОК ВИХРОВИХ УТВОРЕНЬ В ТРУБІ ПРИ ПЕРЕХІДНИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

На даний час існує велика кількість досліджень, присвячена оцінці різних видів структурування поверхні з метою отримання найменшого гідравлічного опору та/або найбільшого теплообміну. Зазвичай дослідження проводяться в певних діапазонах фізичних та геометричних параметрів шляхом перебору їх різних поєднань. Це доволі трудомісткий шлях, який займає багато часу та ресурсів. В даній роботі робиться спроба за вихідну точку обрати власні параметри потоку. Саме спираючись на форму та параметри власних збурень в потоці пропонується форма і геометричні характеристики розвинення поверхні. Часткове структурування обтічної поверхні дозволяє нав'язати лише певні зміни у природньому процесі розвитку збурень повністю його не змінюючи. Дослідження присвячено вивченню характеристик течії в гладкій трубі та трубі із гофрованими вставками. Комп'ютерне моделювання проводиться при перехідному числі Рейнольдса і за умов неізотермічності течії. Виконується пряме чисельне моделювання без застосування моделей турбулентності. На першому етапі проведено дослідження течії в гладкій трубі. Основну увагу приділено аналізу зародження та розвитку вихрових утворень, явищу втрати стійкості в потоці. Проаналізовано довжини хвиль збурень, амплітуди, відстань, на якій зароджуються та існують структуровані вихрові утворення згідно характерних етапів розвитку збурень. На другому етапі дослідження проведено порівняння із трубами з різними гофрованими вставками. Виявлено вплив довжини хвилі гофрування. Так, короткохвильове, у порівнянні із локальною довжиною хвиль власних збурень, гофрування може виступати як турбулізатор. В той же час, залежно від місця розташування, довгохвильове гофрування може надавати регуляризовуючу дію і навіть затягнути процес переходу. Також проаналізовано доцільність розташування двох гофрованих вставок заданої геометрії.

Ключові слова: течія в трубі, перехідні числа Рейнольдса, вихрові збурення, розвиток збурень, неізотермічний потік, часткове гофрування.

G. O. VOROPAIEV, O. O. BASKOVA

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF PARTIAL CORRUGATION ON THE DEVELOPMENT OF VORTEX STRUCTURES IN A TUBE AT A TRANSIENT REYNOLDS NUMBERS

Currently, a significant number of studies are dedicated to evaluating various types of surface structuring aimed at achieving minimal hydraulic resistance and/or maximal heat transfer. Typically, such studies are conducted within certain ranges of physical and geometrical parameters by iterating through different combinations. This is a rather labor-intensive approach that requires considerable time and resources. In the present work, an attempt is made to use the inherent flow parameters as a starting point. Based on the form and characteristics of the natural disturbances in the flow, a corresponding shape and geometric configuration of surface development is proposed. Partial structuring of the streamlined surface allows for the imposition of specific modifications to the natural process of disturbance development without completely altering it. The study focuses on analyzing the flow characteristics in a smooth pipe and in a pipe with corrugated inserts. Computational simulations are carried out at transitional Reynolds numbers under non-isothermal flow conditions. Direct numerical simulation (DNS) is performed without employing turbulence models. In the first stage, the flow in a smooth pipe is investigated. The main focus is on the analysis of the onset and development of vortex structures, as well as the phenomenon of flow instability. The wavelengths, amplitudes, and distances at which structured vortex formations originate and exist are analyzed according to the characteristic stages of disturbance development. In the second stage, a comparison is made with pipes containing various corrugated inserts. The influence of the corrugation wavelength is identified. For example, short-wavelength corrugation – relative to the local wavelength of the inherent flow disturbances – can act as a turbulizer. At the same time, depending on the location, long-wavelength corrugation can have a regularizing effect and even delay the transition process. Additionally, the feasibility of placing two corrugated inserts of a given geometry is analyzed.

Key words: flow in a tube, transitional Reynolds numbers, vortex disturbances, development of disturbances, non-isothermal flow, partial corrugation.

Вступ. Задачі управління потоком постають в самих різних галузях промисловості. Вимоги щодо мінімізації гідравлічного опору є ключовими для авіації, морського транспорту, енергетичної галузі, енергетичного машинобудування тощо. Складність розвитку поверхонь із отриманням потоків заданих характеристик зумовила появу великої кількості досліджень. Проте, навіть і сьогодні, ще не вироблений остаточно єдиний методологічний підхід для створення ефективних в гідравлічному та/або енергетичному аспектах обтічних поверхонь.

Управління характеристиками потоку в різному обладнанні здійснюється в залежності від потрібних функціональних параметрів. Методи управління потоками підрозділяють на *енергозатратні* – активні та пасивні. Зміну форми і якості обтічних поверхонь відносять до пасивних засобів цілеспрямованої зміни параметрів устаткування з метою підвищення енергоефективності. Але для досягнення найбільшого ефекту необхідно мати базові параметри, відносно яких потрібно покращувати характеристики обладнання. Тому спочатку аналізують закономірності течії в устаткуванні на підставі гладкого каналу при певних числах Рейнольдса.

В довільному потоці завжди виникають малі збурення різних масштабів, але вони чи згасають під впливом в'язкості рухомої рідини, чи набувають певних значень, що веде з часом до турбулізації потоку. Розвиток і трансформація зумовлені параметрами потоку, умовами роботи обладнання і можуть відбуватися по-різному в залежності від числа Рейнольдса. При формуванні структури внутрішніх осесиметричних течій можна умовно виділити ряд етапів. На першому етапі (за умов ударного входу, але безвідриного) на поверхні труби розвивається примежовий шар, і товщина його є дуже малою у порівнянні із радіусом труби. Для оцінки зростання збурень потоку можна скористатися *лінійною двовірною теорією гідродинамічної стійкості*, всупереч тому, що для *профіля Пуазейля* лінійна теорія стійкості показує стійкість осесиметричних збурень. Таким чином, в примежовому шарі на поверхні початкової ділянки ($L/d < 50$) труби формуються умови втрати стійкості потоку в трубі, зумовлені саме властивістю розповсюдження *дискретних хвиль Толлміна – Шліхтинга* при відповідних числах

Рейнольдса [1]. Визначальну роль тут відіграють відповідні довжини цих хвиль і фазові швидкості власних збурень примежового шару [2]. Для гладких труб характерним є *порогове значення* числа Рейнольдса втрати стійкості $Re_d \sim 6000$ [3]. Однак, по досягненню певних значень *амплітуд збурень* починається процес нелінійного етапу переходу, коли положення лінійної теорії не працюють. Цей етап характеризується кінцевими значеннями амплітуд збурень тиску та швидкості, їх впливом на розподіл швидкості і тиску в трубі, що неможливо оцінити без розв'язання *тривимірної нестационарної системи рівнянь Нав'є – Стокса*. На цьому етапі процесу переходу в трубі трансформування хвилі завихреності у примежовому шарі нагадують гофровані тороподібні вихрові структури [4]. Певний час ці майже *детерміновані структури* зберігають форму, зростаючи в розмірах перерізу, що приводить до *немонотонності профіля осередненої швидкості* і майже нульового *градієнту тиску* вздовж труби. Але цей відрізок недовгий. Наступний етап – етап руйнування тороподібних вихрових утворень із перетворенням у повздовжні вихрові структури, які вже відрізняються від λ – *образної вихрової структури* в примежовому шарі на пластині. Вважається, що в трубі трансформаційні процеси відбуваються швидше, оскільки вільний простір в перерізі труби по мірі розвитку збурень зменшується [2]. Тому на початкових ділянках труб довжиною L при $Re_L < 10^6$ можна затягнути область переходу за рахунок підтримки стійкості великомасштабних, відносно радіуса труби, тороподібних вихрових структур і змінити термодинамічні параметри технічного обладнання.

Аналіз останніх досліджень. Форма поглиблення гофрованої вставки обумовлює локальні характеристики потоку. Поодинокі гофри, які звужують локально перетин труби, сприяють формуванню вихрових структур вниз за течією після виступу [5]. Механізм формування схожий на розвиток вихрових структур всередині траншеї на пластині. Стійкість та форма таких утворень істотно залежать від відстані між заглибленнями. В свою чергу, вони впливають на теплогідрравлічні параметри потоку. Збільшення теплообміну та опору тертя залежать від числа Рейнольдса, глибини заглиблення і можуть сягати 2х разів із збільшенням гідрравлічного опору до 84%.

Введення гофрування, яке розширює переріз, призводить до появи штучно створених вихрових структур всередині поглиблень [6, 7]. Форма та інтенсивність даних вихрових утворень залежать безпосередньо від заглиблень, де вони сформувалися. Також істотною є залежність від числа Рейнольдса. Але при цьому саме критичне число Рейнольдса залежить від типу гофрування [6]. Для низьких значень чисел Рейнольдса (порядку 200) введення *витого гофрування*, попри виникнення значних за інтенсивністю вихрових структур, не призводить до істотного збільшення конвективного теплообміну та затягує перехідний процес [6]. За чисел Рейнольдса порядку 800 вите та пряме гофрування мають однаковий вплив на *число Нуссельта* і його збільшення у порівнянні із гладкою трубою, не перевищує 30%. При перехідних та турбулентних числах Рейнольдса дослідження авторів [7] показало, що вите гофрування дозволяє збільшити число Нуссельта до 250%. Проте аналіз даних досліджень різних авторів по рівню інтенсифікації теплообміну, наведений в [7], показав істотні (до 1,75 разів) відмінності, незважаючи на схожі безрозмірні параметри геометрії та діапазон чисел Рейнольдса.

Отже, отримання високоефективної геометрії сильно залежить від вдалого поєднання параметрів поверхні із діапазоном граничних умов. Багато досліджень побудовано на підході простого перебору різноманітних геометричних параметрів та граничних умов із винайденням оптимального рішення. В даному дослідженні ми робимо спробу першим кроком проаналізувати параметри вихрової структури в гладких трубах. А вже на основі отриманих даних запропонувати форму і розміри розвиненої поверхні.

Постановка задачі. Досліджується труба діаметром $d = 70$ мм, довжиною $l = 3180$ мм ($l/d = 45,5$). Гофрована вставка має довжину $280 - 300$ мм ($4 \dots 4,29$) d . Довжина ділянки від входу в трубу до гофрованої вставки змінювалась і складала $l/d = 7$ та 21 відповідно. Досліджувались гофровані вставки довжиною хвилі $\lambda_{гоф} = 20 \dots 60$ мм, амплітудою $a = 3$ мм. Розглядалися ділянки труби з однією та двома гофрованими вставками (рис. 1). Відстань між вставками складала $\sim 10d$.

Дослідження проводилося при наступних граничних та початкових умовах:

- 1) на вході задавалась постійна швидкість, яка відповідала числу Рейнольдса $Re = 7000$, та постійна температура $T_f = 333$ K;
- 2) на стінках труби задавались умови прилипання та постійна температура $T_w = 283$ K; на виході з труби задавались так звані «м'які» граничні умови – *умови Neumann*.

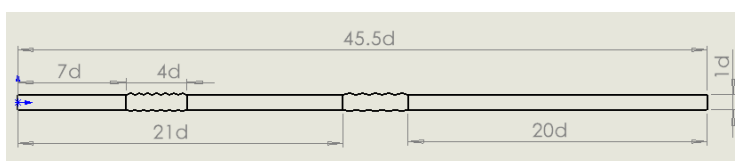


Рис. 1 – Геометрія досліджуваної ділянки.

Математична модель. Дослідження проводилося шляхом безпосереднього розв'язання системи рівнянь руху, енергії та нерозривності (1 – 3) без застосування моделей турбулентності:

– рівняння Нав'є – Стокса:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (1)$$

$i, j = 1 \dots 3$;

– нерозривності:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0; \quad (2)$$

– рівняння енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\mu}{2c_p \rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2; \quad (3)$$

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, зважаючи на неізотермічну постановку задачі для розглянутого діапазону температур описується поліномом [8]:

$$\mu = 2,622 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 0,1783 \cdot T + 30,767 [kg/(m \cdot s)].$$

Початкові умови відповідали умовам на вході в трубу.

У дослідженні використовувались:

- метод кінцевого об'єму;
- метод роздільного рішення основних рівнянь (Pressure Based);
- неявна схема лінеаризації рівнянь;
- схема «проти потоку» другого порядку;
- схема інтерполяції рівняння корекції тиску другого порядку;
- алгоритм зв'язку полів швидкостей і тисків – SIMPLEC з коефіцієнтами релаксації для тиску – 0,3, для моменту – 0,7, для енергії і густини – 1.

Кількість комірок обчислювальної сітки становила близько 6 млн, з більш дрібними розмірами комірок біля стінок і в заглибленнях (рис. 2). Оскільки в цьому дослідженні для нас цікавими були досить великомасштабні вихрові структури, обмеження на розмір комірок не були визначальними.

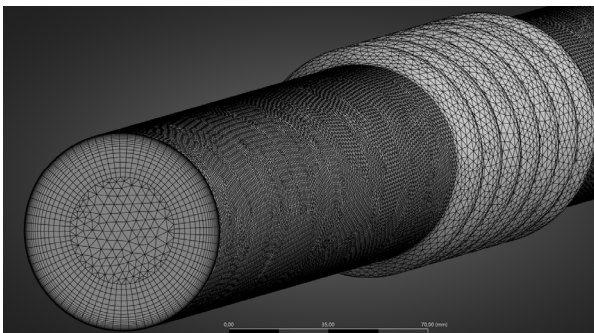


Рис. 2 – Фрагмент сітки розбиття досліджуваної області.

Результати комп'ютерного моделювання. Процес появи і розвитку збурень в примежовому шарі на гладкій плоскій поверхні і на початку гладких труб має багато спільного за умови, що товщина примежового шару, яка формується на поверхні труби, залишається меншою за радіус труби [8]. Тому процес переходу від ламінарного до турбулентного режиму течії в трубі можна умовно поділити на етапи переходу:

- етап зародження коливань: $x/d \leq 2$ ($Re_x < 14000$);
- етап розвитку регулярних осесиметричних хвиль тиску і завихреності: $2 \leq x/d \leq 7$, ($14000 < Re_x < 49000$), які майже повністю відповідають лінійній теорії стійкості

виникненню збурень і їх початку розвитку.

Наступні етапи нелінійного переходу:

- етап розвинення детермінованої хвилі тиску і завихреності тороподібної форми: $7 \leq x/d \leq 15$ ($49000 < Re_x < 105000$);
- етап руйнування детермінованою вихровою структурою $x/d > 16$ ($Re_x > 1.1 \cdot 10^5$).

Виходячи з припущення, що при ударному вході в трубу, як на передній кромці обтічної пластини, так і в потоці присутній весь спектр частот власних збурень примежового шару та враховуючи їх малу величину, високочастотні збурення швидко згасають, що і показує Q – візуалізація розрахунків. Низькочастотні збурення залишаються у примежовому шарі. Їх поширення вниз за течією реєструються при відповідному числі Рейнольдса у вигляді дискретних біжучих хвиль певної довжини і фазової швидкості. Так на ділянці $x/d \leq 15$ на підставі результатів розрахунку можна виділити сформовані дискретні хвилі довжиною λ від 0,035 м до 0,045 м ($\lambda/\delta = 3 - 4,7$) при середньому значенні фазової швидкості $c = (0,057 \dots 0,06)$ м/с, що майже відповідає хвилі Толміна – Шліхтинга в примежовому шарі (рис. 3, а). На наступній ділянці труби результати розрахунку показу-

ли хаотизацію потоку із появою дискретних збурень, що визначається спектром (рис. 3, а), який сформований по часовому значенню тиску в кінці труби.

На рис. 3, б наведена часова залежність напруження тертя на відстані 7 калібрів від входу в трубу, по якій визначений спектр, який демонструє появу дискретного збурення з частотою 1,71 Гц (рис. 3, в) з довжиною хвилі 0,033 м.

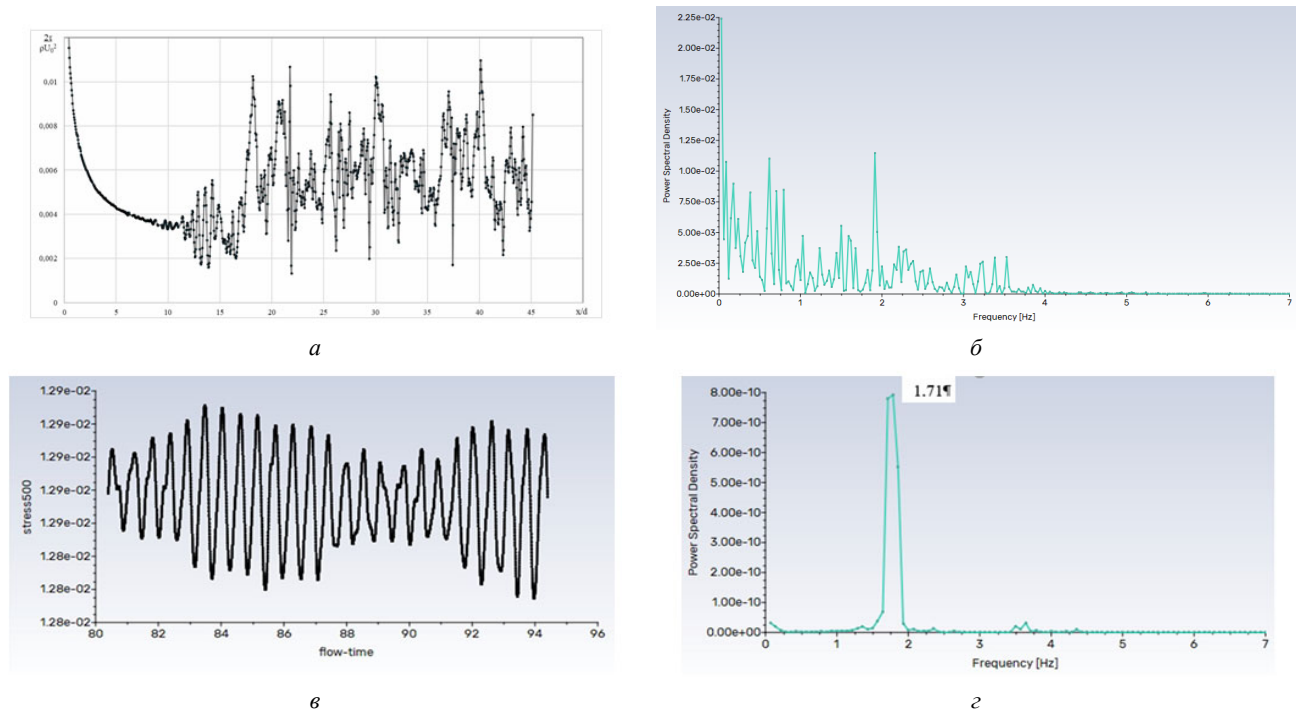


Рис. 3 – а – Миттєві напруження тертя в гладкій трубі; б – часова залежність напруження тертя на відстані семи калібрів; в – відповідний запис сигналу на відстані $x/d = 7$; г – спектри частот для значень тиску біля виходу з гладкої труби та значень напруження тертя.

Мінімальна довжина хвилі серед зареєстрованих хвиль у трубі склала $\lambda = 0,035$ м, тому була спроба нав'язати потоку цю довжину хвилі гофрованою вставкою в гладку поверхню труби довжиною приблизно $0,5\lambda$.

Перший варіант досліджуваної геометрії – розміщення гофрованої вставки на відстані $x/d = 20$ з метою недопущення наступної хаотизації прилежого шару. Як можна бачити з графіка миттєвих напружень тертя (рис. 4, а), хаотичний характер збурень зберігається, амплітуда коливань також майже не змінюється, як і їх частотні характеристики (рис. 4, б).

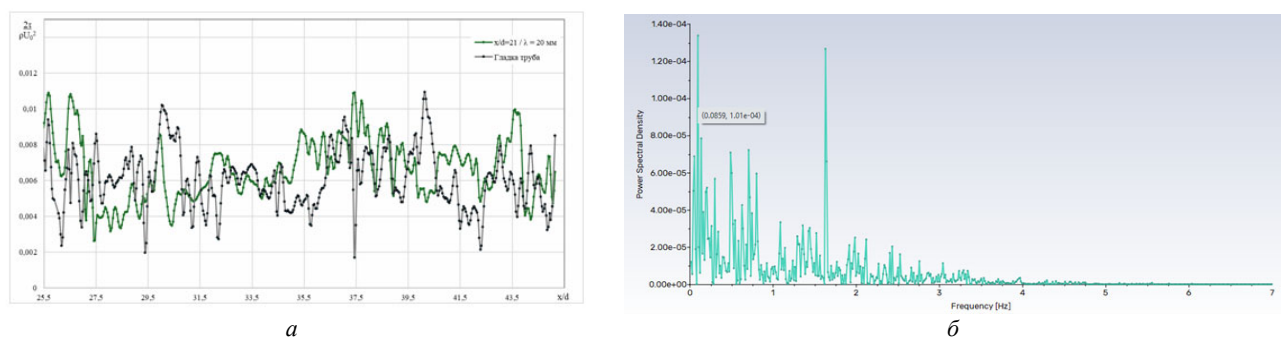


Рис. 4 – а – Миттєві напруження тертя в трубі із гофрованою вставкою $\lambda = 20$ мм, відстань від входу $x/d = 21$; б – спектри частот для значень тиску біля виходу.

Збурення, яке утворюється в заглибленні поверхні і фіксується в потоці, обмежено довжиною гофрованої вставки. Дана геометрія гофрування генерує стаціонарні збурення, які слабо взаємодіють із більшим за довжиною хвилі збуренням в основному потоці і не спроможні його змінити, коли перехід до турбулентного режиму майже завершено. Це можна побачити на температурній візуалізації потоку як в гофрованій вставці, так і на відповідній ділянці гладкої труби (рис. 5, а, б). Але у спектрі, хоча значення низькочастотної частини спектру майже однакові, можна відмітити зниження частоти максимальної щільності в трубі із гофром з $f = 1.9$ Гц до

$f = 1.5 \text{ Гц}$ і меншу щільність для більших частот, що, в свою чергу, свідчить про меншу швидкість хаотизації потоку.

Наступний варіант розміщення гофрованої вставки довжиною $0,5\lambda$ на відстані $x/d = 7$, де в гладкій трубі ще зберігається регулярна структура збурень. Отримані дані миттєвих значень напруження тертя показали, що нове розміщення вставки принципово не змінює збурення напружень, але фіксується суттєве низькочастотне збурення в потоці (рис. 6).

Таким чином, зупинити дроблення хвиль і хаотизацію потоку або запобігти цьому процесу з допомогою структурованої поверхні з довжиною хвилі гофру, яка менше мінімальної довжини регулярної власної хвилі процесу конвективного переходу, поки що не вдається.

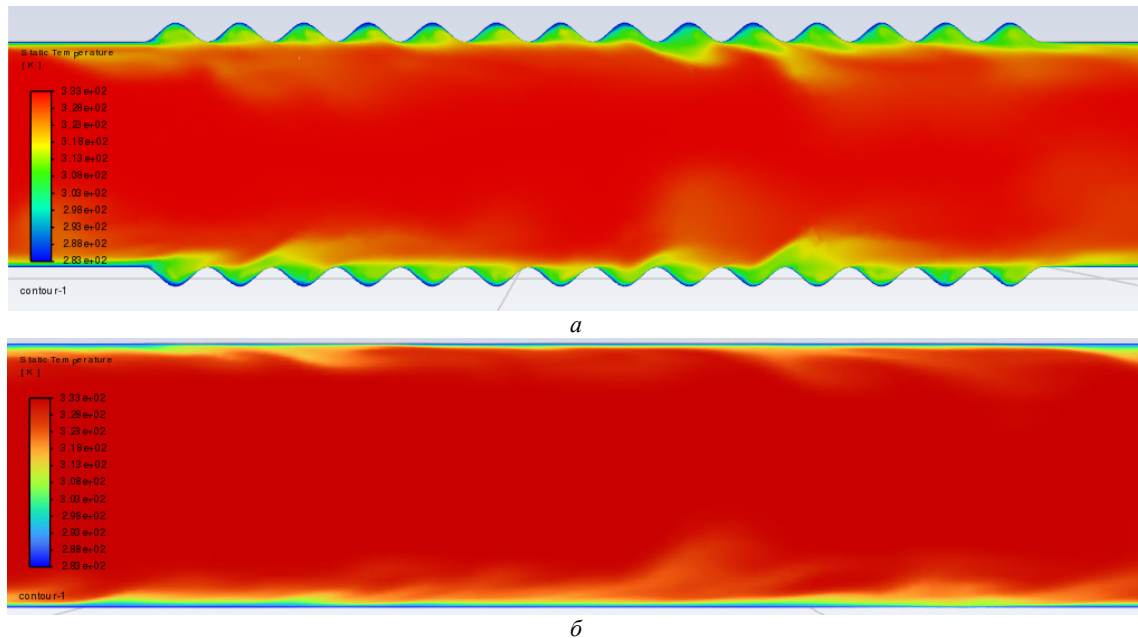


Рис. 5 – Температурні поля в трубі: *a* – із гофрованою вставкою; *b* – в гладкій трубі.

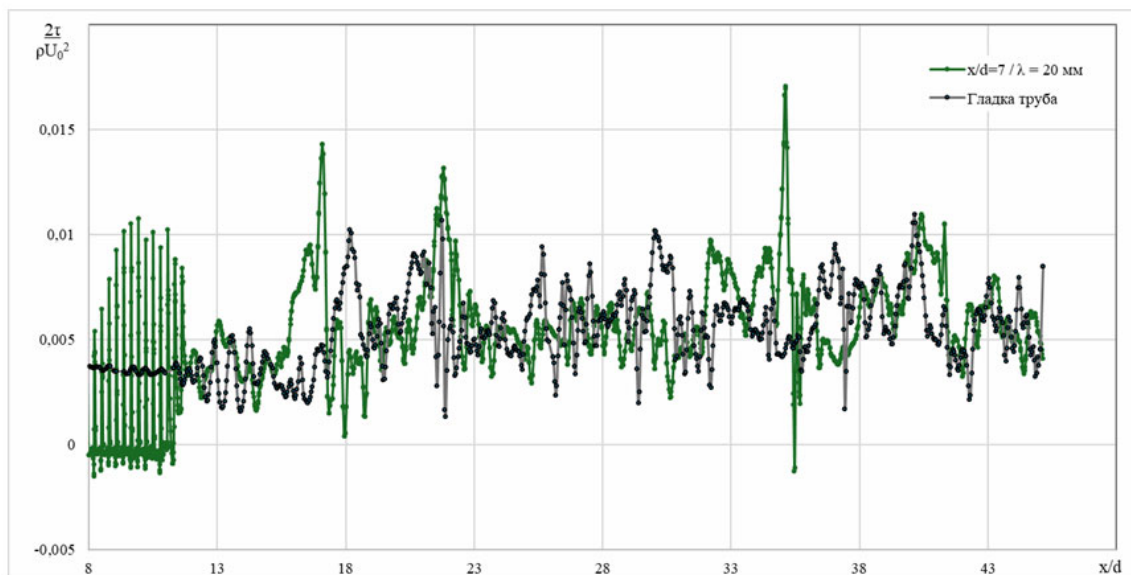


Рис. 6 – Миттєві напруження тертя в гладкій трубі та труб із гофрованою вставкою $\lambda = 20 \text{ мм}$, відстань від входу $x/d = 7$.

Тому було вивчено вплив на процес переходу гофрованої вставки з довжиною хвилі гофра, яка дорівнює мінімальній довжині регулярної власної хвилі λ .

Розміщення цієї гофрованої вставки за зоною, де хвилі власних збурень знаходяться на стадії формування і набувають певних значень, призводить до збільшення ділянки існування структурованих тороподібних структур з 8 калібрів до 15,5 калібрів, що демонструє розподіл миттєвих значень напружень тертя (рис. 7).

Взаємодія вихорів, породжених гофруванням, із власними коливаннями призвела до зменшення амплітуд коливань вниз по потоку (рис. 7) внаслідок явища інтерференції власних і вимушених коливань та суттєвої зміни

спектру вниз по потоку (рис. 8, а, б). В спектрі явно домінує частота збурень, генерованих гофрованою вставкою.

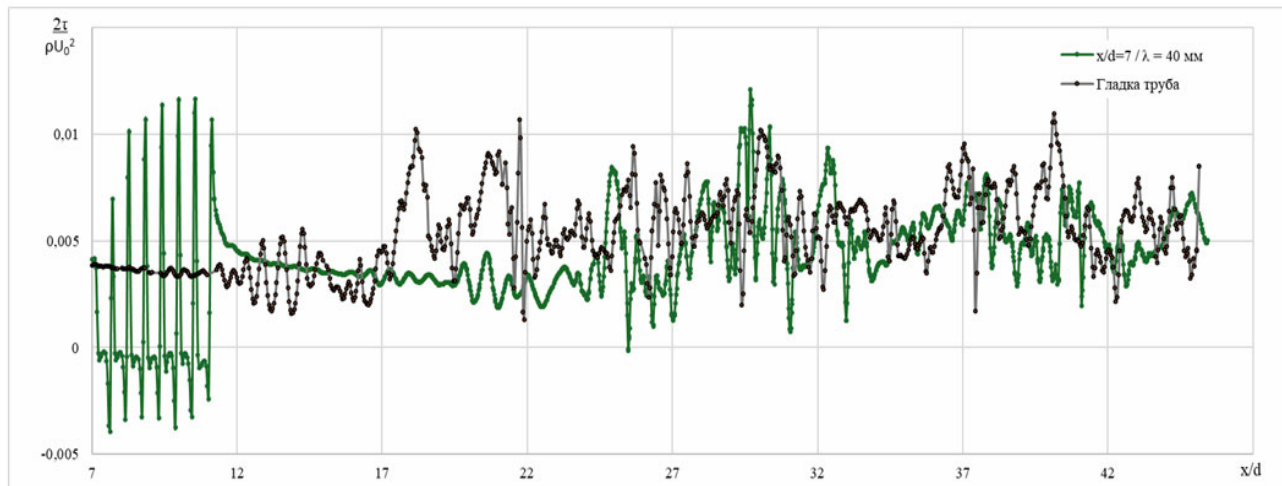


Рис. 7 – Напруження тертя в гладкій трубі та трубі із гофрованою вставкою $\lambda = 40$ мм, відстань від входу $x/d = 7$.

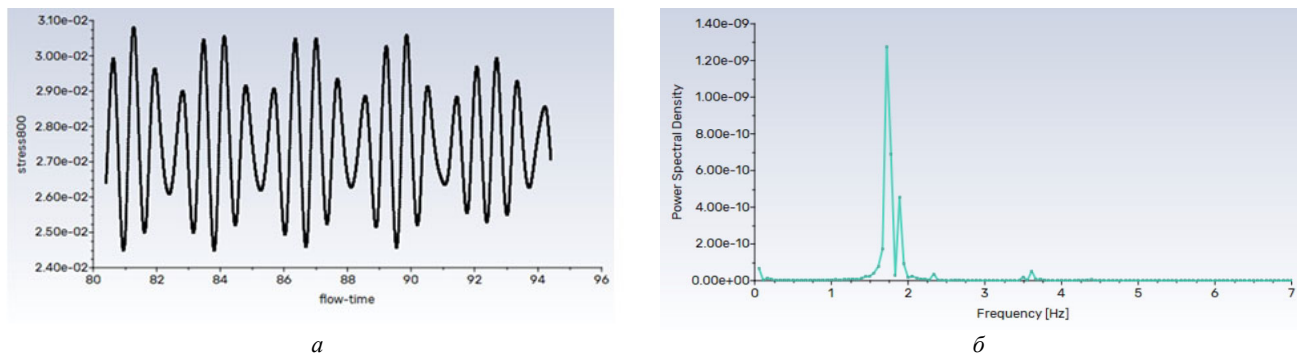


Рис. 8 – а – Зміна значень напруження тертя у часі в трубі із гофрованою вставкою $\lambda = 40$ мм;
б – відстань від входу $x/d = 7$ та їх спектральні характеристики.

Відповідно наступним кроком було введення другої гофрованої вставки на відстані від входу у трубу $x = 21,5d$ з метою упередження процесу хаотизації збурень з більшою довжиною хвилі гофра 2λ (60 мм).

Однак зберегти регулярний характер збурень до кінця труби виявилося неможливим. Перехідні процеси з характерним видовженням збурень з подальшим утворенням веретеноподібних структур почалися вже всередині гофрованої вставки, що можна побачити з Q – візуалізації на (рис. 9, а, б).

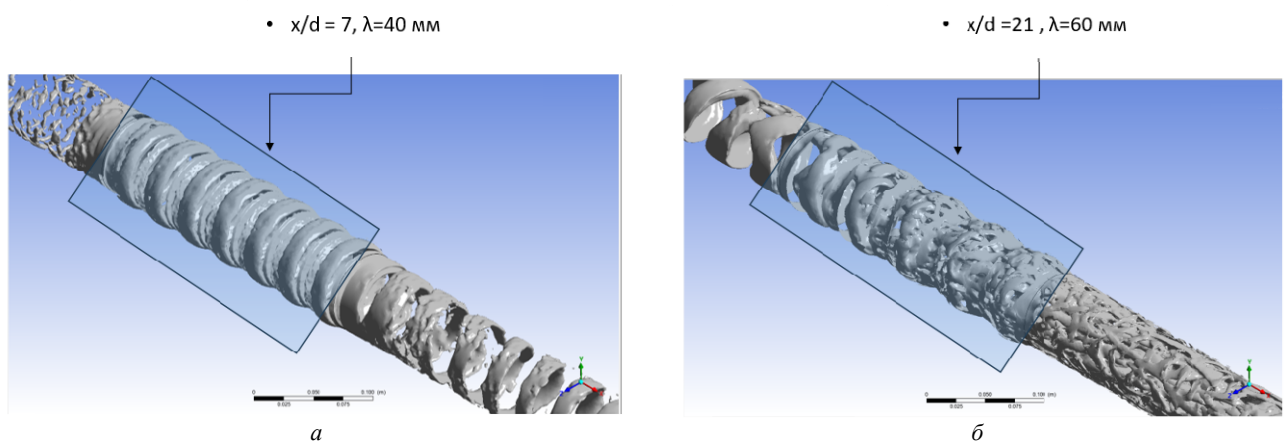


Рис. 9 – Q – візуалізація течії в трубі на ділянці гофрування: а – $\lambda = 40$ мм гофрування; б – $\lambda = 60$ мм гофрування.

На виході з гофрованої вставки було отримано вже характерну для завершення перехідних процесів в потоці хаотичну вихрову структуру. Але, якщо поглянути на амплітуди коливань значень тертя, то вони є меншими, у порівнянні із відповідними ділянками гладкої труби (рис. 10).

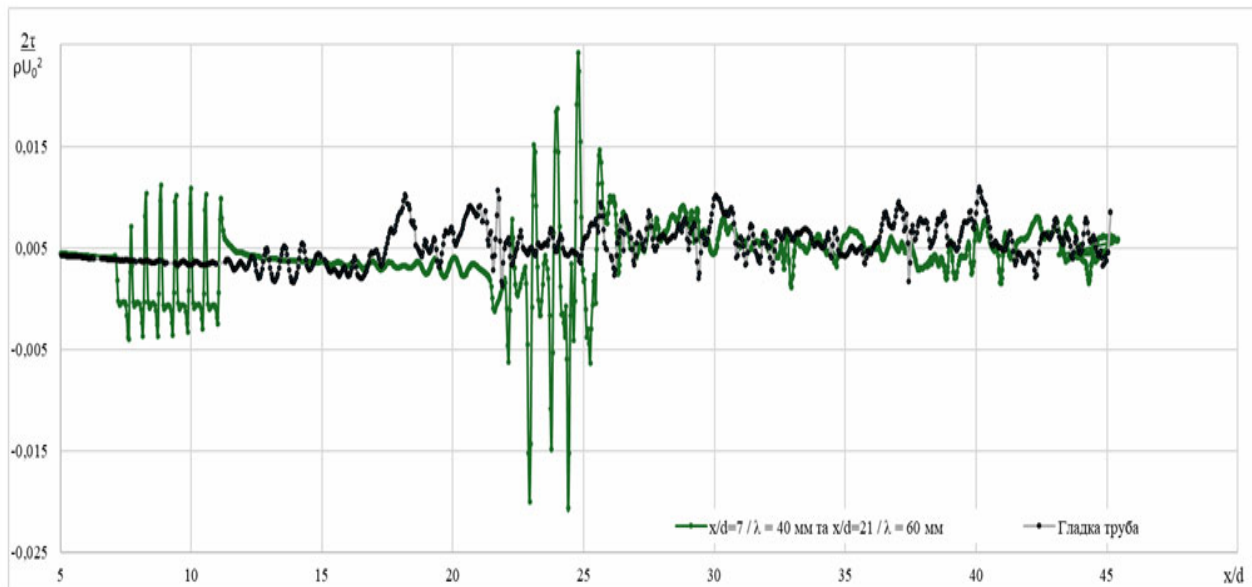


Рис. 10 – Напруження тертя в гладкій трубі та трубі із гофрованою вставкою $\lambda = 40$ мм та $\lambda = 60$ мм , відстань від входу $x/d = 7$ та 21 .

Отже, можна відмітити існування впливу другої вставки на потік, що проявляється в слабкій регуляризуючій дії. Зважаючи на це, доцільно буде спробувати встановити другу гофровану вставку із довжиною хвилі 40 мм або 50 мм .

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають, що для продовження вивчення впливу гофрування поверхні труби, яке генерує в потоці осесиметричні збурення фіксованої довжини, на процеси розвитку природних збурень при фіксованих числах Рейнольдса необхідні додаткові дослідження з виявленням специфіки стійкості виникаючих тороїдальних структур. Для цього потрібні нові методи розрахунку, в тому числі підвищення порядку різницевого методу, а також перехід на модифіковані моделі турбулентності, адаптовані для низьких чисел Рейнольдса.

Висновки. При проведенні чисельного експерименту було показано як геометричні характеристики гофрування впливають на розвиток власних збурень в потоці при перехідних числах Рейнольдса. Було винайдено характеристики збурень, які зароджуються та розвиваються в гладкій трубі при $Re = 7000$, та проведений аналіз впливу збурень, генерованих гофрованими вставками, із довжинами хвиль відповідними власним, які виникають в трубі при відповідному числі Рейнольдса. Показано визначальну роль довжин хвиль збурень на їх спроможність створювати умови зміни власних збурень потоку в залежності від місця їх розташування в трубі.

Список літератури

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D. The three-dimensional nature of boundary-layer transition // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1962. – Vol. 12. – P. 1 – 34. DOI: 10.1017/S0022112062000014.
2. Darbyshire A. G., Mullin T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – Vol. 646. – P. 127 – 136. DOI: 10.1017/s0022112095001248.
3. Ovchinnikov V., Meelan M. Choudhari, Ugo Piomelli. Numerical simulations of boundary-layer bypass transition due to high-amplitude free-stream turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2008. – Vol. 613. – P. 135 – 169. DOI: 10.1017/S0022112008003017.
4. Воронаєв Г. О., Баскова О. О. Моделювання процесу переходу в трубах із спіральним гофруванням // *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. – 2019. – № 8(1333). – С. 75 – 81.
5. Li X., Liu S., Mo X., Sun Z., Tian G., Xin Y., Zhu D. Investigation on Convection Heat Transfer Augment in Spirally Corrugated Pipe // *Energies*. – 2023. – Vol. 16. – P. 1063. DOI: 10.3390/en16031063.
6. Rainieri S., Pagliarini G. Convective heat transfer to temperature dependent property fluids in the entry region of corrugated tubes // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2002. – Vol. 45. – P. 4525 – 4536. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00156-4.
7. Vicente P. G., Garc A., Viedma A. Experimental investigation on heat transfer and frictional characteristics of spirally corrugated tubes in turbulent flow at different Prandtl numbers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2004. – Vol. 47. – P. 671 – 681. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.08.005.
8. Voropaiev G. A., Baskova O. O. Some features of a laminar flow stability loss in a pipe // *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. – 2021. – Vol. 135. – No. 1. – P. 59 – 65. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.07.

References (transliterated)

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D. The three-dimensional nature of boundary-layer transition. *Journal of Fluid Mechanics*. 1962, Vol. 12, pp. 1–34. DOI: 10.1017/S0022112062000014.
2. Darbyshire A. G., Mullin T. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995, Vol. 646, pp. 127–136. DOI: 10.1017/s0022112095001248.
3. Ovchinnikov V., Meelan M., Choudhari, Ugo Piomelli. Numerical simulations of boundary-layer bypass transition due to high-amplitude free-stream turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2008, Vol. 613, pp. 135–169. DOI: 10.1017/S0022112008003017.
4. Voropaiev G. A., Baskova A. A. Modelyuvannya protsessu perekhodu v trubakh iz spiral'nym gofruvanniam [Modeling of transition process in tubes with spiral corrugation]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2019, Vol. 8(1333), pp. 75–81.
5. Li X., Liu S., Mo X., Sun Z., Tian G., Xin Y., Zhu D. Investigation on Convection Heat Transfer Augment in Spirally Corrugated Pipe. *Energies*. 2023, Vol. 16, P. 1063. DOI: 10.3390/en16031063.
6. Rainieri S., Pagliarini G. Convective heat transfer to temperature dependent property fluids in the entry region of corrugated tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002, Vol. 45, pp. 4525–4536. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00156-4.
7. Vicente P. G., Garc A., Viedma A. Experimental investigation on heat transfer and frictional characteristics of spirally corrugated tubes in turbulent flow at different Prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004, vol. 47, pp. 671–681. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.08.005.
8. Voropaiev G. A., Baskova O. O. Some features of a laminar flow stability loss in a pipe. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2021, Vol. 135, No. 1, P. 59–65. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.07.

Надійшла (received) 05.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воропаєв Геннадій Олександрович – доктор фізико-математичних наук, професор, директор Інститут гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Voropaiev Gennadii Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Баскова Олександра Олександрівна – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, асистент, Інститут гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: (068) 198-93-75; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2864-8995>; e-mail: BaskAleksandra@gmail.com.

Baskova Oleksandra Oleksandrivna – Candidate of Technical Sciences, senior researcher, assistant Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: (068) 198-93-75; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2864-8995>; e-mail: BaskAleksandra@gmail.com.

Г. О. ВОРОПАЄВ, С. О. КОВАЛЬ

ФОРМУВАННЯ ВЕНТИЛЬОВАНОЇ КАВЕРНИ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМУ РЕЖИМІ ОБТІКАННЯ ДИСКОВОГО КАВІТАТОРА

У роботі розглядається чисельне моделювання вимушеної кавітації для кавітатора в потоці рідини. Моделювання виконано у програмному середовищі OpenFOAM 12 із використанням чисельної моделі incompressibleVoF та методу об'ємної рідини (Volume of Fluid, VOF). Метод VOF забезпечує відслідковування поверхні розділу фаз (вода – газ) під час утворення порожнини. Розглядається нестисливий двофазний потік (вода – повітря) без врахування сили тяжіння, що дозволило сформулювати задачу у осесиметричній постановці, що в свою чергу зменшує обчислювальні витрати і спрощує аналіз течії. Розрахунок виконувався у нестационарному режимі до досягнення квазі-стационарного стану течії. Аналіз полів тиску і концентрації показав, що при формуванні порожнини значна частина поверхні тіла виявляється ізольованою від рідини. Це зменшує тиск на відповідній ділянці в порівнянні з тиском на ділянці без порожнини та, як наслідок, знижує гідродинамічний опір і пов'язані з ним втрати. Показано, що утворення вентильованої порожнини навколо тіла під час його руху у воді може значно зменшити опір. Отримані результати є важливими для подальшого аналізу впливу штучно створених порожнин на опір та відкривають можливості для оптимізації систем вентиляції з метою мінімізації енергетичних витрат. Таким чином, підтверджено доцільність застосування повітряних порожнин як ефективного засобу зменшення гідродинамічного опору для рухомих тіл у рідині, зокрема підводних апаратів.

Ключові слова: вимушена кавітація, чисельне моделювання, volume of fluid, двофазний потік, порожнина, OpenFOAM, blockMesh, нестислива рідина, кавітатор, incompressibleVoF.

G. O. VOROPAIEV, S. O. KOVAL

FORMATION OF A VENTILATED CAVITY IN A TURBULENT FLOW REGIME AROUND A DISK CAVITATOR

The paper considers the numerical modeling of forced cavitation for a cavitator in a fluid flow. The simulation was performed in the OpenFOAM 12 software environment using the incompressibleVoF numerical model and the Volume of Fluid (VOF) method. The VOF method provides tracking of the water-gas interface during cavity formation. An incompressible two-phase flow (water-air) is considered without taking into account gravity, which allowed us to formulate the problem in an axisymmetric formulation, which in turn reduces computational costs and simplifies flow analysis. The calculation was performed in a nonstationary mode until a quasi-stationary flow condition was reached. The analysis of pressure and concentration fields showed that when a cavity is formed, a significant part of the body surface is isolated from the fluid. This reduces the pressure on the corresponding area compared to the pressure on the corresponding area without a cavity and, as a result, reduces hydrodynamic drag and associated losses. It has been shown that the formation of a ventilated cavity around a body during its movement in water can significantly reduce drag. The results obtained are important for further analysis of the influence of artificially created cavities on drag and open up possibilities for optimizing ventilation systems in order to minimize energy consumption. Thus, the feasibility of using air cavities as an effective method of reducing hydrodynamic drag for moving bodies in liquids, in particular underwater vehicles, has been confirmed.

Key words: forced cavitation, numerical simulation, volume of fluid, two-phase flow, cavity, OpenFOAM, blockMesh, incompressible fluid, cavitator, incompressibleVoF.

Вступ. Зниження гідравлічного опору і підвищення енергоефективності є ключовими завданнями у розвитку сучасних енергетичних систем. Особливо актуальними ці питання є для рухомих підводних пристроїв, де високі втрати на опір суттєво впливають на ефективність роботи обладнання. Одним із перспективних методів вирішення цієї проблеми є застосування вимушеної кавітації, яка полягає у створенні штучної газової порожнини навколо рухомого тіла шляхом цілеспрямованого впуску газу в потік рідини.

Окрім зменшення гідродинамічного опору, застосування вимушеної кавітації дозволяє значно *знижити кавітаційну ерозію*, яка виникає внаслідок колапсу кавітаційних бульбашок. Зменшення ерозії особливо важливе в енергетиці, включаючи атомну, де експлуатація обладнання часто відбувається в умовах високих швидкостей потоків і високого гідравлічного навантаження. Мінімізація кавітаційної ерозії дозволяє суттєво подовжити термін служби обладнання, зменшити витрати на технічне обслуговування та ремонти, а також підвищити загальну безпеку експлуатації об'єктів.

Аналіз останніх досліджень. Результати численних досліджень підтверджують ефективність використання вимушеної кавітації для зниження гідравлічного опору. Наприклад, дослідження [1] показує, що використання поверхонь із спеціальними покриттями та штучних порожнин може знижувати опір до 40 %. В роботі [2] підкреслюється важливість навіть незначної концентрації повітряних бульбашок у потоці для суттєвого зменшення природної кавітаційної ерозії поверхонь, що має велике значення в гідротехніці та енергетиці.

Проблеми енергетичних втрат і ерозії також досліджувалися в контексті застосування систем на стисненому повітрі [3], де було доведено, що інтеграція суперкавітаційних систем дозволяє суттєво покращити показники енергоефективності і тривалості роботи підводних апаратів на високих швидкостях [4].

Постановка задачі. Враховуючи вищеописані переваги вимушеної кавітації, актуальним є проведення чисельного дослідження цього явища для визначення *оптимальних параметрів вентиляції* [5], які забезпечують максимальне зниження гідравлічного опору при русі обтічних тіл у рідині. Основною метою роботи є чисельне моделювання процесу вимушеної кавітації навколо кавітатора за допомогою програмного середовища OpenFOAM 12 із застосуванням методу об'ємної рідини (VOF) на першому етапі у осесиметричній постановці і

без урахування сили тяжіння. Результати цього дослідження планується використати для подальшої оптимізації технологій вентиляції з метою підвищення енергоефективності та зменшення ерозійного впливу на обладнання в енергетичних та гідротехнічних системах.

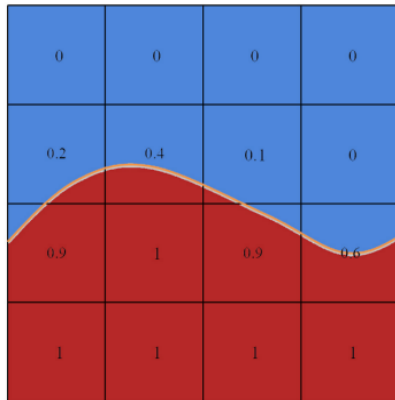


Рис. 1 – Комірки та межа розділу фаз.

Математична модель. Для моделювання процесів вимушеної кавітації використано метод об'ємної рідини (VOF), який є сучасним підходом до чисельного опису багатозфазних течій [6]. Цей метод базується на розв'язанні рівнянь Нав'є – Стокса із врахуванням фазової частки кожної рідини у певному контрольному об'ємі. В рамках методу VOF вводиться індикаторна функція фазової частки $\alpha(\vec{x}; t)$, що характеризує заповненість кожної комірки розрахункової сітки відповідною фазою. Значення функції $\alpha(\vec{x}; t) = 1$ відповідає коміркам, повністю заповненим рідиною, тоді як значення $\alpha(\vec{x}; t) = 0$ вказує на наявність виключно газової фази (наприклад, повітря). Комірки із проміжними значеннями фазової частки $\alpha \in [0; 1]$ визначають наявність поверхні розділу фаз, де відбувається перехід між рідиною і газом, як показано на рис. 1.

Фазова частка розраховується як відношення об'єму води до загального об'єму комірки

$$\alpha = \frac{V_w}{V_w + V_a},$$

де V_w – об'єм води, а V_a – об'єм повітря. Важливою особливістю методу VOF є можливість ефективного відслідковування рухомої межі поділу між фазами, що забезпечується завдяки розв'язку спеціального транспортного рівняння для фазової частки. Таким чином, цей підхід дозволяє точно моделювати утворення і динаміку газової порожнини. Система рівнянь для суміші двох нестисливих ізотермічних середовищ складається з рівняння Нав'є – Стокса з урахуванням поверхневого натягу, нерозривності і переносу фазової частки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_{eff}\vec{U})}{\partial t} + \vec{U}\vec{V}(\rho_{eff}\vec{U}) &= -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}(\tau_{ij}) + \sigma\kappa(\vec{\nabla}\alpha); \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0; \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla}(\alpha\vec{U}) + \vec{\nabla}(\overline{U_c}\alpha(1-\alpha)) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{U}$ – швидкість; p – тиск; $\sigma = 0.07 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ – коефіцієнт поверхневого натягу;

$$\kappa = \vec{\nabla}\vec{n}_\alpha = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\nabla}\alpha}{|\vec{\nabla}\alpha|} \right)$$

– кривизна поверхні розділу фаз; $\overline{U_c}$ – додаткова швидкість для уточнення інтерфейсу між фазами; τ_{ij} – тензор в'язких напруг:

$$\tau_{ij} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Ефективні фізичні параметри двофазної суміші визначаються за правилом зваженого середнього:

$$\mu_{eff} = \alpha\mu_w + (1-\alpha)\mu_a, \quad \rho_{eff} = \alpha\rho_w + (1-\alpha)\rho_a.$$

Система рівнянь (1) замикається за допомогою моделі турбулентності Spalart-Allmaras, що використовує одне рівняння для визначення турбулентної в'язкості. Ця модель ґрунтується на розв'язку одного додаткового транспортного рівняння для модифікованої турбулентної в'язкості $\tilde{\nu}$:

$$\frac{D(\rho_{eff}\tilde{\nu}_{eff})}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\rho_{eff}D_{\tilde{\nu}}\vec{\nabla}\tilde{\nu}_{eff}) + \frac{C_{b2}}{\sigma_{\nu}}\rho_{eff}|\vec{\nabla}\tilde{\nu}_{eff}|^2 + C_{b1}\rho_{eff}\tilde{\nu}_{eff}(1-f_{t2}) - C_{w1}f_w\rho_{eff}\frac{\tilde{\nu}_{eff}^2}{d^2} + S_{\tilde{\nu}}, \quad (3)$$

де $\tilde{\nu}_{eff}$ – модифікована турбулентна в'язкість; ρ_{eff} – ефективна густина; $S_{\tilde{\nu}}$ – джерельний член; $D_{\tilde{\nu}}$ – коефіцієнт дифузії моделі, а f_{t2} , f_w – емпіричні коефіцієнти моделі, що враховують різні ефекти нестационарності течії та пристінкового впливу [7].

Турбулентна в'язкість визначається як:

$$\nu_{teff} = \tilde{\nu}_{eff}f_{\nu1},$$

де функція $f_{\nu1}$ задається співвідношенням:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}_{eff}}{\nu_{eff}},$$

де ν_{eff} – ефективна кінематична в'язкість, а C_{v1} – емпіричний коефіцієнт моделі.

Величина $\tilde{d}$ – у моделі Spalart-Allmaras являє собою відстань від поточної комірки до найближчої твердої стінки (або іншої межі потоку). Саме ця величина забезпечує коректну поведінку моделі біля стінок та дозволяє адекватно описувати пристінну турбулентність (*пристінкова функція*).

Основною перевагою цієї моделі є її простота та висока ефективність для моделювання пристінних течій з високими числами Рейнольдса, що робить її особливо зручною для застосувань в аеродинамічних та гідродинамічних задачах. Завдяки невеликим витратам на обчислення та достатній точності, модель широко використовується у практичних задачах гідродинаміки [8]. Стандартні емпіричні коефіцієнти моделі турбулентності, що використовуються в OpenFOAM, наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Стандартні коефіцієнти моделі турбулентності

σ_{v_t}	C_{b1}	C_{b2}	C_{w1}	C_{v1}
0.6667	0.1355	0.622	3.2798	7.1

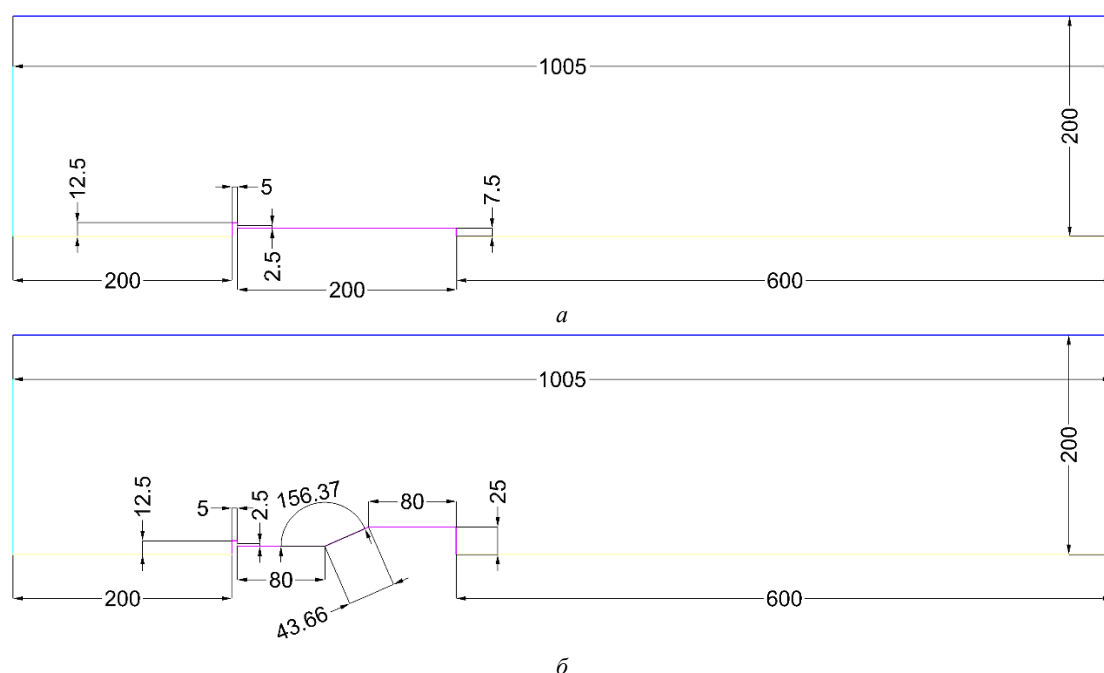


Рис. 2 – Геометрія розрахункової області: *a* – з циліндричним тілом $d = 0.6d_c$; *б* – з циліндричним тілом $d = 2d_c$.

На рис. 2, *a, б* зображено геометрію обтічних тіл та всі границі розрахункової області. Потік води заходить через границу *Water inlet* (голубий колір) та виходить через границу *Outlet* (червоний колір) разом із повітрям. Синім кольором позначено відкриту границу *Open boundary*. Стінки кавітатора *Walls* позначено фіолетовим кольором. Жовтим кольором позначено вісь симетрії *Symmetry axis*. Видув повітря відбувається через малий отвір (границя *Air inlet* зелений колір) на кавітаторі довжиною 2.5 мм.

Граничні умови для концентрації води α :	Граничні умови для модифікованої турбулентної в'язкості $\tilde{\nu}_{eff}$:
Symmetry axis – вісь симетрії	Symmetry axis – вісь симетрії
Outlet – $\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$ (zeroGradient)	Outlet – $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\infty}$ (freestreamValue), $\tilde{\nu}_{\infty} = 1.07 \cdot 10^{-3}$
Open boundary – $\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$ (zeroGradient)	Open boundary – $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\infty}$ (freestreamValue), $\tilde{\nu}_{\infty} = 1.07 \cdot 10^{-3}$
Air Inlet – $\alpha = 0$	Air Inlet – $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\infty}$ (freestreamValue), $\tilde{\nu}_{\infty} = 1.07 \cdot 10^{-3}$
Water Inlet – $\alpha = 1$	Water Inlet – $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\infty}$ (freestreamValue), $\tilde{\nu}_{\infty} = 1.07 \cdot 10^{-3}$
Walls – $\frac{\partial \alpha}{\partial n} = 0$ (zeroGradient)	Walls – $\tilde{\nu} = 0$

Граничні умови для тиску p :

Symmetry axis – вісь симетрії

Outlet – $p = 0$

Open boundary – $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ (zeroGradient)

Air Inlet – $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ (zeroGradient)

Water Inlet – $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ (zeroGradient)

Walls – $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$ (zeroGradient)

Граничні умови швидкості $\vec{U}$:

Symmetry axis – вісь симетрії

Outlet – $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0$ (zeroGradient, + гасіння зворотного потоку)

Open boundary – $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} = 0$ (slip)

Air Inlet – $\vec{U} = (0, 0, U_a = 6) \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Water Inlet – $\vec{U} = (0, 0, U_\infty = 10) \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Walls $\vec{U} = (0, 0, 0)$

Для завдання турбулентних характеристик на входах та виходах використано наступну оцінку турбулентної в'язкості ν_{eff} через основні безрозмірні параметри турбулентності – інтенсивність турбулентності $l = 0.05$ та характерний розмір (діаметр кавітатора) $d_c = 0.025 \text{ м}$.

Початково визначається турбулентна кінетична енергія k :

$$k = \frac{3}{2} (l \cdot U_\infty)^2.$$

Після цього оцінюється швидкість дисипації турбулентної енергії ε як:

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \cdot \frac{k^{3/2}}{l}.$$

Тут U_∞ – швидкість набігаючого потоку води на нескінченності, $C_\mu = 0.09$ – емпірична константа. Тут $l = 0.07 d_c$ – характерний масштаб турбулентності. На основі отриманих значень k , l і ε турбулентна в'язкість визначається як:

$$\nu_{\text{eff}} = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Ця формула використовується в практичних задачах як спрощений вираз для швидкого оцінювання турбулентної в'язкості за заданими макроскопічними параметрами потоку: швидкістю на нескінченності, характерним масштабом довжини та інтенсивністю турбулентності. Значення ν_{eff} надалі використовується як граничне значення для модифікованої турбулентної в'язкості $\tilde{\nu}_{\text{eff}}$ в моделі Spalart-Allmaras.

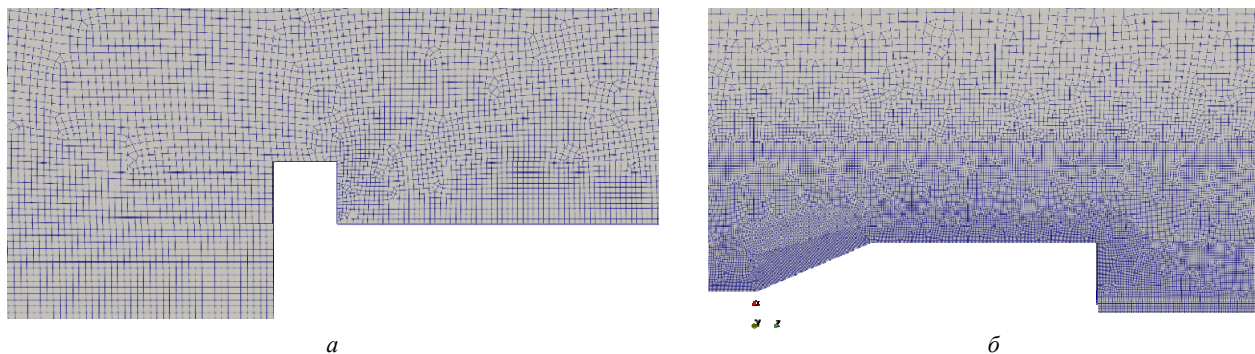


Рис. 3 – Сітка навколо: а – кавітатора; б – тіла.

Для моделювання використано *гексадральну сітку*, побудовану за допомогою відкритого програмного забезпечення *Salome*. Основний об'єм обох сіток складається з гексадрів ($\approx 97.2\%$) з незначною кількістю призм, що виникають в околі осі симетрії. Сітку навколо кавітатора та тіла зображено на рис. 3, а, б.

Результати. У статті наведені результати при $U_\infty = 10 \text{ м/с}$ та вдуві повітря $U_a = 6 \text{ м/с}$, що відповідає об'ємній витраті $Q_a \approx 0.83 \text{ л/с}$. На рис. 4 показано поле об'ємної частки води α (де $\alpha = 1$ відповідає воді, а $\alpha = 0$ – повітрю) та векторне поле швидкості навколо кавітатора в різні моменти часу формування вентильованої порожнини. Видно, що безпосередньо за кавітатором утворюється відривна зона суміші води і повітря. В межах газової порожнини швидкість рідини практично нульова, що вказує на наявність обширної зони рецирку-

ляції позаду тіла. Основний потік огинає порожнину; вздовж межі порожнини спостерігаються високі градієнти швидкості. Вдув повітря робить стійкою зону відриву потоку за кавітатором з поступовим заповненням її повітрям. Через проміжок часу ($t = 1.3\text{с}$) для розглянутого значення Q_a формується каверна певного об'єму, який вже не змінюється в наступні моменти часу.

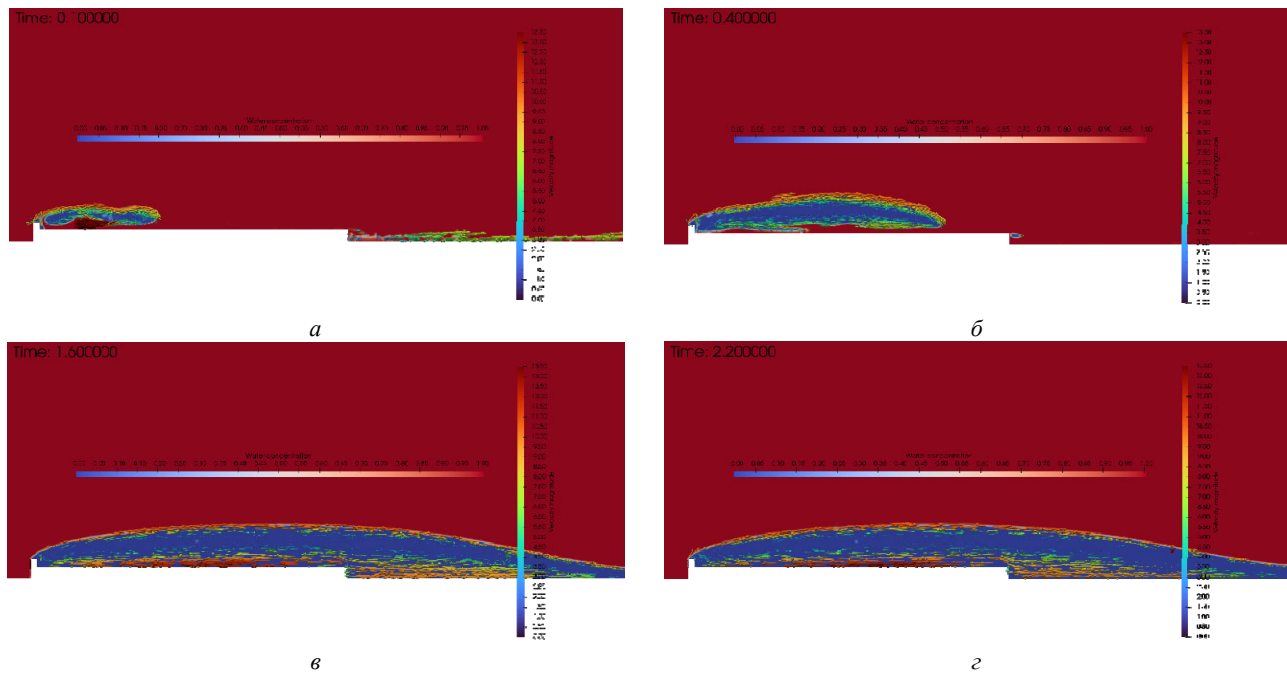


Рис. 4 – Поле концентрації α та векторне поле швидкості для кавітації з малим циліндричним тілом:
 a – α та вектори U при $t = 0.1\text{с}$; b – α та вектори U при $t = 0.4\text{с}$; v – α та вектори U при $t = 1.6\text{с}$;
 z – α та вектори U при $t = 2.2\text{с}$.

На рис. 5 аналогічно зображено поле концентрації і вектори швидкості для випадку наявності за кавітатором циліндричного тіла більшого діаметра. Як і в попередньому випадку, за кавітатором і за кормою тіла утворюються циркуляційні зони, які поступово заповнюються газом.

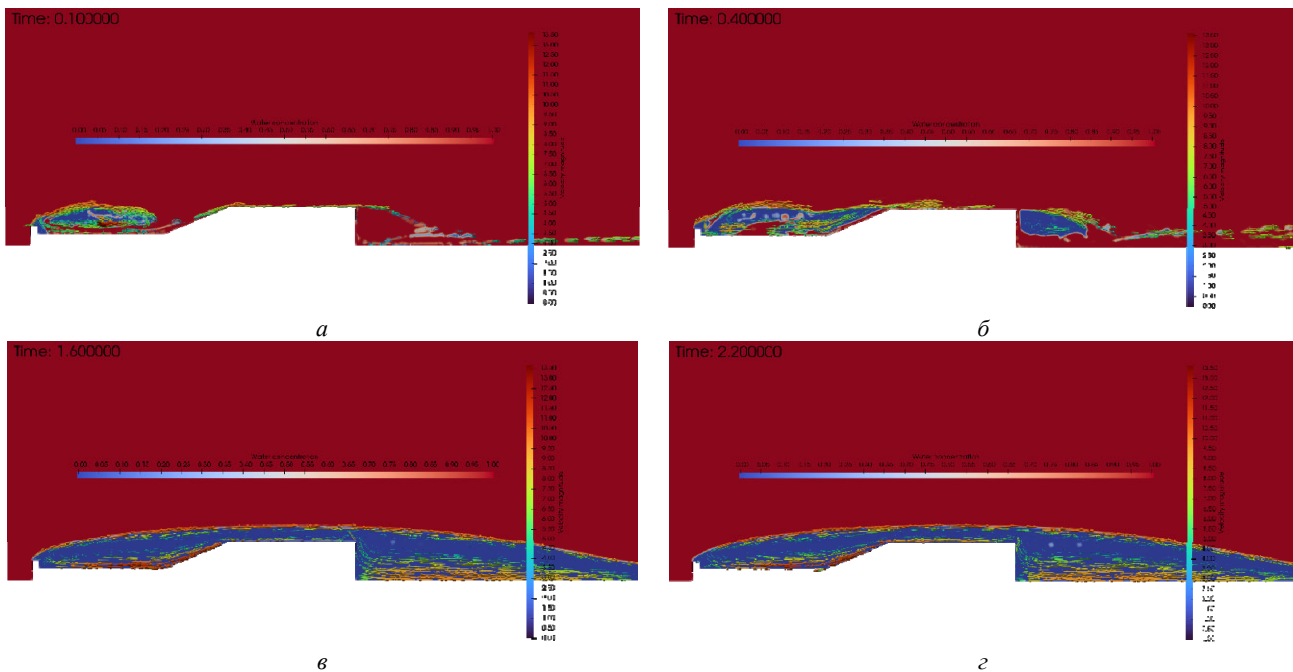


Рис. 5 – Поле концентрації α та векторне поле швидкості для кавітації з додатковим тілом:
 a – α та вектори U при $t = 0.1\text{с}$; b – α та вектори U при $t = 0.4\text{с}$; v – α та вектори U при $t = 1.6\text{с}$;
 z – α та вектори U при $t = 2.2\text{с}$.

Видно, що для варіанту тіла більшого діаметру порожнина виходить дещо ширшою біля його корми. Про-

те, форма порожнини стабілізується аналогічно до випадку каверни малим циліндричним тілом. Стационарна (стійка) порожнина встановлюється приблизно за $t = 1.3$ с від початку вентиляції – про це свідчить майже повна подібність структури течії та форми порожнини на рис. 5, в і рис. 5, г. Отже, обрані параметри вентиляції забезпечують швидке формування сталої порожнини навколо тіла в обох геометричних конфігураціях.

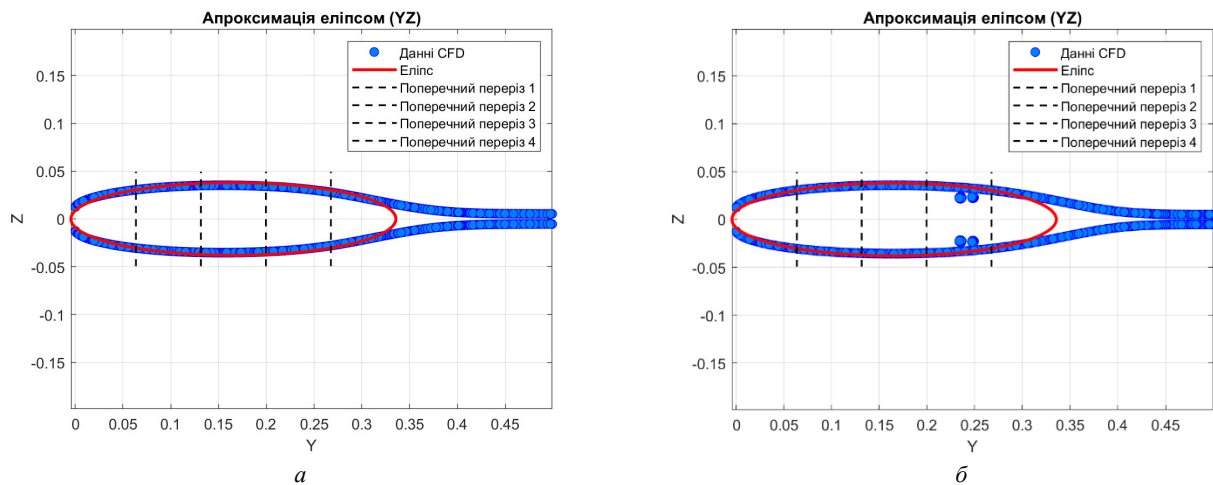


Рис. 6 – 2D апроксимація поверхні розділу фаз еліпсом: a – з циліндричним тілом $d = 0.6d_c$;
 b – з циліндричним тілом $d = 2d_c$.

На рис. 6 представлено апроксимацію форми межі розділу фаз (вільної поверхні порожнини) еліпсом у двовимірному випадку. На тому ж рисунку позначено координати декількох поперечних перерізів уздовж порожнини, у яких далі аналізується розподіл тиску. Встановлено, що одна й та сама еліптична крива добре узгоджується з формою межі порожнини як для випадку з циліндричним тілом $d = 0.6d_c$, так і для випадку з тілом $d = 2d_c$.

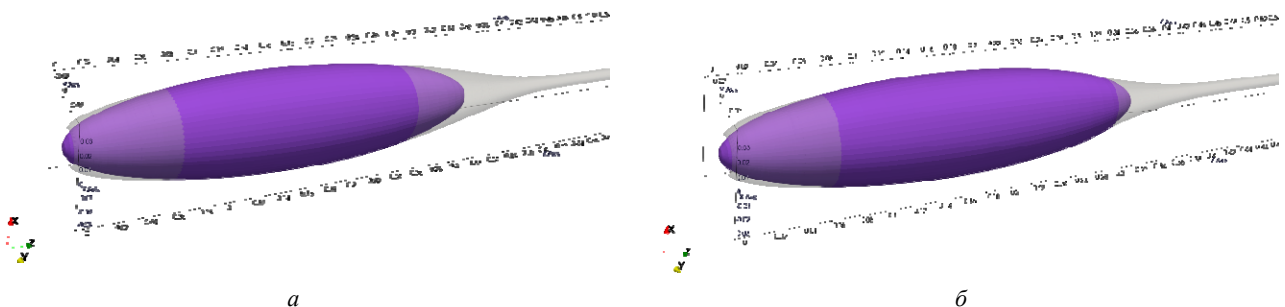


Рис. 7 – 3D апроксимація поверхні розділу фаз еліпсоїдом: a – з циліндричним тілом $d = 0.6d_c$;
 b – з циліндричним тілом $d = 2d_c$.

Зважаючи на осесиметричність течії, отриманий еліпс можна обертати навколо осі, одержуючи тривимірну форму порожнини у вигляді еліпсоїда (рис. 7). Параметри цього еліпсоїда (напівосі) дозволяють оцінити характерні розміри порожнини:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Тут $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.1655$, $a = 0.038$, $b = 0.038$, $c = 0.17$ – апроксимовані параметри еліпсоїда. Максимальний радіус порожнини є $a = 38$ мм. Тоді максимальна довжина стабільної частини порожнини є $2c = 340$ мм .

Об'єм порожнини складає:

$$V_{cav} = \frac{4}{3} \pi abc \approx 1.02 \text{ л}.$$

Максимальне видовження $\gamma = \frac{2c}{L_{body}} \approx 1.66$, а максимальне відношення $\theta = \frac{a}{R_c} \approx 3.04$. Тоді як співвідношення до середнього радіусу еліпсоїда

$$\vartheta = \frac{R_{avg\,ellipse}}{R_c} \approx 2.39, \text{ де } R_{avg\,ellipse} = \frac{\pi}{4} a \approx 29.84 \text{ мм}.$$

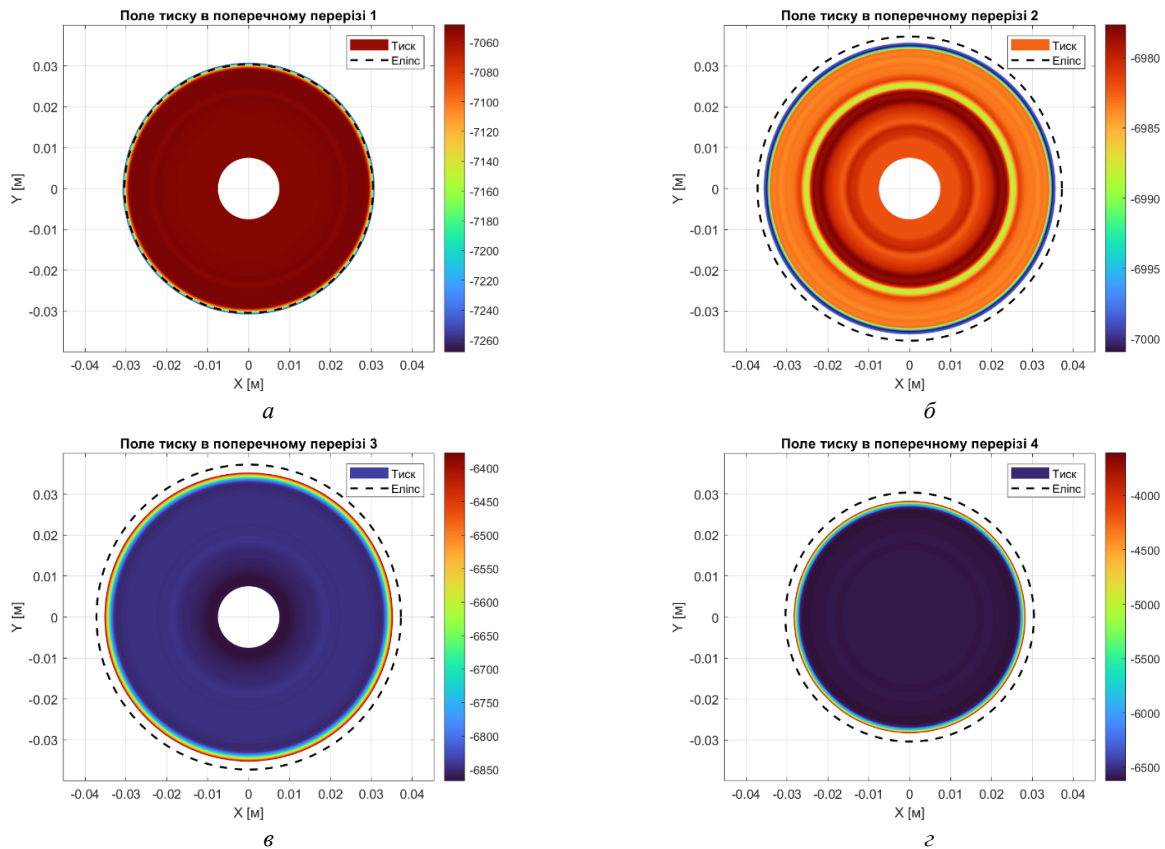


Рис. 8 – Поле тиску в поперечних перерізах вздовж порожнини для малого циліндричного тіла:
a – поперечний переріз 1; *б* – поперечний переріз 2; *в* – поперечний переріз 3; *г* – поперечний переріз 4.

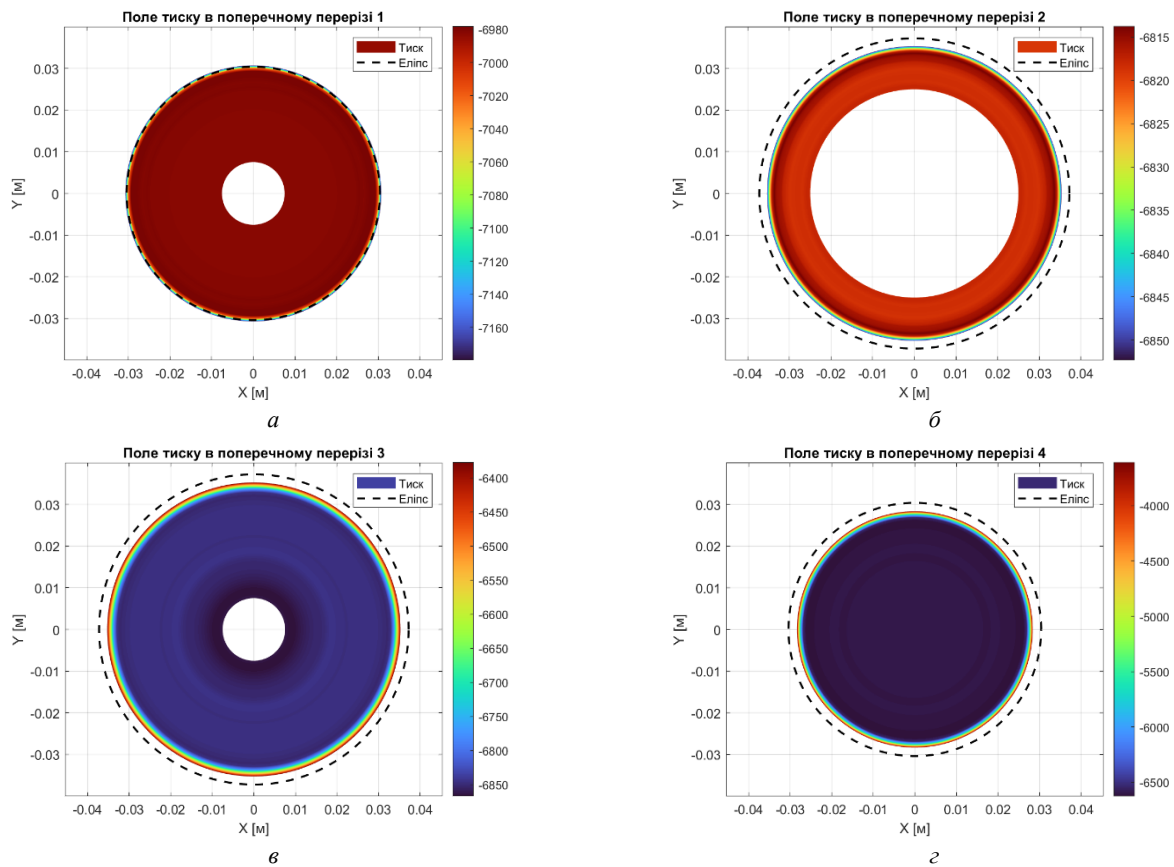


Рис. 9 – Поле тиску в поперечних перерізах вздовж порожнини для додаткового тіла:
a – поперечний переріз 1; *б* – поперечний переріз 2; *в* – поперечний переріз 3; *г* – поперечний переріз 4.

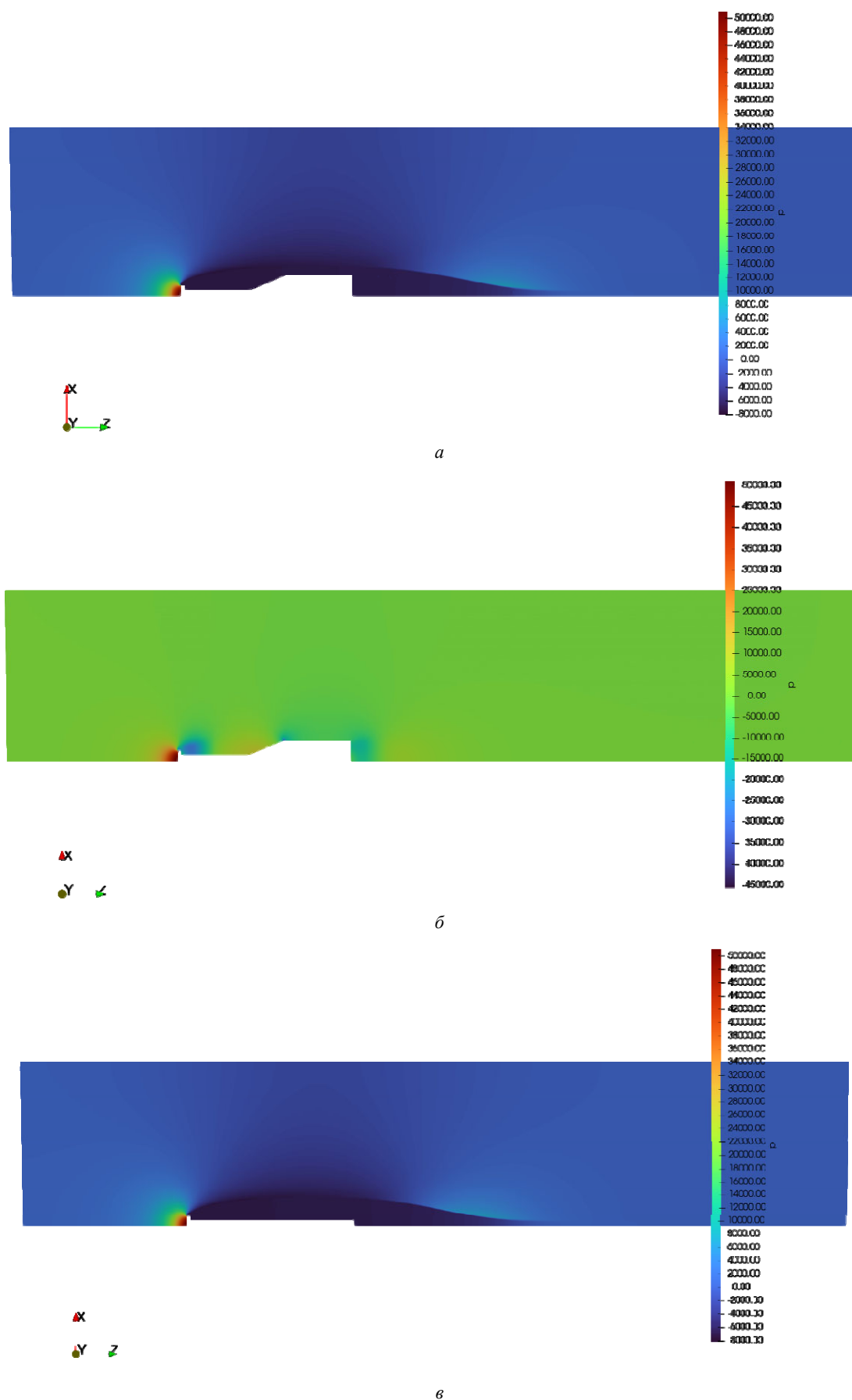


Рис. 10 – Поле тиску вздовж розрахункової області: *a* – з додатковим тілом та кавітацією; *b* – з додатковим тілом та без кавітації; *v* – з малим циліндричним тілом та з кавітацією.

На рис. 8 та рис. 9 показано поле тиску у вибраних поперечних перерізах уздовж порожнини (відповідно для випадку з малим циліндричним тілом і з додатковим тілом). Ці перерізи показані на рис. 6. Видно, що всередині порожнини тиск розподілений відносно рівномірно. У фронтальній частині порожнини тиск має найменше значення, а в напрямку до хвоста порожнини спостерігається невелике його підвищення. Для випадку з циліндричним тілом $d = 2d_c$ (рис. 9) профіль тиску вздовж порожнини дещо відрізняється через більший радіус порожнини, проте загальний рівень тиску всередині порожнини залишається значно нижчим, ніж тиск на поверхні тіла при обтіканні водою без вентиляції. Інакше кажучи, у вентиляційній порожнині підтримується знижений тиск (близький до тиску газу, що подається) порівняно зі статистичним тиском невентильованого потоку.

Для наочного порівняння ефекту вентиляції було також проведено розрахунок для конфігурації з циліндричним тілом $d = 2d_c$ без подачі газу (тобто без утворення порожнини). Результати для цього випадку зіставлені з вентиляційними випадками на рис. 10. Зокрема, на рис. 10 наведено розподіл статичного тиску вздовж потоку для трьох ситуацій: рис. 10, *a* – з додатковим тілом при наявності вентиляції (розвинена повітряна порожнина); рис. 10, *б* – з додатковим тілом без вентиляції (обтікання лише водою); рис. 10, *в* – з малим циліндричним тілом при вентиляції. Видно різочу різницю в характері тиску на поверхні додаткового тіла: у разі відсутності повітря (рис. 10, *б*) перед лобовою частиною додаткового корпусу виникає зона підвищеного тиску (порядку 20 кПа), обумовлена гальмуванням водяного потоку перед перешкодою. Натомість при наявності вентиляції (рис. 10, *a*) така зона високого тиску зникає – поверхня додаткового тіла контактує не з водою, а з газом, тому тиск на ній залишається близьким до тиску всередині порожнини (значно нижчого від гідродинамічного напору). Для випадку малого тіла з порожниною (рис. 10, *в*) картина розподілу тиску аналогічна до випадку на рис. 10, *a*: на поверхні кавітатора після точки відриву тиск різко падає і надалі залишається низьким уздовж всієї порожнини.

На основі отриманих полів тиску було обчислено силу опору та відповідний коефіцієнт опору:

$$C_x = \frac{\int_{\partial\Omega} (-pn_z + \tau_z) dA}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 A_{ref}},$$

де $A_{ref} = \pi R_c^2$ для розглянутих випадків.

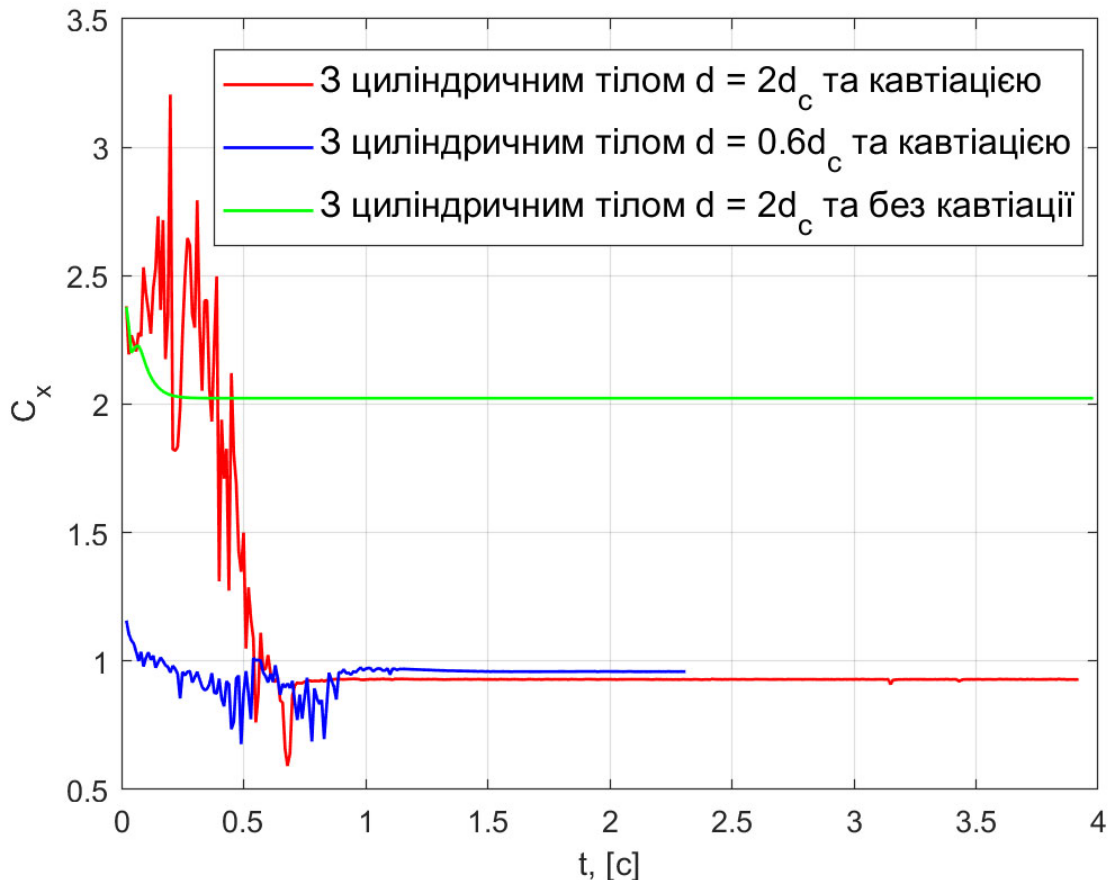


Рис. 11 – Миттєві значення коефіцієнта опору тиску.

На рис. 11 представлені миттєві значення коефіцієнта C_x для тіла $d = 2d_c$ у воді без вентиляції, для цього тіла з вентиляцією, а також для тіла $d = 0.6d_c$ з вентиляцією. Як видно з графіку, коефіцієнт опору тіла $d = 2d_c$ $C_x = 0.9285$ при наявності повітряної порожнини майже такий самий, як і у малого циліндричного тіла з порожниною $C_x = 0.9594$, і приблизно вдвічі менший за тіла $d = 2d_c$ при його обтіканні лише водою $C_x = 2.0231$. Іншими словами, використання вимушеної кавітації призводить до зниження опору для циліндричного тіла діаметром $d = 2d$ приблизно на 50 % у порівнянні з випадком без вентиляції. Фактично додатковий корпус, перебуваючи цілком всередині газової порожнини, вносить мінімальний вклад у загальний опір – уся додаткова сила опору пов'язана лише з підтриманням самої порожнини та опором кавітатора. Подібне явище відзначається і в експериментальних роботах [9, 10], де показано, що при повному охопленні рухомого тіла порожниною основний опір генерується саме на носовому кавітаторі та на межі розділу фаз, тоді як вклад корпусу, ізольованого від води, є незначним.

Висновки. Проведене чисельне моделювання формування вентиляційної каверни показало, що дисковий кавітатор при певній витраті газу для відповідної швидкості потоку генерує стійку зону відриву, в якій вода заміщується газом і формується газова порожнина, базова частина якої відповідає еліпсоїдальній формі з співвідношенням напівосей $\frac{c}{a} \approx 4.5$, а максимальна ширина її більш ніж у 3 рази перевищує діаметр кавітатора. При розглянутих значеннях витрат газу форма і розмір порожнини не змінюється від розташування усередині порожнини тіл різної форми і різних розмірів (менших розміру «еліпсоїда» каверни). Результати розрахунку підтверджують, що примусова вентиляція потоку навколо обтічних тіл зменшує силу опору і може захищати поверхню цих тіл від руйнівної дії природної кавітації. Межа розділу фаз за встановлених параметрів вентиляції і числі Рейнольдса ($Re_d \approx 2.5 \cdot 10^5$) залишається стабільною та гладкою – ознак руйнування порожнини чи значних нестационарних флуктуацій не спостерігається. Це підтверджує надійність обраної моделі та режиму вентиляції для підтримання сталої порожнини навколо тіла.

Список літератури

1. Xu Y., Zhang M., Li H. Experimental research on the effect of air concentration on cavitation erosion development // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2021. – Vol. 72. – P. 2 – 13. DOI: 10.1063/5.0077860.
2. Huixia Jia., Rishan Xie., Yangjie Zhou. Numerical simulation and drag reduction mechanism of supercavitation with bionic non-smooth surface Experimental Investigation of the Supercavitation and Hydrodynamic Characteristics of High-Speed Projectiles with Hydrophobic and Hydrophilic Coatings // *fluids*. – 2022. – P. 1 – 15. DOI: 10.3390/fluids7120363.
3. He Y., Zhang H. Analysis of characteristics of a compressed air power system generating supercavitation drag reduction for underwater vehicles // *Energies*. – 2024. – Vol. 17. – No. 4. – P. 17 – 35. DOI: 10.3390/en17071735.
4. Choe Y., Kim C. Computational investigation on ventilated supercavitating flows and its hydrodynamic characteristics around a high-speed underwater vehicle // *Ocean Engineering*. – 2022. – Vol. 249. – P. 1 – 19. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.110865.
5. Koval S. O., Voropaiev G. O., Dimitrieva N. F. Calculation of a Ventilated Cavity in OpenFOAM // In Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics. – Prague., 2023. – P. 88 – 95. DOI: 10.14311/TPFM.2023.013.
6. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comput. Phys.* – 1981. – Vol. 39. – No. 1. – P. 201 – 225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
7. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *Recherche Aerospaciale*. – 1994. – No. 1. – P. 5 – 21. DOI: 10.2514/6.1992-439.
8. Sá L. F. N., Yamabe P. V. M., Souza B. C., Silva E. C. N. Topology optimization of turbulent rotating flows using Spalart–Allmaras model // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2021. – Vol. 373. – P. 1 – 19. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113551.
9. Ahn B.-K., Kim S.-Y., Choi H. An experimental investigation of artificial supercavitation generated by air injection behind disk-shaped cavitators // *Int. J. of Naval Architecture and Ocean Engineering*. – 2016. – Vol. 9(2). – P. 227 – 237. DOI: 10.1016/j.ijnaoe.2016.10.006.
10. Savchenko Yu. M. Supercavitation: Advances and Perspectives // Springer. – 2012. – 230 p.
11. Энштейн Л. А. О механизме пульсационных процессов в концевой области присоединенных каверн // Труды симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений. – М. : Наука, 1975. – С. 133 – 138.

References (transliterated)

1. Xu Y., Zhang M., Li H. Experimental research on the effect of air concentration on cavitation erosion development. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2021, Vol. 72, pp. 2–13. DOI: 10.1063/5.0077860.
2. Huixia Jia., Rishan Xie., Yangjie Zhou. Numerical simulation and drag reduction mechanism of supercavitation with bionic non-smooth surface Experimental Investigation of the Supercavitation and Hydrodynamic Characteristics of High-Speed Projectiles with Hydrophobic and Hydrophilic Coatings. *fluids*. 2022. pp. 1–15. DOI: 10.3390/fluids7120363.
3. He Y., Zhang H. Analysis of characteristics of a compressed air power system generating supercavitation drag reduction for underwater vehicles. *Energies*. 2024, Vol. 17, No. 4, pp. 17–35. DOI: 10.3390/en17071735.
4. Choe Y., Kim C. Computational investigation on ventilated supercavitating flows and its hydrodynamic characteristics around a high-speed underwater vehicle. *Ocean Engineering*. 2022, Vol. 249, pp. 1–19. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.110865.
5. Koval S. O., Voropaiev G. O., Dimitrieva N. F. Calculation of a Ventilated Cavity in OpenFOAM. In Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics. Prague., 2023, pp. 88–95. DOI: 10.14311/TPFM.2023.013.

6. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 1981, Vol. 39, No. 1, pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
7. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Recherche Aerospaciale*. 1994, No. 1, pp. 5–21. DOI: 10.2514/6.1992-439.
8. Sá L. F. N., Yamabe P. V. M., Souza B. C., Silva E. C. N. Topology optimization of turbulent rotating flows using Spalart–Allmaras model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2021, Vol. 373, pp. 1–19. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113551.
9. Ahn B.-K., Kim S.-Y., Choi H. An experimental investigation of artificial supercavitation generated by air injection behind disk-shaped cavitators. *Int. J. of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2016, Vol. 9(2), pp. 227–237. DOI: 10.1016/j.ijnaoe.2016.10.006.
10. Savchenko Yu. M. Supercavitation: Advances and Perspectives. *Springer*. 2012, 230 p.
11. Epshtein L. A. O mekhanizme pul'satsionnykh protsessov v kontsevoy oblasti prisoedinitel'nykh kavern [On the mechanism of pulsation processes in the terminal region of attached caverns]. *Trudy simpoziuma po fizike akustiko-gidrodinamicheskikh yavleniy* [Proceedings of the Symposium on Acoustic-Hydrodynamic Phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1975. pp. 133–138.

Надійшла (received) 10.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воропаєв Геннадій Олександрович – доктор фізико-математичних наук, професор, директор Інститут гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Voropaiev Gennadii Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Коваль Сергій Олександрович – студент навчально-наукового інституту атомної та теплової енергетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: (096) 979-78-45; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2229-3063>; e-mail: koval.sergiy-ipt@iitl.kpi.ua.

Koval Serhii Oleksandrovych – Student of Educational and Scientific Institute of Atomic and Thermal Energy, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Berdyansk State Pedagogical University, Kyiv; tel.: (096) 979-78-45; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2229-3063>; e-mail: koval.sergiy-ipt@iitl.kpi.ua.

І. М. ГОРБАНЬ, В. Г. БАСОВСЬКИЙ

ГЕНЕРАЦІЯ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ ПОТОКОМ РІДИНИ НАД ДВОВИМІРНИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ КАНАВКАМИ РІЗНОЇ ГЛИБИНИ

Досліджуються гідродинамічне і акустичне поля, які генеруються течією в'язкої рідини навколо стінки з вирізаною у ній поперечною циліндричною канавкою. Актуальність цієї проблеми зумовлена широким використанням подібних нерівностей поверхні в технічних пристроях. Задача розв'язується чисельно в припущенні малих чисел Маха з використанням гібридного методу, який поєднує незалежну оцінку близького гідродинамічного поля з акустичною аналогією Лайтхілла. Для моделювання в'язкої нестисливої течії в пристінному потоці з циліндричною канавкою використовується вихрова числова схема; звук, який генерується канавкою в дальньому полі оцінюється за допомогою рівняння Фокс Вільямса-Хукінгса в частотній області. Циліндрична канавка характеризується кутовим розміром α , який прямо пропорційно пов'язаний з її глибиною. Розглядаються канавки з $\alpha = 40^\circ$, 60° і 90° , які за прийнятою класифікацією є мілкими. Примежовий шар на стінці перед канавкою покладається ламінарним, а його товщина є набагато меншою за глибину нерівності. Течія характеризується числом Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$, що обчислюється за швидкістю незбуреної течії і хордою канавки. Отримано, що над нерівністю встановлюється режим зсувного шару. Він характеризується автоколиваннями потоку всередині канавки, викликаними взаємодією вихрових структур, що утворилися в зсувному шарі, з кормовою крайкою канавки. При цьому, чим глибшою є канавка, тим стійкішим буде зсувний шар, який знаходиться між вільною течією і рециркуляційною зоною. Зі збільшенням глибини канавки зменшуються як частота автоколивань, так і середній коефіцієнт опору. Конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі не залежить від кутового розміру канавки й дорівнює приблизно 0.42 від швидкості незбуреного потоку. Коливання потоку випромінюють у далекому акустичному полі диполь з нерівномірними пелюстками, коли інтенсивність звуку у зворотному напрямку вища, ніж у прямому. Зі збільшенням кутового розміру канавки амплітуда звукових коливань в далекому полі зростає для всіх напрямків.

Ключові слова: пристінна течія, циліндрична канавка, чисельне моделювання, далеке акустичне поле, дипольне випромінювання.

I. M. GORBAN, V. G. BASOVSKY

GENERATION OF AN ACOUSTIC FIELD BY A FLUID FLOW OVER TWO-DIMENSIONAL CYLINDRICAL CAVITIES OF VARIOUS DEPTH

The hydrodynamic and acoustic fields generated by the flow of viscous fluid around a cross cylindrical groove cut in a solid wall are investigated. The relevance of this study is caused by the wide use of such surface irregularities in technical devices. The problem is solved numerically under the assumption of a small Mach number using a hybrid method that combines an independent estimate of the near hydrodynamic field with the acoustic Lighthill analogy. The vortex numerical scheme is used to simulate the viscous incompressible flow near the wall with a cylindrical groove; the sound generated by the groove in the far field is estimated based on the Ffowcs Williams-Hawkins equation in the frequency domain. A cylindrical groove is characterized by an angular size α , which is directly proportional to its depth. The grooves with $\alpha = 40^\circ$, 60° and 90° are considered, which are shallow according to the accepted classification. The boundary layer developed in front of the groove is assumed to be laminar, and its thickness is much less than the depth of the wall irregularity. The flow is characterized by the Reynolds number $Re = 2 \cdot 10^4$ based on the flow velocity and the chord of the groove. The characteristics of the near hydrodynamic field point out that the groove operates in the shear-layer mode, which is characterized by self-sustained oscillations of the flow caused by collision of large-scale vortices developed in the shear layer with the groove trailing edge. It is also obtained that the shear layer localized between the free flow and the recirculation zone is more stable for the deeper groove. When increasing the groove depth, both the self-oscillation frequency and the mean drag coefficient drop. The convective velocity of vortex structures in the shear layer does not depend on the groove angular size and is approximately 0.42 of the velocity of the undisturbed flow. The flow oscillations radiate a dipole with non-uniform lobes in the far acoustic field so that the sound intensity in the backward direction is higher than in the forward direction. As the angular size of the groove increases, the amplitude of sound vibrations in the far field grows for all directions.

Key words: near-wall flow, cylindrical groove, numerical simulation, far acoustic field, dipole sound radiation.

Вступ та аналіз останніх досліджень. Обтікання *поперечних канавок* трапляється під час експлуатації різних інженерних конструкцій і транспортних засобів. Вони можуть бути як необхідним елементом конструкції, так і цілеспрямовано застосовуватися для керування пристінним потоком. Так, метою розміщення канавок на обтічній поверхні в тепломасообмінниках є додаткова *турбулізація течії* [1]. В той же час, застосування поперечної канавки для збільшення підйомної сили крила вимагає стабілізації *циркуляційної течії* всередині неї [2]. Практика показує, що пристрої з канавками не лише змінюють характеристики *гідродинамічного поля*, а й генерують інтенсивний звук, який є небажаним наслідком експлуатації таких систем. Цей ефект спонукав до появи значної кількості досліджень, де вивчався вплив поперечних канавок на розвиток акустичних збурень у потоці.

Канонічною проблемою для дослідження поперечних канавок є обтікання плоскої стінки з прямокутними вирізами. Такі нерівності поділяються на глибокі та мілкі відповідно до відношення їхніх характерних розмірів – довжини прогону й глибини [3]. Мілкі канавки, в залежності від розподілу тиску вздовж донної поверхні, можуть бути відкритими, перехідними та закритими [4]. Здебільшого досліджувалися течії над відкритими неглибокими канавками, оскільки вони найчастіше застосовуються у практиці. В [5] показано, що режим течії визначається відношенням довжини канавки до товщини витіснення примежового шару перед нею. Було встановлено, що у широкому діапазоні зміни цього параметру над канавкою встановлюється режим *автоколивань потоку*, який складається з таких послідовних явищ: відриву пристінної течії у передній крайці канавки; утворення зсувного шару на межі вільної течії та течії у канавці; зіткнення зсувного шару із кормовою стінкою канавки, внаслідок чого він розпадається на окремі вихрові структури. Ці процеси створюють значні *динамічні наванта-*

ження на конструкцію, які можуть викликати небажані наслідки аж до руйнування. Крім того, встановлено, що автоколивання зсувного шару є найважливішим джерелом звуку, який генерується потоком рідини над канавкою.

Механізм автоколивань течії над поперечною канавкою докладно описаний у [6], де вказано на його істотну залежність від числа Маха. Для стисливих потоків механізм автоколивань визначається зворотним зв'язком між гідродинамічними й акустичними збуреннями, коли нестійкість зсувного шару генерує хвилю тиску поблизу задньої кромки канавки, яка поширюється проти течії і перезапускає нестійкість зсувного шару. Частоту автоколивань у цьому разі можна оцінити за допомогою напівемпіричної формули Россітера [7]. При малих числах Маха потік можна вважати нестисливим, тобто, акустичні збурення поширюються миттєво. Очевидно, що в цьому разі зворотний зв'язок автоколивань є чисто гідромеханічним, а частота коливань залежить лише від конвективної швидкості вихрових структур у зсувному шарі [8].

Завдяки широкому застосуванню пристроїв з канавками у авіації, переважна кількість досліджень щодо цієї тематики має справу зі стисливими течіями. Поперечні канавки у потоках з малим числом Маха вивчені значно менше, хоча останнім часом вони активно використовуються і в такому режимі, зокрема, в автомобілях. В цьому випадку застосування прямих числових методів для оцінки звукового поля є неможливим через велику різницю масштабів довжини гідродинамічного й акустичного полів. Це потребує розвитку спеціальних гібридних алгоритмів, які мають поєднувати незалежну оцінку близького гідродинамічного поля з певною акустичною аналогією. В цій роботі для моделювання в'язкої нестисливої течії в пристінному потоці з циліндричною канавкою використовується вихровий метод [9]. Числова схема, яка тут застосовується, належить до схем Лагранжа високої точності, і може вважатися швидкою альтернативою прямому моделюванню в'язких течій [10, 11]. Для оцінки звуку, який генерується канавкою, використовується метод, що поєднує розв'язок гідродинамічної задачі з рівнянням Фокс Вільямса-Хукінгса (ФВ-Х) в частотній області [12, 13]. Зазначимо, що інтегральний метод ФВ-Х є розширенням акустичної аналогії Лайтхілла для потоків з твердими границями.

Постановка задачі. Досліджуються гідродинамічне і акустичне поля, які генеруються плоскопаралельним потоком в'язкої рідини в області, обмеженій плоскою стінкою з вирізаною у ній циліндричною канавкою. У стані спокою середовище в області характеризується швидкістю звуку c_0 , густиною ρ_0 і тиском p_0 . Задача розв'язується за умови, що швидкість течії U_0 є набагато меншою за швидкість звуку в незбуреному середовищі. Крім того, вважається, що прилеглий шар на стінці перед канавкою є ламінарним. Геометрія задачі й системи координат зображені на рис. 1. Контур поперечного перерізу канавки обкреслюється дугою кола, радіус якого дорівнює R_0 . Канавка характеризується кутовим розміром заданої дуги α та хордою L . Інші геометричні параметри задачі, зокрема, глибина канавки D , виражаються через L і α . Початок декартової системи координат $Oxyz$ збігається з серединою хорди канавки. На рис. 1 зображена площина $z = 0$. Тут вісь Ox паралельна вектору швидкості потоку, а вісь Oy перпендикулярна до плоскої стінки. Початок циліндричної системи координат r, θ, z збігається з початком декартової системи координат, і кут θ відраховується від додатного напрямку осі Ox проти руху стрілки годинника. Вибрані системи координат жорстко пов'язані з канавкою, тобто, в цих системах координат канавка є нерухомою, а середовище, навпаки, рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Збезрозмірювання всіх величин задачі виконується на основі параметрів L , U_0 , c_0 , ρ_0 і p_0 , які повністю характеризують задачу як з геометричного, так і з фізичного боку.

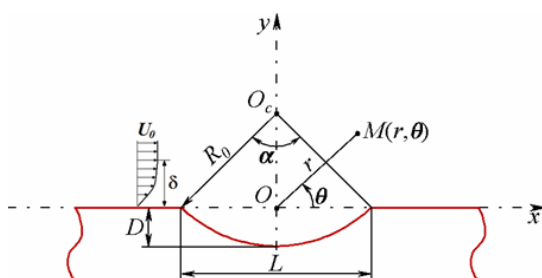


Рис. 1 – Геометрія задачі.

рівняння ФВ-Х.

Метою дослідження є описання акустичного поля, яке генерується гідродинамічною течією в точках $M(r, \theta)$, розташованих далеко від канавки. Приймаючи до уваги, що при малих числах Маха акустичне поле не впливає на гідродинамічний процес, для розв'язання цієї задачі може бути застосований гібридний метод, в якому незалежно оцінювання близького гідродинамічного поля поєднується з певною акустичною аналогією. Гідродинамічна течія розраховується тут за допомогою вихрової числової схеми [10, 11]. Отримані характеристики використовуються для побудови гідродинамічних джерел звуку в правій частині

Вихровий метод розв'язання двовимірних рівнянь Нав'є – Стокса. Двовимірна задача про потік в'язкого нестисливого середовища сталої густини над плоскою стінкою з круговою циліндричною канавкою (рис. 1) описується рівняннями неперервності й Нав'є – Стокса. Початковий розподіл швидкостей у середовищі вважається відомим. На нескінченності виконується умова затухання збурень: $u(r, t) \rightarrow U_0$, $p(r, t) \rightarrow p_0$, коли $r \rightarrow \infty$. Тут прийняті такі позначення: $u(r, t)$ і $p(r, t)$ – відповідно вектор швидкості й тиск збуреного середо-

вища в точці з радіусом-вектором r в момент часу t . Вважаємо, що на стінці канавки, а також на частині плоскої стінки безпосередньо перед і позаду канавки виконується умова прилипання. Водночас, на плоскій стінці далеко за канавкою вимагається виконання лише умови ковзання. Такий підхід дозволяє оцінити товщину прилежого шару над передньою крайкою канавки та обмежує вплив прилежого шару, розташованого далеко від неї.

Вихрові схеми, що розвинуті для моделювання в'язкої течії, ґрунтуються на рівнянні переносу завихреності, яке у двовимірному випадку має такий вигляд:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

де ∇ і Δ – відповідно диференціальні оператори Гамільтона й Лапласа; ν – кінематична в'язкість середовища. Вектор швидкості в рівнянні (1) визначається як $u = u_1 i + u_2 j$, завихреність ω є скалярною величиною, так що $\omega = \omega k = \nabla \times u$, де i, j, k – орти декартової системи координат $Oxuz$, площа Oxy якої зображена на рис. 1. Перевагою рівняння (1) є його незалежність від гідродинамічного тиску й точне виконання умови неперервності середовища та граничних умов на нескінченності. Первинною розрахунковою величиною в цьому рівнянні є завихреність, а поле швидкості визначається з поля завихреності за допомогою інтеграла Біо – Савара.

В цій роботі для розв'язання рівняння (1) використовується гібридна вихрова схема, представлена в статтях [10, 11]. Вона ґрунтується на розщепленні (1) на конвективну і дифузійну складові. Перенос завихреності моделюється рухом *лагранжевих вихрових частинок*, а її дифузія обчислюється на прямокутній сітці, накладеній на область течії. Для числового інтегрування рівнянь в'язкої дифузії та конвекції за часом застосовується явна схема другого порядку з коректуванням усіх змінних поля течії після виконання кожного під-кроку методу.

Тверда границя моделюється вихровою пеленою, інтенсивність γ якої обчислюється з умови непротікання за допомогою *методу граничних інтегральних рівнянь* [14]. Для того, щоб найбільш точно врахувати кривизну поверхні, для оцінки завихреності, яка сходиться зі стінки у потік, використовується гранична умова *типу Неймана*; вона зв'язує інтенсивність γ приєднаної вихрової пелени з функцією $\partial \omega_0 / \partial n$, де ω_0 – завихреність на стінці, n – внутрішня нормаль до границі області течії. Цей підхід вимагає розв'язання *рівняння дифузії* відносно ω_0 у пристінній області [15]. На крайках канавки, де дотична до поверхні зазнає розриву, накладається *умова Кутта – Жуковського*. Вона застосовується для обчислення інтенсивності вихрової пелени в цих точках.

Зазначимо також, що фундаментальний *розв'язок лапласіана для вихору* в області, що розглядається, знаходиться за допомогою *конформного перетворення* фізичної області течії у верхню півплощину допоміжної площини. В цій канонічній області він обчислюється із застосуванням *методу дзеркальних відображень* [16].

Рівняння переносу завихреності (1) дозволяє виокремити чисто кінематичну гідродинамічну задачу від проблеми тиску, що, безумовно, значно спрощує числове моделювання течії. Для знаходження тиску використовуються *рівняння динаміки в'язкої рідини у формі Ламба* [16]. Вони дозволяють обчислити тиск прямим інтегруванням від нескінченності до стінки. В нашій задачі зручно інтегрувати *друге рівняння системи Ламба* «звернувши вниз» вздовж вертикального напрямку.

Розв'язання рівняння ФВ-Х в частотній області. Отримані характеристики близького гідродинамічного поля використовуються як вхідні дані для звукових джерел хвильового рівняння ФВ-Х. Відомо, що класичне рівняння ФВ-Х записується в часовій області в системі координат, яка жорстко пов'язана з тілом. При цьому вважається, що тіло рухається в нерухомому середовищі. Одночлени в правій частині рівняння ФВ-Х, що описують розташовані на поверхні тіла джерела звуку монопольного й дипольного типу, мають в собі як множник *дельта-функцію Дірака* з аргументом, що залежить як від часу, так і від просторових координат. Саме це є перешкодою для застосування перетворення Фур'є безпосередньо до рівняння ФВ-Х. Але для важливого практичного випадку, коли тіло рухається прямолінійно зі сталою швидкістю, цю перешкоду можна подолати [12], а саме, за допомогою *перетворення Галілея* перейти від рухомої системи координат до нерухомої, теж жорстко пов'язаної з тілом. В такій системі координат нерухомим буде тіло, а середовище, навпаки – рухомих. Після перетворення Галілея хвильове рівняння ФВ-Х набирає вигляду конвективного хвильового рівняння [12]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + U_i U_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + 2U_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right\} [\rho' H(f)] = \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)] - \frac{\partial^2}{\partial y_i} [F_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [T_{ij} H(f)], \quad (2)$$

де монопольний, дипольний і квадрупольний члени в правій частині відповідно дорівнюють:

$$Q(y, t) = (\rho u_i - \rho_0 U_i) n_i, \quad F_i(y, t) = (p \delta_{ij} + \rho(u_i - 2U_i) u_j + \rho_0 U_i U_j) n_j, \\ T_{ij}(y, t) = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - c_0^2 \rho' \delta_{ij}. \quad (3)$$

Тут c_0 – швидкість звуку; $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $u_i = U_i + u'_i$ – відповідно повні значення густини, тиску й швидкості. Значення параметрів середовища в стані спокою позначені нижнім індексом нуль; U_i – компонен-

ти швидкості незбуреного потоку; знак штрих позначає збурення відповідної величини в потоці. Декартові координати й час позначені як y_i і t ; $\delta(f)$ – дельта-функція Дірака; $H(f)$ – функція Хевісайда; δ_{ij} – символ Кронекера. Функція $f(y)$ залежить тільки від просторових координат $y = (y_1, y_2)$ і означена так, що $f = 0$ на зовнішній поверхні тіла, $f < 0$ – усередині, $f > 0$ – ззовні; $n_j = \partial f / \partial y_j$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні нерухомого тіла. У формулах (3) в'язкою частиною тензора напружень нехтуємо і використовуємо тільки його нев'язку частину $p\delta_{ij}$.

Для скорочення запису у формулах (2) і (3) замість літерної індексації координат і проєкцій векторів використано числова. Крім того, дотримуючись *правила Ейнштейна*, якщо індекс в одноклені повторюється двічі, то це позначає операцію підсумування за цим індексом. Оскільки розглядаємо двовимірну задачу, тому індекси в цих формулах можуть набувати значень 1 і 2.

У далекому полі середовище вважаємо ізотропним акустично ідеальним, тобто, збурення густини й тиску достатньо малі ($\rho' \ll \rho_0$ і $p' \ll p_0$) та зв'язані співвідношенням $p' = c_0^2 \rho'$. Нехай середовище рухається зі швидкістю, яка менша за швидкість звуку. У цьому разі після *перетворення Фур'є* рівняння (2) і деяких спрощень частотну залежність збурення тиску (акустичний тиск) в точці спостереження y_0 далекого поля можна обчислити за наступною формулою [12]:

$$p'(y_0, \Omega) = - \oint_{f=0} i \Omega \hat{Q}(y, \Omega) G(y_0, y, \Omega) dl - \oint_{f=0} \hat{F}_i(y, \Omega) \frac{\partial G(y_0, y, \Omega)}{\partial y_i} dl - \int_{f=0} \hat{T}_{ij}(y, \Omega) \frac{\partial^2 G(y_0, y, \Omega)}{\partial y_i \partial y_j} dy, \quad (4)$$

з функцією Гріна в частотній області конвективного хвильового рівняння для вільного простору:

$$G(y_0, y, \Omega) = \frac{i}{4\beta} \exp\left(\frac{iMkr_1}{\beta^2}\right) \cdot H_0^{(2)}\left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{r_1^2 + \beta^2 r_2^2}\right). \quad (5)$$

В формулах (4) і (5) прийняті такі позначення: $r_1 = (y_{01} - y_1)$, $r_2 = (y_{02} - y_2)$; $H_0^{(2)}$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку; Ω – кутова частота; $k = \Omega / c_0$ – хвильове число; $M = U_0 / c_0$ – число Маха; $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ – множник Прандтля-Глауерта; $\hat{Q}(y, \Omega)$, $\hat{F}_i(y, \Omega)$ і $\hat{T}_{ij}(y, \Omega)$ – перетворення Фур'є відповідно функцій $Q(y, t)$, $F_i(y, t)$ і $T_{ij}(y, t)$ для фіксованої точки течії y . Щоб не плутати з відповідним індексом, уявну одиницю позначаємо як $i = \sqrt{-1}$.

Перехід в частотну область є важливим кроком розв'язання рівняння ФВ-Х для двовимірних задач, що дає можливість цілком урахувати протяжність джерел звуку поперек потоку. Це неможливо в часовій області, де функція Гріна для двовимірних задач виражається через функцію Хевісайда, а не дельта-функція Дірака, як для тривимірних задач. Тому в часовій області треба інтегрувати за часом на півнескінченному інтервалі, що неможливо фактично. Щоб перейти в часову область після обчислення звукового поля в частотній за формулою (4), треба застосувати обернене перетворення Фур'є.

Обчислення звукового поля можна суттєво спростити, якщо взяти до уваги два чинники. Перший чинник – для двовимірної задачі про обтікання тіла потоком звукова хвиля в далекому полі циліндрична з амплітудами пульсацій тиску для монопольного, дипольного і квадрупольного джерел звуку відповідно пропорційними таким величинам: $M^{3/2}$, $M^{5/2}$ і $M^{7/2}$ [13]. Отже, для малих значень числа Маха, амплітуда звуку квадрупольних джерел набагато менша за амплітуду монопольних і дипольних джерел. Тому у формулі (4) можна знехтувати останнім подвійним інтегралом для малих значень числа Маха. Другий чинник – якщо в рівнянні ФВ-Х використовуються дані близького гідродинамічного поля тільки на непроникливій поверхні (безпосередньо поверхня тіла), то $u = 0$ (умова прилипання) і у формулах (3) для $Q(y, t)$ і $F_i(y, t)$ тільки одноклен $p\delta_{ij}$ залежить від часу, коли середовище рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Отже, якщо знехтувати квадрупольним джерелом звуку для малих значень числа Маха, то тільки часова залежність пульсацій тиску на поверхні тіла визначає його звукове поле в потоці і для визначення звукового поля достатньо обчислити тільки другий контурний інтеграл в (4), який описує дипольне джерело звуку.

Зазначимо, що гібридний метод для розрахунку акустичних збурень у дальньому полі канавки, який поєднує вихрову схему для моделювання гідродинамічної течії та акустичну аналогію Фокс Вільямса-Хоукінгса, докладно описаний в статті [17].

Особливості числової схеми. Розвинений алгоритм застосований для дослідження гідродинамічного і акустичного полів, які утворюються при взаємодії пристінної плоскопаралельної течії з відкритими циліндричними канавками різної глибини. Глибина канавки D визначається величиною кута α (рис. 1). Розглядалися значення $\alpha = 40^\circ$, 60° і 90° . За таких параметрів $L/D \geq 3$, тобто, за прийнятою класифікацією такі канавки можна вважати неглибокими [8]. Характерним геометричним параметром в цих розрахунках є хорда канавки L . Покладається, що течія, яка набігає на канавку, є ламінарною з числом Рейнольдса $Re_L = U_0 L / \nu = 2 \cdot 10^4$.

Розрахункова область і граничні умови для завихреності зображені на рис. 2. Єдиним джерелом завихреності в потоці є частина твердої поверхні, де виконується умова прилипання; її контур наведений жирною лінією. На вході в розрахункову область і на її верхній межі потік є безвихровим. На виході з розрахункової області, де градієнти гідродинамічних параметрів невеликі, задається м'яка гранична умова $\partial^2 \omega / \partial x^2 = 0$. Ця умова вказує на те, що завихреність на виході змінюється за лінійним законом. Висота розрахункової області дорівнює $2L$, а довжина стінки за канавкою – $25L$; при цьому довжина нековзної частини, де $\omega = \omega_0$, є $5L$ (рис. 2). Як показали тестові розрахунки, розширення обчислювальної області в напрямку осей x чи y помітно не впливає на характеристики потоку.

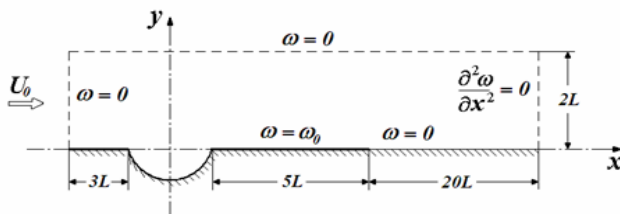


Рис. 2 – Розрахункова область.

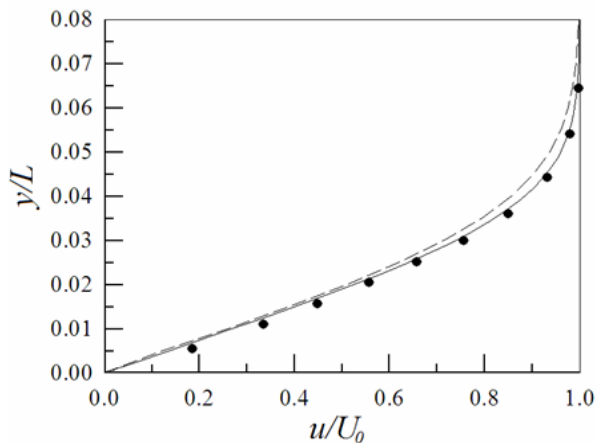


Рис. 3 – Профілі горизонтальної швидкості в пристінній області: суцільна крива – розв'язок Блазіуса для пластини; маркери – числовий розв'язок для плоскої стінки, штрихова крива – числовий розв'язок для стінки з канавкою.

шару на пластині (суцільна лінія), а також розраховані вихровим методом над плоскою стінкою (маркери) та у перерізі, що проходить через передню крайку канавки (штрихова лінія). В усіх випадках безрозмірний відносно L пробіг потоку був однаковий і дорівнював 3; інші параметри течії теж збігалися. Можна бачити, що при вибраних параметрах дискретизації числової схеми розраховані профілі швидкості є близькими до аналітичного розв'язку, що свідчить про достатню точність числової схеми щодо розрахунку параметрів примежового шару. Вплив канавки на потік оцінювався за товщиною примежового шару над передньою крайкою. Безрозмірна товщина примежового шару за формулою Блазіуса складає $\delta_{99} / L \approx 0.061$, в той час, як в чисельному експерименті з канавкою отримано $\delta_{99} / L \approx 0.073$.

Дискретні часові значення пульсацій тиску в точках сітки на поверхні плоскої стінки з канавкою були входними даними акустичної задачі з числом Маха, яке дорівнювало 0.2. Для такого значення числа Маха оцінка характеристик гідродинамічного близького поля в рамках нестисливої моделі рідини виправдана. Квадрупольним джерелом звуку нехтувалося і, як уже зазначалось, у цьому разі далеке акустичне поле буде формуватися тільки дипольними джерелами звуку, якщо в (4) контур інтегрування $f(y) = 0$ збігається із зовнішньою поверхнею плоскої стінки з канавкою. При цьому, до дипольного члена в рівнянні ФВ-Х застосовувалося швидкоперетворення Фур'є, а криволінійний інтеграл в формулі (4) обчислювався квадратурним методом трапецій.

Сітка, накладена на поле течії для оцінки в'язкої дифузії, є рівномірною з однаковим розміром комірки у вертикальному і горизонтальному напрямках: $h = 0.005L$. Крок за часом Δt вибирався з умови Курранта-Фрідрікса-Леві:

$$\frac{\max\{u_1, u_2\} \Delta t}{h} \leq 1.$$

Очевидно, що максимальне значення локальної швидкості потоку залежить від кривизни поверхні і числа Рейнольдса. Чисельний експеримент показав, що стійкість розрахунків в тій геометрії, що розглядається, може бути досягнута при $\Delta t = 0.05h$.

Особлива увага при оцінці параметрів числової схеми була приділена встановленню відстані від початку розрахункової області до передньої крайки канавки, оскільки вона визначає характеристики примежового шару, який взаємодіє з нерівністю. Для оцінки товщини ламінарного примежового шару в області передньої крайки можна скористатися відомим розв'язком Блазіуса [18]. Однак, в [19] показано, що канавка може суттєво вплинути на розвиток примежового шару перед нею. Тому, перед проведенням масових розрахунків була зроблена оцінка похибки вихрової числової схеми щодо обчислення товщини примежового шару як на плоскій поверхні, так і на стінці з циліндричною канавкою. Рис. 3 ілюструє профілі середньої поздовжньої швидкості, отримані за розв'язком Блазіуса для ламінарного примежового шару на пластині (суцільна лінія), а також розраховані вихровим методом над плоскою стінкою (маркери) та у перерізі, що проходить через передню крайку канавки (штрихова лінія).

Результати розрахунків. Відомо [5], що на розвиток течії навколо поперечної прямокутної канавки впливають два фактори – товщина витіснення прилежового шару, який сформувався до передньої крайки канавки, і відношення довжини канавки до її глибини. Якщо канавка неглибока, то в залежності від товщини втрати імпульсу прилежового шару, можливі два коливні режими потоку – *мода зсувного шару* і *слідова мода*, що визначається середнім значенням коефіцієнта опору $\bar{C}_D$. В першому випадку $\bar{C}_D \approx 0.01$, тоді як в другому ця величина є значно вищою: $\bar{C}_D \approx 0.3$. Канавки, які розглядаються в цьому дослідженні, відрізняються тим, що їхня глибина змінюється від нуля на крайках до максимального значення D у центральному осьовому перерізі. Зауважимо, що для кутів, які розглядаються ($\alpha = 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), максимальна глибина канавки D знаходиться в діапазоні від 0.1 до 0.3, тобто, виконується $L/D > 3$, і такі нерівності можна вважати неглибокими.

Щоб визначити моду коливань потоку над круговою циліндричною канавкою, розглянемо часову залежність коефіцієнта опору $\bar{C}_D$ для канавок різного кутового розміру. Вони представлені на рис. 4, а. Тут коефіцієнт $\bar{C}_D$ нормований відносно D і зведений до одиничної довжини вздовж осі канавки, а відрізок часу охоплює десять послідовних статистично стаціонарних періодів коливань потоку. Характеристики кривих на рис. 4, а зі збільшенням кутового розміру канавки змінюються так: середнє значення $\bar{C}_D = 0.039, 0.023$ та 0.02 , середній безрозмірний період коливань (відстань між послідовними максимумами) $T \cdot (U_0/L) = 0.557, 0.784, 1.021$. Тобто, при збільшенні глибини канавки коефіцієнт опору зменшується, а період коливань потоку зростає. Оскільки значення $\bar{C}_D$ малі, можна констатувати, що над усіма канавками встановлюється мода зсувного шару з відповідними числами Струхаля $St = fL/U_0 = 1.797, 1.276, 0.979$ ($f = 1/T$ – частота коливань часової залежності C_D).

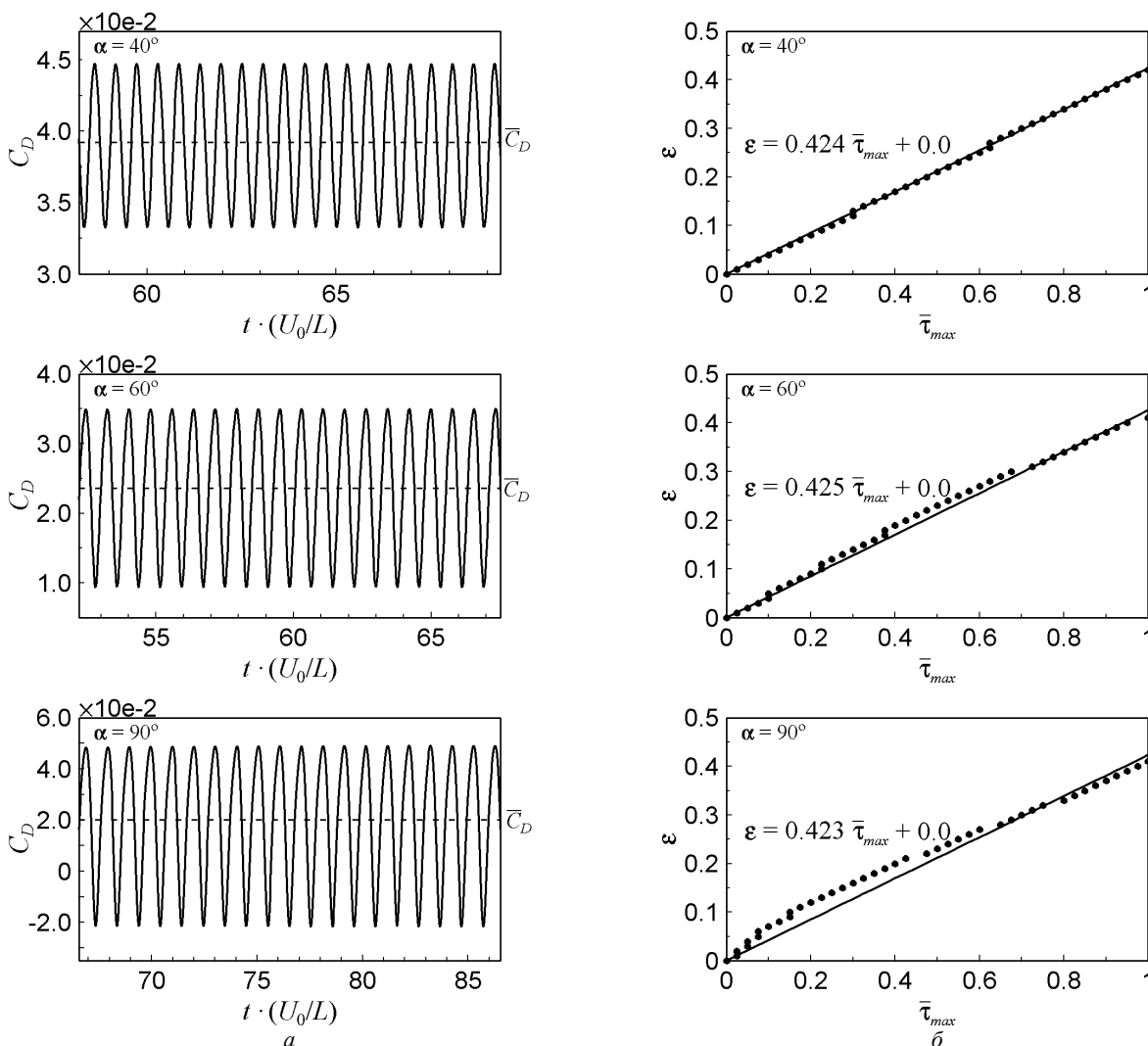


Рис. 4. – Характеристики близького гідродинамічного поля: а – часові залежності коефіцієнтів опору; б – до обчислення конвективної швидкості вихрових структур у зсувному шарі.

Факт встановлення моди зсувного шару над канавкою підтверджується миттєвими картинами розподілу завихреності та тиску у послідовні моменти часу протягом одного періоду T коливань опору. Вони показані на рис. 5. Момент часу $t = 0$ відповідає тут максимальному значенню коефіцієнта опору C_D . Наведені результати демонструють класичну поведінку потоку в канавці в режимі коливань зсувного шару. Після відриву у передній крайці зсувний шар втрачає стійкість, і в ньому генеруються вихрові структури великого масштабу, які обертаються за годинникову стрілкою. Маркерами вихрових структур в зсувному шарі є зони мінімального тиску; вони зображені чорним кольором. Видно, що вихори утворюються приблизно посередині канавки; рухаючись до задньої крайки канавки, вони зростають і після зіткнення з кормовою стінкою поділяються на дві частини. Одна частина завихреності покидає канавку й рухається вниз за потоком, збільшуючи товщину примежового шару на плоскій поверхні за канавкою. Інша частина, сповзаючи вниз по стінці канавки, утворює рециркуляційну зону всередині канавки. При цьому, в околі задньої крайки канавки генеруються раптові флуктуації тиску великої амплітуди. Видно, що в зсувному шарі цієї канавки в будь-який момент часу присутні дві вихрові структури. Розрахунки показали, що у разі меншої нерівності (при $\alpha = 40^\circ$) в зсувному шарі одночасно ідентифікуються три вихори, причому, вони зароджуються значно ближче до передньої крайки. Таким чином, чим глибшою є канавка, тим стійкішим буде зсувний шар, що розвивається між вільною течією і рециркуляційною зоною.

Другим елементом зворотного зв'язку автоколивань є індукування швидкості вихровими структурами зсувного шару за законом Біо – Савара. Зазначимо, що для малих дозвукових чисел Маха довжина канавки значно менша, ніж довжина акустичної хвилі. Отже, у цьому разі акустичні збурення не можуть безпосередньо впливати на характеристики течії в канавці, оскільки поширюються практично миттєво, і зворотний зв'язок автоколивань може бути за природою тільки гідродинамічний (нестисливий).

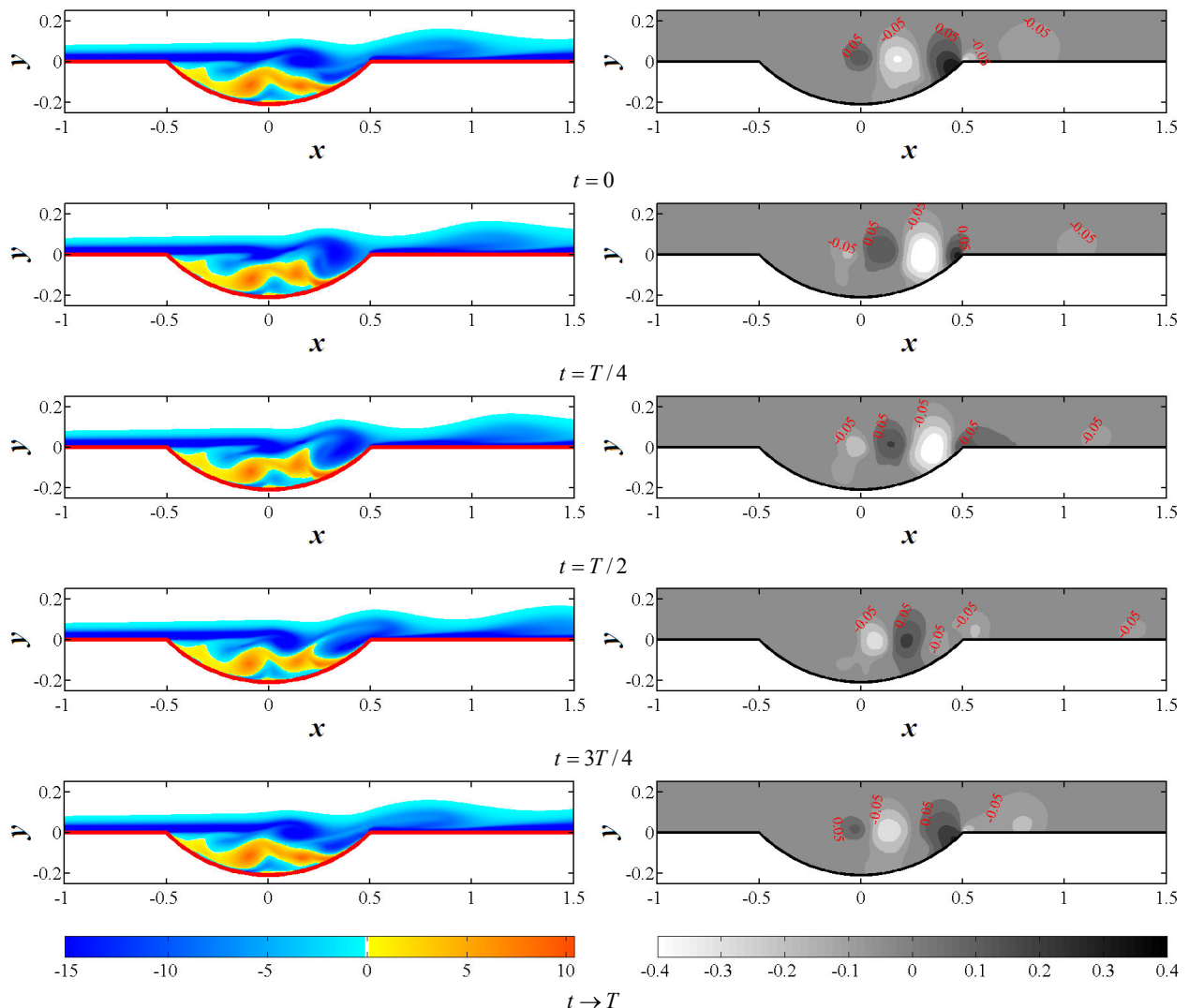


Рис. 5 – Миттєві картини розподілу завихреності (зліва) та тиску (справа) навколо канавки з кутовим розміром $\alpha = 60^\circ$ протягом одного періоду.

Для того, щоб визначити конвективну швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою, розглянемо коефіцієнт взаємної кореляції тиску $R_{12}(\tau)$ між двома точками на хорді канавки, де τ – час затримки між часовими залежностями тиску в точках, що розглядаються. На миттєвих картинках для тиску добре видно, Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 2 (9)'2025.

що вихрові структури в зсувному шарі зароджуються і формуються не безпосередньо біля передньої крайки, а на деякій відстані від неї вниз за течією, ближче до геометричного центру хорди канавки. Тому коефіцієнт $R_{12}(\tau)$ будемо аналізувати для точок хорди канавки з абсцисами $x \geq 0$, де вихрові структури вже сформовані, починаючи з опорної точки в центрі хорди з абсцисою $x = 0$. Напрямок руху вихрових структур відомий, тому коефіцієнт $R_{12}(\tau)$ досить розглянути тільки для невід'ємних значень τ . Точність обчислення координати та амплітуди першого максимуму $R_{12}(\tau)$, порівняно з іншими, найменше залежить від крайових ефектів, які неминучі через скінченний інтервал часу та дискретний крок часових залежностей тиску. Щоб позбутися фазового зв'язку часових залежностей тиску у двох точках, абсцису $\tau_{\max}$ першого максимуму $R_{12}(\tau)$ для $\tau \geq 0$ вважаємо справжнім часом затримки. Побудуємо графік залежності безрозмірної відстані між заданою точкою на хорді канавки й опорною $\varepsilon = |x - x_0|/L$ від безрозмірного часу затримки $\bar{\tau}_{\max} = \tau_{\max} \cdot (U_0/L)$ для відповідної локації (жирні точки на рис. 4, б). Характер розміщення жирних точок на цьому рисунку нашо́вхують на думку про прямолінійну залежність ε від $\bar{\tau}_{\max}$. Відповідна пряма лінія побудована методом найменших квадратів (рис. 4, б) так, щоб вона проходила через точку $(0, 0)$. Кутовий нахил цієї прямої і є шукана безрозмірна конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою. Тут маємо, що незалежно від кутового розміру канавки $U_c/U_0 \approx 0.42$. Такі значення конвективної швидкості вихрових структур над канавкою узгоджується з відомими даними в літературі $0.4 < U_c/U_0 < 0.6$. Вихрові структури в зсувному шарі концентруються в певних точках і синхронно рухаються вниз за течією. Тому частота зіткнення цих структур зі стінкою в кормовій частині канавки залежить від їхньої конвективної швидкості і кількості на хорді канавки, а також і відстані між ними. Для потоків з малим числом Маха, коли акустичним оберненим зв'язком можна знехтувати, саме ця частота зіткнення і визначає число Струхала потоку (усталену частоту автоколивань). Отже, частоту коливань можна легко визначити із адаптованої для нестисливої рідини напівемпіричної формули Россітера [20]:

$$St = \frac{fL}{U_0} = \frac{U_c}{U_0}(n - \alpha), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де n – кількість вихрових структур уздовж хорди канавки; $\alpha = 0.25$ – емпірична фазова затримка вихрових структур у зсувному шарі. У нашому разі ця формула коли $n = 3$, для $\alpha = 40^\circ$ і $n = 2$ для $\alpha = 60^\circ$ і 90° та відповідних значень чисел Струхала дає завищену оцінку конвективної швидкості. Така розбіжність тут пов'язана з тим, що у формулі Россітера вихрові структури зсувного шару пробігають усю хорду канавки від крайки до крайки, тоді як уже зазначалось, в нашому разі вихрові структури пробігають не всю довжину хорди. Це пояснює чому значення частоти Струхала обчисленої за формулою і визначеної в нашому числовому моделюванні збігаються, незважаючи на різні значення конвективної швидкості вихрових структур зсувного шару.

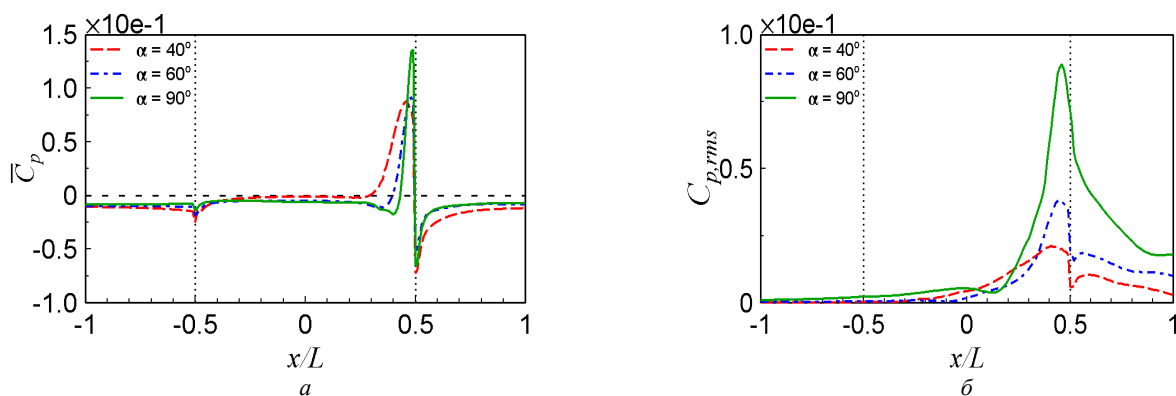


Рис. 6 – Коефіцієнт тиску на стінці канавки: а – середнє значення, б – середньоквадратичне відхилення.

Потік над канавкою генерує відповідні пульсації тиску на її поверхні. Інтегральною характеристикою цих пульсацій є середнє за часом значення коефіцієнта тиску $\bar{C}_p$ і його середньоквадратичне відхилення $C_{p,rms}$. Відповідні залежності зображені на рис. 6, а і б. На цих рисунках частини кривих між вертикальними штриховими лініями відповідають точкам стінки канавки, які однозначно характеризуються своїми проєкціями на вісь Ox . Як бачимо, незалежно від кута α , біля передньої крайки значення і амплітуда коливань величини $\bar{C}_p$ незначні, тоді як біля задньої – маємо стрімке зростання і падіння величини $\bar{C}_p$. Такі різкі перепади тиску в кормовій частині канавки зумовлені близьким сусідством зони раптового гальмування потоку стінкою канавки і зони стрімкого прискорення потоку на задній крайці канавки. Середньоквадратичне відхилення коефіцієнта C_p від його середнього значення в кормовій частині стінки канавки зумовлене періодичними ударами об стінку вихрових структур зсувного шару. На іншій частині стінки канавки причиною незначних коливань величини $C_{p,rms}$ є зміна конфігурації рециркуляційних зон в канавці протягом одного циклу коливань. На плоскій поверхні за канав-

кою в міру того як згасають вихрові структури, що покинули канавку, зменшується величина $C_{p,rms}$. Зазначимо, що біля задньої крайки канавки середнє значення і середньоквадратичне відхилення коефіцієнта тиску суттєво залежать від кутового розміру канавки.

Акустичне далеке поле, яке генерується тілом у потоці в'язкої рідини, є певним лінійним відображенням пульсацій тиску в близькому гідродинамічному полі. Тому, суттєва зміна кількісних характеристик середньоквадратичних відхилень пульсацій тиску на стінці канавки є причиною кардинальних змін діаграми спрямованості. Частота коливань звукового тиску у фіксованій точці далекого поля дорівнює частоті Струхалю потоку. Тому характеристики спрямованості звукового поля можна розглядати для амплітуди пульсацій тиску p'_{amp} . Такі характеристики спрямованості зображені на рис. 7 для точок півкола з центром в точці O і безрозмірного радіусу $r/L = 80$. Амплітуда пульсацій тиску тут нормована відносно динамічного тиску потоку. Як бачимо, характеристики спрямованості вздовж потоку мають явний дипольний характер з неоднаковими пелюстками. Назустріч потоку інтенсивність звуку, що випромінює канавка, є більшою порівняно з інтенсивністю звуку вниз за потоком. Для кута $\alpha = 90^\circ$ інтенсивність звуку різко зростає в усіх напрямках.

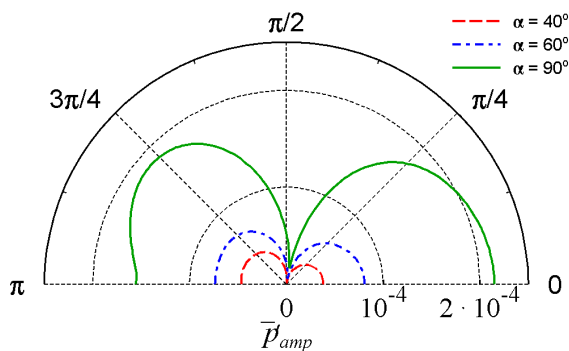


Рис. 7 – Характеристика спрямованості звукового поля, яке генерується стінкою із циліндричною канавкою.

глибина цих канавок знаходиться в діапазоні від 0.1 до 0.3, тобто, за прийнятою класифікацією такі нерівності є мілкими. Розрахунки виконані для числа Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$, яке обчислюється за швидкістю прямолінійної течії і хордою канавки.

Результати моделювання свідчать про встановлення навколо канавок, що розглядалися, режиму зсувного шару. Його властивістю є розпад зсувного шару на вихрові структури великого масштабу, динаміка яких є причиною автоколивань потоку всередині канавки. Знайдено, що для канавки з кутовим розміром 40° встановлюється третя мода коливань, коли у зсувному шарі ідентифікуються три великі вихори. Над глибшими канавками, які характеризуються кутами 60° і 90° , розвивається друга мода коливань з двома вихорами. Відповідно, число Струхалю зменшується від 1.797 для 40° до 0.979 для 90° , що вказує на суттєву залежність динаміки вихрових структур у зсувному шарі від кутового розміру канавки. Водночас, конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою не залежить від її кутового розміру й дорівнює приблизно 0.42 від швидкості незбуреного потоку. Ця швидкість є меншою, ніж для прямокутної канавки, що є наслідком специфічної геометрії. Коефіцієнт опору канавки падає при збільшенні її кутового розміру (глибини).

Досліджені характеристики спрямованості звукового поля для числа Маха $M = 0.2$. Отримано, що гідродинамічна течія над циліндричною поперечною канавкою є джерелом дипольного випромінювання звуку в далекому полі з нерівномірними пелюстками. Зі збільшенням кутового розміру канавки амплітуда звукових коливань в далекому полі зростає для всіх напрямків.

Список літератури

1. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements // Flow, Turbulence and Combustion. – 2013. – Vol. 90. – P. 86 – 99. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
2. Gregorio F., Fraioli G. Flow control on a high thickness airfoil by a trapped vortex cavity // Proceedings of 14th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics. – Lisbon, Portugal, 2008. – No. 1363. – 12 pp.
3. East L. F. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities // J. Sound and Vibration. – 1966. – Vol. 3. – P. 277 – 287. DOI: 10.1016/0022-460X(66)00096-4.
4. Stallings R. Jr., Wilcox F. Jr. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds // Technical Publication. Report Number: NASA-TR-2683. – NASA, June, 1987. – 75 pp.
5. Gharib M., Roshko A. The effect of flow oscillations on cavity drag // J. Fluid Mechanics. – 1987. – Vol. 177. – P. 501 – 530. DOI: 10.1017/S002211208700106X.
6. Rockwell D., Naudascher E. Review: self-sustaining oscillations of flow past cavities // J. Fluid Engineering. – 1978. – Vol. 100. – P. 152 – 165. DOI: 10.1115/1.3448624.
7. Rossiter J. E. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds // ARC Reports and Memoranda. – 1964. – No. 3438. – 36 p. – Режим доступу : <https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/handle/1826.2/4020>. – Дата звертання : 11 травня 2025 р.
8. Lin J. C., Rockwell D. Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity // AIAA J. – 2001. – Vol. 39. – P. 1139 – 1151. DOI: 10.2514/2.1427.
9. Cottet G. H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice. – London : Cambridge University Press, 2000. – 328 p.
10. Горбань В. О., Горбань І. М. Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель та алгоритми управління //

- Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Т. 7. – С. 8 – 26.
11. Gorban I. M., Lebid O. G. Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers // *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. – Springer, Cham. – 2019. – P. 159 – 179. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_10.
 12. Lockard D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation // *J. Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 229. – P. 897 – 911. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2522.
 13. Guo Y. P. Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems // *J. Fluid Mechanics*. – 2000. – Vol. 403. – P. 201 – 221. DOI: 10.1017/S0022112099006989.
 14. Довгий С. А., Лифанов І. К. Методи рішення інтегральних рівнянь. – К.: Наукова думка, 2012. – 295 с.
 15. Ploumhans P., Winckelmans G. S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry // *J. Computational Physics*. – 2000. – Vol. 165. – P. 354 – 406. DOI: 10.1006/jcph.2000.6614.
 16. Lamb H. *Hydrodynamics*. – Cambridge: New York: Cambridge University Press, 1993. – 738 p.
 17. Basovsky V. G., Gorban I. M., Khomenko O. V. Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction // *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. – Springer, Cham, 2019. – P. 137 – 158. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_9.
 18. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 817 p.
 19. Larsson J., Davidson L., Olsson M., Eriksson L. E. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low Mach number // *AIAA J.* – 2004. – Vol. 42. – P. 2462 – 2473. DOI: 10.2514/1.1339.
 20. Gloerfelt X. Cavity noise. VKI lecture series 2009-03, aerodynamics noise from wall-bounded flows. – Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Brussels, 2009. – P. 130 – 147.

References (transliterated)

1. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2013, Vol. 90, pp. 86–99. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
2. Gregorio F., Fraioli G. Flow control on a high thickness airfoil by a trapped vortex cavity. *Proceedings of 14th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*. Lisbon, Portugal, 2008, No. 1363, 12 pp.
3. East L. F. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *J. Sound and Vibration*. 1966, Vol. 3, pp. 277–287. DOI: 10.1016/0022-460X(66)00096-4.
4. Stallings R. Jr., Wilcox F. Jr. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds. *Technical Publication*. Report Number: NASA-TR-2683. NASA, June, 1987. 75 pp.
5. Gharib M., Roshko A. The effect of flow oscillations on cavity drag. *J. Fluid Mechanics*. 1987, Vol. 177, pp. 501–530. DOI: 10.1017/S002211208700106X.
6. Rockwell D., Naudascher E. Review: self-sustaining oscillations of flow past cavities. *J. Fluid Engineering*. 1978, Vol. 100, pp. 152–165. DOI: 10.1115/1.3448624.
7. Rossiter J. E. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. *ARC Reports and Memoranda*. 1964, No. 3438, 36 p. Available at: <https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/handle/1826.2/4020>. (accessed 11 May 2025).
8. Lin J. C., Rockwell D. Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity. *AIAA J.* 2001, Vol. 39, pp. 1139–1151. DOI: 10.2514/2.1427.
9. Cottet G. H., Koumoutsakos P. *Vortex methods: theory and practice*. London, Cambridge University Press, 2000. 328 p.
10. Gorban V. O., Gorban I. M. Vykrova struktura potoku pry obtikanni kvadratnoyi pryzy: chyslova model' ta alhorytmy upravlinnya [Vortex pattern of the flow near a square prism: numerical model and algorithms of control]. *Prykladna gidromekhanika* [Applied Hydromechanics]. 2005, vol. 7, pp. 8–26.
11. Gorban I. M., Lebid O. G. Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham, 2019. pp. 159 – 179. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_10.
12. Lockard D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation. *J. Sound and Vibration*. 2000, Vol. 229, pp. 897–911. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2522.
13. Guo Y. P. Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems. *J. Fluid Mechanics*. 2000, Vol. 403, pp. 201–221. DOI: 10.1017/S0022112099006989.
14. Dovgii S. A., Lifanov I. K. *Metodu resheniya integral'nykh uravneniy* [Methods of solution of integral equations]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2012, 295 p.
15. Ploumhans P., Winckelmans G. S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry. *J. Computational Physics*. 2000, Vol. 165, pp. 354–406. DOI: 10.1006/jcph.2000.6614.
16. Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1993. 738 p.
17. Basovsky V. G., Gorban I. M., Khomenko O. V. Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham, 2019. pp. 137–158. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_9.
18. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New York, McGraw-Hill, 1979. 817 p.
19. Larsson J., Davidson L., Olsson M., Eriksson L. E. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low Mach number. *AIAA J.* 2004, Vol. 42, pp. 2462–2473. DOI: 10.2514/1.1339.
20. Gloerfelt X. Cavity noise. VKI lecture series 2009-03, aerodynamics noise from wall-bounded flows. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Brussels, 2009. pp. 130–147.

Надійшла (received) 23.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Горбань Ірина Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9662-2813>; e-mail: ivgorban@gmail.com.

Gorban Iryna Mykolaivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Staff Researcher, Senior Staff Researcher at the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flows, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9662-2813>; e-mail: ivgorban@gmail.com.

Басовський Володимир Григорович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідродинамічної акустики, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6192-2353>; e-mail: basovsky@ukr.net.

Basovsky Volodymyr Grygorovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Staff Researcher, Senior Staff Researcher at the Department of Hydrodynamical Acoustics, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6192-2353>; e-mail: basovsky@ukr.net.

К. І. ДЕНИСОВ, В. В. ПІЧКУР

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В статті висвітлено метод дослідження стійкості матричного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є лінійні матричні диференціальні рівняння, частинним випадком яких є рівняння Ляпунова. Матричні диференціальні рівняння виникають в задачах теорії стійкості, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності. В зв'язку з цим необхідно обчислювати та аналізувати якісні властивості розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Постають проблеми існування, єдиності, продовжуваності і аналізу умов стійкості для різних видів таких математичних рівнянь. Метод, розроблений в статті, базується на алгебраїчних властивостях власних чисел, жорданових форм матриць, використовує властивості коренів многочленів. В статті обґрунтовується теорема про умови стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. Розроблена методика полягає у знаходженні максимальних дійсних частин власних чисел, а також у аналізі структури жорданової форми матриць лінійного диференціального рівняння. Наслідком теореми є відповідні умови стійкості матричного рівняння Ляпунова. Для знаходження власних чисел розроблено обчислювальний метод знаходження максимальної дійсної частини коренів многочлена, а також алгоритм знаходження коренів многочлена. В основі підходу лежить теорема Рауса – Гурвіца. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: матричне диференціальне рівняння, стійкість, власні значення матриці, жорданова форма матриці, обчислювальні методи, корені многочлена.

К. І. ДЕНИСОВ, В. В. ПІЧКУР

STABILITY ANALYSIS OF SOLUTIONS OF A LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The article presents the method for analyzing the stability of linear matrix differential equations with constant coefficients. One of the classical types of such equations is the class of linear matrix differential equations, which includes the Lyapunov equation as a particular case. Matrix differential equations arise in problems of stability theory, practical stability, optimal control theory, and state estimation of systems under uncertainty. Therefore, it is necessary to compute and analyze the qualitative properties of solutions to matrix differential equations. This involves addressing problems of existence, uniqueness, continuation, and analysis of stability conditions for various types of such mathematical equations. The method proposed in the article is based on algebraic properties of eigenvalues, Jordan forms of matrices, and characteristics of polynomial roots. A theorem is established regarding the conditions for stability, asymptotic stability, and instability of solutions to linear matrix differential equations with constant coefficients. The developed approach includes the computation of the maximal real parts of eigenvalues and the analysis of the Jordan form structure of the system matrices. As a consequence, corresponding stability conditions for the Lyapunov matrix equation are also obtained. An algorithm is proposed for computing the maximal real part of the roots of a polynomial, as well as for finding all roots. The approach relies on the Routh – Hurwitz theorem. The article also presents results of computational experiments.

Key words: matrix differential equation, stability, matrix eigenvalues, Jordan form, computational methods, polynomial roots.

Вступ. При розв'язуванні ряду задач *теорії стійкості*, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності виникають *матричні диференціальні рівняння* [1 – 8]. Зокрема, такі задачі виникають при моделюванні перетину інтегральної лійки лінійного диференціального рівняння, множина початкових умов якого належить *еліпсоїду* [3]. Як наслідок, в задачах, пов'язаних з матричними диференціальними рівняннями, необхідно обчислювати і аналізувати якісні властивості розв'язків. Тому постають проблеми існування, єдиності, продовжуваності і аналізу умов стійкості для таких математичних співвідношень [3, 8, 9].

Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є *рівняння Ляпунова* і *лінійні матричні диференціальні рівняння* [3, 8]. В статті розроблено *метод дослідження стійкості* матричних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, який має алгебраїчний характер. Обґрунтовуються умови стійкості, асимптотичної стійкості, стійкості, нестійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. В основі проведеного аналізу лежать властивості власних чисел і *жорданової форми матриць* рівняння. Для знаходження власних чисел розроблено відповідний обчислювальний метод, який ґрунтується на *теоремі Рауса – Гурвіца* [3, 9]. Методику апробовано за допомогою обчислювальних експериментів.

В статті будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, $\bar{\alpha}$ – комплексне спряження числа α , $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множина матриць $n \times n$ з дійсними елементами, $\mathbb{C}^{n \times n}$ – множина матриць $n \times n$ з комплексними елементами, T – знак транспонування, $A_{i,j}$ – елемент i, j матриці A , $\text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_i)$ – блоково-діагональна матриця, в якій блоки $J_1, J_2, \dots, J_i$ розміщені вздовж головної діагоналі, а всі інші елементи нульові, $\text{Re}(x)$, $\text{Im}(x)$ – дійсна та уявна частини комплексного числа x .

Стійкість лінійного матричного рівняння. Розглянемо лінійне матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + X(t)B, \quad (1)$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриці з постійними коефіцієнтами; $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (1).

Введемо позначення

$$\gamma = \left\{ \sum_{i=1}^u c_i \cos(\phi_i t) + \sum_{i=1}^v d_i \sin(\psi_i t) \mid u+v > 0, c_i \neq 0, d_i \neq 0, \psi_i > 0, \phi_i \geq 0, \psi_i \neq \psi_j, \phi_i \neq \phi_j, i \neq j \right\}.$$

Множина γ є сукупністю всіх ненульових функцій, що можна представити як скінченну лінійну комбінацію косинусів та синусів.

Лема 1. Нехай матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p_{\max}$ – максимальна дійсна частина власних чисел матриці A , m – максимальний розмір жорданової клітини матриці A , які відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$. Тоді $e^{At} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1})$, $t \rightarrow +\infty$ та існують такі індекси $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e_{i,j}^{At} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} \cdot g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \text{ де } t \rightarrow +\infty, g(t) \in \gamma.$$

Доведення.

Представимо матрицю $A = JCJ^{-1}$, де $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – жорданова форма матриці A та C – невироджена матриця.

Випишемо матричну експоненту через жорданову форму $e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$. Матриця J є блочно-діагональною $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_i)$, де $\lambda_i \in \mathbb{C}$ – власне число матриці A , J_i – жорданова клітина, яка відповідає власному числу λ_i . Тоді $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_i t})$.

Розглянемо блок матриці жордана J_i розміру p . Як відомо [9]:

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

Отже, для жорданового блока J_i маємо

$$e^{J_i t} = O(e^{\lambda_i t} t^{p-1}), \quad t \rightarrow +\infty; \quad e_{1,p}^{J_i t} = \frac{e^{rt} t^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (\cos(yt) + i \sin(yt)),$$

де $r = \text{Re}(\lambda_i)$, $y = \text{Im}(\lambda_i)$. Тоді $e^{Jt} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1})$, $t \rightarrow +\infty$ та існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e_{i,j}^{Jt} = \frac{e^{p_{\max} t} t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (\cos(yt) + i \sin(yt)). \quad (2)$$

Покажемо обмеженість e^{At} :

$$e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} = C \cdot O(e^{p_{\max} t} t^{m-1})C^{-1} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}).$$

Обґрунтуємо, що для e^{At} існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що:

$$e_{i,j}^{At} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \text{ де } t \rightarrow +\infty, g(t) \in \gamma.$$

Нехай $H(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – матриця, що:

$$H_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{e^{i \cdot yt}}{(m-1)!}, & \text{якщо } e_{a,b}^{Jt} = e^{(p_{\max} + i \cdot y)t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}. \end{cases}$$

Припустимо, що у e^{At} немає таких коефіцієнтів. Тобто $CH(t)C^{-1} \equiv 0$. Оскільки матриця C невироджена, то помножимо рівність зліва на C^{-1} та справа на C та матимемо, що $H(t) \equiv 0$, що суперечить (2).

Отже, $CH(t)C^{-1} \not\equiv 0$. Тоді існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що $(CH(t)C^{-1})_{i,j} \not\equiv 0$. Звідси маємо, що:

$$(Ce^{Jt}C^{-1})_{i,j} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}),$$

де $t \rightarrow +\infty$, $g(t) \in \gamma$.

Лему доведено.

У наступних теоремах $p_{\max}$, $\mu_{\max}$ – це максимальні дійсні частини власних чисел матриці A та B відповідно, m – максимальний розмір жорданових клітин, які відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$ матриці A , k – максимальний розмір жорданових клітин, які відповідають власним числам з дійсною частиною $\mu_{\max}$ матриці B .

Теорема 1. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$.

Теорема 2. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли або $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$, або виконуються такі умови:

1. $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$;
2. всі жорданові клітини матриці A власних чисел з дійсною частиною $p_{\max}$ мають одиничні розміри;
3. всі жорданові клітини матриці B власних чисел з дійсною частиною $\mu_{\max}$ мають одиничні розміри.

Теорема 3. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є нестійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли або $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$, або $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та виконується хоча б одна з таких умов:

1. існує жорданова клітина матриці A власних чисел з дійсною частиною $p_{\max}$ розміром більше 1.
2. існує жорданова клітина матриці B власних чисел з дійсною частиною $\mu_{\max}$ розміром більше 1.

Доведення.

Загальний розв'язок лінійного рівняння можна представити як лінійну комбінацію n^2 лінійно незалежних розв'язків $X_{i,j}(t) = e^{At} E_{i,j} e^{Bt}$, де $E_{i,j}$ – матриця, яка складається з нулів, окрім елемента (i, j) , що дорівнює 1. Запишемо матриці

$$e^{At} = [h_1(t) \ h_2(t) \ \dots \ h_n(t)]; \quad e^{Bt} = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)]^T; \quad e^{At} E_{i,j} = [0 \ 0 \ \dots \ h_i(t) \ \dots \ 0],$$

де у j -ому стовпчику знаходиться вектор-функція $h_i(t)$. Тоді

$$X_{i,j}(t) = e^{At} E_{i,j} e^{Bt} = h_i(t) f_j^T(t), \quad (e^{At} E_{i,j} e^{Bt})_{a,b} = (h_i(t))_a (f_j(t))_b.$$

З леми 1 маємо

$$e^{At} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad e^{Bt} = O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Існують $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e^{At}_{i_1, j_1} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad e^{Bt}_{i_2, j_2} = e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}),$$

де $t \rightarrow +\infty$, $g_1(t), g_2(t) \in \gamma$. Тоді

$$h_i(t) = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad f_j(t) = O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty$$

та маємо

$$X_{i,j}(t) = h_i(t) f_j^T(t) = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}) \cdot O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}) = O(e^{(p_{\max} + \mu_{\max}) t} t^{m+k-2}).$$

Також

$$(h_{i_1}(t))_{i_1} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad (f_{j_2}(t))_{j_2} = e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}),$$

$$(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} = (h_{i_1}(t))_{i_1} (f_{j_2}(t))_{j_2} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1} e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Зазначимо, що $g_3(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \in \gamma$.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли кожен з розв'язків $X_{i,j}(t) = o(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$, то

$$X_{i,j}(t) = O(e^{(p_{\max} + \mu_{\max}) t} t^{m+k-2}) = o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отже, в цьому випадку нульовий розв'язок є асимптотично стійким, а отже і стійким.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли кожен з розв'язків $X_{i,j}(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та $m = k = 1$, то

$$(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} = g_3(t) + o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оскільки, $g_3(t) \not\rightarrow 0$, то $(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} = O(1)$ та $(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} \notin o(1)$, $t \rightarrow +\infty$, тоді

$$X_{i,j}(t) = O\left(e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2}\right) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отже, нульовий розв'язок є стійким і не є асимптотично стійким у цьому випадку.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є нестійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли хоча б один $X_{i,j}(t)$ є необмеженим при $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$, то

$$\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2} = e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2} g_3(t) + o\left(e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оскільки $g_3(t) \not\rightarrow 0$, то $\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2}$ є необмеженою при $t \rightarrow +\infty$. Отже нульовий розв'язок є нестійким у цьому випадку. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та $m+k > 2$, то

$$\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2} = t^{k+m-2} g_3(t) + (1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Аналогічно до попереднього випадку нульовий розв'язок є нестійким.

Теорему доведено.

Алгоритм аналізу стійкості лінійного матричного рівняння. Розглянемо алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку матричного диференціального рівняння (1). Алгоритми **1.1** та **1.2** є допоміжними для алгоритму **1.3**. Вони використовуються для знаходження максимальної дійсної частини коренів та самих коренів характеристичних многочленів вхідних матриць.

Алгоритм 1.1 Знаходження максимальної дійсної частини у коренів многочлена $p(x)$.

Крок 1. Обмежимо межі $l, r \in \mathbb{R}$, що $y \in [l, r]$. Покладемо

$$r := 1 + \max_i \left\{ \left| \frac{p_i}{p_n} \right| \right\}, \quad l := -r.$$

Крок 2. Спробуємо зменшити межі пошуку вдвічі. Покладемо $m := \frac{l+r}{2}$. Перевіримо, чи y менше за m . Обчислюємо многочлен $p(x+m)$, коренями якого є числа $x_i - m$. Застосуємо критерій Гурвіца для $p(x+m)$ і таким чином перевіримо, що для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\operatorname{Re}(x_i) - m < 0.$$

Крок 3. Якщо всі $\operatorname{Re}(x_i < m)$, то $y < m$ і $y \in [l, m]$, тоді присвоїмо $r := m$. Інакше $y \geq m$ і присвоїмо $l := m$.

Крок 4. Повернемося на крок 2, якщо довжина проміжку пошуку більше ϵ : $r - l > \epsilon$. Інакше вважаємо, що $y \approx \frac{l+r}{2}$.

Опис алгоритму закінчено.

Алгоритм 1.2 Знаходження коренів многочлена.

Крок 1. Якщо $n \leq 2$, то знаходимо корені аналітично.

Крок 2. Інакше $n > 2$ і знаходимо $y \approx \max_i \operatorname{Re}(x_i)$ алгоритмом **1.1**, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені многочлена $p(x)$.

Крок 3. Якщо $|p(y)| < \epsilon$, то будемо вважати, що y – корінь многочлена $p(x)$. В такому випадку рекурсивно знаходимо корені многочлена $p(x)/(x-y)$ степеня на один менше.

Крок 4. Обчислюємо многочлен $p(y+i \cdot x)$. Оскільки праворуч від вертикальної прямої $\operatorname{Re}(z) = y$ коренів немає, то після такого лінійного перетворення, а саме зсуву ліворуч на y та повороту на 90 градусів за годинниковою стрілкою, всі корені z_i многочлена $p(y+i \cdot x)$ матимуть невід'ємні уявні частини $\operatorname{Im}(z_i) \geq 0$.

Крок 5. Щоб виокремити лише корені z_i , у яких $\operatorname{Im}(z_i) = 0$, обчислюємо

$$g(x) = \text{НСД}\left(p(y+i \cdot x), \bar{p}(y+i \cdot x)\right),$$

$$\text{де } \bar{a}(z) = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} z^i.$$

Крок 6. Оскільки корені початкового многочлена були симетричні (з урахуванням кратностей) відносно осі $\operatorname{Re}(z) = 0$, то корені поточного многочлена $g(x)$ є симетричними відносно початку координат. Тобто, якщо x^* є коренем $g(x)$, то $-x^*$ також є коренем $g(x)$. Також $g(0) \neq 0$ та всі корені є дійсними, отже, поточний многочлен можна записати як $g(x) = f(x^2)$.

Крок 7. Многочлен $f(x)$ має ступінь не більше ніж $\frac{n}{2}$. Тоді рекурсивно знаходимо корені $f(x)$: оберненим лінійним перетворенням знаходимо корені, що були на осі $\operatorname{Re}(z) = y$ та ділимо початковий поліном $p(x)$ на знайдені корені, щоб рекурсивно знайти корені, що знаходяться ліворуч від прямої $\operatorname{Re}(z) = y$.

Опис алгоритму завершено.

Приклад 1. Розглянемо многочлен

$$p(x) = x^6 - 26x^5 + 290x^4 - 1784x^3 + 6379x^2 - 12574x + 10626.$$

Його коренями є числа $5 \pm \sqrt{3}$, $4 \pm i\sqrt{7}$, $4 \pm i\sqrt{5}$. Покладемо $\epsilon_{ps} = 10^{-10}$ та $\epsilon_{ps_2} = 10^{-5}$. Спершу буде шукати максимальну дійсну частину коренів початкового многочлена $p(x)$ бінарним пошуком. Алгоритм знаходить число $r_0 = 6.73205$, що приблизно дорівнює $5 + \sqrt{3}$. Обчислюємо нев'язку $p(r_0)$, отримуємо, що $|p(r_0)| < \epsilon_{ps_2}$, тоді згідно з алгоритмом вважаємо, що r_0 – корінь рівняння $p(x)$ та рекурсивно знаходимо корені многочлена:

$$p_1(x) = \frac{p(x)}{x - r_0}.$$

Далі алгоритм знову шукає найбільшу дійсну частину коренів, але для рівняння $p_1(x)$. Алгоритм знаходить число $r_1 = 4$, що є дійсною частиною чотирьох комплексних коренів. Далі обчислюємо нев'язку $p_1(r_1)$ і маємо, що $|p_1(r_1)| \geq \epsilon_{ps_2}$. Тоді треба шукати комплексні корені на цій осі $\operatorname{Re}(z) = r_1$.

Обчислюємо многочлен $p_2(x) = p_1(r_1 + ix)$. Таке лінійне перетворення зсуває корені многочлена вліво на r_1 та обертає на 90 градусів за годинниковою стрілкою. Знаходимо:

$$p_3(x) = \text{НСД}(p_2(x), \bar{p}_2(x)).$$

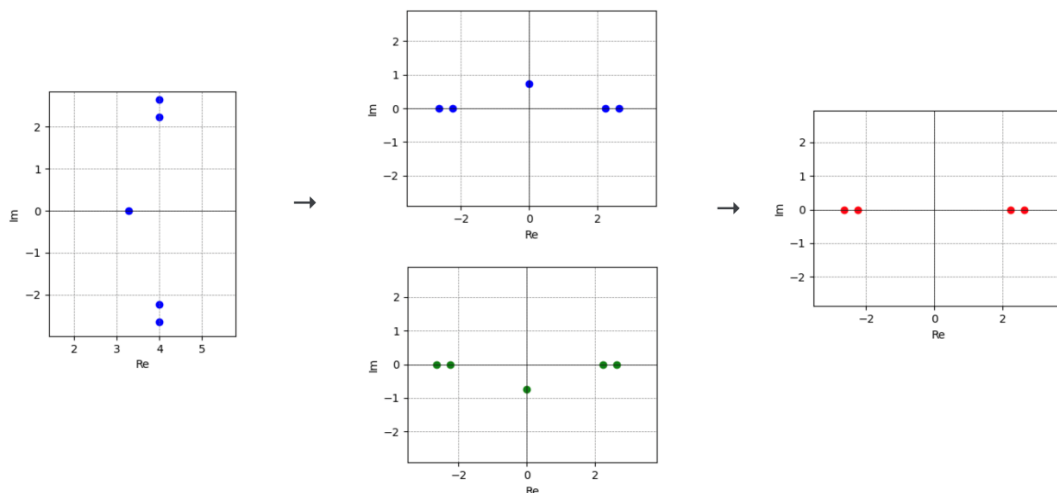


Рис. 1 – Ліворуч корені многочлена $p_1(x)$, посередині – $p_2(x), \bar{p}_2(x)$, праворуч – $p_3(x)$.

На рис. 1 зображено лінійні перетворення, що відбуваються з коренями многочлена у процесі. Позначимо $p_3(x) = p_4(x^2)$. Рекурсивно знаходимо корені многочлена $p_4(x)$. Оскільки $p_4(x)$ другого ступеня, то розв'язуємо аналітично. Маємо корені: 4.99999, 7.00000 – уявні частини початкових коренів у квадраті. Робимо обернені заміни і знаходимо ще 4 корені початкового многочлена: $4 \pm i\sqrt{4.99999}$, $4 \pm i\sqrt{7}$. Ділимо $p_1(x)$ на

$$(x - 4 + i\sqrt{4.99999})(x - 4 - i\sqrt{4.99999})(x - 4 + i\sqrt{7})(x - 4 - i\sqrt{7}).$$

Отримаємо многочлен $p_5(x)$. $p_5(x)$ – першого ступеня, знаходимо останній корінь аналітично. Отримуємо 3.26794, що приблизно дорівнює $5 - \sqrt{3}$. Отже, маємо корені:

$$3.26794, 4 + i \cdot 2.23606, 4 - i \cdot 2.23606, 4 + i \cdot 2.64575, 4 - i \cdot 2.64575, 6.73205.$$

Алгоритм 1.3 Аналіз стійкості нульового розв'язку рівняння (1).

Крок 1. Знаходимо характеристичний многочлен $f(x)$ матриці A .

Крок 2. Знаходимо найбільшу дійсну частину коренів $f(x)$ з точністю ϵ_{ps} , використовуючи алгоритм 1.1.

Позначимо $p_{\max}$ як реальне значення максимальної дійсної частини, а p^* – наше знайдене значення. З алгоритм-

му отримуємо, що $|p_{\max} - p^*| < eps$.

Крок 3. Знаходимо характеристичний многочлен $g(x)$ матриці B . Позначимо його корені як $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Крок 4. З доведених теорем про стійкість маємо, що треба дізнатися знак виразу $p_{\max} + \mu_{\max}$, де $\mu_{\max}$ – найбільша дійсна частина коренів рівняння $g(x)$.

Крок 5. Спершу перевіримо на асимптотичну стійкість

$$p_{\max} + \mu_{\max} < \mu_{\max} + p^* + eps.$$

Якщо $\mu_{\max} + p^* + eps < 0$, то маємо асимптотичну стійкість. Тоді обчислюємо многочлен $g(x - p^* - eps)$, коренями якого є числа $y_i + p^* + eps$ і застосуємо критерій Гурвіца для перевірки, що всі $\operatorname{Re}(y_i + p^* + eps) < 0$.

Крок 6. Далі перевіримо чи $p_{\max} + \mu_{\max}$ більше 0 з точністю eps :

$$p_{\max} + \mu_{\max} > \mu_{\max} + p^* - eps.$$

Тоді, якщо $\mu_{\max} + p^* - eps \geq 0$, то $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$ і нульовий розв'язок є нестійким. Перевіримо протилежну нерівність $\mu_{\max} + p^* - eps < 0$. Обчислюємо многочлен $g(x - p^* + eps)$, коренями якого є числа $y_i + p^* - eps$, і перевіримо критерієм Гурвіца, чи всі $\operatorname{Re}(y_i + p^* - eps) < 0$. Якщо існує i , що $\operatorname{Re}(y_i + p^* - eps) \geq 0$, то маємо нестійкість.

Крок 7. Інакше вважаємо, що $p_{\max} + \mu_{\max} \approx 0$. Для подальших висновків з теорем про стійкість треба дізнатися, чи всі жорданові клітини матриці A , що відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$, будуть розміру 1. Аналогічну умову досліджуємо для матриці B та $\mu_{\max}$. Це еквівалентно тому, що жодна жорданова клітина з відповідними власними числами не містить приєднаних векторів. Приєднаних векторів для власного числа ν не буде у жорданових клітинах тоді і тільки тоді, коли розмір власного підпростору ν дорівнює кратності кореня ν у характеристичному многочлені. Цю умову можна записати як:

$$\operatorname{rang}(A - \nu E) = n - r,$$

де r – кратність кореня ν .

Крок 8. Якщо знайти всі корені характеристичних многочленів $f(x)$ та $g(x)$, то зможемо перевірити умову

$$\operatorname{rang}(A - \nu E) = n - r(\nu)$$

для всіх ν , що $\operatorname{Re}(\nu) = p_{\max}$ та аналогічні умови для матриці B .

Крок 9. Тоді знаходимо корені многочленів $f(x)$, $g(x)$ алгоритмом 1.2 і перевіряємо умови на ранги. Якщо всі умови виконуються, то маємо стійкий нульовий розв'язок, інакше – нестійкий.

Опис алгоритму закінчено.

Приклад 2. Розглянемо лінійне матричне рівняння (1) з

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покладемо $eps = 10^{-10}$ та $eps_2 = 10^{-5}$. Характеристичний многочлен матриці A має вигляд:

$$f(x) = x^2 + 17x + 45.$$

Бінарним пошуком шукаємо $p_{\max}$ – найбільшу дійсну частину коренів $f(x)$. Маємо, що $p_{\max} \approx -3.27984$. Характеристичний многочлен $g(x)$ матриці B записується так:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4.$$

Нехай $\mu_{\max}$ – найбільша дійсна частина коренів $g(x)$.

Далі перевіряємо, чи сума $p_{\max}$ та $\mu_{\max}$ менше за 0, щоб перевірити, чи нульовий розв'язок асимптотично стійкий. Для цього, використовуючи критерій Гурвіца, перевіряємо, чи всі дійсні частини коренів многочлена $g(x - p_{\max} - eps)$ менші за 0,

$$g(x - p_{\max} - eps) \approx x^2 + 4.55967x + 0.19765.$$

З критерію Гурвіца отримуємо, що всі дійсні частини менші за 0. Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий. Максимальна дійсна частина власних чисел

$$\text{матриці } A \text{ дорівнює } \frac{\sqrt{109} - 17}{2}, \text{ а матриці } B \text{ дорівнює } (\sqrt{5} + 3).$$

Їх сума менша за 0. Тоді за теоремою 1 нульовий розв'язок лінійного матричного рівняння (1) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Висновки. У роботі запропоновано алгебраїчний підхід до дослідження стійкості нульового розв'язку матричних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. На основі аналізу власних чисел і жорданової форми матриць сформульовано критерії асимптотичної стійкості, стійкості та нестійкості розв'язків у сенсі Ляпунова. Теоретичні результати подано у вигляді лем і теорем з доведеннями.

Запропоновано алгоритм для знаходження максимальної дійсної частини коренів характеристичних многочленів із використанням критерію Гурвіца. Також розроблено метод для обчислення всіх коренів многочлена з урахуванням їх кратностей і структури жорданових клітин. Роботу алгоритмів проілюстровано числовими прикладами, що підтверджують їх ефективність.

Таким чином, у роботі побудовано цілісний підхід до аналітичного та чисельного дослідження стійкості для широкого класу лінійних матричних систем, який може бути використаний у подальших теоретичних і прикладних дослідженнях.

Список літератури

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К. : Київський університет. – 2008. – 383 с.
2. Башняков О. М., Пічкур В. В. Задача синтезу в теорії керування. – К. : Сталь, 2012. – 116 с.
3. Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь. – К. : Київський університет, 2023. – 367 с.
4. Bertsekas D. Dynamic programming and optimal control. – Belmont, Massachusetts : Athena Scientific, 2005. – 281 p.
5. Khalil H. K. Nonlinear systems. – NJ : Prentice Hall, 2002. – 766 p.
6. Kurzhanski A., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes : Theory and Computation. – Boston : Birkhäuser, 2014. – 457 p.
7. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data. – River Publishers, 2021. – 224 p.
8. Reid W. T. Riccati Differential Equations. – Academic Press, 2012. – 226 p.
9. Barbu V. Differential Equations. – Springer, 2016. – 224 p.

References (transliterated)

1. Bashniakov O. M., Harashchenko F. H., Pichkur V. V. *Praktychna stiykist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical stability, evaluations and optimization]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2008. 383 p.
2. Bashniakov O. M., Pichkur V. V. *Zadacha synthezu v teoriiy keruvannya* [The synthesis problem in control theory]. Kyiv, Stal' Publ., 2012. 116 p.
3. Pichkur V. V., Kapustian O. V., Sobchuk V. V. *Stiykist' ta atraktory evoliutsiynykh rivnyan'* [Stability and attractors of evolutionary equations]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2023. 367 p.
4. Bertsekas D. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont, Massachusetts, Athena Scientific, 2005. 281 p.
5. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. NJ, Prentice Hall, 2002. 766 p.
6. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes : Theory and Computation*. Boston, Birkhäuser, 2014. 457 p.
7. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. *Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data*. River Publishers, 2021. 224 p.
8. Reid W. T. *Riccati Differential Equations*. Academic Press, 2012. 226 p.
9. Barbu V. *Differential Equations*. Springer, 2016. 224 p.

Надійшла (received) 16.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Денисов Костянтин Ігорович – студент першого курсу магістратури та інженер кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Denysov Kostiantyn Ihorovich – first-year Master's student of the Department of Complex Systems Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Н. Ф. ДИМИТРІЄВА

МОДЕЛЮВАННЯ ВИХРОВОЇ СТРУКТУРИ ВСЕРЕДИНИ ВЕНТИЛЬОВАНОЇ КАВЕРНИ

Дана робота присвячена проблемі моделювання примусово вентильованої газоподібної каверни в потоці рідини. Актуальність дослідження обумовлено необхідністю розвитку методів керування потоком з метою зниження опору тертя. Аналіз літературних джерел показав, що внутрішня структура течії всередині каверни, яка визначає її форму, розмір та стійкість, залишається маловивченою. Запропоновано методику чисельного моделювання нестационарної тривимірної двофазної течії в програмному пакеті з відкритим вихідним кодом OpenFoam. Було використано модель interFoam для двох нестисливих суцільних середовищ без фазового переходу, яка базується на підході Volume of Fluid (VOF). Розрахункову сітку побудовано методом покрокового подрібнення комірок з використанням утиліти snappyHexMesh для генерації тривимірної неструктурованої сітки з переважанням гекса-елементів, що враховує дрібномасштабні структури течії в зоні фазового переходу та поблизу обтічного тіла. Результати розрахунків показали якісну узгодженість з теоретичними та експериментальними даними. Описано складну вихрову структуру всередині вентильованої порожнини. Виділено три зони: постійного тиску, в'язкої дифузії та двофазного шару змішування. Виявлено, що на відміну від парової суперкаверни за стійкою частиною надлишки повітря утворюють бульбашковий слід. Було проведено аналіз впливу геометричних та динамічних параметрів на формування та розвиток повітряної каверни, її розмір, форму та стійкість. Виявлено, що довжини зон каверни залежать від швидкості основного потоку рідини та витрати газу, що нагнітається, а товщина каверни визначається діаметром кавітатора. Показано, що за рахунок штучної вентиляції подовжується і підтримується зона постійного тиску.

Ключові слова: гідродинаміка, двофазна течія, суперкавітація, порожнина, чисельне моделювання, OpenFoam, snappyHexMesh, метод об'єму рідини (VOF).

N. F. DIMITRIEVA

MODELING OF THE VORTEX STRUCTURE INSIDE A VENTILATED CAVITY

This work is devoted to the problem of modelling a forcibly ventilated gaseous cavity in a liquid flow. The relevance of the study is due to the need to develop flow control methods in order to reduce drag. An analysis of literary sources showed that the internal structure of the flow inside the cavity remains poorly understood. This determines its shape, size and stability. A method for numerical modeling of unsteady 3D – two-phase flow in the open-source software OpenFoam is proposed. The interFoam model was used for two incompressible fluids without phase transition. The mathematical modeling is based on the Volume of Fluid (VOF) approach. The computational mesh was constructed using the stepwise cell refinement method using the snappyHexMesh utility. The three-dimensional unstructured mesh consists mainly of hexa-elements. This takes into account small-scale flow structures in the phase transition zone and near the streamlined body. The calculation results showed qualitative agreement with theoretical and experimental data. A complex vortex structure inside a ventilated cavity is described. Three zones are distinguished: constant pressure, viscous diffusion, and two-phase mixing layer. It was found that, unlike a steam supercavity, excess air behind the stable part forms a bubble trail. An analysis of the influence of geometric and dynamic parameters on the formation and development of an air cavity, its size, shape, and stability was conducted. It was found that the lengths of the cavity zones depend on the velocity of the main fluid flow and the flow rate of the injected gas, and the thickness of the cavity is determined by the diameter of the cavitator. It has been shown that the constant pressure zone is extended and maintained due to forced ventilation.

Key words: fluid dynamics, two-phase flow, supercavitation, cavity, vortex, numerical simulation, OpenFoam, volume of fluid (VOF) method.

Вступ. Проблема *суперкавітації* як *методу керування потоком* відома з середини ХХ століття [1]. Суперкавітація – це, по суті, процес утворення окремої газової *бульбашки (порожнини)* за обтічним об'єктом. Явище природної *гідродинамічної кавітації* має локальний характер і виникає лише там, де є особливі умови для випаровування рідини. Такою умовою може бути, наприклад, локальне зниження тиску в рідині зі збільшенням швидкості за обтічним тілом. Якщо тіло розмістити за *кавітатором*, між твердою поверхнею та рідиною створюється газоподібний прошарок. Оскільки густина і в'язкість у такому газоподібному шарі значно нижчі, ніж у воді, можна досягти зменшення опору тертя.

Природну кавітацію важко контролювати при *нестационарному русі* обтічного тіла. Щоб створити та підтримувати стабільність каверни, повітря штучно вдувається всередину порожнини.

На сьогодні накопичено великий досвід досліджень у галузі суперкавітації [2, 3]. Необхідно відзначити роль команди академіка НАН України Г. В. Логвиновича, яка зробила значний внесок у теоретичне та експериментальне вивчення суперкавітації [3 – 6]. Комплексний підхід дозволив як розробити *експериментальну методологію*, так і побудувати *аналітичні та емпіричні моделі розрахунку суперкаверни в реальній рідині*.

Однак, внутрішня структура потоків усередині каверни, яка визначає її форму, розмір та стійкість у потоці, залишається маловивченою. Дана робота присвячена вивченню складних вихрових течій всередині каверни та впливу параметрів інжекції на перебудову вихрової структури.

На сьогоднішній день існує багато підходів до моделювання двофазних потоків. Однак, дана проблема залишається однією з найскладніших в *обчислювальній гідродинаміці*. Складна система рівнянь, що враховує зовнішні сили та міжфазні переходи, вимагає точних методів розв'язку та значної обчислювальної потужності.

В даній роботі запропоновано використовувати *підхід об'єму рідини (VOF – volume of fluid)*. Попередні розрахунки двофазних рідин для різних прикладних задач показали, що VOF забезпечує простий та економічний метод виявлення вільних поверхонь у 3D – сітках [7, 8].

Попередні дослідження природної суперкавітації. Було проведено тестові розрахунки утворення парової каверни в рідині, що рухається, з використанням *чисельної моделі InterPhaseChangeFoam* відкритого пакету

прикладних програм OpenFOAM [9].

Суперкаверна має кінцевий розмір, який головним чином залежить від швидкості основної течії рідини при фіксованому розмірі кавітатора. Водяна пара з каверни не відноситься у слід, тому що парова порожнина існує виключно в зоні низького тиску згідно з фазовою діаграмою води. Всередині порожнини в сліді за тілом спостерігається класична замкнена система вихорів, як показано на рис. 1. Зворотний потік обмежує довжину порожнини.

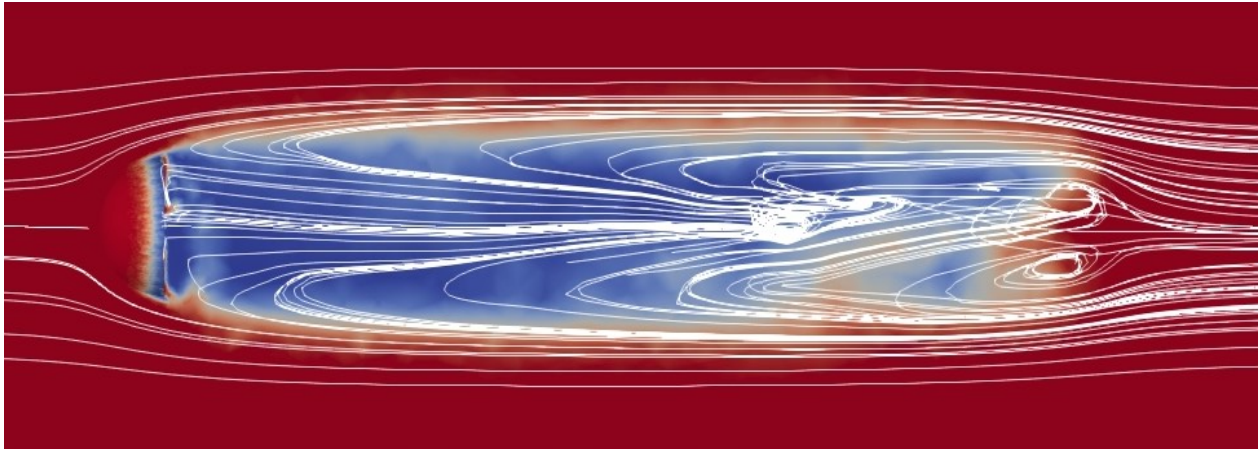


Рис. 1 – Лінії течії в центральному перерізі парової суперкаверни за швидкості $U_w = 20$ м/с (синій колір – повітря, червоний – вода, білий – лінії течії).

За низької швидкості потоку впливом випаровування рідкої фази можна нехтувати у зв'язку з відсутністю умови фазового переходу. Також попередні розрахунки вентильованої порожнини показали, що внесок стисливості та турбулентної моделі в систему визначальних рівнянь був незначним в діапазоні досліджуваних вхідних параметрів [8]. Додавання додаткових рівнянь лише ускладнило розрахунки, але не вплинуло на отримані результати.

Нижче представлено моделювання порожнини з примусовою штучною вентиляцією без фазового переходу в нестисливій рідині.

Математична модель. Досліджується двофазне нестисливе середовище вода-повітря в нестационарній тривимірній постановці.

Метод Volume of Fluid (VOF) використовується для вирішення задачі двофазного потоку [7]. Два середовища, що не змішуються, вважаються однією ефективною рідиною у всій розрахунковій області. Математичне моделювання задачі засноване на системі рівнянь механіки нестисливої рідини, яка включає рівняння нерозривності, Нав'є – Стокса, дифузії об'ємної частки фаз:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_{\sigma i}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

де $i, j = 1, 2, 3$; u_i – компонента поля швидкості; p – тиск; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; t – час; густина ρ розраховується як середньозважене значення на основі розподілу фазової частки (концентрації) рідини:

$$\rho = \alpha \rho_w + (1 - \alpha) \rho_a.$$

Тут ρ_w – густина води, ρ_a – густина повітря. Поверхневий натяг $f_{\sigma i}$ моделюється як поверхнева сила [10], яка розраховується наступним чином:

$$f_{\sigma i} = \sigma \kappa \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \quad \kappa = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \alpha / x_i}{|\partial \alpha / x_i|} \right),$$

де σ – константа поверхневого натягу; κ – кривизна поверхні розділу фаз [11].

Фазова частка α визначається у всіх комірках розрахункової сітки наступним чином: $\alpha = 1$, якщо локальна комірка повністю зайнята водою, $\alpha = 0$ – для повітря. Окремі комірки розрахункової сітки зі значенням α в діапазоні від 0 до 1 містять в собі вільну поверхню розділу фаз. Одним із найважливіших питань чисельного моделювання течій із вільною поверхнею з використанням підходу VOF є збереження фазової частки. Точний роз-

рахунок розподілу фазової частки має вирішальне значення для правильної оцінки кривизни поверхні. Необхідно визначити силу поверхневого натягу та відповідний градієнт тиску на вільній поверхні.

Таким чином, метод VOF забезпечує простий та економічний спосіб відстеження вільних меж.

Чисельна модель. Чисельне моделювання було виконано з використанням програмного пакету з відкритим вихідним кодом OpenFOAM методом скінченних об'ємів. Для розв'язання даної задачі було застосовано чисельну модель interFoam пакету OpenFOAM, що відповідає системі рівнянь (1 – 3) для двох нестисливих, ізотермічних середовищ без фазового переходу. Основною перевагою обраної моделі є можливість отримати прийнятні результати навіть із грубою сіткою [10].

Розрахункова область має розміри $30 \times 30 \times 110$ мм. На відстані 15 мм від початкової ділянки розташоване напівсферичне тіло (кавітатор) діаметром $d = 5$ мм. Було використано методику поетапного згущення *snappyHexMesh*, що призначена для автоматичної генерації тривимірних неструктурованих сіток [12]. На першому етапі було побудовано фонову гексадральну структуровану сітку з використанням утиліти *blockMesh*. Далі сітку було наближено до геометричної поверхні за допомогою ітераційного покращення фонові сітки та підгонки отриманих розщеплених гексаелементів. На наступному кроці проводиться додаткове розбиття елементів в заданих особливих областях, в результаті чого отримуємо «ступінчасту» сітку.

В побудованій розрахунковій сітці враховано дрібномасштабні елементи течії в зоні фазового переходу та поблизу обтічного тіла (рис. 2). Тривимірна сітка складається з близько $2,5 \cdot 10^6$ комірок, 98 % з яких є гексаелементами. Мінімальна комірка має об'єм порядку 10^{-5} мм³.

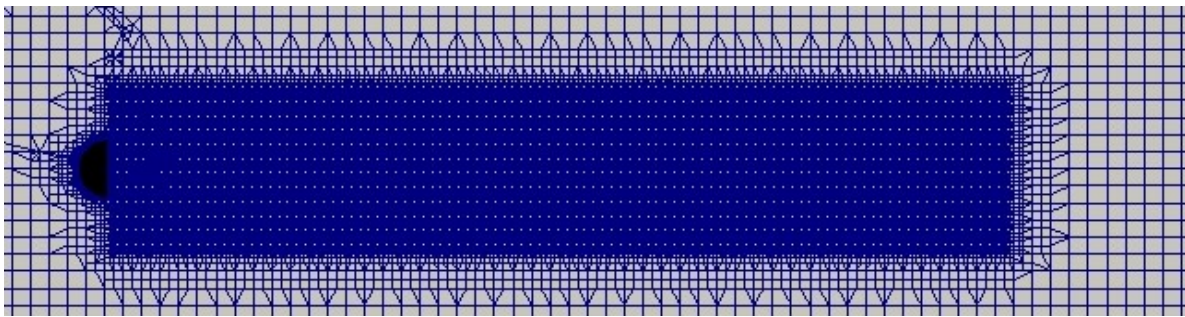


Рис. 2 – Розрахункова сітка.

На вході в розрахункову область було задано сталу швидкість рідини U_w , а на твердій стінці кавітатора – умову прилипання. Що стосується тиску, то на стінці кавітатора використовувалася гранична умова *fixedFluxPressure*, що є більш прийнятним, ніж стандартний *zeroGradient*, коли рівняння включають додаткові сили, такі як поверхневий натяг. Тиск на виході визначається нульовим.

У початковий момент часу $t = 0$ в усій розрахунковій області, за винятком зони вдуву повітря, задається рідка фаза $\alpha = 1$. Параметри вдуву було задано за допомогою утиліти попередньої обробки *setFields*. На задній пласкій стінці напівсфери було визначено отвір площею $S = 4$ мм², де задавалась відсутність рідкої фази $\alpha = 0$ і постійна швидкість повітря U_a . Використовуючи утиліту *setFields*, не було потреби перебудовувати сітку при зміні параметрів отвору.

Результати розрахунків. Чисельні результати показали, що в сліді за тілом утворюється стійка порожнина. Отримано гарну узгодженість з експериментальними даними [3, 12]. Результати розрахунків підтвердили, що стійкість форми вентиляваної каверни залежить від швидкості навколишньої рідини та витрати повітря. Відміну від парової порожнини за стійкою частиною надлишки повітря утворюють бульбашковий слід у зв'язку з відсутністю фазового переходу в системі вода-повітря.

В рамках даної роботи було проведено аналіз впливу геометричних та динамічних параметрів на формування та розвиток повітряної каверни. Товщина каверни залежить від діаметра кавітатора та не залежить від діаметра отвору для видування. Зменшення швидкості вдуву впливає на довжину двофазної кормової частини каверни і її стійкість. При збільшенні витрати газу удвічі довжина суцільної і двофазної частин каверни зростає майже у півтора рази. При цьому максимальний діаметр каверни практично не змінюється і дорівнює приблизно $1,35d$.

Більш детальне вивчення внутрішньої структури течії усередині порожнини виявило складну вихрову систему. На рис. 3 показана миттєва вихрова структура в центральному поздовжньому перерізі. Газоподібна фаза показана синім кольором, рідка – червоним, а лінії течії – білим.

Розвинену порожнину великої витягнутості можна умовно поділити на три зони. Перша зона досить чітко визначається межею молекулярного шару міжфазної поверхні повітря-вода. В центрі каверни спостерігається струмінь, довжина і діаметр якого залежать від умов вдуву повітря з кавітатора. Він зсуває вниз за потоком

класичну вихрову систему зі зворотним потоком в центрі, яку можна бачити в другій зоні. За рахунок в'язкої дифузії повітряна каверна заповнюється дрібними краплями води із зовнішнього потоку. Поверхня розділу фаз стає нестабільною, формуючи третю зону двофазного перемішування. Двофазний шар замикає каверну і утворює протяжний бульбашковий слід вниз за потоком.

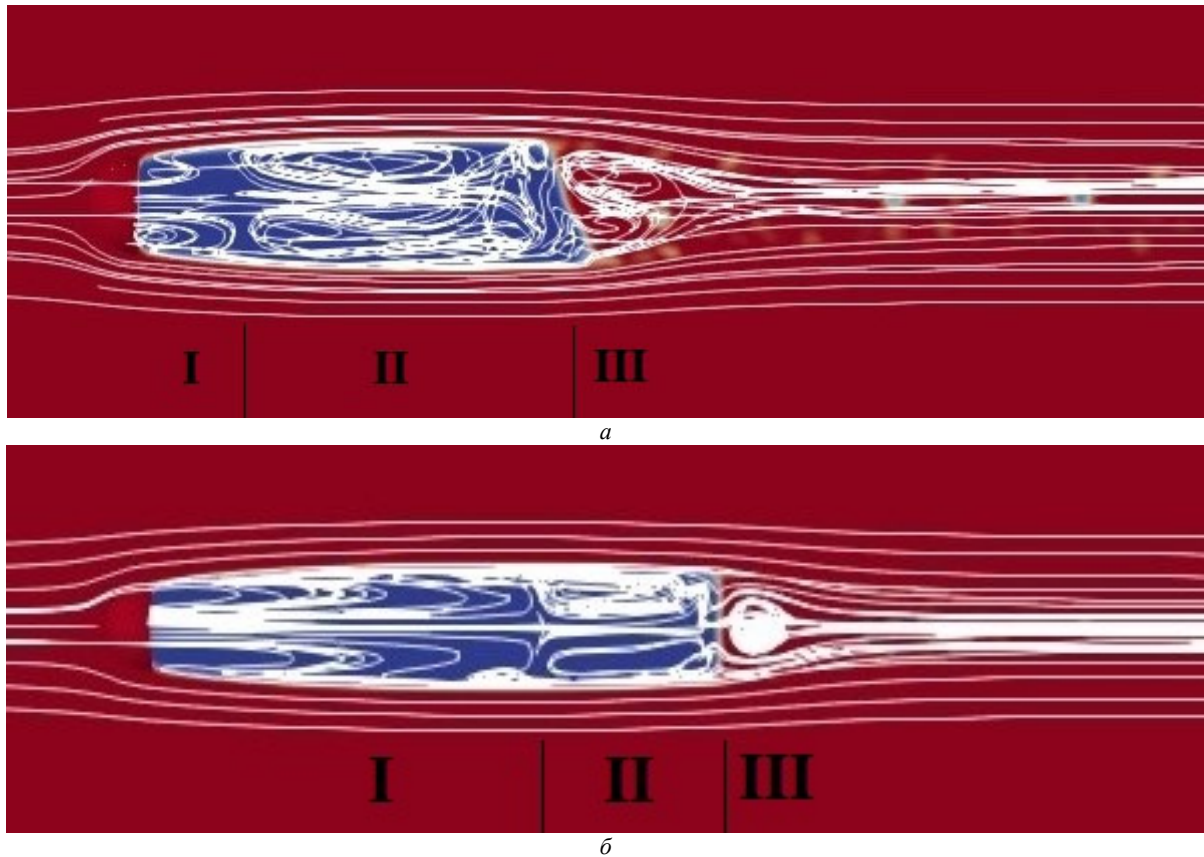


Рис. 3 – Центральний переріз вентильованої каверни залежно від швидкості вдуву повітря:
 $a - U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 1 \text{ м/с}$; $b - U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 2 \text{ м/с}$ (синій колір – повітря, червоний – вода, білий – лінії течії).

Така тризонна модель вентильованої каверни без урахування масових сил добре узгоджується з ранніми теоретичними дослідженнями Г. О. Воропаєва для осесиметричного випадку [13].

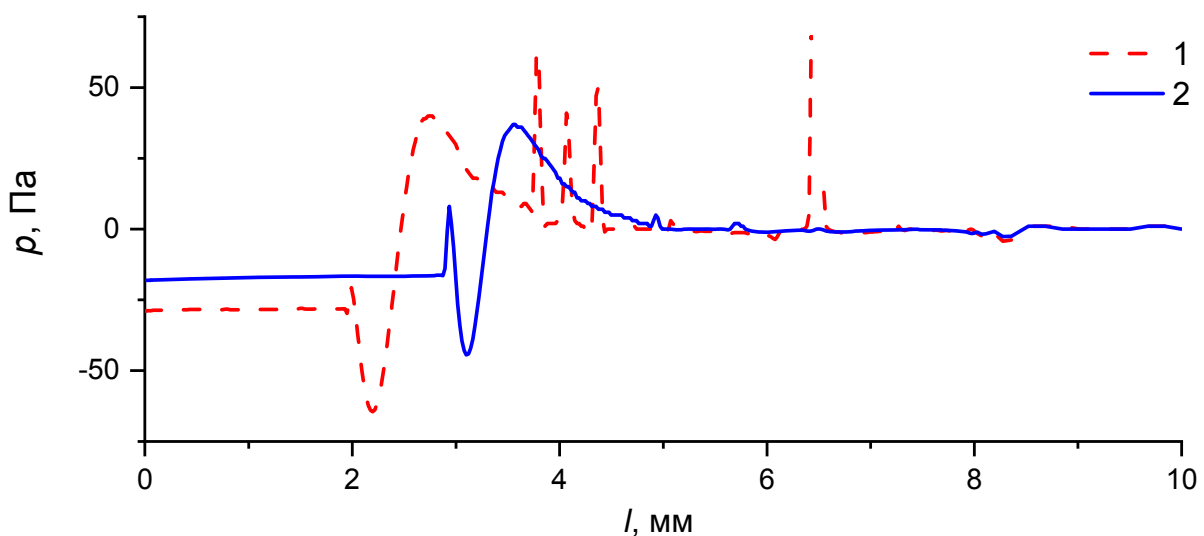


Рис. 4 – Розподіл тиску вздовж осі вентильованої каверни: 1 – $U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 1 \text{ м/с}$; 2 – $U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 2 \text{ м/с}$.

Зауважимо, що перша і третя зони, а також і двофазний бульбашковий слід не спостерігались у випадку природньої парової суперкавітації (рис. 1). Конденсація водяної пари запобігає формуванню газомісткого сліду вниз за потоком.

Рис. 4 ілюструє розподіл тиску вздовж поздовжньої осі за різних значень швидкості вдування повітря U_a . Результати розрахунків показують, що у першій і другій зонах каверни спостерігається постійний тиск. Нижче за потоком в третій зоні значення тиску різко змінюється. Також можна бачити розривну структуру профілю тиску в зонах розташування бульбашок в сліді за каверною.

На рис. 5 представлено поздовжню компоненту швидкості у центральному перерізі, що також ілюструє внутрішню структуру вентильованої повітряної порожнини. Можна бачити три чітко виражені зони, які було проілюстровано на рис. 2.

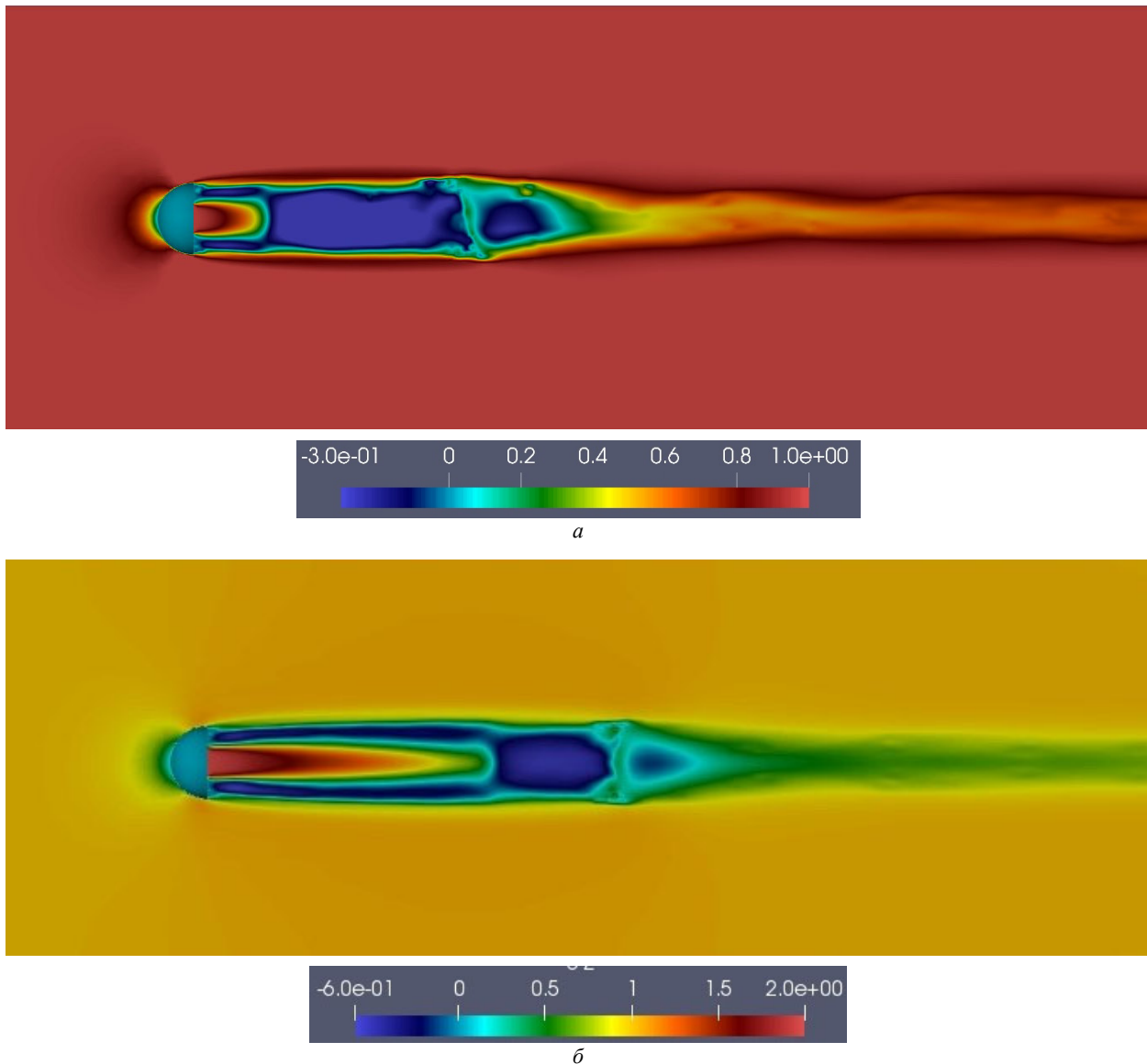


Рис. 5 – Поздовжня компонента швидкості в центральному перерізі вентильованої каверни:
 $a - U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 1 \text{ м/с}$; $b - U_w = 1 \text{ м/с}, U_a = 2 \text{ м/с}$.

При постійному тиску всередині каверни частина об'єму повітря залучається до руху навколишньої рідини і відноситься потоком в задню частину порожнини. Там уздовж осі каверни формується поворотний струмінь, що утворює циркуляційну вихрову зону. Така структура течії газу в каверні можлива, коли товщина внутрішнього примежового шару істотно менша за радіус каверни та відсутній масообмін через поверхню розділу фаз.

Висновки. Таким чином, у даній роботі запропоновано та успішно реалізовано методику чисельного моделювання нестационарної тривимірної двофазної течії в програмному пакеті з відкритим вихідним кодом OpenFoam. Отримано гарну узгодженість з теоретичними та експериментальними даними.

Проаналізовано складну вихрову структуру всередині вентильованої каверни. Виділено три зони, розміри яких залежать від швидкості основного потоку рідини та витрати газу, що нагнітається. Таким чином, за рахунок штучної вентиляції подовжується і підтримується зона постійного тиску.

Список літератури

1. Tulin M. P. Supercavitating flows. Small perturbation theory // *Journal of Ship Research*. – 1964. – Vol. 8. – P. 16 – 37.
2. Franc J.-P., Michel J.-M. Supercavitation // In: *Fundamentals of Cavitation. Fluid Mechanics and Its Applications*. – Dordrecht : Springer, 2005. – Vol. 76. – P. 97 – 130. DOI: 10.1007/1-4020-2233-6.
3. Nesteruk I. Supercavitation: Advances and Perspectives. A collection dedicated to the 70th jubilee of Yu. N. Savchenko. – Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. – 230 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23656-3.
4. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. Про методи розрахунку форми тонких осесиметричних каверн // *Гідромеханіка*. – 1975. – Т. 32. – С. 47 – 54.
5. Savchenko Yu., Semenenko V., Savchenko G. Peculiarities of supercavitating vehicles' maneuvering // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. – 2019. – Vol. 46. – № 4. – P. 309 – 323. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v46.i4.30.
6. Semenenko V., Moroz V., Kochin V., Naumova O. Dynamics of supercavitating vehicles with cone cavitators // *Mechanics and Advanced Technologies*. – 2022. – Vol. 6. – № 1. – P. 85 – 95. DOI: 10.20535/2521-1943.2022.6.1.252889.
7. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // *Journal of Computational Physics*. – 1981. – Vol. 39. – № 1. – P. 201 – 225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
8. Koval S. O., Dimitrieva N. F., Voropaiev G. O. Calculation of a Ventilated Cavity in OpenFOAM. In *Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics*, ed. D. Šimurda and T. Bodnár. – Prague : Institute of Thermomechanics AS CR, 2023. – P. 88 – 95. DOI: 10.14311/TPFM.2023.013.
9. Димитрієва Н. Ф., Ворopaєв Г. О., Фаль В. О. Методика розрахунку утворення парової каверни за обтічним тілом // *Тези сьомої міжнародної науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка»*. – Київ : Інститут гідромеханіки НАН України, 2020. – С. 27 – 28.
10. Deshpande S. S., Anumolu L., Trujillo M. F. Evaluating the performance of the two-phase flow solver interFoam // *Computational science & discovery*. – 2012. – Vol. 5. – № 1. – P. 014016. DOI: 10.1088/1749-4699/5/1/014016.
11. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // *Journal of Computational Physics*. – 1992. – Vol. 100. – № 2. – P. 335 – 354. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y.
12. Ворopaєв Г. О., Коробов В. І., Димитрієва Н. Ф. Моделювання вентильованої каверни за обтічним тілом // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2021. – Т. 8. – № 1. – С. 73 – 78. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.09.
13. Ворopaєв Г. О. В'язке втягнення газу у вентильованій каверні заданої форми // *Прикладна гідромеханіка*. – 2013. – Т. 15(87). – № 1. – С. 10 – 23.

References (transliterated)

1. Tulin M. P. Supercavitating flows. Small perturbation theory. *Journal of Ship Research*. 1964, vol. 8, pp. 16–37.
2. Franc J.-P., Michel J.-M. Supercavitation. In: *Fundamentals of Cavitation. Fluid Mechanics and Its Applications*. Springer, Dordrecht. 2005, vol. 76, pp. 97–130. DOI: 10.1007/1-4020-2233-6.
3. Nesteruk I. *Supercavitation: Advances and Perspectives. A collection dedicated to the 70th jubilee of Yu. N. Savchenko*. Berlin and Heidelberg, Springer-Verlag, 2012. 230 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23656-3.
4. Logvinovich G. V., Serebryakov V. V. Pro metody rozrakhunku formy tonkykh osesymetrychnykh kavern [The methods for the calculation of the shape of slender axisymmetric cavities]. *Gidromekhanika* [Hydromechanics]. 1975, issue 32, pp. 47–54.
5. Savchenko Yu., Semenenko V., Savchenko G. Peculiarities of supercavitating vehicles' maneuvering. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2019, vol. 46, no. 4, pp. 309–323. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v46.i4.30.
6. Semenenko V., Moroz V., Kochin V., Naumova O. Dynamics of supercavitating vehicles with cone cavitators. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2022, vol. 6, no. 1, pp. 85–95. DOI: 10.20535/2521-1943.2022.6.1.252889.
7. Hirt C. W., Nichols B. D. Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. *Journal of Computational Physics*. 1981, vol. 39, no. 1, pp. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5.
8. Koval S. O., Dimitrieva N. F., Voropaiev G. O. Calculation of a Ventilated Cavity in OpenFOAM. In *Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics*, ed. D. Šimurda and T. Bodnár. Prague: Institute of Thermomechanics AS CR, 2023, pp. 88–95. DOI: 10.14311/TPFM.2023.013.
9. Dimitrieva N. F., Voropaiev G. O., Fal V. O. Metodyka rozrakhunku utvorenniya parovoyi kaverny za obtichnym tilom [Methodology for calculating the formation of a vapor cavity behind a streamlined body]. *Tezy VII mizhnarodnoyi naukovopraktychnoyi konferentsiyi «Komp'yuterna hidromekhanika»* [Materials of the 7th International Conference "Computational Hydromechanics"]. Kyiv, Instytut Hidromekhaniky NAN Ukrainy Publ., 2020. pp. 27–28.
10. Deshpande S. S., Anumolu L., Trujillo M. F. Evaluating the performance of the two-phase flow solver interFoam *Computational science & discovery*. 2012, vol. 5, no 1, P. 014016. DOI: 10.1088/1749-4699/5/1/014016.
11. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*. 1992, vol. 100, no. 2, pp. 335–354. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y.
12. Voropaiev G. O., Korobov V. I., Dimitrieva N. F. Modelyuvannya ventyl'ovanoi kaverny za obtichnym tilom [Modeling of a ventilated cavity behind a streamlined body]. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 2021, vol. 135, no. 1, pp. 73–79. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.09.
13. Voropaiev G. O. V'язke vtyagnennya gazu u ventyliovaniy kaverni zadanoyi formy [Viscous entrainment of gas in a ventilated cavity of the prescribed shape]. *Prykladna gidromekhanika* [Applied Hydromechanics]. 2013, vol. 15(87), no. 1, pp. 10–23.

Надійшла (received) 15.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Димитрієва Наталія Федорівна – кандидат фізико-математичних наук, учений секретар Інституту гідромеханіки, Національна академія наук України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-18; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0957-1112>; e-mail: Dimitrieva@nas.gov.ua.

Dimitrieva Natalia Fedorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Secretary of the Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-18; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0957-1112>; e-mail: Dimitrieva@nas.gov.ua.

В. В. КУЗЬ, А. В. ШАТИРКО

АВТОМАТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МУЗИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ

У цій статті досліджується застосування перетворення Фур'є для автоматичного розпізнавання музичних інструментів в аудіозаписах. Зі зростанням складності музичних композицій та потребою в ефективній класифікації аудіо дослідження зосереджується на вилученні детальних спектральних характеристик із звукових сигналів за допомогою швидкого перетворення Фур'є (FFT). Ці характеристики включають спектральний центроїд, ширину смуги пропускання, спад, швидкість перетину нуля та кепстральні коефіцієнти Mel-Frequency (MFCC), які представляють частотні характеристики різних інструментів. Вилучені характеристики обробляються та використовуються для навчання моделей машинного навчання. Зокрема, у статті оцінюється продуктивність двох алгоритмів класифікації: методу апроксимації найближчого сусіда (ANN) та методу опорних векторів (SVM). Моделі навчаються на наборі даних коротких записів на одному інструменті та тестуються на зразках зі змішаних інструментів для оцінки можливостей узагальнення. Експериментальні результати показують, що обидві моделі можуть ефективно класифікувати інструменти з високою точністю – понад 96 % у контрольованих середовищах. Однак точність знижується у складних поліфонічних записах через перекриття частот. У дослідженні також підкреслюється роль таких бібліотек як Librosa, Numpy та Scikit-learn для попередньої обробки та навчання моделей. Результати дослідження показують, що хоча запропонований підхід не ідеально підходить для визначення інструментів в оркестрах, він є дуже ефективним у класифікації сольних інструментів і може бути поширений на такі завдання, як розпізнавання жанрів. Майбутні дослідження можуть включати методи глибинного навчання та розділення джерел звуку для покращення продуктивності в поліфонічних умовах.

Ключові слова: перетворення Фур'є, спектральні характеристики, кепстральні коефіцієнти Mel-Frequency, аналіз сигналів, обробка аудіо, машинне навчання, метод опорних векторів, метод найближчого сусіда.

V. V. KUZ, A. V. SHATYRKO

AUTOMATIC IDENTIFICATION OF MUSICAL INSTRUMENTS

This paper explores the application of the Fourier Transform for automatic musical instrument recognition in audio recordings. With the increasing complexity of musical compositions and the need for efficient audio classification, the study focuses on extracting detailed spectral features from sound signals using the Fast Fourier Transform (FFT). These features include spectral centroid, bandwidth, roll-off, zero-crossing rate, and Mel-Frequency Cepstral Coefficients (MFCCs), which represent the frequency-based characteristics of different instruments. The extracted features are processed and used to train machine learning models. Specifically, the paper evaluates the performance of two classification algorithms: Approximate Nearest Neighbor (ANN) and Support Vector Machine (SVM). The models are trained on a dataset of short mono-instrument recordings and tested on mixed-instrument samples to assess generalization capabilities. The experimental results demonstrate that both models can effectively classify instruments with high accuracy – over 96 % in controlled environments. However, the accuracy decreases in complex polyphonic recordings due to overlapping frequencies. The study also highlights the role of libraries such as Librosa, Numpy, and Scikit-learn for preprocessing and model training. The findings suggest that while the proposed approach is not ideal for overlapping instruments in orchestras, it is highly effective in solo instrument classification and can be extended to tasks like genre recognition. Future research could include deep learning techniques and sound source separation to improve performance in polyphonic settings.

Key words: Fourier transform, spectral features, Mel-Frequency Cepstral Coefficients, signal analysis, audio processing, machine learning, Support Vector Machine, Approximate Nearest Neighbor.

Вступ. Автоматична ідентифікація музичних інструментів в аудіозаписах є важливим завданням у цифровій обробці сигналів. Вона має застосування в класифікації музичних жанрів, пошуку музичної інформації та автоматичній транскрипції. Це дослідження зосереджено на використанні швидкого перетворення Фур'є (FFT) [1] для вилучення спектральних ознак та застосування методів машинного навчання для класифікації інструментів на основі їхніх аудіохарактеристик.

Ми прагнемо дослідити методи обробки та аналізу сигналів, необхідні для автоматичної ідентифікації музичних інструментів. Враховуючи певну мелодію, необхідно реалізувати програму, яка класифікуватиме музичні інструменти в ній.

Аналіз основних відомих теоретичних результатів.

Перетворення Фур'є в аналізі звукових сигналів. Перетворення Фур'є – це фундаментальний інструмент обробки сигналів, який дозволяє проводити перетворення цифрових сигналів з часової області в частотну область. Дискретне перетворення Фур'є (DFT) математично представлено як:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-2\pi i n k / N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W^{-nk}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

де $X(k)$ – представляє спектральні коефіцієнти, $x(n)$ – дискретний сигнал, а N – кількість точок перетворення. FFT – це оптимізована версія DFT, що зменшує обчислювальну складність та робить обробку в реальному часі можливою.

Спектральні характеристики для класифікації інструментів. Спектральні (частотні) характеристики отримують шляхом перетворення часового сигналу в частотну область за допомогою перетворення Фур'є [2]. Це перетворення дозволяє розкласти сигнал на його складові частини за різними частотами.

Спектральні характеристики включають: основну частоту; силу сигналу на кожній частоті; середню частоту сигналу; спектральний центроїд, потік, щільність та затухання.

Спектральний центроїд. Це величина, яка вказує, на якій частоті зосереджена енергія спектра, по суті показуючи, де розташований центр мас звуку:

$$f_c = \frac{\sum_k f(k) S(k)}{\sum_k S(k)}, \quad (2)$$

де $S(k)$ – спектральна величина елемента k , а $f(k)$ – частота елемента k .

Спектральна смуга пропускання. Спектральна смуга пропускання визначається як ширина смуги на половині точки максимуму (або повна ширина на половині максимуму) та представлена двома вертикальними червоними лініями (на наступних рис.) та λ_{SB} на осі довжин хвиль:

$$SB_p = \left(\sum_k S(k) (f(k) - f_c)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

Ширина смуги пропускання – це різниця між верхньою та нижньою частотами в неперервній смузі частот. Тут $S(k)$ – це спектральна амплітуда на частотному індексі k , $f(k)$ – частота з індексом k , а f_c – спектральний центроїд.

Спектральний контраст. Функція спектрального контрасту (SC) [3] розглядає спектральний пік та частоту спаду кожної підсмуги окремо, таким чином відображаючи відносні спектральні характеристики нижніх смуг. Спектральні піки та спади оцінюються шляхом обчислення середнього значення невеликого околу (визначеного як α) навколо максимуму та мінімуму підсмуги.

Тут k представляє смугу частот, а $x_{k,i}$ – це підсмуга аудіосигналу, упорядкована за спаданням величини магнітуди:

$$Peak_k = \log \left(\frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^{\alpha N} x_{k,i} \right), \quad Valley_k = \log \left(\frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^{\alpha N} x_{k,N-i+1} \right), \quad (4)$$

$$SC_k = Peak_k - Valley_k. \quad (5)$$

Спектральне спадання. Це міра форми сигналу, що представляє ту частоту, на якій вищі частоти падають до нуля:

$$\sum_k^{R_c} S(k) = 0.85 \sum_k S(k). \quad (6)$$

Щоб отримати його, потрібно розрахувати частку елементів у спектрі потужності, де 85 % потужності зосереджено на нижчих частотах.

Кепстральні коефіцієнти Mel-частоти (MFCC). Кепстральні коефіцієнти Mel-частоти сигналу (MFCC) – це набір ознак, які коротко описують загальну форму спектральної огинаючої. MFCC отримують шляхом взяття віконного сегмента сигналу (STFT сигналу) та відображення спектральної потужності на шкалу Mel за допомогою трикутних вікон, що перекриваються. Потім обчислюються логарифми потужностей на кожній Mel-частоті. Після цього до списку логарифмічних потужностей на Mel-частотах застосовується дискретне косинусне перетворення (DCT). MFCC – це амплітуди результуючого спектру, які лаконічно описують загальну форму спектральної кривої.

Коефіцієнт перетину нуля (ZCR). Коефіцієнт перетину нуля (ZCR) вказує на кількість перетинів сигналом горизонтальної осі. ZCR – низький для гармонійних звуків і високий для зашумлених звуків:

$$ZCR = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{I} \{ S_t S_{t-1} < 0 \}, \quad (7)$$

де S_t – сигнал довжини t , а $\mathbb{I}$ – індикаторна функція, яка дорівнює 1, якщо умова X істинна (інакше вона дорівнює 0).

Спектральний потік. Це міра того, як швидко змінюється потужність спектру сигналу, розрахована шляхом порівняння спектральної потужності одного кадру з потужністю попереднього кадру. Результат спектрального потоку через $H(x)$ в основному використовується для визначення початку гри музичного інструменту, оскільки він містить лише інформацію про збільшення енергії порівняно з попереднім кадром:

$$SF(n) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H(|X(n, k)| - |X(n-1, k)|), \quad H(x) = \frac{x + |x|}{2}. \quad (8)$$

Алгоритм класифікації інструментів. Після отримання всіх необхідних спектральних характеристик для навчання моделі ми стикаємося з останнім, найцікавішим та найскладнішим завданням – використанням алгоритму машинного навчання для навчання моделі на основі набору музичних творів [4]. З них нам потрібно виділи-

ти відповідні характеристики для порівняння з заданим аудіозаписом та класифікувати інструменти, що грають у нашій мелодії.

Однак існує багато алгоритмів машинного навчання, кожен з яких розроблений для широкого кола завдань. Вони мають різні підходи та характеристики, що роблять їх придатними для різних типів задач. Деякі зосереджені на класифікації даних, інші – на прогнозуванні або кластеризації. Деякі можуть обробляти великі набори даних, а інші більше підходять для роботи з обмеженою кількістю наборів даних. Тому важливо визначити, яка модель є оптимальною для нашого завдання з точки зору досягнення високої точності при мінімальному споживанні зусиль системи [5].

Таблиця 1 – Порівняльна таблиця точності моделей машинного навчання

hypotheses set	SVM	Softmax	GaussianNB	KNN	DT	RF
Timber	91.0	88.0	77.5	84.5	70.5	88.0
Pitch/harmony	63.5	36.5	42	55.0	44.5	55
Rhythm	15.5	14.5	14.0	8.5	6.5	6.5
Timber + Pitch/harmony	90.5	88.0	30	71.0	63.5	89.0
Timber + Rhythm	92.5	88.0	73.0	85.5	61.5	88.5
Pitch/harmony + Rhythm	64	40.5	30.0	56.0	20.0	45.5
Timber + Rhythm + Pitch/harmony	91.5	87.0	77.5	73.0	62.5	90.5

В табл. 1 наведено порівняння точності різних найбільш уживаних моделей, навчених на наборі даних, що складається з 1200 навчальних кліпів, кожен тривалістю 4 секунди [4]. Ми бачимо, що найточнішим методом є SVM, з точністю понад 90 %. Інші моделі також продемонстрували хорошу точність. Однак тривалість аудіозаписів була відносно короткою, і зі збільшенням тривалості точність може спадати.

Метод апроксимації найближчого сусіда (ANN). Цей алгоритм шукає точки, відстань яких не перевищує більше ніж коефіцієнт C від точки запиту до її найближчих сусідів. Перевага цього підходу полягає в тому, що в багатьох випадках приблизний найближчий сусід майже такий же хороший, як і точне рішення. Якщо міра відстані точно відображає сприйняття користувачем якості, невеликі відмінності у відстані не мають суттєвого значення.

Метод опорних векторів (SVM). Метод навчання з учителем, який визначає межі прийняття рішень. Точки даних, найближчі до межі прийняття рішення, називаються *опорними векторами*. Сума відстаней між опорними векторами та межею прийняття рішення називається запасом $(|w|)$. SVM прагне максимізувати запас, щоб знайти найоптимальнішу межу класифікації:

$$obj(f) = \max \frac{2}{\|w\|_2} \rightarrow \min \frac{1}{2} \|w\|_2^2, \text{ sub: } y_i (w^T x_i + b) \geq 1. \quad (9)$$

Постановка задачі класифікації музичних інструментів. Робочий процес обробки звуку включає вилучення акустичних характеристик, що стосуються заданого завдання, а потім схеми прийняття рішень, що включають виявлення, класифікацію та інтеграцію знань.

Обчислення перетворення Фур'є допомагає перетворити сигнал у частотну область.

Створення спектрограми візуалізує інтенсивність звуку з плином часу та частоти. Спектрограма представляє амплітуду сигналу або «гучність» на різних частотах з плином часу та зазвичай відображається у вигляді теплової карти.

Щоб реалізувати автоматичне розпізнавання інструментів в аудіозаписі, нам потрібно вилучити основні звукові характеристики для їх обробки нейронною мережею. Модель буде навчатися на основі певних характеристик за допомогою *бібліотек мови Python*. Для цього завдання ми використовуватимемо такі бібліотеки: *Librosa, Pandas, Numpy, Scikit-learn, Keras, Matplotlib*. Навчання моделі та аналіз даних будуть проводитися в *Google Colab* або *Jupyter Notebook*, які забезпечують інтерактивне середовище для покрокового виконання.

Ідея класифікації. Ми беремо навчальний набір даних – короткі аудіозаписи, кожен з яких містить звук лише одного інструменту. Для кожного аудіозапису генеруємо спектрограму та витягуємо всі необхідні спектральні характеристики. Використовуючи ці характеристики, навчаємо модель.

Крім того, ми вибираємо набір аудіозаписів різної тривалості для тестування, які можуть містити мелодії, що граються кількома інструментами. Далі застосовуємо нашу навчену модель до цього тестового набору та оцінюємо її точність.

Обробка аудіо. Усі необхідні інструменти Python, що використовуються в цьому дослідженні, детально описані в джерелі [6]. Спочатку нам потрібно завантажити аудіофайл з використанням бібліотеки *Librosa*:

```
import librosa
audio_data = './audio.wav'
x, sr = librosa.load(audio_data)
print(type(x), type(sr))
#<class 'numpy.ndarray'> <class 'int'>
print(x.shape, sr)
#(94316,) 22050
```

Далі, використовуючи `librosa.display.waveplot`, побудуємо діаграму форми хвилі аудіомасиву (рис. 1).

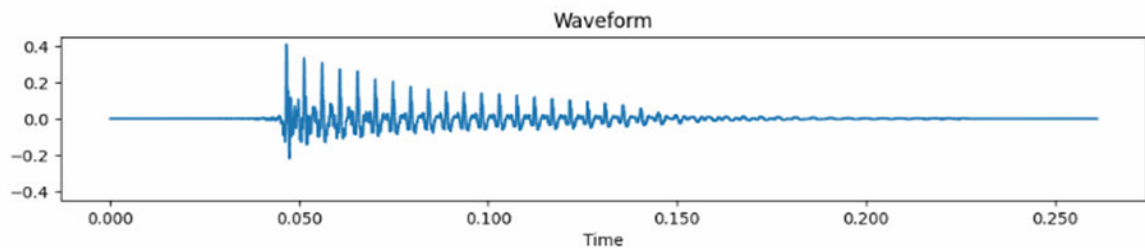


Рис. 1 – Діаграма форми хвилі аудіомасиву.

Для візуалізації спектрограми (рис. 2) аудіосигналу ми використовуємо `librosa.display.specshow`:

```
X = librosa.stft(x)
Xdb = librosa.amplitude_to_db(abs(X))
plt.figure(figsize=(14, 5))
librosa.display.specshow(Xdb, sr=sr, x_axis='time', y_axis='hz')
plt.colorbar()
```

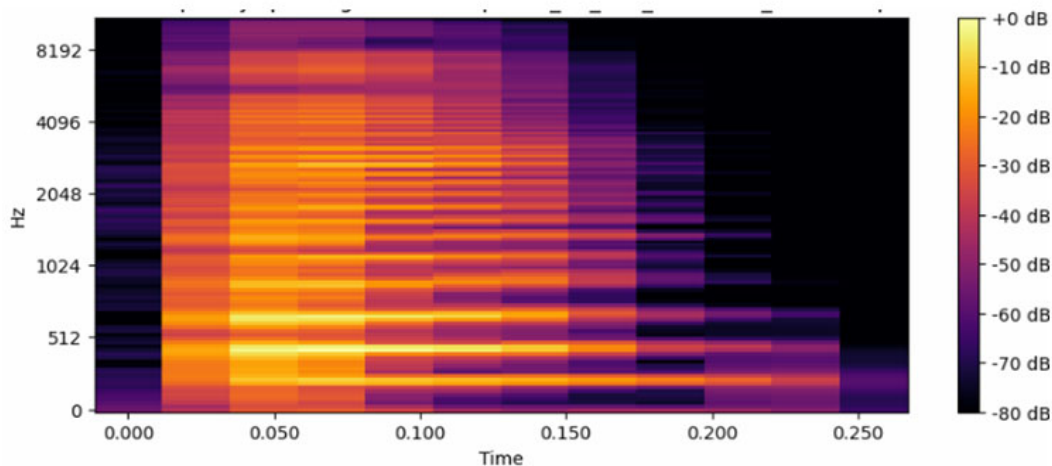


Рис. 2 – Спектрограма аудіо сигналу.

Вилучення спектральних ознак. Після отримання спектрограми наступним кроком є вилучення всіх відповідних спектральних ознак, які є важливими для подальшого аналізу та класифікації [7].

```
import sklearn
spectral_centroids = librosa.feature.spectral_centroid(x, sr=sr)[0]
spectral_centroids.shape(775,)
plt.figure(figsize=(12, 4))
frames = range(len(spectral_centroids))
t = librosa.frames_to_time(frames)

# Normalization of the spectral centroid for visualization
def normalize(x, axis=0):
    return sklearn.preprocessing.minmax_scale(x, axis=axis)

# Plotting the spectral centroid along with the waveform
librosa.display.waveplot(x, sr=sr, alpha=0.4)
plt.plot(t, normalize(spectral_centroids), color='b')
```

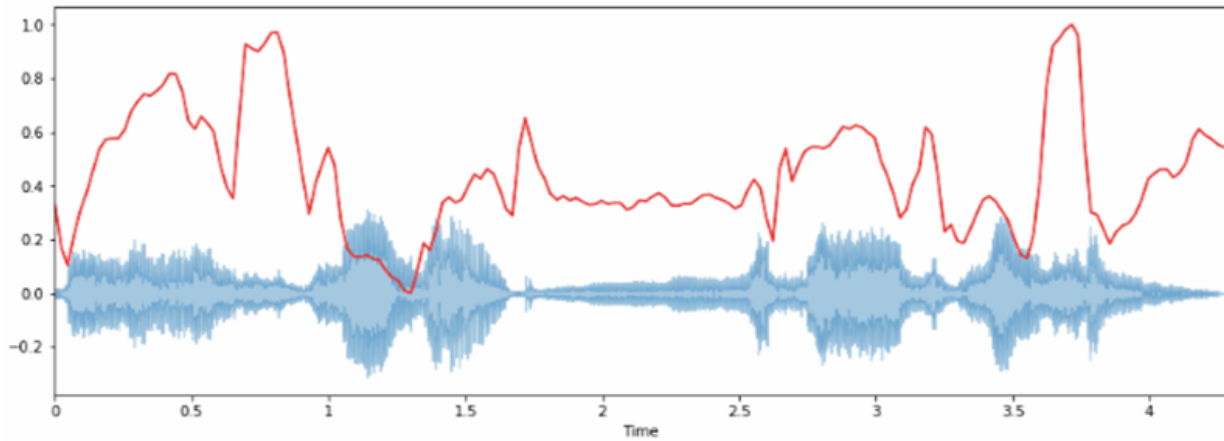


Рис. 3 – Візуалізація спектрального центроїда та звукової хвилі.

Подібний підхід з використанням бібліотеки Librosa дозволяє нам витягти всі інші раніше означені необхідні спектральні характеристики (рис. 4 – рис. 6).

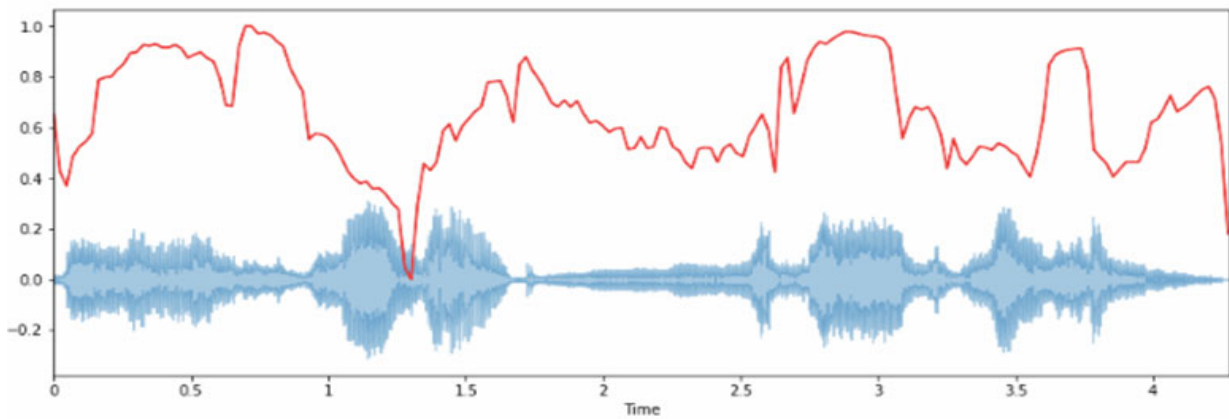


Рис. 4 – Діаграма спадання частоти.

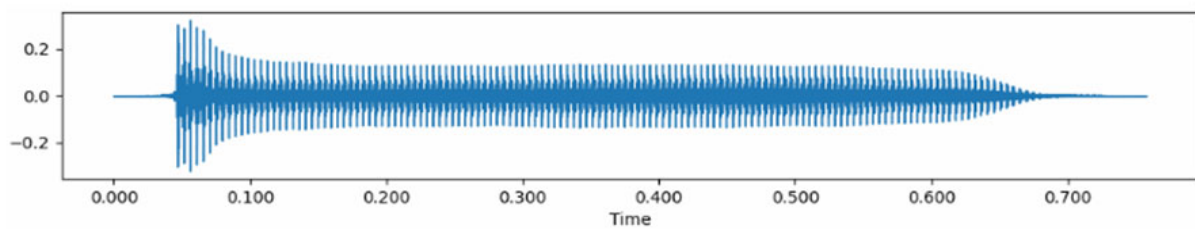


Рис. 5 – Графік частоти перетину нуля.

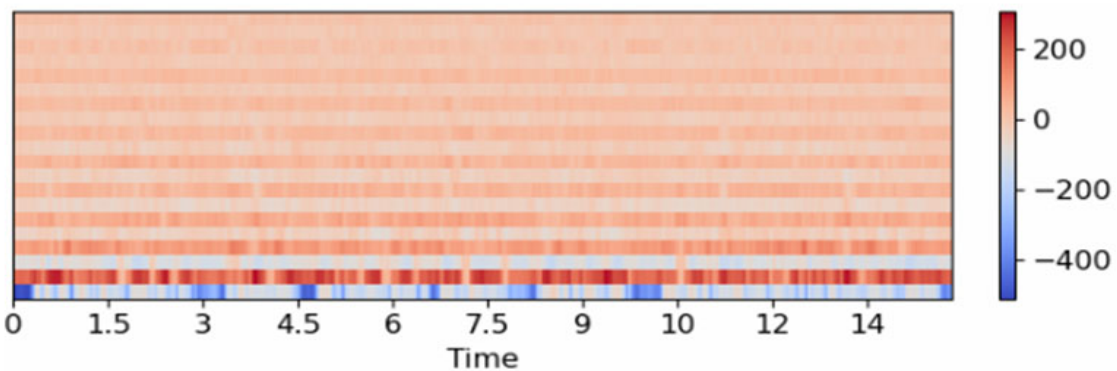


Рис. 6 – Кепстральні коефіцієнти Mel-частоти (MFCC).

Таким чином, ми витягуємо спектральні ознаки з кожного аудіозапису в наборі даних, включаючи спектра-

льний центроїд, MFCC, частоту перетину нуля, спектральний спад та спектральне згасання. Після отримання цих ознак ми конвертуємо дані у спектрограми у форматі PNG та зберігаємо всі витягнуті ознаки у файлі CSV, розділяючи дані на навчальні та тестові набори.

Після підготовки ознак наступним кроком є побудова наших моделей.

Побудова моделей. Модель апроксимації найближчого сусіда (ANN):

```
model = Sequential()
model.add(layers.Dense(256, activation='relu', input_shape=(X_train.shape[1],)))
model.add(layers.Dense(128, activation='relu'))
model.add(layers.Dense(64, activation='relu'))
model.add(layers.Dense(10, activation='softmax'))
model.compile(optimizer='adam',
              loss='sparse_categorical_crossentropy',
              metrics=['accuracy'])

classifier = model.fit(X_train,
                      y_train,
                      epochs=100,
                      batch_size=128)
```

Навчання проводилося протягом 100 епох з використанням не дуже потужної обчислювальної системи. Кожен навчальний аудіозапис містить звук лише одного інструменту: саксофон, труба, скрипка, віолончель, флейта або духовий інструмент (гобой).

```
# SVM
#model_svm = LinearSVC(random_state=0, tol=1e-5, max_iter=5000)
svcclassifier = SVC(kernel='rbf', C = 10.0, gamma=0.1)

svcclassifier.fit(train_set, train_classes);

joblib.dump(svcclassifier, 'trainedSVM.joblib')

predicted_labels = svcclassifier.predict(test_set)
```

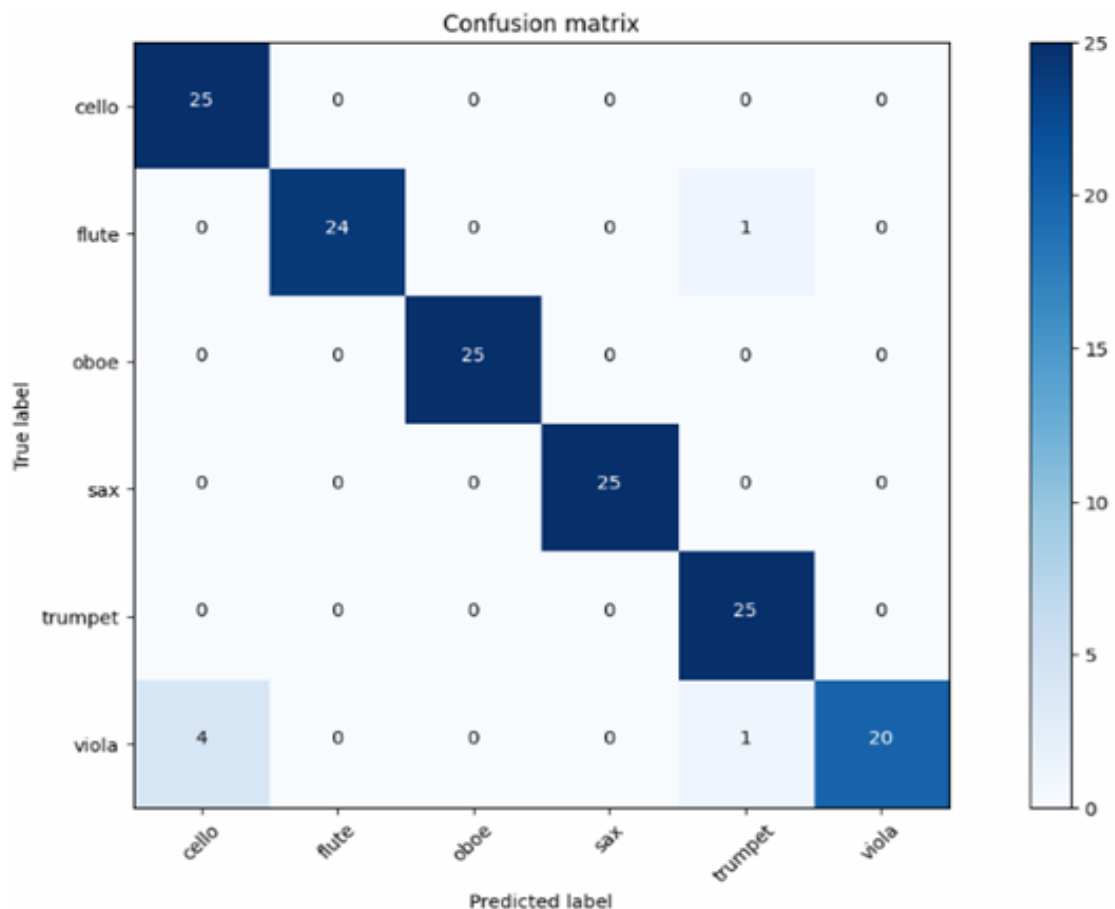


Рис. 7 – Матриця невідповідностей класифікації музичних інструментів, отримана за допомогою штучних нейронних мереж.

Після цього ми можемо перевірити точність отриманої нами класифікації, переглянувши матрицю невідповідностей (рис. 7). Переглянувши CSV-файл з результатами, ми бачимо, що точність становить 96,67 %.

Аналогічний числовий експеримент на цих же *даних* проведено із застосуванням методу опорних векторів (SVM). Результати його роботи продемонстровані матрицею невідповідностей класифікації, яка співпала з показаною на рис. 7. Точність застосування цієї моделі також близька до ANN й склала 96 %.

Отримані результати. Процес впровадження та навчання моделей штучної нейронної мережі (ANN) та методу опорних векторів (SVM) з вилученими спектральними ознаками був вирішальним кроком в оцінці потенціалу машинного навчання для класифікації музичних інструментів. Після оцінювання обидві моделі продемонстрували високу точність у контрольованих умовах, де аудіозаписи мали мінімальне перекриття звуків від кількох інструментів та мали відносно коротку тривалість. Цей висновок підкреслює ефективність підходу у випадку, коли дані добре відповідають можливостям моделі.

У контрольованих умовах спектральні ознаки, вилучені з аудіо, такі як мел-частоти (MFCC), спектральний центроїд та спектральний потік, виявилися надійними індикаторами для виявлення різних музичних інструментів. Процес навчання був ефективним, і моделі ANN та SVM показали багатообіцяючі результати, точно класифікуючи записи у випадку одного інструменту.

Однак, при переході від контрольованих середовищ до більш складних, реальних оркестрових записів, де кілька інструментів часто перекриваються, моделі зіткнулися зі значними труднощами. Спектральні ознаки, хоча й залишалися інформативними, були недостатніми для розрізнення інструментів, коли їхні звуки зливалися в межах однакових частотних діапазонів. Це обмеження підкреслює складність обробки поліфонічного аудіо, де одночасно присутні кілька джерел звуку. Хоча обидві моделі все ще досить добре працювали за цих умов, їхня точність та надійність помітно постраждали.

Незважаючи на ці ускладнення, підхід залишається цінним для завдань класифікації аудіо, особливо в простіших випадках, таких як класифікація за жанрами або ідентифікація сольних інструментів. У цих застосуваннях спектральні характеристики ефективно фіксують різні звуки, і моделі можна навчити класифікувати їх з високою точністю. Простота методу в поєднанні з його ефективністю в контрольованих умовах робить його доступним інструментом для різних застосувань аналізу аудіо.

Перспективи подальших досліджень. На завершення, застосування спектрального аналізу в поєднанні з алгоритмами машинного навчання, такими як ANN та SVM, забезпечує міцну основу для завдань класифікації, пов'язаних з музикою. Поточний підхід демонструє великі перспективи для контрольованих налаштувань, але потребує подальшого вдосконалення для ефективної обробки складних поліфонічних та аудіосценаріїв з перекриттям звуків різноманітних інструментів. Подальша робота повинна бути зосереджена на покращенні здатності моделей одночасно обробляти кілька інструментів, потенційно включаючи передові методи, такі як розділення джерел або методи глибокого навчання, спеціально розроблені для аналізу поліфонічного звуку.

Список літератури

1. *Заболотний С. В.* Цифрове оброблення сигналів : Посібник для студентів напряму підготовки 6.050901 "Радіотехніка" усіх форм навчання. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 119 с.
2. *Digital Signal Processing A Practical Guide for Engineers and Scientists by Steven W. Smith.* – Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
3. *Jiang Dan-Ning, Lu Lie, Zhang Hong-Jiang, Tao Jian-Hua, Cai Lian-Hong.* Music type classification by spectral contrast feature In Proceedings // IEEE International Conference on Multimedia and Expo. – 2002. – P. 113 – 116.
4. *Tzanetakis G., Cook P.* Musical genre classification of audio signals // In IEEE Transactions on Speech and Audio Processing. – 2002. – P. 293 – 302.
5. *Ivanenko A., Shatyrko A.* Application for detecting musical instruments in an orchestra // MSTIoE 2024-11. 11-та Східно-Європейська конференція «Математичні та програмні технології Internet of Everything» (11 – 12.04.2024, Київ). – Київ, 2024. – С. 48 – 49.
6. *José Unpingco.* Python for Signal Processing. – San Diego, CA, USA, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. DOI 10.1007/978-3-319-01342-8.
7. *Lerch Alexander.* An Introduction to Audio Content Analysis: Applications in Signal Processing and Music Informatics // IEEE Press/Wiley. – 2012. DOI 10.1002/9781118393501.

References (transliterated)

1. *Zabolotniy S. V.* Tsyfrove obroblyennya sygnaliv : posibnyk dlya studentiv napryamu pidgotovky 6.050901 "Radiotekhnika" usikh form navchannya [Digital signal processing: A manual for students of the direction of training 6.050901 "Radio engineering" of all forms of study]. Cherkasy, ChDTU, 2010. 119 p.

2. Digital Signal Processing A Practical Guide for Engineers and Scientists by Steven W. Smith. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
3. Jiang Dan-Ning, Lu Lie, Zhang Hong-Jiang, Tao Jian-Hua, Cai Lian-Hong. Music type classification by spectral contrast feature In Proceedings. *IEEE International Conference on Multimedia and Expo*. 2002, pp. 113–116.
4. Tzanetakis G., Cook P. Musical genre classification of audio signals. In *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*. 2002, pp. 293–302.
5. Ivanenko A., Shatyрко A. Application for detecting musical instruments in an orchestra. *MSTIoE 2024-11. 11-та Skhidno-Evropeys'ka konferentsiya "Matematychni ta programni tekhnologiyi Internet of Everything" (11 – 12.04.2024, Kyiv)* [MSTIoE 2024-11. 11-та Східно-Европейська конференція «Математичні та програмні технології Internet of Everything» (11 – 12.04.2024, Kyiv)]. Kyiv, 2024, pp. 48–49.
6. José Unpingco. *Python for Signal Processing*. San Diego, CA, USA, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London. DOI 10.1007/978-3-319-01342-8.
7. Lerch Alexander. An Introduction to Audio Content Analysis: Applications in Signal Processing and Music Informatics. *IEEE Press/Wiley*. 2012. DOI 10.1002/9781118393501.

Надійшла (received) 05.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Кузь Володимир Вячеславович – магістр кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (044) 521-32-74; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0657-8091>; e-mail: vovany364n@gmail.com.

Kuz Volodymyr Vyacheslavovych – Master-student at the Department of Complex Systems Modeling Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (044) 521-32-74; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0657-8091>; e-mail: vovany364n@gmail.com.

Шатирко Андрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (044) 521-32-74; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5648-2999>; e-mail: shatyрко.a@knu.ua.

Shatyрко Andriy Volodymyrovych – Doctor of Sciences in Physical and Mathematics, Professor, Associate Professor at the Department of Complex Systems Modeling Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (044) 521-32-74; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5648-2999>; e-mail: shatyрко.a@knu.ua.

В. В. КУЗЬМЕНКО, Я. П. ТРОЦЕНКО

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ У ПЛОСКОМУ ХВИЛЕВОДІ З ВИГИНАМИ

У роботі досліджено поширення звукових хвиль у плоскому акустичному хвилеводі, що містить два вигини. Побудовано математичну модель задачі, що дозволяє проаналізувати особливості проходження акустичної хвилі крізь геометричну неоднорідність хвилеводу залежно від його геометричних та фізичних параметрів. Для моделювання акустичного поля застосовано метод часткових областей. Обчислено енергетичні коефіцієнти проникнення хвилі крізь зони неоднорідності для широкого спектру хвильових розмірів та кутів вигинів хвилеводу. Показано, що наявність вигинів призводить до істотної зміни спектральних характеристик. При хвильових розмірах, кратних половині довжини хвилі, відбувається різке зниження коефіцієнта проникнення, що пов'язано зі збудженням вищих нормальних мод у хвилеводі. У випадку, коли кут вигину перевищує 90° , амплітудно-частотна характеристика набуває складної структури з чергуванням зон зростання та спадання коефіцієнта проникнення, що вказує на наявність резонансних явищ у кутовій області хвилеводу. Така область функціонує як резонансна камера, в якій може відбуватися ефективне перетворення енергії між різними модами. Встановлено, що при збільшенні кута вигину від 0° до 90° коефіцієнт проникнення поступово зменшується, однак при подальшому збільшенні кута відзначаються коливання цього коефіцієнта. Проаналізовано зміну домінуючої моди залежно від хвильового розміру та кутів вигину, а також показано можливість ефективного перетворення енергії між нижчими та вищими модами у певних точках частотного діапазону, що має потенційне практичне застосування в задачах акустичного фільтрування, управління напрямком звукової енергії та створення хвильових резонаторів. Отримані результати верифіковані шляхом контролю виконання закону збереження енергії, умов спряження підобластей та крайових умов на поверхні хвилеводу.

Ключові слова: акустична хвиля, хвилевід, хвильове число, звукове поле, однорідні моди, неоднорідні моди, амплітудно-частотна характеристика, енергетичні коефіцієнти, метод часткових областей.

V. V. KUZMENKO, YA. P. TROTSSENKO

MODELING OF ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN A PLANAR WAVEGUIDE WITH BENDS

The study investigates the propagation of sound waves in a planar acoustic waveguide containing two bends. A mathematical model of the problem was developed, allowing for the analysis of wave transmission through the geometric inhomogeneity of the waveguide depending on its geometric and physical parameters. The method of partial domains was employed to simulate the acoustic field. Energy transmission coefficients of the wave through the inhomogeneous regions were calculated for a wide range of waveguide dimensions and bend angles. It was shown that the presence of bends leads to significant changes in the spectral characteristics. For waveguide sizes that are multiples of half the wavelength, a sharp decrease in the transmission coefficient is observed, which is associated with the excitation of higher-order normal modes in the waveguide. In cases where the bend angle exceeds 90° , the amplitude-frequency response acquires a complex structure with alternating zones of increasing and decreasing transmission coefficient, indicating the presence of resonant phenomena in the corner region of the waveguide. This region functions as a resonant chamber where efficient energy conversion between different modes may occur. It was established that as the bend angle increases from 0° to 90° , the transmission coefficient gradually decreases, but further angle increases lead to oscillations in this coefficient. The change in the dominant mode depending on the waveguide size and bend angles was analyzed, and the possibility of efficient energy conversion between lower and higher modes at certain points in the frequency range was demonstrated, which has potential practical applications in acoustic filtering, sound energy direction control, and the design of waveguide resonators. The obtained results were verified by checking the fulfillment of the energy conservation law, the continuity conditions between subdomains, and the boundary conditions on the waveguide surface.

Key words: acoustic wave, waveguide, wave number, sound field, homogeneous modes, inhomogeneous modes, amplitude-frequency response, energy coefficients, partial domain method.

Вступ. Сучасна акустика є однією з важливих галузей фізики, що вивчає закономірності генерації, поширення, перетворення та реєстрації звукових хвиль у різних середовищах. Її прикладні аспекти охоплюють широкий спектр застосувань – від ультразвукової діагностики в медицині до проектування акустичних систем у будівництві та інженерії, а також до контролю шуму й покращення характеристик передачі сигналу в технічних пристроях [1, 2]. Окреме значення в цих застосуваннях мають *хвилеводи* – структури, які спрямовують і контролюють поширення хвиль, зокрема акустичних. У багатьох практичних задачах хвилеводи мають складну геометрію, включаючи вигини, розширення, звуження або кути, що суттєво впливає на характер поширення хвиль [3].

Дослідження поширення акустичних хвиль у хвилеводах із вигинами є актуальним завданням, оскільки такі неоднорідні структури зустрічаються в багатьох фізичних і технічних системах. Розуміння закономірностей проходження звуку через такі області дозволяє підвищити ефективність функціонування акустичних пристроїв, зокрема шляхом оптимізації геометричних параметрів хвилеводів. У даній роботі розглядається задача моделювання поширення звукової хвилі у плоскому хвилеводі з двома вигинами з використанням методу часткових областей – ефективного підходу до аналізу хвильових процесів у складних геометріях [4].

Суть *методу часткових областей* полягає в розбитті всієї області існування звукового поля на підобласті, в кожній з яких можливо аналітично подати розв'язок *рівняння Гельмгольца* у вигляді ряду за ортогональними функціями. Подальше поєднання часткових областей із забезпеченням відповідних умов спряження дозволяє побудувати єдиний розв'язок задачі. Цей підхід, зазвичай, призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати *методом редукції*. Водночас у разі застосування декількох систем координат у різних підобластях чисельна реалізація методу ускладнюється [5].

Аналіз останніх досліджень. Питання реалізації *методу часткових областей* при моделюванні поширення звуку в хвильоводах активно досліджуються у сучасній науковій літературі. У роботі [6] було проаналізовано два підходи до спряження хвильових полів у часткових областях: спряження в сенсі середньоквадратичного наближення та поточкове спряження. Дослідження [7] розширює ідеї комбінованого застосування обох варіантів спряження на прикладі розв'язання задачі про випромінювання плоского поршня у хвильоводі скінченної довжини з клиноподібною формою. Аналіз результатів показує, що використання середньоквадратичного наближення дає змогу досягти більш точного опису хвильових полів, тоді як поточкове спряження спрощує реалізацію розрахунків.

У роботі [8] розглянуто можливість адаптації методу часткових областей до тривимірної задачі просторового формування акустичного поля, зокрема, у випадку використання рупора фіксованої довжини в ідеальному пружному середовищі. Цей рупор застосовується в медичному приладі – широкосмуговому вушному ехоспектрометрі для об'єктивної діагностики слуху. Робота демонструє ефективність розширення методу часткових областей для складних просторових задач з практичними застосуваннями в біомедичній інженерії.

Загалом, проведені дослідження підтверджують високий потенціал методу часткових областей як інструмента для моделювання хвильових процесів у неоднорідних структурах та хвильоводах складної геометрії. Подальші дослідження у цьому напрямі дозволяють підвищити точність чисельного моделювання та розширити сферу застосування акустичних хвильоводів у сучасних технологіях.

Постановка задачі. Розглядається задача про поширення акустичних хвиль у нескінченному плоскопаралельному хвильоводі з двома вигинами (рис. 1). Хвильовід заповнено ідеальною стисливою рідиною з густиною ρ та швидкістю звуку c , поверхні вважаються абсолютно жорсткими. Характерними розмірами хвильоводу є величини h_1, h_2, h_3 та l_3 . Величини вигинів визначаються кутами $\alpha \in [0, 180^\circ)$ та $\beta \in [0, 360^\circ - \alpha]$. Втрати звукової енергії у середовищі відсутні.

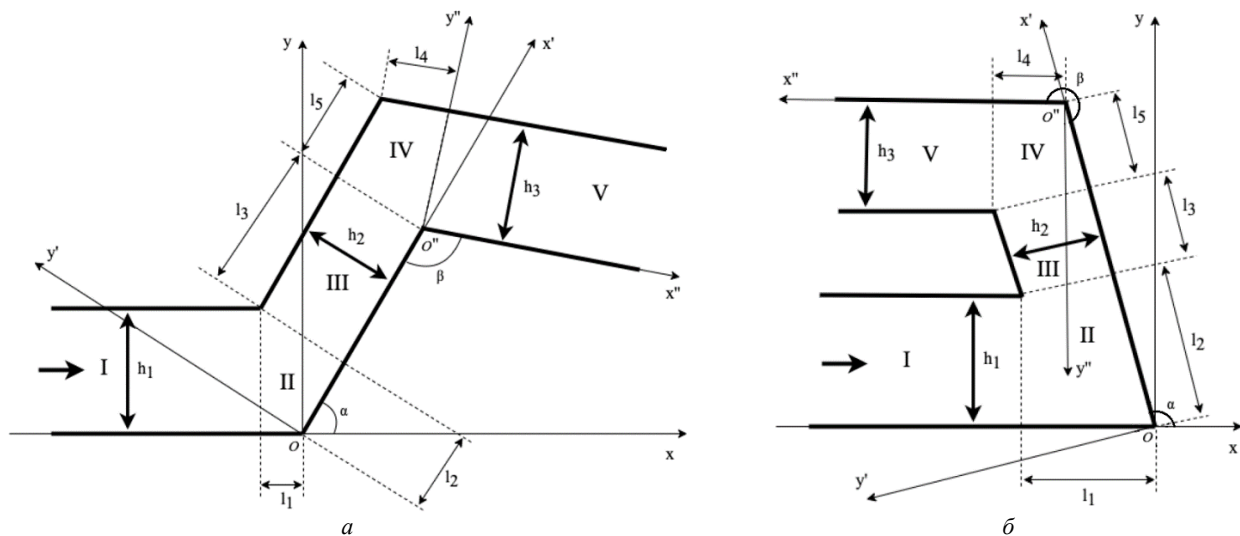


Рис. 1 – Схема хвильоводу з вигинами: $a - \alpha \in (0, 90^\circ), \beta \in (0, 180^\circ)$; $b - \alpha \in (90^\circ, 180^\circ), \beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$.

Нехай ліворуч у хвильоводі поширюється гармонічна плоска хвиля з одиничною амплітудою тиску

$$p_0 = \exp(ik(x + l_1)), \quad k = 2\pi / \lambda,$$

де k – хвильове число; λ – довжина хвилі. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$, де ω – частота хвилі, не враховуємо для скорочення подальших викладок.

Математична модель. Дослідження акустичного поля у хвильоводі проводилося на основі методу часткових областей. Характеристики гармонічного хвильового поля всередині хвильоводу визначаються через функцію акустичного тиску p , яка задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

Оскільки поверхні S хвильоводу акустично жорсткі, то на них має виконуватись рівність нулю нормальної швидкості коливань:

$$v_n|_S = 0.$$

Загальну область існування акустичного поля природно розділити на п'ять областей, де області I та V – це напівнескінченні хвильоводи з характерними розмірами h_1 та h_3 відповідно, область III – скінченний хвильовід з

розмірами h_2 та l_3 , області II і IV – перехідні. Вводяться три декартові системи координат xOy , $x'Oy'$ та $x''O''y''$ так, щоб осі абсцис збігалися із поверхнями областей I, III та V відповідно. Надалі області II та IV вважаються чотирикутними. Для кута $\alpha < 90^\circ$ це справедливо при $\cos \alpha < h_1/h_2$, якщо $h_1 < h_2$, та $\cos \alpha < h_2/h_1$, якщо $h_1 > h_2$. Аналогічно для кута $90^\circ < \beta < 270^\circ$ мають виконуватись умови $\cos \beta > -h_3/h_2$, якщо $h_3 < h_2$, та $\cos \beta > -h_2/h_3$, якщо $h_3 > h_2$.

Згідно з методом часткових областей, для подальшого аналізу хвильоводу потрібно представити поля тиску для кожної з областей. Внаслідок взаємодії плоскої хвилі з вигином утворюється відбита хвиля та хвиля, що проходить у область II. Тому тиск в області I можна записати в системі координат xOy як суму падаючої хвилі та відбитої, яка представляється як суперпозиція нормальних мод області I:

$$p_I = \exp(ik(x+l_1)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right) \exp(-i\eta_n(x+l_1)),$$

де

$$\eta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_1)^2}, & k \geq (\pi n/h_1); \\ i\sqrt{(\pi n/h_1)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_1). \end{cases}$$

Вираз для функції p_I є загальним розв'язком рівняння Гельмгольца для області I.

Аналогічно запишемо поле тиску в області V в системі координат $x''O''y''$, що визначає прониклу хвилю крізь другий вигин:

$$p_V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_3}\right) \exp(i\gamma_n x''),$$

де

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_3)^2}, & k \geq (\pi n/h_3); \\ i\sqrt{(\pi n/h_3)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_3). \end{cases}$$

В області III функцію тиску можна представити в системі координат $x'Oy'$ як суперпозицію відбитих хвиль від першого та другого вигину:

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x'-l_2)) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(-i\xi_n(x'-l_2-l_3)),$$

де

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_2)^2}, & k \geq (\pi n/h_2); \\ i\sqrt{(\pi n/h_2)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_2). \end{cases}$$

Побудуємо розв'язок для області II:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right) \exp(i\eta_n(x+l_1)) + \sum_{n=0}^{\infty} L_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(-i\xi_n(x'-l_2)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l_1}\right) \exp(i\varsigma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{l_2}\right) \exp(i\delta_n y'),$$

де

$$\varsigma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/l_1)^2}, & k \geq (\pi n/l_1); \\ i\sqrt{(\pi n/l_1)^2 - k^2}, & k < (\pi n/l_1); \end{cases} \quad \delta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/l_2)^2}, & k \geq (\pi n/l_2); \\ i\sqrt{(\pi n/l_2)^2 - k^2}, & k < (\pi n/l_2). \end{cases}$$

Розв'язок для області II є загальним. Він складається з чотирьох рядів Фур'є з довільними коефіцієнтами, що дає змогу виконати умови спряження полів на межах із суміжними областями I та III, а також крайові умови на акустично жорстких межах області завдяки повноті відповідних систем функцій. Напрямок біжучих хвиль обирається від поверхонь всередину області.

Аналогічно побудуємо розв'язок для області IV, враховуючи, що напрямок біжучих хвиль у третьому та четвертому доданках залежить від значення кута β . При $\beta \in (0, 180^\circ)$ маємо (рис. 1, а):

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{n\pi y''}{h_3}\right) \exp(-i\gamma_n x'') + \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x'-l_2-l_3)) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi(x' - l_2 - l_3)}{l_5}\right) \exp(-i\omega_n(y' - h_2)) + \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos\left(\frac{n\pi x''}{l_4}\right) \exp(i\varphi_n(y'' - h_3)),$$

де

$$\omega_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n / l_5)^2}, & k \geq (\pi n / l_5); \\ i\sqrt{(\pi n / l_5)^2 - k^2}, & k < (\pi n / l_5); \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n / l_4)^2}, & k \geq (\pi n / l_4); \\ i\sqrt{(\pi n / l_4)^2 - k^2}, & k < (\pi n / l_4). \end{cases}$$

При $\beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$ отримаємо (рис. 1, б):

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{n\pi y''}{h_3}\right) \exp(-i\gamma_n x'') + \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x' - l_2 - l_3)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi(x' - l_2 - l_3)}{l_5}\right) \exp(i\omega_n y') + \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos\left(\frac{n\pi x''}{l_4}\right) \exp(i\varphi_n y'').$$

Умови спряження на межах областей I, II та II, III і крайові умови на жорстких поверхнях області II матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ \frac{\partial p_I}{\partial x} &= \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \end{aligned} \right\} x = -l_1, y = [0, h_1], \quad \left. \begin{aligned} p_{II} &= p_{III} \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2, y' = [0, h_2], \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial y} = 0, \quad x = [-l_1, 0], \quad y = 0, \quad \frac{\partial p_{II}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [0, l_2], \quad y' = 0.$$

Умови спряження на межах областей III, IV та IV, V і крайові умови на жорстких поверхнях області IV при $\beta \in (0, 180^\circ)$:

$$\left. \begin{aligned} p_{III} &= p_{IV} \\ \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{IV}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2 + l_3, y' = [0, h_2], \quad \left. \begin{aligned} p_{IV} &= p_V \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial x''} &= \frac{\partial p_V}{\partial x''} \end{aligned} \right\} x'' = 0, y'' = [0, h_3], \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [l_2 + l_3, l_2 + l_3 + l_5], \quad y' = h_2, \quad \frac{\partial p_{IV}}{\partial y''} = 0, \quad x'' = [-l_4, 0], \quad y'' = h_3,$$

при $\beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$:

$$\left. \begin{aligned} p_{III} &= p_{IV} \\ \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{IV}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2 + l_3, y' = [0, h_2], \quad \left. \begin{aligned} p_{IV} &= p_V \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial x''} &= \frac{\partial p_V}{\partial x''} \end{aligned} \right\} x'' = l_4, y'' = [0, h_3], \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [l_2 + l_3, l_2 + l_3 + l_5], \quad y' = 0, \quad \frac{\partial p_{IV}}{\partial y''} = 0, \quad x'' = [0, l_4], \quad y'' = 0.$$

Підстановка виразів, що описують поля тиску в кожній з областей, у відповідні умови спряження та крайові умови, із врахуванням формул перетворень між системами координат, призведе до системи функціональних рівнянь. Використання властивості ортогональності відповідних систем функцій дає змогу провести алгебраїзацію функціональної системи. Унаслідок цього отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів, яка розв'язується методом редукції [4].

Для верифікації результатів потрібно визначити енергетичні характеристики, такі як коефіцієнт проходження падаючої хвилі крізь вигини W та коефіцієнт відбиття від першого вигину V . Коефіцієнт W природно визначити як відношення середнього потоку потужності хвилі в області V до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I:

$$W = \frac{\int_0^{h_3} \left(p_V \left(\frac{\partial p_V}{\partial x''} \right)^* + p_V^* \frac{\partial p_V}{\partial x''} \right) dx''}{\int_0^{h_1} \left(p_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^* + p_0^* \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) dx},$$

де $*$ – знак комплексного спряження. Після підстановки відповідних виразів для функцій p_0 та p_V отримаємо:

$$W = \sum_{n=0}^{N_1} W_n, \quad \text{де} \quad W_n = \frac{\varepsilon_n h_3 \operatorname{Re}(\gamma_n)}{h_1 k} |B_n|^2.$$

Тут N_1 – кількість однорідних мод в області V. Для хвильоводу з жорсткими межами $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0.5$ для

$n > 0$ [4]. Аналогічно, коефіцієнт відбиття V , який визначається як відношення середнього потоку потужності у відбитій хвилі до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I, матиме вигляд:

$$V = \sum_{n=0}^{N_2} V_n, \text{ де } V_n = \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\eta_n)}{k} |A_n|^2,$$

N_2 – кількість однорідних мод в області I. Згідно із законом збереження енергії, має виконуватися рівність:

$$W + V = 1.$$

Результат роботи програми. Для представлених у даній роботі результатів кількість доданків у рядах Фур'є становила $n = 12$. Точність обчислень може бути покращена завдяки вибору більшої кількості доданків. Характерні розміри часткових областей обирались рівними: $h_1 = h_2 = h_3 = l_3 = h$. Кут першого вигину α змінювався в межах від 0° до 140° , оскільки при $\alpha > 140^\circ$ структура акустичного поля в хвильоводі значно ускладнюється через наявність кутової області в околі початку системи координат O та потребує більшої кількості доданків у рядах Фур'є для коректних розрахунків.

На рис. 2 зображена залежність суми енергетичних коефіцієнтів $W + V$ від хвильового розміру h/λ для двох варіантів кутів вигинів: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$ (рис. 2, а) та $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 2, б). Для другого випадку точність обчислень є гіршою внаслідок появи кутових областей та ускладнення характеру особливості на ребрі. Загалом, при обраних параметрах закон збереження енергії виконується з похибкою не гірше 3%. Варто відмітити, що при збільшенні хвильового розміру h/λ у хвильоводі поширюються вищі моди, що ускладнює розрахунки в обох випадках. Критичними значеннями, при яких збуджуються наступні вищі моди, є величини $h/\lambda = n/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

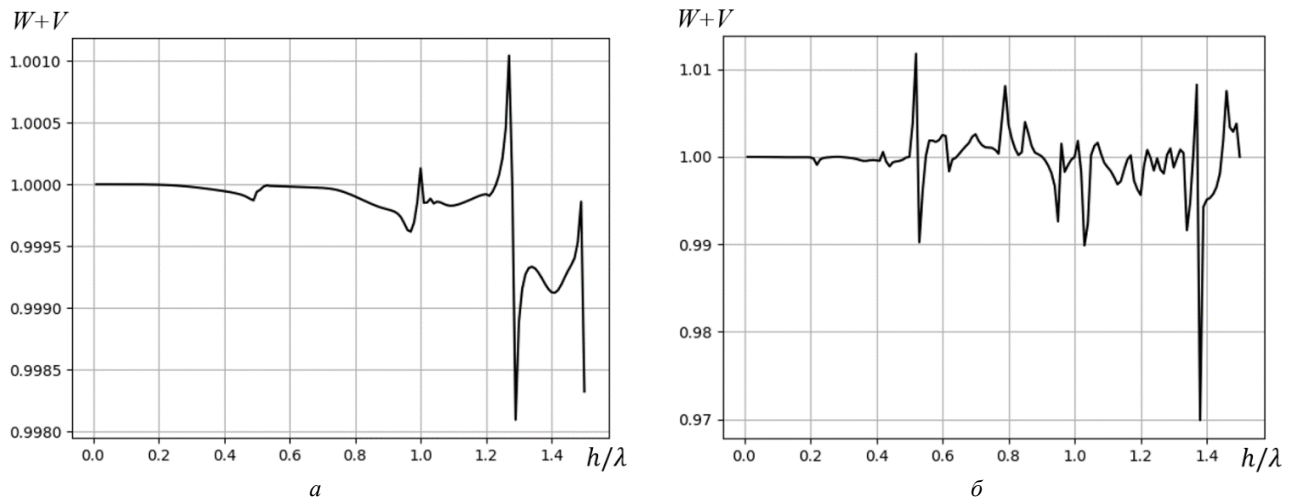


Рис. 2 – Частотні залежності $W + V$ від хвильових розмірів: а – $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 3 подано залежність суми енергетичних коефіцієнтів $W + V$ від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$ при фіксованому значенні $\beta = 135^\circ$ для трьох значень $h/\lambda = \{0.3, 0.6, 1.2\}$. При $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$ закон збереження енергії виконується на порядок краще, ніж при $\alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$, що узгоджується із рис. 2. При $h/\lambda = 0.3$ у хвильоводі поширюється лише нульова мода, тому закон збереження виконується найточніше. При $h/\lambda = 0.6$, крім нульової, поширюється також перша мода, що призводить до погіршення точності через складнішу інтерференційну структуру поля. Відповідно, при $h/\lambda = 1.2$ структура поля ще більше ускладнюється, а точність виконання закону збереження знижується. Крім цього, збільшення кутів вигинів призводить до росту ролі неоднорідних мод.

На рис. 4 представлені типові похибки виконання умов спряження областей I, II за тиском p та коливальною швидкістю в поздовжньому напрямку v_x , а також крайові умови за нормальною швидкістю до поверхні хвильоводу v_y в області II при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $h/\lambda = 0.51$. Оскільки тиск і коливальна швидкість подані як комплексні числа, то їх порівняння на межах поділу областей можна проводити за модулем різниці тиску та коливальної швидкості відповідно:

$$\delta_p = \frac{|p_{II} - p_I|}{p_0}, \quad \delta_v = \frac{|v_{xII} - v_{xI}|}{|v_{x0}|}, \quad \delta_n = \frac{|v_{yII}|}{|v_{x0}|}.$$

Оскільки коливальна швидкість має особливість на ребрі, то похибка за швидкістю є вищою ніж за тиском. З цієї ж причини крайові умови за швидкістю виконуються краще за умови спряження.

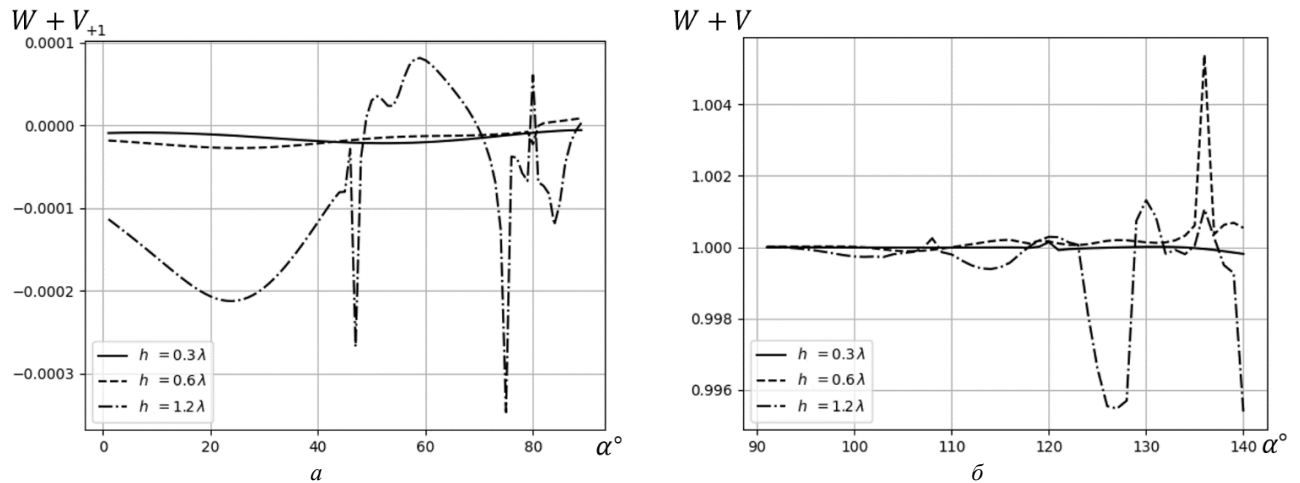


Рис. 3 – Залежність $W + V$ від кута вигину α при $\beta = 135^\circ$: $a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

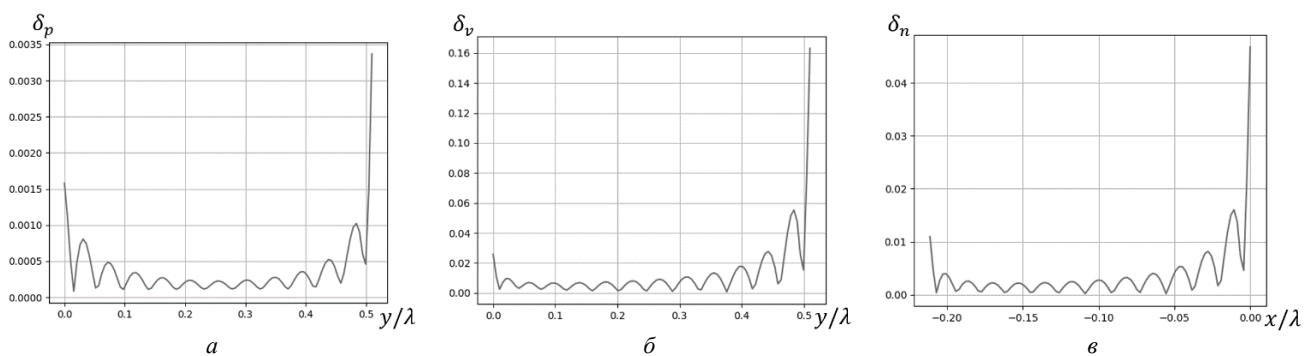


Рис. 4 – Похибки виконання умов спряження при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $h/\lambda = 0.51$: a – за тиском δ_p , $x = 0$, $y = [0, h_1]$; b – за швидкістю δ_v , $x = 0$, $y = [0, h_1]$; c – похибка виконання крайової умови за швидкістю δ_n , $x = [-l_1, 0]$, $y = 0$.

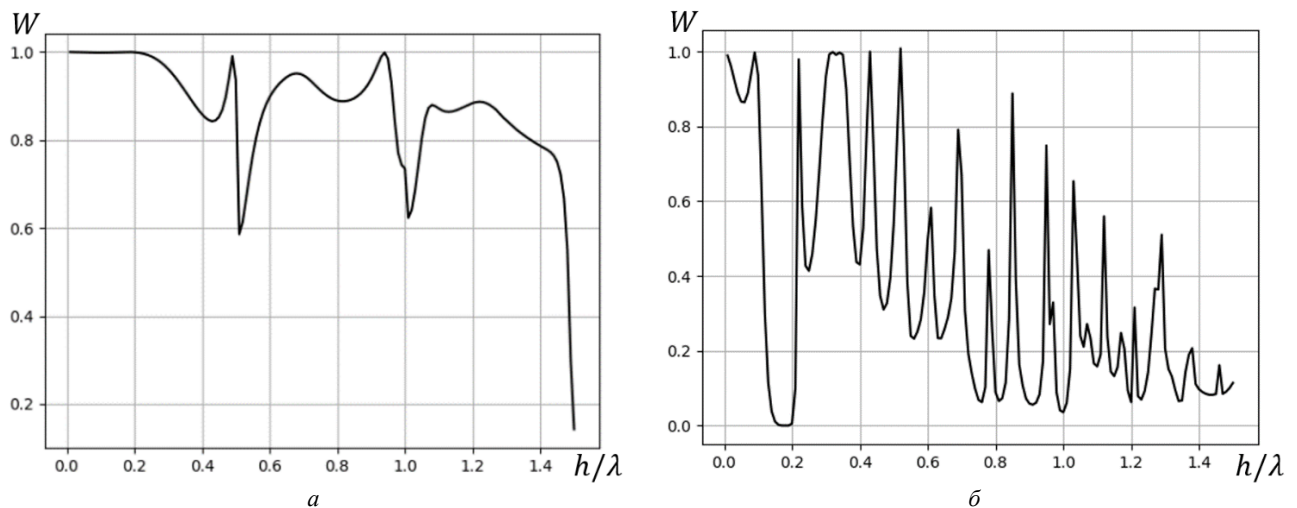


Рис. 5 – Частотні залежності W від хвильових розмірів h/λ : $a - \alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; $b - \alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 5, a відображені частотні залежності енергетичного коефіцієнта проникнення W від h/λ при фіксованих кутах вигину $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. За умови, коли величина h кратна $\lambda/2$, коефіцієнт проникнення W різко спадає. Цей ефект пов'язаний з моментом зародження чергової однорідної моди хвильоводу. На рис. 5, b наведені аналогічні частотні залежності для кутів вигину $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$. У цьому випадку наявність кутової області значно ускладнює структуру амплітудно-частотного спектру. Спостерігається нерегулярне коливання коефіцієнта проникнення W , а також поступове зниження його середнього значення при збільшенні хвильового

розміру h/λ . Це можна пояснити посиленням відбивних ефектів на геометричних неоднорідностях хвильоводу.

На рис. 6, а зображені частотні залежності коефіцієнтів збудження нормальних хвиль W_n в області V від h/λ для випадку $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. Чітко видно, що при $h/\lambda < 1/2$ у хвильоводі поширюється лише нульова мода. При $h/\lambda > 1/2$ з'являється перша мода, яка швидко перевершує нульову за амплітудою, але далі різко спадає. В той же час нульова мода зростає, і при $h/\lambda > 0.7$ стає домінуючою до $h/\lambda \approx 1.1$. При $h/\lambda > 1$ з'являється друга мода, але вона поступається спочатку нульовій, а потім першій моді.

Подібний характер спектра спостерігається й у випадку $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 6, б). Тут варто відмітити, що при $0.5 < h/\lambda < 1$ переважно домінує нульова мода, а при $h/\lambda > 1$ відбувається чергування домінуючої моди. Таким чином, енергія нульової моди області I трансформується у вищі моди області V. Такий характер амплітудно-частотного спектра може свідчити про чергування резонансних та антирезонансних частот системи.

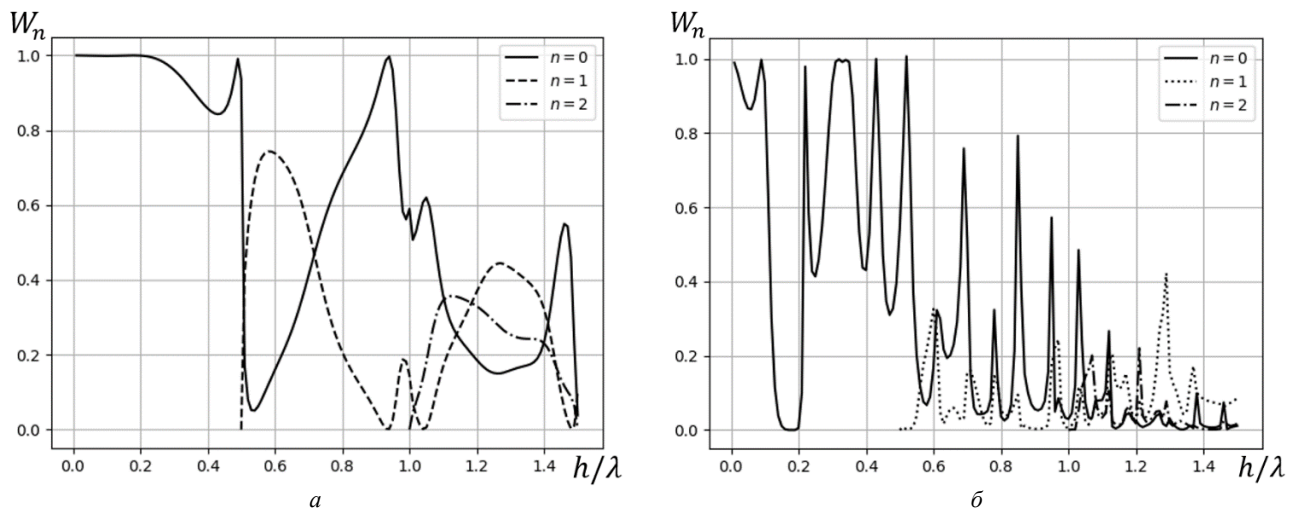


Рис. 6 – Частотні залежності коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль від хвильових розмірів h/λ :

а – $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 7, а представлено поле амплітуди тиску при $h/\lambda = 0.51$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. Цей випадок близький до критичного, коли у хвильоводі збуджується наступна однорідна мода. Енергетичні коефіцієнти проникнення та відбиття тут дорівнюють відповідно $W \approx 0.586$, $V \approx 0.414$. Це свідчить про зменшення потоку енергії в області V та часткове відбиття енергії від геометричної неоднорідності в область I. На рис. 7, б зображено поле амплітуди тиску при $h/\lambda = 0.18$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$. У даному випадку відбувається практично повне запирання потоку енергії, не зважаючи на те, що поширюється лише нульова мода, тобто енергетичні характеристики рівні $W \approx 0$, $V \approx 1$. Природа зниження коефіцієнту проникнення у даному випадку відрізняється від попереднього. Тут кутова область виступає у ролі резонансної камери, яка блокує поширення хвилі.

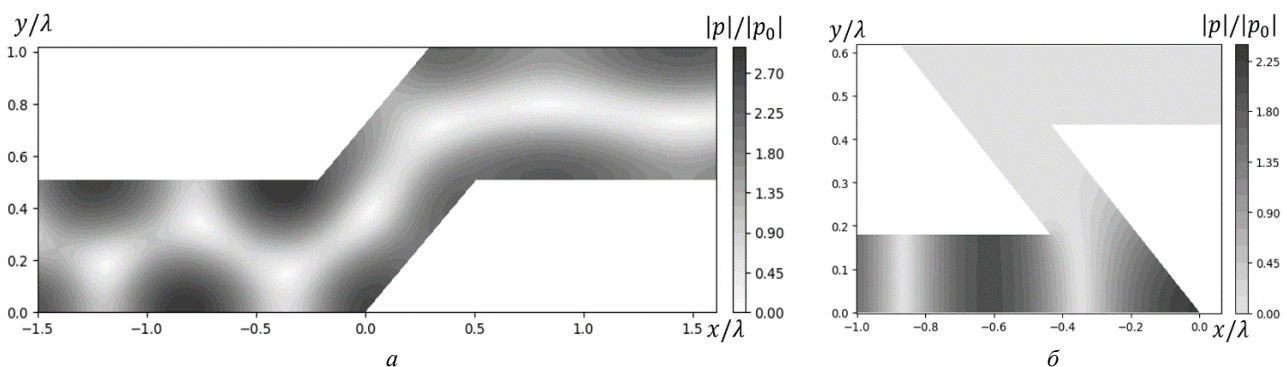


Рис. 7 – Поле амплітуди тиску: а – $h/\lambda = 0.51$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $h/\lambda = 0.18$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 8 зображена залежність коефіцієнта проникнення W від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$ за фіксованого значен-

ня $\beta = 135^\circ$ при різних співвідношеннях h/λ . При $\alpha < 90^\circ$ спостерігається зниження коефіцієнта проходження при збільшенні кута вигину для всіх випадків h/λ . Водночас найшвидшим є зменшення у випадку $h/\lambda = 1.2$. У випадку $h/\lambda = 0.3$ спостерігається провал коефіцієнта проникнення W при $\alpha \approx 133^\circ$, причому в даному випадку відбувається повне запирання потоку. Зі збільшенням хвильового розміру h/λ також спостерігається подібний провал, проте він зміщується в область менших кутів, а мінімальне значення коефіцієнта W збільшується. Далі відбувається зростання коефіцієнта проникнення до $W \approx 1$ у випадку $h/\lambda = 0.3$ та до $W \approx 0.92$ у інших двох випадках, після чого коефіцієнт проникнення знову знижується.

На рис. 9 показані частотні залежності коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль при $h/\lambda = 1.2$ від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$, $\beta = 135^\circ$. При такому хвильовому розмірі у області V поширюється три нормальні моди. Нульова мода найефективніше збуджується при $\alpha \approx 64^\circ$. Перша мода – при $\alpha \approx 18^\circ$, у цьому діапазоні кутова область ефективно перетворює частину енергії падаючої хвилі у першу моду. Друга мода – при $\alpha \approx 121^\circ$, що свідчить про перерозподіл енергії з нижчих мод у другу.

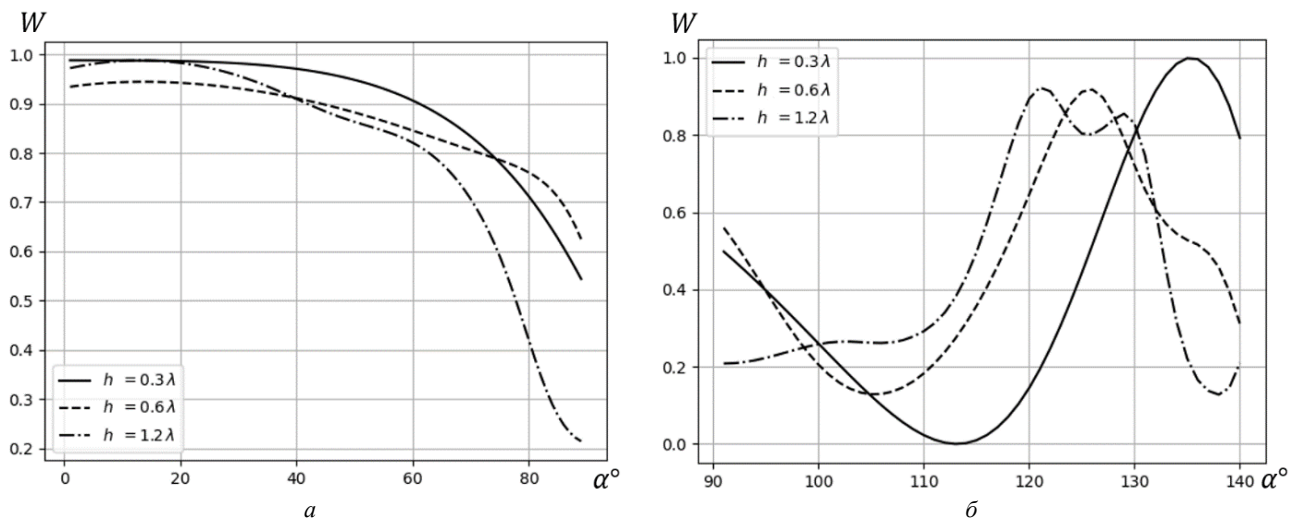


Рис. 8 – Залежність коефіцієнта проникнення W від кута α при $\beta = 135^\circ$: $a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

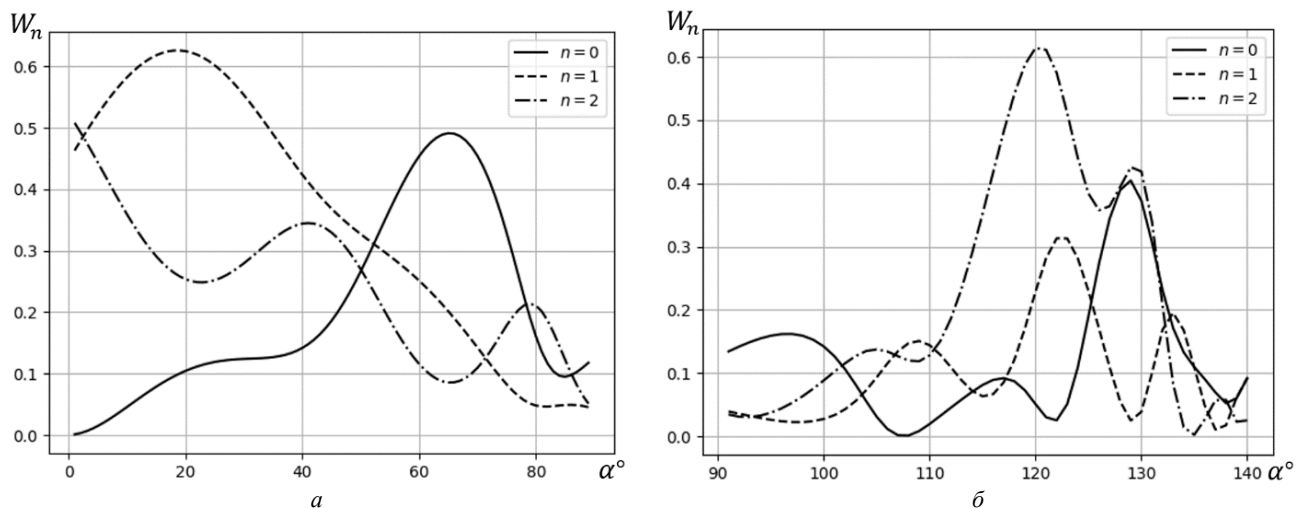


Рис. 9 – Залежність коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль у випадку $h/\lambda = 1.2$ при $\beta = 135^\circ$:

$a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

Перспективи подальших досліджень. Результати проведеного дослідження важливі для подальшого розвитку теорії та практичного застосування хвильоводів із вигинами. Зокрема, кількісні характеристики трансформації мод можуть бути використані під час проєктування повітряних звукопроводів, таких як вентиляційні сис-

теми, а також при аналізі поширення звуку в складних середовищах, наприклад, у підводних течіях.

Перспективним напрямом є подальше вивчення механізмів перетворення енергії між модами, що дозволяє змінювати просторову структуру звукового поля. Це може бути використано для створення ефективних шумопоглинальних систем, а також для модифікації характеристик направленості випромінювання хвильоводу, зокрема у випадках, коли його кінець розташовано за вигином. Такі ефекти можуть лягти в основу проєктування частотно-селективних пристроїв.

Подальші дослідження також доцільно зосередити на таких аспектах: аналізі поширення імпульсних сигналів у хвильоводах складної геометрії; дослідженні поширення вищих мод в окремих областях хвильоводу, що дозволить точніше моделювати фізичні процеси у широкому частотному діапазоні; урахуванні умов Мейкснера на ребрах хвильоводу для підвищення точності чисельного методу та покращення збіжності обчислювального алгоритму.

Висновки. У роботі розв'язано задачу поширення звукових хвиль у плоскому хвильоводі з акустично жорсткими стінками та геометричними неоднорідностями у вигляді двох вигинів із використанням методу часткових областей. Проведено верифікацію закону збереження енергії, умов спряження та крайових умов, що підтверджує коректність побудованої математичної моделі.

У ході дослідження встановлено, що енергетичний коефіцієнт проникнення звукової хвилі крізь вигини суттєво залежить як від хвильових розмірів, так і від кутів вигину. Показано, що при хвильових розмірах, кратних половині довжини хвилі, відбувається різке зниження коефіцієнта проникнення, що пов'язано зі збудженням вищих мод.

Дослідження показали, що при кутах вигину понад 90° амплітудно-частотна характеристика набуває складної нерегулярної структури, а кутова область виконує роль резонансної камери. Виявлено зміну домінантної моди залежно від кута вигину. При збільшенні кута від 0° до 90° спостерігається поступовий спад коефіцієнта проникнення, а подальше збільшення кута викликає його коливання.

Також встановлено, що в кутовій області можлива ефективна трансформація енергії між різними модами – від нижчих до вищих і навпаки. У певних точках частотного діапазону досягається високий коефіцієнт перетворення мод, що відкриває можливості для цілеспрямованого керування енергетичним розподілом у хвильоводі.

Список літератури

1. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. – New York : Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
2. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1994. – Vol. 95. – № 1. – P. 2363 – 2370. DOI: 10.1121/1.408746.
3. Мелешко В. В., Маціпура В. Т., Улітко І. А. *Теорія хвильоводів : навч. посіб.* – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2013. – 415 с.
4. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маціпура В. Т. *Основи акустики : навчальний посібник*. – Київ: Видавництво «Наукова думка» НАН України, 2007. – 640 с.
5. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Вплив згладжування поверхні скінченного клиноподібного об'єкта на характеристики розсіювання плоскої хвилі. Частина I. Побудова розв'язку // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. – 2024. – № 2. – С. 29 – 32. DOI: 10.17721/1812-5409.2024/2.5.
6. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2021. – № 2. – С. 5 – 16. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.2.01.
7. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. – 2023. – № 2. – С. 88 – 91. DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.10.
8. Naida S. A., Korzhyk O. V., Naida N. S., Korzhyk M. O., Naida A. S., Popovych P. V. Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer // *Journal of nano- and electronic physics*. – 2023. – Vol. 15. – № 6. – 06012. DOI: 10.21272/jnep.15(6).06012.

References (transliterated)

1. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. New York, Begell House, Inc., 2018. 439 p.
2. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1994, Vol. 95, no. 1, pp. 2363–2370. DOI: 10.1121/1.408746.
3. Meleshko V. V., Matsypura V. T., Ulitko I. A. *Teoriia khvylyevodiv: navch. posib.* [Waveguide theory: a textbook]. Kyiv, Vydavnycho-poligrafichnyy tsentr "Kyivs'kyi universytet" Publ., 2013. 415 p.
4. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Osnovy akustyky: navchal'nyy posibnyk* [Fundamentals of acoustics: a textbook]. Kyiv, Vydavnytstvo "Naukova dumka" NAN Ukrainy Publ., 2007. 640 p.
5. Grinchenko V. T., Husak V. O., Matsypura V. T. Vplyv zgladzhuvannya poverkhni skinchennogo klynopodibnogo ob'ekta na kharakterystyky rozsiyuvannya ploskoyi khvyli. Chastyna I. Pobudova rozv'yazku [The effect of smoothing the surface of a finite wedge-shaped object on the scattering characteristics of a plane wave. Part I. Construction of the solution]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa*

- Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2024, no. 2, pp. 29–32. DOI: 10.17721/1812-5409.2024/2.5.
6. Grinchenko V. T., Husak V. O., Matsypura V. T. Vykorystannya dvokh variantiv spryazhennya khvyly'ovyykh poliv v metodi chastkovykh oblastey [Using two variants of wave field conjugation in the partial domain method]. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 2021, no. 2, pp. 5–16. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.2.01.
 7. Boryseiko O. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Vykorystannya kombinatsiyi dvokh variantiv spryazhennya khvyly'ovyykh poliv v metodi chastkovykh oblastey [Using combinations of two wave field conjugation options in the partial domain method]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2023, no. 2, pp. 88–91. DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.10.
 8. Naida S. A., Korzyk O. V., Naida N. S., Korzyk M. O., Naida A. S., Popovych P. V. Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer. *Journal of nano- and electronic physics*. 2023, Vol. 15, no. 6, 06012. DOI: 10.21272/jnep.15(6).06012.

Надійшла (received) 10.06.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Кузьменко Володимир Володимирович – студент 1-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (063) 574-81-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7922-430X>; e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com.

Kuzmenko Volodymyr Volodymyrovych – 1st year Master's Student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (063) 574-81-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7922-430X>; e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com.

Троценко Ярослав Павлович – доктор філософії з галузі математики та статистики, асистент кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.

Trotsenko Yaroslav Pavlovych – Philosophy Doctor in Mathematics and Statistics, Assistant Professor at the Department of Complex Systems Modeling, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

МОДЕЛІ ПРОГРАМОВАНИХ МІКРО- ТА НАНОСТРУКТУР

Розроблені математичні моделі технологічного проєктування нових структур для реалізації різнорідних дискретних функцій декількох аргументів на базі мультиплексорних мікро- та/або наноелектронних структур. Підвищення універсальності сучасних великих мікро- та нанорозмірних схем вступає в суперечність з їх спеціалізацією, що знижує обсяги відтворення кожного типового зразка. Ліквідувати розбіжність між різнобічністю та спеціалізацією можливо шляхом фахового проєктування пристроїв з програмованими структурами. Кодування виконується не для відтворення алгоритмів обробки бінарної інформації, як це реалізує мікроконтролер, а шляхом структурних налаштувань нано- та мікромультіплексорів. Отримані в роботі результати порівняльного моделювання підтвердили еквівалентність їхнього функціонування, а також переваги квантових нанорозмірних мультиплексорів у швидкодії, енергоспоживанні, надійності та масштабуванні технологічних розмірів на кристалі. Проте сучасні нанорозмірні пристрої залишаються працездатними лише в умовах космічного застосування.

Ключові слова: нанорозмірні програмовані пристрої, спеціалізоване математичне моделювання, кулонівські квантові кластери, булева та мажоритарна алгебри, кодування логічних структур, аерокосмічна техніка.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH

MODEL OF PROGRAMMED MICRO- AND NANOSTRUCTURES

Mathematical models of technological design of new structures for implementation of heterogeneous discrete functions of several arguments based on multiplexer micro- and/or nanoelectronic structures have been developed. Increasing the versatility of modern large micro- and nanoscale circuits comes into conflict with their specialization, which reduces the reproduction volumes of each typical sample. It is possible to eliminate the discrepancy between versatility and specialization by professional design of devices with programmable structures. Coding is performed not for reproduction of binary information processing algorithms, as implemented by a microcontroller, but by structural settings of nano- and micromultiplexers. The results of comparative modeling obtained in the work confirmed the equivalence of their functioning, as well as the advantages of quantum nanoscale multiplexers in speed, power consumption, reliability and scaling of technological dimensions on a crystal. However, modern nanoscale devices remain operational only in space applications.

Key words: nanoscale programmable devices, specialized mathematical modeling, Coulomb quantum clusters, Boolean and majority algebras, coding of logical structures, aerospace engineering.

Вступ. Математичне моделювання мікро- та наноструктур не передбачає можливості створення алгоритмів для обробки вхідних багатоаргументних функцій шляхом зміни робочих програм, як це зазвичай реалізується мікроконтролерами. Воно стосується технологічних змін у внутрішній структурі електронних схем таким чином, щоб забезпечити синтез необхідних функцій на структурно-логічному рівні.

Огляд актуальних досліджень та публікацій. Експерименти в галузі моделювання мікро- та наносхем активно розвиваються, і значна частина уваги науковців зосереджена на автоматизованому багаторівневому проєктуванні таких систем. Сучасні досягнення у цій галузі відбулися внаслідок розробки комбінованих систем на базі універсальних функціонально завершених модулів. Такі модулі виявилися однією з перспективних тенденцій в розвитку сучасної електроніки [1]. У цих дослідженнях була реалізована можливість проєктування мікро- та наносхем, здатних відтворювати 16 двоаргументних та 256 триаргументних функцій на основі мультиплексорів [2]. Однак існують суттєві труднощі у спрощенні цих схем, що зумовлює надмірну складність у реалізації та унеможливорює їх універсальне застосування. Важливим аспектом досліджень стало удосконалення методів моделювання мікро- та наносхем для запровадження різноманітних функцій булевої алгебри [3] та мажоритарної логіки [4]. Вчені запропонували ефективні алгоритми автоматизованого програмування мікросхем з високим рівнем інтеграції, що стали основою для подальшого розвитку нанопристроїв з програмованими структурами [5]. Попри значний прогрес у цій сфері, потреба досягнення ефективного автоматизованого проєктування все ще залишається відкритою, і на сьогоднішній день проблема спрощення алгоритмів та їх адекватного відтворення викликає активні дискусії.

Особливої уваги заслуговують питання впливу температурних режимів на надійність наносхем, зокрема, робота в умовах кріогенних температур. Дослідження показали, що такі умови можуть значно вплинути на роботу нанопристроїв, стимулюючи пошук нових підходів для підвищення їх якості та стабільності функціонування [6]. Також залишаються невирішеними питання узгодження таких структур, що створює додаткові виклики для їх впровадження. У результаті проблеми математичного моделювання та підвищення якості мікро- та наносхем з програмованою логікою залишаються актуальними і потребують подальших досліджень та вдосконалення.

Математичні моделі мультиплексорних мікро- і наноструктур. Для запровадження мультиплексорів як універсальних логічних накомпонентів, сигнали деяких аргументів функції подаються на адресні входи, а вхідні слова d_1, d_0 (рис. 1, а) чи x_1, x_0 (рис. 1, в), відповідно записують для функціональної реалізації. Зазвичай

для двовходового мультиплектора ($2 \rightarrow 1$) з двома інформаційними входами можливі чотири комбінації аргументів 11, 10, 01, 00 і це дозволяє реалізувати 16 різних вихідних функцій.

Рис. 1, а ілюструє умовну графічну позначку одноадресного наномультиплектора ($2 \rightarrow 1$) з двома інформаційними входами d_1 та d_0 .

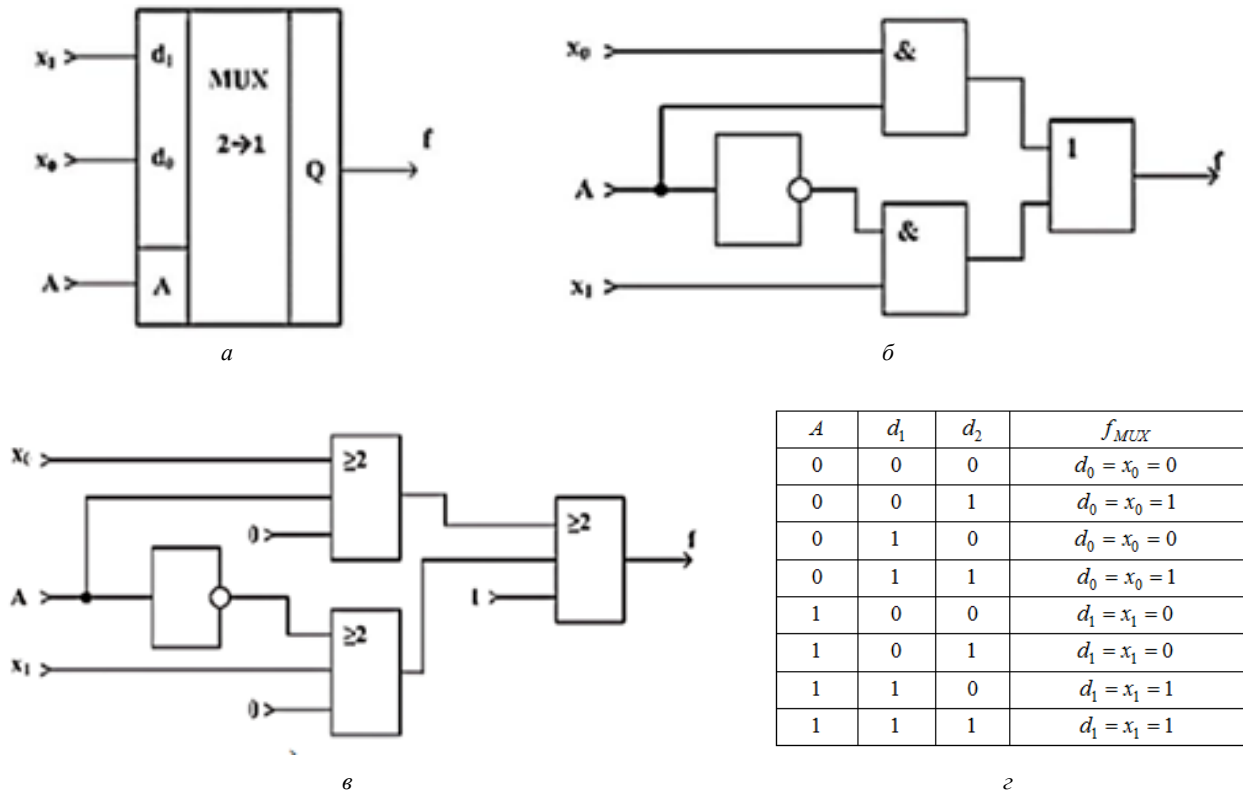


Рис. 1 – Двовходовий мультиплексор – а, його моделі для мікро- – б та наносхем – в і таблиця істинності – з.

Використовуючи аксіоми алгебри логіки [7] для таблиці істинності (рис. 1, з), отримують функцію моделі програмування мультиплектора ($2 \rightarrow 1$) у вигляді:

$$f_{MUX} = \bar{A}d_1d_0 \vee \bar{A}d_1\bar{d}_0 \vee Ad_1\bar{d}_0 \vee Ad_1d_0 = d_1A \vee d_0\bar{A}. \quad (1)$$

Для відтворення двоаргументних функцій необхідно здійснити перетворення, щоб отримати диз'юнктивно нормальну форму (ДНФ). За допомогою закону подвійності де Моргана (інверсії) та карти Карно, наприклад, для функції:

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_0 = d_1A \vee d_0\bar{A}. \quad (2)$$

Тоді для чотириразового програмування єдиного адресного входу аргументними константами необхідно подавати наступні чотири комбінації сигналів на два інформаційні входи:

$$\begin{aligned} A = \bar{x}_0, \quad d_1 = x_1, \quad d_0 = x_0 \quad \text{чи} \quad 0; \\ A = \bar{x}_1, \quad d_1 = \bar{x}_0, \quad d_0 = \bar{x}_1 \quad \text{чи} \quad 0; \\ A = x_1, \quad d_1 = \bar{x}_1 \quad \text{чи} \quad 0, \quad d_0 = 0; \\ A = x_0, \quad d_1 = x_0 \quad \text{чи} \quad 0, \quad d_0 = x_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналіз отриманих результатів. За результатами комп'ютерного моделювання двовходових програмуваних наномікромультиплексорів (НММ) ($2 \rightarrow 1$) відтворені усі 16 двоаргументних функцій (табл. 1).

Відповідно до рис. 1, б, НММ був побудований на основі системи автоматизованого проєктування (САПР) Altera Max++ [8] (рис. 2) з чотирьох комбінаційних компонентів (рис. 2, а) і також з одиничної макромоделі (рис. 2, б).

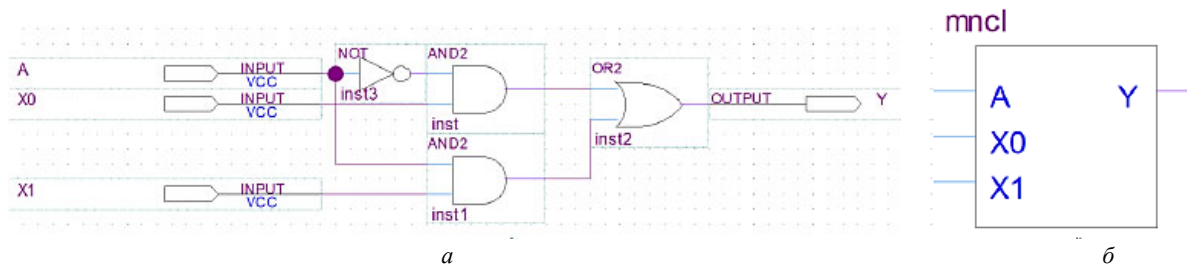


Рис. 2 – Моделі двовходових НММ: а – на логічних елементах; б – макромоделі.

Таблиця 1 – Моделювання двоаргументних дискретних функцій для НММ ($2 \rightarrow 1$)

Модельовання НММ	1	d_i	0	$x_1(0)$	$x_1(0)$	$x_1(0)$	x_0	$x_1(0)$	x_1	$\overline{x_0}$	x_0	x_0	$x_0(1)$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(1)$	$x_1(1)$	1
		d_0	0(1)	$\overline{x_0}$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0(1)}$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0}$	$x_0(0)$	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0}$	x_0	0(1)
		A	0	x_1	x_1	x_1	x_1	$\overline{x_0}$	x_1	x_1	x_1	x_1	$\overline{x_0}$	x_1	x_1	x_1	x_1	0
	2	d_i	$x(0)$	$x_1(0)$	x_1	x_1	$\overline{x_0(0)}$	$\overline{x_0}$	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	$x_0(1)$	x_1	x_1	$x_0(1)$	$x(1)$
		d_0	$x(0)$	x_1	$x_0(0)$	$x_1(0)$	x_1	$\overline{x_0(0)}$	x_1	$\overline{x_0(1)}$	$x_0(0)$	x_1	$x_0(0)$	x_1	$x_1(0)$	$\overline{x_0(1)}$	x_1	$x(1)$
		A	x	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	0	$\overline{x_0}$	0	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	0	$\overline{x_0}$	0	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$
	3	d_i	0(1)	$\overline{x_0}$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0(1)}$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0}$	$x_0(0)$	$x_1(1)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0}$	x_0	0(1)
		d_0	0	$x_1(0)$	$x_1(0)$	$x_1(0)$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0(0)}$	$\overline{x_0}$	$\overline{x_0}$	x_0	x_0	$x_0(1)$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(1)$	$x_1(1)$	1
		A	1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	x_1	x_1	x_1	x_1	1
	4	d_i	$x(0)$	x_1	$x_0(0)$	$x_1(0)$	x_1	$\overline{x_0(0)}$	x_1	$\overline{x_0(1)}$	$x_0(0)$	x_1	$x_0(0)$	x_1	$x_1(0)$	$x_0(1)$	x_1	$x(1)$
		d_0	$x(0)$	$x_1(0)$	x_1	x_1	$x_0(0)$	$\overline{x_0}$	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	$x_0(1)$	x_1	x_1	$x_0(1)$	$x(1)$
		A	x	x_0	x_0	1	x_0	1	x_0	x_0	x_0	x_0	1	x_0	1	x_0	x_0	x
			$f_0 = 0$	$f_1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_0}$	$f_2 = \overline{x_1} x_0$	$f_3 = x_1$	$f_4 = x_1 \overline{x_0}$	$f_5 = \overline{x_0}$	$f_6 = x_1 \oplus x_0$	$f_7 = \overline{x_1} \overline{x_0}$	$f_8 = x_1 x_0$	$f_9 = \overline{x_1} \oplus \overline{x_0}$	$f_{10} = x_0$	$f_{11} = \overline{x_1} \vee x_0$	$f_{12} = x_1$	$f_{13} = x_1 \vee \overline{x_0}$	$f_{14} = x_1 \vee x_0$	$f_{15} = 1$

На рис. 3 приведені схеми чотириваріантного автоматизованого моделювання для відтворення двоаргументної функції Додавання за модулем 2 на базі чотирьох НММ (рис. 3, а), які конфігуровані згідно рівносильностям (1), (2), алгоритму (3) та стовпцю f_6 з табл. 1, а також їхні тотожні часові діаграми (рис. 3, б). Ці результати підтверджують адекватність розроблених моделей НММ.

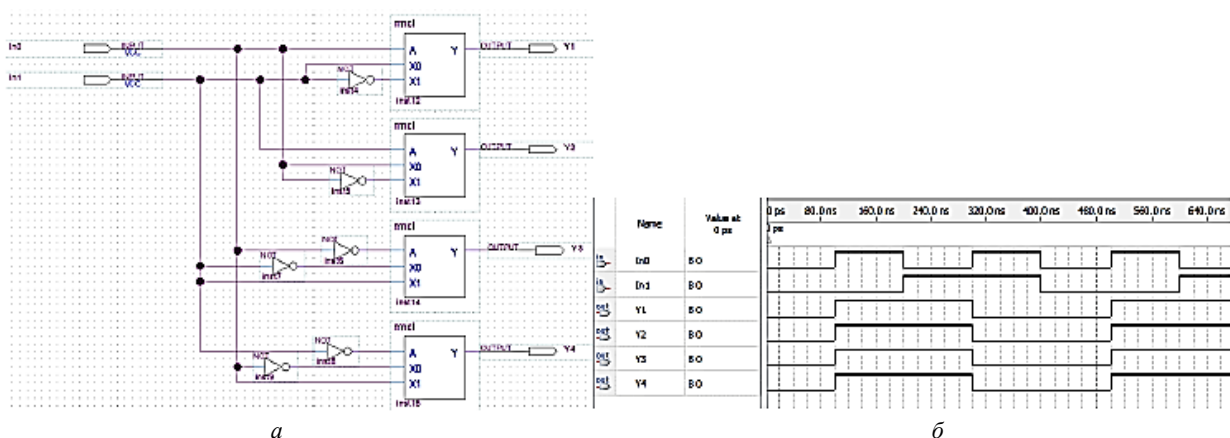


Рис. 3 – Комп'ютерне моделювання НММ – а та часова діаграма запрограмованої функції Додавання за модулем 2 – б.

Кулонівські автомати на основі квантових кластерів є базовими компонентами логічних одноелектронних наносхем [9]. Їх часто називають *квантовими* або *кулонівськими автоматами (КА)*. В чотирьох кутках на поверхні діелектричної підкладки з двоокису кремнію розміром (50×50) нм формують кулонівські острівці з тридцяти атомів чистого кремнію з використанням *технології іонної літографії* [6]. Через кулонівське відштовхування, яке спостерігається при $T < 2K$, два вільних електрона в КА можуть знаходитися тільки в двох стабіль-

них станах по двом діагоналям комірок. Тому логічні стани 1/0 комірки визначаються розподілом електронів.

Створений раніше НММ на основі одноелектронних мажоритарних наносхем (рис. 1, в) тепер відтворений на квантових коміркових автоматах (рис. 4, а) у вигляді вхідного завдання для моделювання на САПР QCADesigner [6]. Він складається з інвертора адресного сигналу A на вході мажоритарного елемента (МЕ), структуру якого запрограмовано з нульовою поляризацією "–1" для відтворення функції логічного перемноження в (1) та мажоритарних елементів на виході з позитивною одиничною функцією "1" для відтворення диз'юнктивної логічної функції f_{MUX} (1). На рис. 4, б наведені результати моделювання його осцилограм, які цілком відповідають початковій таблиці мультимплексора на рис. 1, з.

Додатково виконане комп'ютерне моделювання одноелектронного НММ з іншою конфігурацією налаштування (рис. 5, а порівняно з рис. 4, а) логічної функції f_6 Додавання за модулем 2 з табл. 1: для $A = x_1$ слід програмувати $d_1 = \bar{x}_0$ та $d_0 = x_0$ в умовах космічних температур ($0 \div 2\text{K}$).

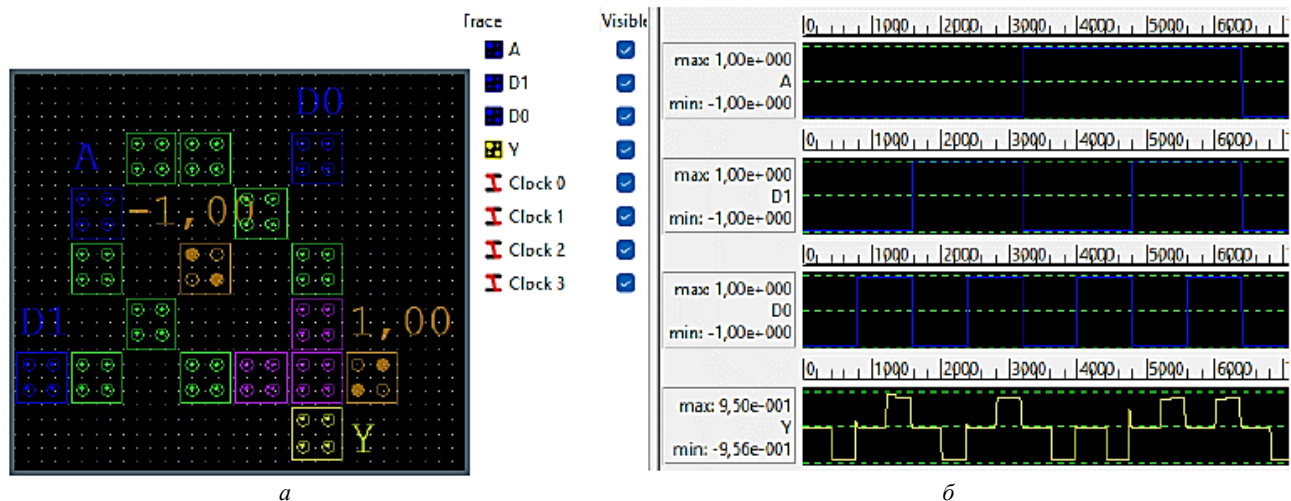


Рис. 4 – Комп'ютерне моделювання наносхеми НММ – а та відповідних осцилограм – б.

Перевірка відповідності результатів моделювання часових діаграм (рис. 5, б) та таблиці істинності (табл. 1) підтверджують адекватність налаштування НММ. Проте стають помітними явища виродження, особливо вихідної діаграми, які пояснюються термогенерацією фонових електронів в одноелектронних КА [5, 8, 10].

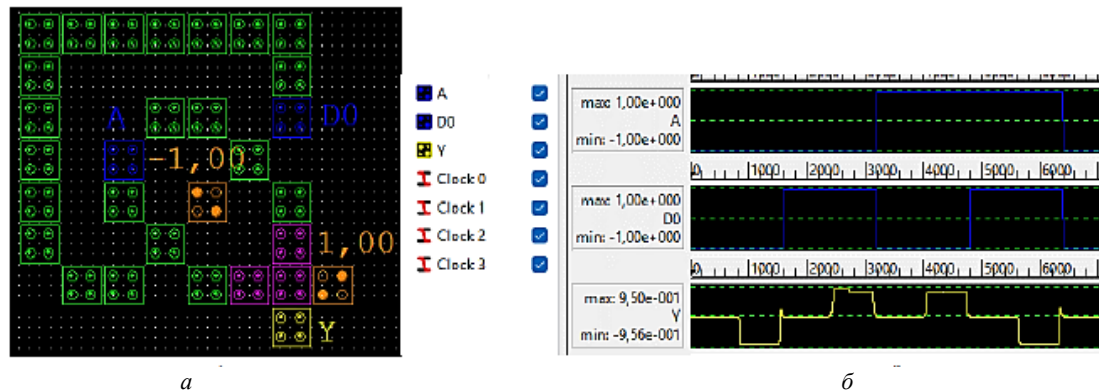


Рис. 5 – Комп'ютерне моделювання НММ в космічних умовах: а – двоаргументний наноконтур; б – часові діаграми.

Окрім цього, співвідношення часових діаграм моделей мікромультиплексора (рис. 3, б) і наномультимплексора (рис. 5, б) доводить їх синхронний збіг з результатами програмування дискретної функції Додавання за модулем 2 f_6 в табл. 1.

Подальші дослідження. Перспективним у майбутніх дослідженнях буде моделювання одноелектронних наноструктур для створення надійних аерокосмічних систем, які функціонуватимуть в умовах кріогенних температур та високих рівнів космічного опромінення.

Висновки. В роботі встановлено, що розробка адекватних моделей програмованих мікро- та наноструктур дає позитивні результати, а саме – прискорює процес відтворення дискретних функцій на базі одноелектронних мультиплексорів у порівнянні з мікросхемними аналогами. Це, в свою чергу, розширює математичний опис етапів моделювання наноструктур до рівня мажоритарної логіки. Оскільки одноелектроніка продовжує свій розвиток, Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 2 (9)'2025.

ток на базі транзисторної напівпровідникової мікроелектроніки, то на цей час необхідно подолати суттєві фізико-технологічні та квантово-енергетичні обмеження, які властиві транзисторним структурам метал-окисел-напівпровідник. Запропонований алгоритм автоматизованого програмування (табл. 1) мікро- та наноструктур підтвердив еквівалентність створених моделей. Головною перевагою, яка визначає високу ефективність нового методу моделювання мікро- та наноструктур, є те, що він не використовує інформацію про технологічні особливості транзисторних мікрокомпонент, а це забезпечує високу точність реалізації дискретних функцій. Однак, головним недоліком логічних наноструктур залишаються дуже низькі температури (десяти частки градусів Кельвіна), що пов'язано із нанорозмірами квантових острівців [6]. Тому сучасні наноструктури експлуатуються виключно в космічних пристроях.

Список літератури

1. Lent C., Snider G., Lieberman M., Porod W. Quantum-dot cellular automata (QCA): The physics of computing with arrays of quantum dot molecules // *Proceedings of the IEEE*. – 1997. – vol. 85. – no. 4. – pp. 541 – 557.
2. Nielsen M., Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information*. – Cambridge : University Press, 2010. – 676 p.
3. Uyemura J. *Chip Design for Submicron VLSI: CMOS Layout and Simulation*. – Cengage Learning, 2001. – 592 p.
4. Jaeger R. C., Blalock T. N. *Microelectronic Circuit Design*. – McGraw-Hill, 2010. – 1312 p.
5. Wolf W. *FPGA-Based System Design*. – Prentice Hall, 2004. – 507 p.
6. Walus K., Jullien G. A. Quantum-Dot Cellular Automata: Theory and Application // *IEEE Transactions on Nanotechnology*. – 2006. – vol. 99. – no. 2. – pp. 143 – 150.
7. Jha N. K., Roy K. *Nanoelectronic Circuit Design*. – Springer, 2010. – 439 p.
8. Tahoori M. B. *Nanotechnology for Logic and Memory Applications*. – Springer, 2018. – 300 p.
9. Walus K., Jullien G. A. Design Tools for an Emerging SOC Technology: Quantum-Dot Cellular Automata // *Processing of the IEEE*. – 2006. – vol. 94. – no. 6. – pp. 1225 – 1244. DOI: 10.1109/JPROC.2006.875791.
10. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Single-electron sequential nanocircuits and their models // *Electronics and Control Systems*. – 2024. – vol. 2. – no. 80. – pp. 43 – 50. DOI: 10.18372/1990-5548.80.18683.

References (transliterated)

1. Lent C., Snider G., Lieberman M., Porod W. Quantum-dot cellular automata (QCA): The physics of computing with arrays of quantum dot molecules. *Proceedings of the IEEE*. 1997, vol. 85, no. 4, pp. 541–557.
2. Nielsen M., Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, University Press, 2010. 676 p.
3. Uyemura J. *Chip Design for Submicron VLSI: CMOS Layout and Simulation*. Cengage Learning, 2001. 592 p.
4. Jaeger R. C., Blalock T. N. *Microelectronic Circuit Design*. McGraw-Hill, 2010. 1312 p.
5. Wolf W. *FPGA-Based System Design*. Prentice Hall, 2004. 507 p.
6. Walus K., Jullien G. A. Quantum-Dot Cellular Automata: Theory and Application. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2006, vol. 99, no. 2, pp. 143–150.
7. Jha N. K., Roy K. *Nanoelectronic Circuit Design*. Springer, 2010. 439 p.
8. Tahoori M. B. *Nanotechnology for Logic and Memory Applications*. Springer, 2018. 300 p.
9. Walus K., Jullien G. A. Design Tools for an Emerging SOC Technology: Quantum-Dot Cellular Automata. *Processing of the IEEE*. 2006, vol. 94, no. 6, pp. 1225–1244. DOI: 10.1109/JPROC.2006.875791.
10. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Single-electron sequential nanocircuits and their models. *Electronics and Control Systems*. 2024, vol. 2, no. 80, pp. 43–50. DOI: 10.18372/1990-5548.80.18683.

Надійшла (received) 29.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoria.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

О. О. НАГАЙЧЕНКО**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ НАНОПРИЛАДІВ****НАУКОВИЙ КЕРІВНИК О. С. МЕЛЬНИК**

У статті розглянуто фізико-математичну модель двостадійної дифузії донорних і акцепторних домішок у кремнієвих напівпровідниках для створення двох $p-n$ – переходів у нанорозмірних структурах. Враховано температурну залежність коефіцієнтів та енергії активації дифузії, тривалості дифузійних циклів, концентрацію домішок у вхідному кремнії, поверхневі концентрації та граничну розчинність легуючих речовин. Проведено чисельне моделювання одновимірної розподілу концентрацій із визначенням точок інверсії типу провідності. Розраховано глибини залягання емітерного та колекторного переходів, а також ширину бази з урахуванням повторного перерозподілу домішок. Моделювання проведено в середовищі MathCAD. Побудовано профілі легування після кожної стадії термічної обробки. Оцінено вплив технологічних параметрів на формування електричного поля в базовій області. Показано залежність глибини $p-n$ – переходів від часу та температури окремих стадій дифузії. Проведено серію розрахунків для різних геометричних масштабів: 100 нм, 50 нм, 20 нм. Визначено зміни ширини бази залежно від режимів загону й розгону. Побудовано криві розподілу концентрацій для кожного випадку. Оцінено коефіцієнт підсилення за струмом у схемі з загальним емітером. Наведено числові дані для типових технологічних параметрів. Запропонована модель може бути використана для прогнозування параметрів транзистора до етапу фізичної реалізації, а також для підбору оптимальних умов формування базової області в мікро- і нанoeлектронних структурах.

Ключові слова: біполярний нанотранзистор, дифузія домішок, $p-n$ – перехід, розподіл концентрації домішок, ширини бази, MathCAD, коефіцієнт підсилення струму, глибина залягання емітерного та колекторного переходів.

О. О. НАГАЙЧЕНКО**PHYSICO-MATHEMATICAL MODELING OF SEMICONDUCTOR NANODEVICES****SCIENTIFIC SUPERVISOR O. S. MELNYK**

The article presents a physico-mathematical model of two-stage diffusion of donor and acceptor impurities in silicon semiconductors for the formation of two $p-n$ – junctions in nanoscale structures. The model takes into account the temperature dependence of diffusion coefficients and activation energy, duration of diffusion cycles, impurity concentration in the initial silicon, surface concentrations, and the solubility limit of dopants. One-dimensional concentration profiles were simulated numerically, with identification of conductivity type inversion points. The depths of the emitter and collector junctions and the base width were calculated, considering secondary redistribution of dopants. The simulation was carried out using the MathCAD environment. Doping profiles were constructed for each stage of thermal treatment. The influence of technological parameters on the formation of the electric field in the base region was evaluated. The dependence of the junction positions on the time and temperature of individual diffusion stages was demonstrated. A series of simulations was conducted for various geometric scales: 100 nm, 50 nm and 20 nm. The change in base width under different pre-deposition and drive-in regimes was determined. Concentration distribution curves were plotted for each case. The current gain in a common-emitter configuration was evaluated. Numerical data were presented for typical technological parameters. The proposed model can be used to predict transistor parameters prior to fabrication and to justify the choice of optimal conditions for base region formation in micro- and nanoelectronic structures.

Key words: bipolar nanotransistor, impurity diffusion, $p-n$ – junction, impurity concentration distribution, base width, MathCAD, current gain, emitter and collector junction depth.

Вступ. Сучасні стимули розвитку *мікроелектроніки* вимагають зменшення розмірів *напівпровідникових приладів*, зокрема *біполярних транзисторів*, що дозволяє підвищити їхню швидкість, зменшити енергоспоживання та збільшити функціональну щільність інтегральних схем. Зі зменшенням геометричних розмірів активних елементів критично зростає вплив технологічних факторів на їхні електричні характеристики. Одним із ключових аспектів проектування є точне моделювання процесів дифузійного легування, які визначають положення $p-n$ – переходів та ширину базової області. Формування заданого профілю домішки в умовах нанометрових масштабів потребує використання *математичних моделей* для оптимізації технологічних режимів.

Постановка задачі. Метою дослідження є *чисельне моделювання процесу двостадійної дифузії акцепторних і донорних домішок* у кремнієвому напівпровіднику для формування *емітерного та колекторного $p-n$ – переходів* у біполярному нанотранзисторі. Завданням дослідження є побудова одновимірної моделі розподілу концентрацій акцепторних і донорних домішок з урахуванням температурної залежності *коефіцієнтів дифузії*, граничної розчинності, часу та послідовності термічної обробки. Необхідно визначити глибину залягання $p-n$ – переходів, ширину бази та оцінити вплив технологічних режимів загону і розгону на формування легуваних областей. Також передбачається розрахунок *коефіцієнта підсилення* за струмом у схемі з загальним емітером для типових геометричних масштабів наноструктур.

Математична модель. У формуванні структури біполярного транзистора необхідно створити два $p-n$ – переходи. Схема дискретного вертикального біполярного транзистора, сформованого за стандартною планарною технологією, показана на рис. 1. Такий транзистор можна сформувати, наприклад, якщо в кремній ввести спочатку акцепторну домішку, а потім донорну.

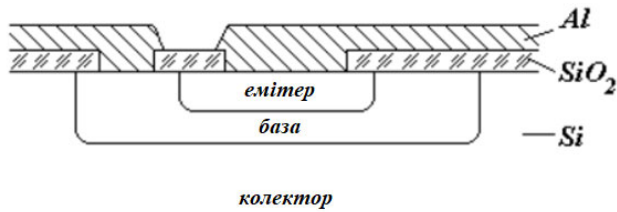


Рис. 1 – Схема біполярного транзистора, сформованого за стандартною планарною технологією.

Перший метод, хоча й відрізняється простотою, не допускає роздільного регулювання концентрації домішок або температури. Тому зазвичай віддають перевагу другому методу, що допускає роздільне регулювання концентрації та температури. Спочатку в напівпровідник вводять домішку (донор), що повільно дифундує, інакше буде важко керувати розподілом домішки (акцептора), що швидко дифундує.

Для кращого контролю процесу потрібно, щоб обидва домішкових елементи були присутні в напівпровіднику тільки під час другої дифузії. У тому випадку, коли можна задавати концентрації незалежно від температури, проведення обох дифузійних циклів за умови різних температур забезпечує більшу гнучкість процесу. Навіть коли коефіцієнти дифузії донора й акцептора однакові, можна управляти процесом шляхом різної тривалості першого і другого циклу.

Базову дифузію зазвичай здійснюють у дві стадії: перша – стадія загону, друга – стадія розгону. Стадію загону проводять протягом короткого часу, у цьому випадку кількість домішки суворо регламентується.

Розподіли концентрації домішок (1), (3), (5), (6) та температурна залежність коефіцієнта дифузії (7) описані згідно з моделлю Grove A. S., Leistiko O., Sah C. T. [1].

Розподіл концентрації домішки описується *erfc* – функцією:

$$C_1(x) = C_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_1 \cdot t_1}}. \quad (1)$$

Поверхнева концентрація домішки Q (2) розрахована за моделлю Fair R. B. [2]:

$$Q = C_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot D_1 \cdot t_1}, \quad (2)$$

де Q – поверхнева концентрація введеної домішки; C_0 – поверхнева концентрація домішки в процесі загону; D_1 – коефіцієнт дифузії домішки під час загону; t_1 – коефіцієнт дифузії домішки в процесі загону, і водночас підпорядковується експоненціальним розподілам.

Другу стадію проводять більш тривалий час, а розподіл домішки:

$$C_2(x) = \frac{Q}{\sqrt{\pi \cdot D_2 \cdot t_2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D_2 \cdot t_2}\right), \quad (3)$$

де D_2 – коефіцієнт дифузії домішки в процесі розгону; t_2 – час розгону домішки.

Глибина залягання $p-n$ – переходу (4) визначена за методом експоненційного розподілення домішки, наведеним у [3]:

$$X_i = 2\sqrt{D_2 \cdot t_2} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{Q}{C_s} \sqrt{\pi \cdot D_2 \cdot t_2}\right)}, \quad (4)$$

де C_s – концентрація домішки у вихідному напівпровіднику.

Дифузію емітерної області проводять в одну стадію, зазвичай із джерела з постійною поверхневою концентрацією, тому розподіл домішки описується *erfc* – функцією:

$$C_3(x) = C_0 \cdot \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_3 \cdot t_3}}, \quad (5)$$

де D_3 – коефіцієнт дифузії емітерної домішки; t_3 – час дифузії емітерної домішки.

Глибина залягання емітерного $p-n$ – переходу визначається точкою інверсії типу провідності. Для розрахунку глибини залягання $p-n$ – переходу необхідно розв'язати кінетичне рівняння:

$$C_3(x) + C_s = C_2(x). \quad (6)$$

Точний розрахунок глибини залягання $p-n$ – переходу в аналітичному вигляді дуже складний, тому рівняння (6) розв'язується чисельним способом.

Температурна залежність коефіцієнта дифузії має вигляд:

$$D = D_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right), \quad (7)$$

де D_0 – постійна, чисельно рівна коефіцієнту дифузії за умови нескінченно високої температури, $\text{см}^2/\text{с}$; E – енергія активації дифузії, еВ ; $k = 8,625 \cdot 10^{-5} \text{ еВ/К}$ – *постійна Больцмана*.

Коефіцієнт дифузії As при 1200 С	$\text{DoAs} := 24 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$		
Коефіцієнт дифузії В при 1200 С	$\text{DoB} := 5.1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$		
Енергія активації дифузії для As	$\text{EaAs} := 4.08 \text{ еВ}$		
Енергія активації дифузії для В	$\text{EaB} := 3.7 \text{ еВ}$		
Поверхнева концентрація As	$\text{No}_1 := 3 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{см}^{-3}}$		
Поверхнева концентрація В	$\text{No}_3 := 10^{21} \frac{1}{\text{см}^{-3}}$		
Концентрація домішки у вихідному Si	$\text{Nc} := 10^{17} \frac{1}{\text{см}^{-3}}$	Загонка миш'яку	$\text{T}_1 := 273 + 1000 \text{ К}$
Максимальна розчинність As у Si	$\text{MA}_s := 2 \cdot 10^{21} \frac{1}{\text{см}^{-3}}$	Розгін миш'яку	$\text{t}_1 := 60 \cdot 15 \text{ с}$
Максимальна розчинність В у Si	$\text{MB} := 4 \cdot 10^{20} \frac{1}{\text{см}^{-3}}$		$\text{T}_2 := 273 + 1100 \text{ К}$
Постійна Больцмана	$k := 8.625 \cdot 10^{-5} \frac{\text{еВ}}{\text{К}}$	Дифузія бору	$\text{t}_2 := 60 \cdot 60 \text{ с}$
			$\text{T}_3 := 273 + 1100 \text{ К}$
			$\text{t}_3 := 60 \cdot 5 \text{ с}$

Рис. 2 – Константи, які ми задаємо в середовищі MathCad.

транзистора; p_B – рівноважна щільність неосновних носіїв на основі.

Значимо, що $\gamma < 1$ і $\alpha_T < 1$, а величини, що доповнюють їх до 1, пропорційні електронному струму, що з базового контакту. У біполярному транзисторі з шириною бази, меншою $0.1L_B$, $\alpha_T > 0.995$, коефіцієнт підсилення по струму майже повністю визначається ефективністю емітера. За умови, що $\alpha_T \sim 1$,

$$h_{FE} = \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{p_B D_B I_E}{L_E D_E L_B} \text{cth}\left(\frac{W}{L_B}\right). \quad (10)$$

Моделювання в середовищі MathCad. Задаємо константи та формули в MathCad для моделювання процесу дифузії нанорозмірного транзистора (рис. 2, 3).

$$D(T) := \text{DoB} \cdot \exp\left(-\frac{\text{EaB}}{k \cdot T}\right)$$

$$\text{N1}(x) := \begin{cases} \left[\text{No}_1 \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{D(T_1) \cdot t_1}}\right) \right) \right] & \text{if } \text{No}_1 < \text{MB} \\ \left[\text{MB} \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{D(T_1) \cdot t_1}}\right) \right) \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

a

$$Q := \text{Nc} \cdot \sqrt{\pi \cdot D(T_2) \cdot (t_2 + t_3)}$$

$$\text{N2}(x) := \frac{Q}{\sqrt{\pi \cdot D(T_2) \cdot (t_2 + t_3)}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{4 \cdot [D(T_2) \cdot (t_2 + t_3)]}\right]$$

$$D(T_2) = 1.375 \times 10^{-13}$$

b

$$DAs(T) := \text{DoAs} \cdot \exp\left(-\frac{\text{EaAs}}{k \cdot T}\right)$$

$$D3 := DAs(T_3) \quad D3 = 2.614 \times 10^{-14}$$

$$\text{N3}(x) := \begin{cases} \left[\text{No}_3 \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{DAs(T_3) \cdot t_3}}\right) \right) \right] & \text{if } \text{No}_3 < \text{MA}_s \\ \left[\text{MA}_s \cdot \left(1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{DAs(T_3) \cdot t_3}}\right) \right) \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

в

Рис. 3 – Задаємо в середовищі MathCad формули для розрахунку стадій дифузії: а – розрахунок концентрації домішкових атомів, уведених під час заgonу; б – друга стадія (розgonу); в – третя стадія – стадія дифузії.

Після моделювання в середовищі MathCad отримано розподіли концентрації домішок по глибині пластини для різних стадій дифузії та глибини залягання емітерного та колекторного переходу для нанорозмірних транзисторів 100, 50, 20 нм (рис. 4 – 6).

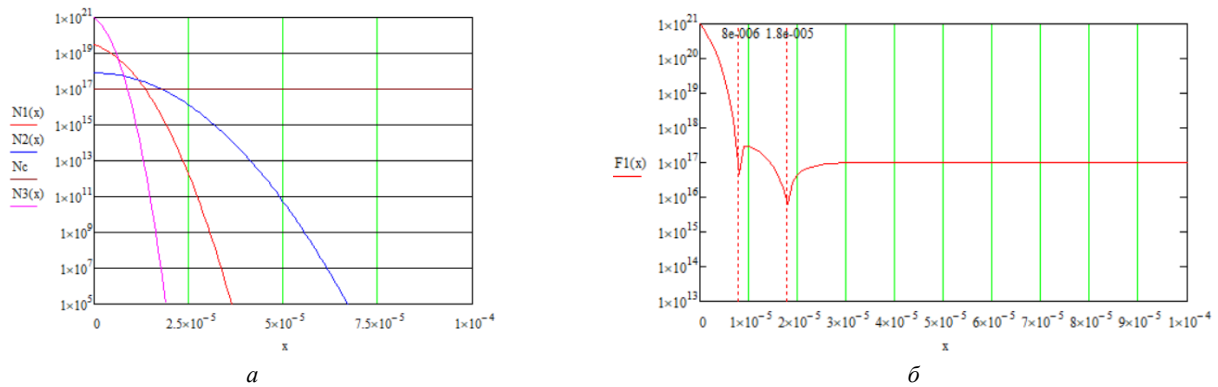


Рис. 4 – Результати моделювання в середовищі MathCad для 100 нм нанотранзистора коли $t_2 = 175$ с та $t_2 = 100$ с :

a – розподіл концентрації домішок по глибині пластини для різних стадій дифузії;
 b – глибина залягання емітерного та колекторного переходу.

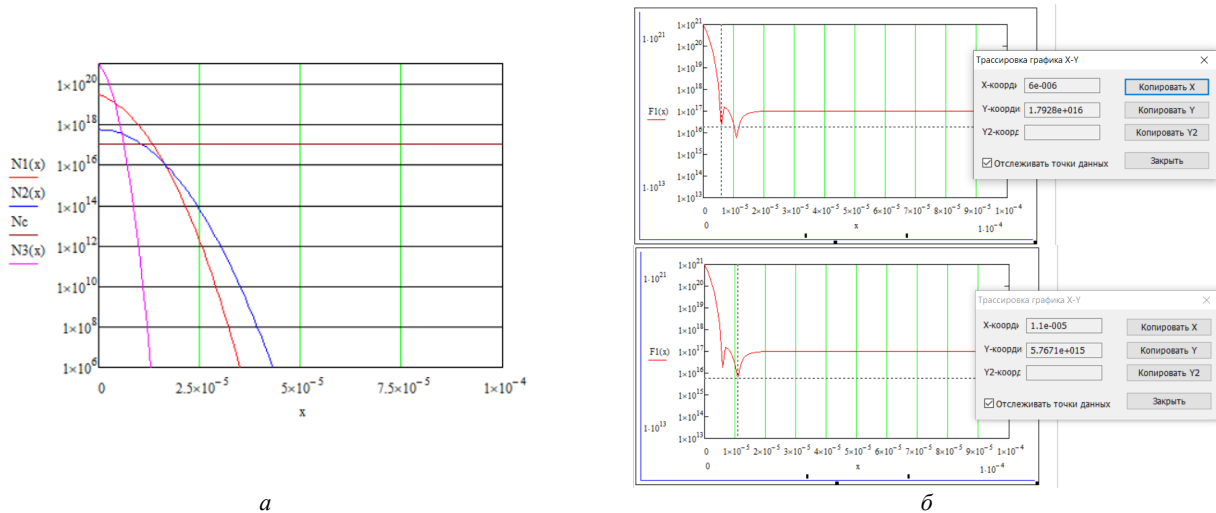


Рис. 5 – Результати моделювання в середовищі MathCad для 50 нм нанотранзистора коли $t_2 = 75$ с та $t_3 = 50$ с :

a – розподіл концентрації домішок по глибині пластини для різних стадій дифузії;
 b – глибина залягання емітерного та колекторного переходу.

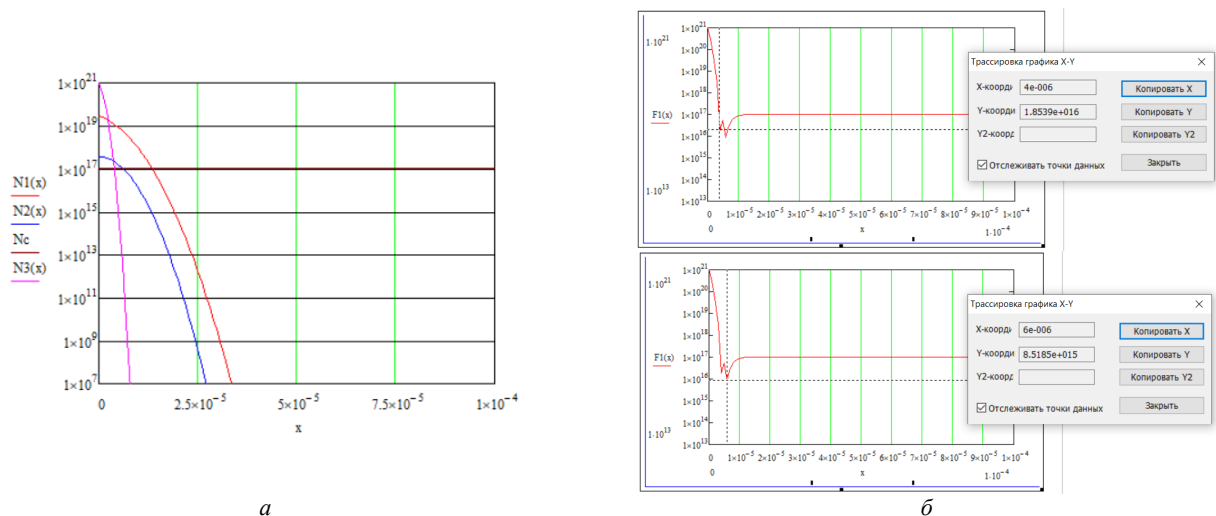


Рис. 6 – Результати моделювання в середовищі MathCad для 20 нм нанотранзистора коли $t_2 = 35$ с та $t_3 = 20$ с :

a – розподіл концентрації домішок по глибині пластини для різних стадій дифузії;
 b – глибина залягання емітерного та колекторного переходу.

За допомогою формули (10) [4] розраховано статичний коефіцієнт підсилення струму у схемі із загальним емітером h_{FE} , коли початкові константи дорівнюють:

$$p_B = 1e^{13} \frac{1}{\text{см}^3}; \quad L_B = 1e^4 \text{ см}; \quad L_E = 2e^{-4} \text{ см}; \quad D_E = 24 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}; \quad D_B = 5.1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}};$$

$$I_E = 1 \text{ мА}; \quad W = 1 \text{ нм} - 1 \text{ мкм}, \text{ то}$$

$$h_{FE} = \frac{p_B D_B I_E}{L_E D_E L_B} \text{cth} \left(\frac{W}{L_B} \right).$$

Отже,

$$h_{FE} \text{ для } W = 10 \text{ нм}: 1.06e+21;$$

$$h_{FE} \text{ для } W = 20 \text{ нм}: 5.31e+20;$$

$$h_{FE} \text{ для } W = 50 \text{ нм}: 2.13e+20;$$

$$h_{FE} \text{ для } W = 100 \text{ нм}: 1.06e+20.$$

Графік залежності коефіцієнта підсилення транзистора від дози домішки, імплантованої в базу, наведено на рис. 7.

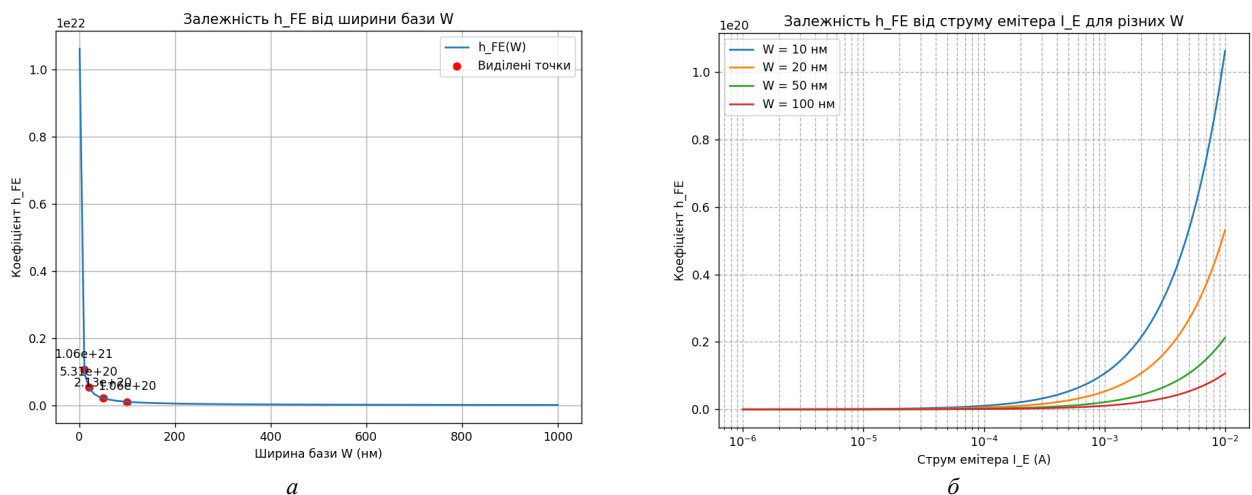


Рис. 7 – Залежність коефіцієнта підсилення транзистора від ширини бази:

a – залежність коефіцієнта підсилення транзистора від ширини бази $W = 1 \text{ нм} - 1 \text{ мкм}$;

б – залежність коефіцієнта підсилення транзистора від ширини бази $W = 100, 50, 20, 10 \text{ нм}$.

Перспективи подальших досліджень. Отримані результати фізико-математичного моделювання двостадійного процесу дифузії домішок у нанорозмірних структурах біполярних транзисторів відкривають низку перспективних напрямів для подальших наукових досліджень.

По-перше, доцільним є розширення моделі з урахуванням двовимірних і тривимірних ефектів дифузії, що набувають особливої ваги в умовах подальшого зменшення розмірів транзисторів. У таких масштабах неоднорідності розподілу домішок по площині та глибині суттєво впливають на електричні характеристики приладів, а тому врахування просторової анізотропії дифузії дозволить отримати більш точні прогнози.

По-друге, перспективним напрямом є врахування ефектів рекомбінації, генерації та електростатичного екранування в моделі. Це дозволить описати динаміку носіїв заряду під час технологічних стадій і в робочому режимі транзистора, що є важливим для подальшого переходу від топологічного до повнофункціонального електрофізичного моделювання.

По-третє, доцільно здійснити інтеграцію отриманих результатів у комплексні САПР-системи (CAD), зокрема шляхом розробки програмних модулів для передбачення параметрів $p-n$ – переходів на етапі проектування мікросхем. Це забезпечить практичне застосування моделі в умовах промислової мікро- та наноелектроніки.

Окрему увагу заслуговує розширення дослідження шляхом врахування напружених шарів, сегрегації та кластеризації домішок, що особливо актуально при високотемпературній обробці. Залучення даних із літератури щодо граничної розчинності та стабільності домішкових профілів дозволить модифікувати модель під складні фізико-хімічні умови.

Також перспективним є дослідження впливу іонної імплантації як альтернативного або комбінованого методу введення домішок. Порівняльний аналіз ефективності дифузії та імплантації в межах єдиної моделі надасть змогу обґрунтовано вибирати оптимальні технологічні підходи до формування базової області транзистора.

Крім того, подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення деградаційних механізмів та надій-

ності нанопристроїв, зумовлених зміною профілю легування під впливом часу, температури та робочого навантаження. Це особливо актуально для застосування біполярних нанотранзисторів у відповідальних сферах, таких як авіоніка, космічна техніка та біомедичні пристрої.

З урахуванням вищевикладеного, подальший розвиток фізико-математичного моделювання біполярних напівприладів сприятиме створенню більш точних, надійних та ефективних напівпровідникових структур, орієнтованих на вимоги сучасної та перспективної наноелектроніки.

Висновки. Таким чином, у роботі успішно було проведено фізико-топологічне моделювання процесу формування біполярного транзистора з використанням дифузійних методів. Основні результати, отримані в ході роботи, можна підсумувати наступним чином:

1. Аналіз технології формування транзисторних структур.

Було розглянуто основні методи створення $p-n$ – переходу у кремнієвій підкладці за допомогою дифузійних процесів. Досліджено особливості послідовного введення домішок та їх вплив на характеристики транзистора.

2. Моделювання дифузійного процесу.

Використовуючи програмне середовище MathCad, проведено чисельне моделювання процесу дифузії домішок у напівпровідникову пластину. Досліджено залежність концентрацій донорних і акцепторних домішок від глибини залягання та вплив температурного режиму на кінцевий розподіл домішок.

3. Розрахунок параметрів біполярного транзистора.

Виконано розрахунки ширини базової області, глибини залягання колекторного та емітерного $p-n$ – переходу, що дозволило оцінити електрофізичні параметри отриманої структури. Визначено вплив часу та температури дифузії на глибину проникнення домішок.

4. Визначення оптимальних технологічних параметрів.

Було проведено серію експериментів, змінюючи час та температуру дифузії, що дозволило отримати оптимальні параметри для формування необхідної транзисторної структури. Результати показали, що контрольований вибір технологічних параметрів дає змогу досягти необхідних характеристик транзистора.

Список літератури

1. Grove A. S., Leistik O., Sah C. T. Redistribution of Acceptor and Donor Impurities during Thermal Oxidation of Silicon // *Journal of Applied Physics*. – 1964. – Vol. 35. – no. 9. – P. 2695 – 2701. DOI: 10.1063/1.1713810.
2. Fair R. B. Concentration Profiles of Diffused Dopants in Silicon. "Impurity Doping Processes in Silicon". – Amsterdam: North-Holland Publishing, 1981. – P. 315 – 442.
3. Plummer J. D., Deal M. D., Griffin P. B. *Silicon VLSI Technology: Fundamentals, Practice and Modeling*. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. – 856 p.
4. Sze S. M., Ng Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. 3rd ed. – Hoboken : John Wiley & Sons, 2007. – 832 p.

References (transliterated)

1. Grove A. S., Leistik O., Sah C. T. Redistribution of Acceptor and Donor Impurities during Thermal Oxidation of Silicon // *Journal of Applied Physics*. 1964, Vol. 35, no. 9, pp. 2695–2701. DOI: 10.1063/1.1713810.
2. Fair R. B. Concentration Profiles of Diffused Dopants in Silicon. "Impurity Doping Processes in Silicon". – Amsterdam: North-Holland Publishing, 1981. – P. 315 – 442.
3. Plummer J. D., Deal M. D., Griffin P. B. *Silicon VLSI Technology: Fundamentals, Practice and Modeling*. Upper Saddle River, Prentice Hall, 2000. 856 p.
4. Sze S. M., Ng Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. 3rd ed. Hoboken, John Wiley & Sons, 2007. 832 p.

Надійшло (received) 10.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Нагайченко Олександр Олегович – студент 5 курсу, кафедри Електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей (ЕРMIT), факультету Аеронавігації, електроніки та телекомунікацій (ФА-ЕТ), Державний університет «Київський авіаційний інститут», м. Київ; тел.: (093) 974-16-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0197-0572>; e-mail: t3t3t3@ukr.net.

Nahaichenko Oleksandr Olegovych – 5th-year student, Department of Electronics, Robotics, and Monitoring and Internet of Things Technologies (ERMIT), Faculty of Aeronautics, Electronics, and Telecommunications (FAET), State University "Kyiv Aviation Institute", Kyiv; tel.: (093) 974-16-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0197-0572>; e-mail: t3t3t3@ukr.net.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, В. В. ІВАНОВ, А. С. ШНИЦАР, О. Р. ГІЩАК, А. В. ЗАБОРНИЙ

ЕФЕКТИВНЕ ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ШВИДКООСЦИЛЬОВАНИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Однією з ключових задач у сучасній прикладній математиці, без якої неможливе моделювання та аналіз складних процесів, зокрема в математичній фізиці, цифровій обробці зображень, є чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Часто аналітичне обчислення багатовимірних інтегралів є неможливим через складність самих функцій або області інтегрування, що зумовлює необхідність застосування ефективних чисельних методів. Основна проблема чисельного інтегрування функцій багатьох змінних полягає в зростанні обчислювальних витрат зі збільшенням розмірності області інтегрування – так зване «прокляття розмірності». Це спонукає до пошуку ефективних методів, які дозволяють зберігати баланс між обчислювальною складністю та точністю результатів. Особливий інтерес становлять методи чисельного інтегрування, розроблені з використанням інформаційних операторів, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних в точках, на лініях, площинах тощо. На основі таких операторів будуються економні схеми інтерполяції функцій двох та трьох змінних. Застосування економних схем в чисельному інтегруванні функцій декількох змінних дозволяє з меншою кількістю даних обчислювати багатовимірні інтеграли із заданою наперед точністю порівняно з класичними методами. Метою даної статті є демонстрація використання економних схем інтерполяції для наближеного обчислення подвійних інтегралів, а також двовимірних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду.

Ключові слова: математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування, швидкоосцильовані функції багатьох змінних, кубатурна формула, інтерполяція функцій.

O. P. NECHUIVITER, V. V. IVANOV, A. S. SHNITSAR, O. R. HISHCHAK, A. V. ZABORNYI EFFICIENT NUMERICAL INTEGRATION OF TWO-DIMENSIONAL HIGHLY OSCILLATING FUNCTIONS OF GENERAL TYPE

One of the key tasks in modern applied mathematics, without which modeling and analysis of complex processes is impossible, in particular in mathematical physics and digital image processing, is the numerical integration of functions of many variables. Often, the analytical calculation of multi-variable integrals is impossible due to the complexity of the functions themselves or the integration domain, which necessitates the use of effective numerical methods. The main problem of numerical integration of functions of many variables is the growth of computational costs with increasing dimension of the integration domain - the so-called "curse of dimension". This leads to the search for efficient methods that allow to maintain a balance between computational complexity and accuracy of results. Of particular interest are numerical integration methods developed using information operators that restore intermediate values of quantities based on a given set of known values of a function of many variables at points, on lines, planes, etc. On the basis of such operators, economical schemes for interpolating functions of two and three variables are built. The use of economical schemes in the numerical integration of functions of several variables allows to calculate multidimensional integrals with a predetermined accuracy with less data compared to classical methods. The purpose of this article is to demonstrate the use of economical interpolation schemes for the approximate calculation of double integrals, as well as two-dimensional integrals of highly oscillating functions of general type.

Key words: mathematical modeling of processes, digital image processing, numerical integration, highly oscillating functions of many variables, cubature formula, function interpolation.

Вступ. У сучасній прикладній математиці чисельне інтегрування функцій багатьох змінних є однією з важливих задач. В математичній фізиці подібні задачі виникають під час моделювання теплопровідності, дифузії, розподілу потенціалів, енергій та інших фізичних величин у континуальних середовищах, а в задачах цифрової обробки сигналів та зображень обчислення багатовимірних інтегралів виникає при фільтрації, реконструкції сигналів, спектральному аналізі, обчисленні кореляційних і статистичних характеристик. Важливо зазначити, що при збільшенні розмірності області інтегрування зростає обчислювальна складність, тому актуальним є пошук ефективних методів чисельного інтегрування функцій багатьох змінних. Наразі існують методи чисельного інтегрування, в тому числі методи чисельного інтегрування швидкоосцильованих функцій декількох змінних, які розроблені з використанням інформаційних операторів, що відновлюють проміжні значення функцій за відомими значеннями функції в точках, на лініях, площинах тощо. До таких інформаційних операторів ми відносимо оператори О. М. Литвина, на основі яких створені економні схеми інтерполяції функцій двох та трьох змінних. Застосування економних схем інтерполяції при побудові кубатурних формул наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох та трьох змінних дозволило робити обчислення з меншою кількістю даних порівняно з класичними методами. В даній статті розглядається використання економних схем інтерполяції для наближеного обчислення подвійних інтегралів, а також двовимірних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 4] можна ознайомитися з оглядом алгоритмів та методів, які присвячені чисельному інтегруванню швидкоосцильованих функцій багатьох змінних. Більш детально зупинимося на чисельному інтегруванні швидкоосцильованих функцій у випадку, коли інформація про функції задається значеннями функції на лініях, площинах. До таких методів відносяться кубатурні формули, які будуються з використанням різних інформаційних операторів, зокрема операторів О. М. Литвина (операторів інтерлінації, інтерфлетації) [5, 6]. Дослідження щодо обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів інтерлінації функцій з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів було висвітлено в роботах [7 – 15]. Обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій трьох змінних, зокрема $3D$ – коефіцієнтів Фур'є, з використанням інформаційних операторів детально розглянуто в роботах [16 – 20]. В монографії

ях [21 – 23] наукові результати узагальнено та викладено з точки зору класифікації кубатурних формул за типом завдання інформації про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Кубатурні формули будуються з використанням інформаційних операторів з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. Важливо зазначити, що в своїй побудові інформаційні оператори використовували сліди функцій на площинах та лініях. Зауважимо, що у випадку, коли інформація про функцію задавалася в точках для обчислення $2D$ -, $3D$ - коефіцієнтів Фур'є використовувалися економні схеми інтерполяції, побудовані на основі операторів інтерлінації, інтерфлетації відповідно.

Наближене обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду розглянуто в статтях [24 – 31]. Метою даної роботи є створення алгоритмів обчислення двовимірних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду з використанням економних схем інтерполяції, побудованих на операторах лінійної сплайн-інтерлінації на класі диференційованих функцій.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy, \quad \omega \gg 2\pi \quad (1)$$

побудувати кубатурну формулу з використанням операторів лінійної сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах лінійної сплайн-інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримати оцінку похибки наближення, порівняти кубатурну формулу з класичними алгоритмами обчислень щодо кількості використаних значень.

Побудова операторів для економних схем лінійної сплайн-інтерполяції на основі операторів лінійної сплайн-інтерлінації. Розглянемо $H^{2,1}(M, \tilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq M$, $|f(x, y)| \leq M$, $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} & H_{10}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y-y_1}{-\Delta_1}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases} \\ h_{1k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x-x_{k-1}}{\Delta_1}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \frac{x-x_{k+1}}{-\Delta_1}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} & H_{1j}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y-y_{j-1}}{\Delta_1}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \frac{y-y_{j+1}}{-\Delta_1}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1} \end{cases} & k = \overline{1, \ell_1 - 1}, & j = \overline{1, \ell_1 - 1}, \\ h_{1\ell_1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell_1-1}, \\ \frac{x-x_{\ell_1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1} < x < x_{\ell_1}, \\ 0, & x \geq x_{\ell_1}, \end{cases} & H_{1\ell_1}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell_1-1}, \\ \frac{y-y_{\ell_1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1} < y < y_{\ell_1}, \\ 0, & y \geq y_{\ell_1}, \end{cases} \\ & & x_k &= k\Delta_1, \quad y_j = j\Delta_1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}; \\ \tilde{h}_{10}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_0, \\ \frac{x-\tilde{x}_1}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_0 < x < \tilde{x}_1, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_1, \end{cases} & \tilde{H}_{10}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_0, \\ \frac{y-\tilde{y}_1}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_0 < y < \tilde{y}_1, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_1, \end{cases} \\ \tilde{h}_{1k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\tilde{k}-1}, \\ \frac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}-1} < x < \tilde{x}_{\tilde{k}}, \\ \frac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}} \leq x < \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \end{cases} & & \tilde{k} = \overline{1, \ell_1^2 - 1}, \end{aligned}$$

$$\tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\tilde{j}-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}-1} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}+1}}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2 - 1},$$

$$\tilde{h}1_{1\ell_1^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\ell_1^2-1}, \\ \frac{x - \tilde{x}_{\ell_1^2-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\ell_1^2-1} \leq x < \tilde{x}_{\ell_1^2}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\ell_1^2}, \end{cases} \quad \tilde{H}1_{1\ell_1^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\ell_1^2-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\ell_1^2-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\ell_1^2-1} \leq y < \tilde{y}_{\ell_1^2}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\ell_1^2}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\tilde{\Delta}_1, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\tilde{\Delta}_1, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{0, \ell_1^2 - 1}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \frac{1}{\ell_1^2}.$$

Допоміжні функції $h2_{10}(x), H2_{10}(y), h2_{1p}(x), p = \overline{1, \ell_2 - 1}, H2_{1s}(y), s = \overline{1, \ell_2 - 1}, h2_{1\ell_2}(x), H2_{1\ell_2}(y), \tilde{h}2_{10}(x), \tilde{H}2_{10}(y), \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x), \tilde{p} = \overline{1, \ell_2^2 - 1}, \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y), \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2 - 1}, \tilde{h}2_{1\ell_2^2}(x), \tilde{H}2_{1\ell_2^2}(y)$ визначаються аналогічно при $\tilde{x}_{\tilde{p}} = \tilde{p}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \quad \tilde{y}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \quad \tilde{p}, \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2 - 1}, \quad \tilde{\Delta}_2 = 1/\ell_2^2$.

Розглянемо оператори

$$Jf(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{1k}(x) + \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{1j}(y) - \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{1k}(x) H1_{1j}(y);$$

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell_1^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h1_{1k}(x) \tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y) + \sum_{j=0}^{\ell_1} \sum_{\tilde{k}=0}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}1_{1\tilde{k}}(x) H1_{1j}(y) -$$

$$- \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{1k}(x) H1_{1j}(y);$$

$$Og(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{1p}(x) + \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{1s}(y) - \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h2_{1p}(x) H2_{1s}(y);$$

$$\tilde{O}g(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2} g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}}) h2_{1p}(x) \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y) + \sum_{s=0}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_s) \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x) H2_{1s}(y) -$$

$$- \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h2_{1p}(x) H2_{1s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{1k}(x), \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{1j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}1_{1\tilde{k}}(x), \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y);$$

$$O_1 g(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{1p}(x), \quad O_2 g(x, y) = \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{1s}(y);$$

$$\tilde{O}_1 g(x, y) = \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y) \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x), \quad \tilde{O}_2 g(x, y) = \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2} g(x, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y),$$

тоді для операторів-інтерліантів $Jf(x, y), Og(x, y)$ та операторів-інтерполянтів $\tilde{J}f(x, y), \tilde{O}g(x, y)$ справедливі наступні тотожності:

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f, \quad \tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f;$$

$$Og = (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g, \quad \tilde{O}g = (O_1 \tilde{O}_2 + \tilde{O}_1 O_2 - O_1 O_2) g.$$

На рис. 1 представлено загальний вид сітки, в якій будуть обиратися вузли функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$.

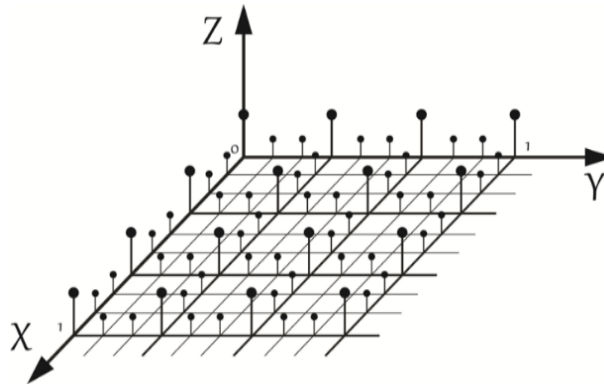


Рис. 1 – Загальний вид сітки в економних схемах лінійної сплайн-інтерполяції для чисельного інтегрування функцій двох змінних.

Кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу з використанням економних схем інтерполяції. Значно менше уваги в дослідженнях приділено питанню чисельного інтегрування подвійних та потрібних інтегралів з використанням інформаційних операторів О. М. Литвина. До таких досліджень можна віднести роботи [32 – 35], де представлено алгоритми побудови кубатурних формул з використанням значень функцій на лініях, а також розглядалося питання наближеного обчислення потрібного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних площинах, лініях.

В даному підрозділі представлена *кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу*, яка використовує економні схеми лінійної сплайн-інтерполяції на основі лінійної сплайн-інтерлінації. Оцінки похибки наближення будуть використані в наступних підрозділах при дослідженні точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду на класі диференційованих функцій.

Наступна кубатурна формула

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \quad (2)$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Теорема 1. Нехай $f(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I(\omega), \Phi(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2}.$$

Доведення.

Розглянемо додаткові функції, які будуть використані при доведенні теореми для представлення похибки наближення $f(x, y)$ оператором-інтерлінантом $Jf(x, y)$ через $f^{(1,1)}(x, y)$:

$$K_{1k}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x_k \leq \xi < x, \\ \frac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k}, & x < \xi \leq x_{k+1}, \end{cases} \quad K_{2j}(y, \eta) = \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j}, & y_j \leq \eta < y, \\ \frac{y_j - y}{y_{j+1} - y_j}, & y < \eta \leq y_{j+1}, \end{cases}$$

$$\tilde{K}_{1\tilde{k}}(x, \tilde{\xi}) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - \tilde{x}_{\tilde{k}}}, & \tilde{x}_{\tilde{k}} \leq \tilde{\xi} < x, \\ \frac{\tilde{x}_{\tilde{k}} - x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - \tilde{x}_{\tilde{k}}}, & x < \tilde{\xi} \leq \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \end{cases} \quad \tilde{K}_{2\tilde{j}}(y, \tilde{\eta}) = \begin{cases} \frac{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - y}{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - \tilde{y}_{\tilde{j}}}, & \tilde{y}_{\tilde{j}} \leq \tilde{\eta} < y, \\ \frac{\tilde{y}_{\tilde{j}} - y}{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - \tilde{y}_{\tilde{j}}}, & y < \tilde{\eta} \leq \tilde{y}_{\tilde{j}+1}. \end{cases}$$

Знайдемо оцінку $\rho(I(\omega), \Phi(\omega))$:

$$\rho(I(\omega), \Phi(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y) - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy \leq \\
& \leq \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(1,1)}(\xi, \eta) K_{1k}(x, \xi) K_{2j}(y, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy + \\
& + \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_k}^{\tilde{x}_{k+1}} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} \left| f^{(1,0)}(\tilde{\xi}, y_j) \right| \left| \tilde{K}_{1\tilde{k}}(x, \tilde{\xi}) \right| d\tilde{\xi} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy + \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| f^{(0,1)}(x_k, \tilde{\eta}) \right| \left| \tilde{K}_{2\tilde{j}}(y, \tilde{\eta}) \right| d\tilde{\eta} dy.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
& \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K_{1k}(x, \xi)| d\xi = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^x d\xi + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \int_x^{x_{k+1}} d\xi = \\
& = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (x_{k+1} - x) = \frac{2(x_{k+1} - x)(x - x_k)}{\Delta_1}, \\
& \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K_{1k}(x, \xi)| d\xi dx = \frac{2}{\Delta_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k) dx = \frac{2}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1^3}{6} = \frac{\Delta_1^2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \rho(I(\omega), \Phi(\omega)) \leq \tilde{M} \ell_1 \ell_1 \frac{\Delta_1^2}{3} \frac{\Delta_1^2}{3} + 2M \ell_1 \Delta_1 \ell_1^2 \cdot \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} = \frac{\tilde{M}}{9\ell_1^2} + \frac{2M}{3\ell_1^2} = \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2}.$$

Теорема 1 доведена.

Економні схеми лінійної сплайн-інтерполяції в наближеному обчисленні подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду. Наступна кубатурна формула

$$\tilde{\Phi}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \quad (4)$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу (1).

Щоб отримати оцінку похибки наближення інтегралу (1) за формулою (4) на класі диференційованих функцій, отримаємо спочатку оцінку похибки наближення інтегралу

$$\tilde{I}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (5)$$

за кубатурною формулою:

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy. \quad (6)$$

Теорема 2. Нехай $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \min \left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Розглянемо додаткові функції, які будуть використані при доведенні теореми для представлення похибки наближення $g(x, y)$ оператором-інтерліантом $Og(x, y)$ через $g^{(1,1)}(x, y)$:

$$G_{1p}(x, t) = \begin{cases} \frac{x_{p+1} - x}{x_{p+1} - x_p}, & x_p \leq t < x, \\ \frac{x_p - x}{x_{p+1} - x_p}, & x < t \leq x_{p+1}, \end{cases} \quad G_{2,s}(y, \tau) = \begin{cases} \frac{y_{s+1} - y}{y_{s+1} - y_s}, & y_s \leq \tau < y, \\ \frac{y_s - y}{y_{s+1} - y_s}, & y < \tau \leq y_{s+1}. \end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1p}(x, \tilde{t}) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - x}{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - \tilde{x}_{\tilde{p}}}, & \tilde{x}_{\tilde{p}} \leq t < x, \\ \frac{\tilde{x}_{\tilde{p}} - x}{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - \tilde{x}_{\tilde{p}}}, & x < t \leq \tilde{x}_{\tilde{p}+1}, \end{cases} \quad \tilde{G}_{2,\tilde{s}}(y, \tau) = \begin{cases} \frac{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - y}{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - \tilde{y}_{\tilde{s}}}, & \tilde{y}_{\tilde{s}} \leq \tau < y, \\ \frac{\tilde{y}_{\tilde{s}} - y}{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - \tilde{y}_{\tilde{s}}}, & y < \tau \leq \tilde{y}_{\tilde{s}+1}. \end{cases}$$

Знайдемо оцінку $\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega))$, використовуючи результати теореми 1:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} dx dy \right| \leq \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega O g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} dx dy \right| \leq \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega O g(x,y)} dx dy \right| + \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega g(x,y)} - e^{i\omega O g(x,y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega O g(x,y)} - e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega g(x,y) - \omega O g(x,y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x,y) + O g(x,y))} \right| dx dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega O g(x,y) - \omega \tilde{O}g(x,y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O g(x,y) + \tilde{O}g(x,y))} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega g(x,y) - \omega O g(x,y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega O g(x,y) - \omega \tilde{O}g(x,y)}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x,y) - O g(x,y)|}{2} \right) dx dy + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |(O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x,y) - (O_1 \tilde{O}_2 + O_2 \tilde{O}_1 - O_1 O_2) g(x,y)|}{2} \right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x,y) - O g(x,y)|}{2} \right) dx dy + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega (O_1 - O_1 \tilde{O}_2) g(x,y) + \omega (O_2 - O_2 \tilde{O}_1) g(x,y)}{2} \right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \left| \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} g^{(1,1)}(t, \tau) G_{1p}(x, t) G_{2s}(y, \tau) dt d\eta \right| \right) dx dy + \\ &+ 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}} \left| g^{(0,1)}(x_p, y) \right| \left| \tilde{G}_{2\tilde{s}}(y, \tilde{\tau}) \right| d\tilde{\tau} dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \left| g^{(1,0)}(\tilde{t}, y_s) \right| \left| \tilde{G}_{1\tilde{p}}(x, \tilde{t}) \right| d\tilde{t} dx \int_{y_s}^{y_{s+1}} dy \right) \leq \\ &\leq 2 \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\tilde{M} \omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{3} \frac{\Delta_2^2}{3} \right) + 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M \omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{2 \tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) = \\ &= \min \left(2; \frac{\tilde{M} \omega}{9 \ell_2^2} \right) + \min \left(2; \frac{2 M \omega}{3 \ell_2^2} \right) \leq \min \left(4; \frac{\omega (\tilde{M} + 6 M)}{9 \ell_2^2} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\begin{aligned} \rho\left(\tilde{I}^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{g}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega))$, використовуючи результати теореми 1 та 2:

$$\begin{aligned} \rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{g}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy \right| + \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O(x, y)} dx dy \right| + \\ &\quad + \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| |e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega O(x, y)}| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| |e^{i\omega O(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}(x, y)}| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y) + \tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + O(x, y))} \right| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega O(x, y) - \omega \tilde{O}(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O(x, y) + \tilde{O}(x, y))} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \\ &\quad + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O(x, y)}{2} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega O(x, y) - \omega \tilde{O}(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y) - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy + \\ &\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega |g(x, y) - (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x, y)|}{2}\right) dx dy + \\ &\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega |(O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x, y) - (O_1 \tilde{O}_2 + O_2 \tilde{O}_1 - O_1 O_2) g(x, y)|}{2}\right) dx dy \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

Теорема 3 доведена.

Порівняння кубатурних формул, побудованих з використанням економних схем інтерполяції, з класичними. Розглянемо наступну кубатурну формулу

$$\Phi_{cl}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \quad (7)$$

для наближеного обчислення інтегралу (3).

Теорема 4. Нехай $f(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I(\omega), \Phi_{cl}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{2M}{3\ell_1^2}.$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(I(\omega), \Phi(\omega))$:

$$\begin{aligned} \rho(I(\omega), \Phi_{cl}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 f(x, y) + \tilde{J}_1 f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 f(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |\tilde{J}_1 f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_k}^{\tilde{x}_{k+1}} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} |f^{(1,0)}(\tilde{\xi}, y)| |\tilde{K}_{1k}(x, \tilde{\xi})| d\tilde{\xi} dx \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} dy + \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_k}^{\tilde{x}_{k+1}} dx \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} |f^{(0,1)}(\tilde{x}_k, \tilde{\eta})| |\tilde{K}_{2j}(y, \tilde{\eta})| d\tilde{\eta} dy \leq \\ &\leq M \ell_1^2 \ell_1^2 \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} \tilde{\Delta}_1 + M \ell_1^2 \ell_1^2 \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} \tilde{\Delta}_1 = \frac{2M}{3\ell_1^2}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доведена.

Використовуючи результати теореми 4, маємо оцінку похибки наближення інтегралу (5) за кубатурною формулою

$$\tilde{\Phi}_{cl}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy. \quad (8)$$

Теорема 5. Нехай $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega))$, використовуючи результати теореми 1:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} dx dy \right| + \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)}| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + \tilde{O}_1 g(x, y))} \right| dx dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega \tilde{O}_1 g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(\tilde{O}_1 g(x, y) + \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y))} \right| dx dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 g(x, y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega \tilde{O}_1 g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y) - \tilde{O}_1 g(x, y)|}{2} \right) dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |\tilde{O}_1 g(x, y) - \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)|}{2} \right) dx dy \leq \\
&\leq 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \left| g^{(0,1)}(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y) \right| \left| \tilde{G}_{2_{\tilde{s}}}(y, \tilde{\tau}) \right| d\tilde{\tau} dy \right) + \\
&+ 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{s=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \left| g^{(1,0)}(\tilde{t}, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \right| \left| \tilde{G}_{1_{\tilde{p}}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \right| d\tilde{t} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dy \right) \leq \\
&\leq 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) + 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) \leq \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 5 доведена.

Використовуючи результати теореми 4 та 5, отримаємо оцінку похибки наближення інтегралу (1) за кубатурною формулою

$$\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy. \quad (9)$$

Теорема 6. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{2M}{3\ell_1^2} + \tilde{M} \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega))$:

$$\begin{aligned}
\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| + \\
&+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| \left| e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy + \tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy \leq \frac{2M}{3\ell_1^2} + \tilde{M} \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 6 доведена.

Теорема 7. Нехай $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, тоді для досягнення похибки $O(\ell^{-2})$ кубатурною формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ використовується не $2(\ell^2 + 1)(\ell^2 + 1) = O(\ell^4)$ значень функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$, як в класичній формулі $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$, а $2(\ell^2 + 1)(\ell + 1) + 2(\ell^2 + 1)(\ell + 1) - 2(\ell + 1)(\ell + 1) = O(\ell^3)$.

Доведення.

Твердження теореми випливає з безпосереднього підрахунку кількості значень функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ в формулах $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ та $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$.

Теорема 7 доведена.

Перспективи подальших досліджень. Наступним кроком в дослідженні є проведення тестування кубатурних формул $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ та $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$ для виявлення їх потенційної спроможності на різних класах функцій. Важливо отримати підтвердження теоретичних результатів щодо знаходження оцінок похибок наближення та кількості значень, використаних формулами для досягнення заданої точності.

Висновки. У роботі розглянуто одну з актуальних задач сучасної прикладної математики – чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Основною проблемою при обчисленні багатовимірних інтегралів є стрімке зростання обчислювальних витрат зі збільшенням кількості змінних. Уникнути проблеми дозволяють економні схеми інтерполяції, побудовані на основі інформаційних операторів, запропонованих доктором фізико-математичних наук, професором О. М. Литвиним. Економні схеми інтерполяції застосовані до наближеного обчислення подвійних інтегралів. Показано, що такі схеми у чисельному інтегруванні забезпечують суттєве зменшення кількості необхідних вузлів для досягнення заданої точності, порівняно з класичними методами з використанням білінійної інтерполяції. Особливу увагу приділено інтегруванню двовимірних швидкоосцилюваних функцій загального виду. В статті запропоновано нову кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду. При побудові кубатурної формули використано оператори лінійної сплайн-інтерполяції, побудовані на основі оператора лінійної сплайн-інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюваної функції загального виду. Запропонована кубатурна формула має високу точність наближення, є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності.

Список літератури

1. Iserles A. In the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms : Tech. Reports Numerical Analysis. – DAMPT : University of Cambridge, NA2003/05. – 26 p.
2. Huybrechs D., Olver S. Highly oscillatory quadrature. Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
3. Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators : Tech. Reports Numerical Analysis. – DAMPT : University of Cambridge, NA2003/09. – 22 p.
4. Milovanovic G. V., Stancic P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions // Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions. – 2014. – pp. 613 – 649. DOI: 10.1007/978-1-4939-0259-3_23.
5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms // Springer Optimization and Its Applications. – 2021. – vol. 188. – pp. 75 – 176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
6. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interflation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms // Springer Optimization and Its Applications. – 2021. – vol. 188, pp. 177 – 251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
8. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 13 – 17.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
10. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – pp. 90 – 96.
11. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління : зб. наук. пр. – Х., 2010. – № 926. – С. 153 – 160.
12. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації // Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18 – 21 травня 2010 р., Харків. – Х., 2010. – Ч. 2. – С. 211 – 213.
13. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
14. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2011. – № 16. – С. 207 – 214.
15. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
16. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – Том 1. – № 4. – С. 28 – 40.
17. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflation // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 44. – Is. 3. – 2012. – pp. 45 – 56.
18. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
19. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
20. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
21. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
22. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
23. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих

- функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
24. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталі інтерфлетатії // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.
 25. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення 2D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталі інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 124 – 131.
 26. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Оптиміальне інтегрування двовимірних швидкоосцилюючих функцій загального вигляду // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2017. – Вип. 15. – С. 139 – 144.
 27. Mezhuiev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // U.P.B. Sci. Bull., Series A. – 2018. – Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.
 28. Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Mezhuiev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 365 – 373. DOI: 10.1007/978-3-319-97885-7_36.
 29. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
 30. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Оптиміальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 68 – 72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.
 31. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2023. – Вип. 37. – С. 37 – 41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.37.037.
 32. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
 33. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies // Information Technologies and Learning Tools. – 2021. – no. 82 (2). – pp. 282 – 296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
 34. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 1031 (1). – 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
 35. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1. – С. 82 – 91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

References (transliterated)

1. Iserles A. In the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms : Tech. Reports Numerical Analysis. DAMPT, University of Cambridge, NA2003/05. 26 p.
2. Huybrechs D., Olver S. Highly oscillatory quadrature. Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
3. Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators : Tech. Reports Numerical Analysis. DAMPT, University of Cambridge, NA2003/09. – 22 p.
4. Milovanovic G. V., Stancic P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions. Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions. 2014, pp. 613–649. DOI: 10.1007/978-1-4939-0259-3_23.
5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications. 2021, vol. 188, pp. 75–176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
6. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interflattation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications. 2021, vol. 188, pp. 177–251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
8. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za porядkom tochnosti kubaturna formulu obchyslennya podviynnykh integraliv vid shvydkoost-syluuchykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [Optimal cubature formula for calculating double integrals from rapidly oscillating functions and spline interlineation]. Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2008, no. 2, pp. 13–17.
9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2D Fourier coefficients with using interlineation of functions]. Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
10. Lytvyn O. N., Nechuiviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). Novosibirsk. 2010, pp. 90–96.
11. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturna formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [The cubature formula for calculating 2D – Fourier coefficients using the interlineation of functions]. Visnyk KhNU Im. V. N. Karazina. Ser. : Matematychnye modelyuvannya. Informatsiyini tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya : zb. nauk. pr. [Bulletin of the Karazin Charkiv National University. Series : Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems : Collection of scientific papers]. Kharkiv., 2010, no. 926, pp. 153–160.
12. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'nyy za porядkom tochnosti metod obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e za dopomogoyu interlinatsiyi [The optimal method of calculating 2D – Fourier coefficients using interlineation]. Komp'yuterne modelyuvannya v naukotnykh tekhnologiyakh : pr. nauk-tehn. konf. z mizhnarodnoyu uchastyu, 18–21 travnya 2010r. [Computer modeling in science-intensive technologies: Practical Scientific and Technical Conference with international participation, May 18–21]. Kharkiv., 2010, no. 2, pp. 211–213.
13. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 2D – koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D – Fourier coefficients on the class of differential functions and spline-interlineation]. Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky [Taurida Journal of Computer

- Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
14. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Splayn-interlinatsiya ta optymal'ni po tochnosti kubaturni formuly obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e odnogo klasu funktsiy [Spline interlineation and optimally accurate cubature formulas for computing 2D Fourier coefficients for a class of functions]. *Visnyk Kharkivskogo natsional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya : Matematychni modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2011, no. 16, pp. 207–214.
 15. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from rapidly varying functions using Lagrangian polynomial interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
 16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi Geldera z vykorystanniam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Hölder class using piecewise constant spline interpolation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, vol. 1, no. 4, pp. 28–40.
 17. Lytvyn O. N., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interpolation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012, vol. 44, is. 3, pp. 45–56.
 18. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D – Fourier coefficients on a class of differential functions using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodnavstvo. Tekhnichny nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
 19. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiy tryekh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of the Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differential functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
 20. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
 21. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 1. Alorytmy : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 1. Algorithms: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kuiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 447 p.
 22. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 2. Zastosuvannya : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 2. Applications: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 348 p.
 23. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvanniam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
 24. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interfletatsiyi [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivskyy politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychni modeluvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.
 25. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Obchyslennya 2D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2D integrals from trigonometric functions using piecewise constant interlineation]. *Matematychni ta kompiuterni modelyuvannya. Seriya : Fiziko-matematychni nauky : zb. nauk. prats.* [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences : coll. of science works]. Kam'yanets'-Podil's'kiy, Kam'yanets'-Podil's'kyy natsional'nyy universytet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016, no. 13, pp. 124 – 131.
 26. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Optymal'ne integruvannya dvovymirnykh shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vyglyadu [Optimal integration of two-dimensional rapidly oscillating generic functions]. *Matematychni ta kompiuterni modelyuvannya* [Mathematical and computer modeling]. 2017, vol. 15, pp. 139–144.
 27. Mezhuiev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.
 28. Shekhovtsov A. V. Vplyv tverdykh granits ta v'yazkosti seredovyssha na vnesok inertsinyoi ta vykhrovoyi komponent normal'noyi syly plastyny, shho obtaet'sya. Chastyna 1 [Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, no. 1, pp. 212–217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
 29. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020, vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
 30. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Optymal'ne integruvannya shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Optimal integration of rapidly oscillating functions of the general form]. *Fiziko-matematychni modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies]. 2021, no. 33, pp. 68–72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.
 31. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vydu [Approximate computation of double integrals of rapidly oscillating generic functions]. *Fiziko-matematychni modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and mathematical modeling and information technologies]. 2023, vol. 37, pp. 37–41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.37.037.
 32. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using Lagrangian polynomial interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
 33. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021, vol. 82, no. 2 (2021), pp. 282–296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
 34. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1031 (1), 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.

35. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Novi informatsiyni operatory v zadachakh chysel'nogo integruvannya funktsiyi trokh zminnykh [New information operators in problems of numerical integration of functions of three variables]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 82–91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

Надійшла (received) 03.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Іванов Владислав Вікторович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Ivanov Vladyslav Viktorovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Шніцар Андрій Степанович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Shnitsar Andriy Stepanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Гіщак Остап Романович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Hishchak Ostap Romanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Заборний Антон Віталійович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.zaborny@karazin.ua.

Zaborny Anton Vitaliiovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 759-93-27; <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.zaborny@karazin.ua.

V. S. OVERKO

THE INFLUENCE OF THE TORSION MOTION OF LEFT VENTRICLE (LV) ON FEATURES OF BLOOD FLOW

The torsional motion (or twisting) of the left ventricle (LV) plays a crucial role in the ejection and filling of the left ventricle. During the cardiac cycle, systolic twisting and early diastolic untwisting of the left ventricle occurs around its long axis due to oppositely directed apical and basal rotations. From the apex of the LV, the systolic apical rotation occurs counterclockwise, while the basal rotation occurs clockwise. The size and characteristics of this torsional deformation have been described in various clinical and experimental studies, and it is well established that LV rotation is sensitive to changes in both regional and global LV function. Therefore, the assessment of LV rotation represents an interesting approach for the quantitative evaluation of LV function. Understanding blood flow patterns in the heart has numerous applications in hemodynamic analysis and clinical assessment of heart function. This study presents numerical simulations of blood flow in an idealized model of the left ventricle (LV) and the aortic sinus. The movement of the walls of the LV and aortic sinus was obtained from the analysis of kinematic images from MRI and used as constraints for the numerical computational fluid dynamics (CFD) model based on the moving boundary approach. The simulation results include detailed flow characteristics such as velocity, pressure, and wall shear stress for the entire volume. Additionally, to model the behavior of fluid flow within the human left ventricle, it is essential to consider the influence of non-Newtonian behavior of blood on numerical predictions throughout the entire cardiac cycle. Experimental studies indicate that blood significantly exhibits behavior associated with non-Newtonian properties in diseases such as myocardial infarction, cerebrovascular diseases, and hypertension; thus, the rheology of blood should be incorporated into numerical modeling of cardiovascular systems. Furthermore, due to recent advancements in CFD modeling, it has become easier to implement complex non-Newtonian assumptions into the Navier-Stokes equations. This article analyzes the impact of the torsional motion of the walls of the human left ventricle on the characteristics of blood circulation in the LV chamber and the initial section of the aorta. Non-Newtonian effects were considered using the Carreau-Yasuda model. This model describes blood as a non-Newtonian fluid with finite Newtonian states corresponding to a constant viscosity value. It is important to note that this model representation aligns well with experimental data.

Key words: left ventricle, torsion motion, blood flow, computer simulation, blood flow, pressure fields, velocity fields, cardiac cycle, second-order accuracy difference scheme, upwinding scheme.

B. C. ОВЕРКО

ВПЛИВ ТОРСІЙНОГО РУХУ ЛІВОГО ШЛУНОЧКА (ЛШ) НА ОСОБЛИВОСТІ КРОВООБІГУ

Торсійний рух (або скручування) лівого шлуночка (ЛШ) відіграє важливу роль у відношенні до викиду та наповнення лівого шлуночка. Протягом серцевого циклу спостерігається систолічне скручування та раннє діастолічне розкручування ЛШ навколо його довгої осі через протилежно спрямовані апікальні та базальні обертання. Зі сторони апексу ЛШ, систолічне апікальне обертання відбувається проти годинникової стрілки, а базальне обертання – за годинниковою стрілкою. Розмір і характеристики цієї торсійної деформації були описані в різних клінічних та експериментальних дослідженнях, і добре встановлено, що обертання ЛШ чутливе до змін як регіональної, так і глобальної функції ЛШ. Тому оцінка обертання ЛШ представляє собою цікавий підхід для кількісної оцінки функції ЛШ. Розуміння патернів кровотоку в серці має численні застосування в аналізі гемодинаміки та клінічній оцінці функції серця. У цьому дослідженні представлені чисельні симуляції кровотоку в ідеалізованій моделі лівого шлуночка та аортального синуса. Рух стінок ЛШ та аортального синуса отримано з аналізу кінематичних зображень МРТ і використано як обмеження для чисельної моделі обчислювальної гідродинаміки, основаної на підході рухомої межі. Результати симуляцій включають детальні характеристики потоку, такі як швидкість, тиск та зсув напруження стінок для всього об'єму. Також, щоб моделювати поведінку потоку рідини всередині лівого шлуночка серця людини (ЛШ), необхідно враховувати вплив неньютоновської поведінки крові на чисельне прогнозування протягом всього серцевого циклу. Експериментальні дослідження свідчать, що кров значно демонструє поведінку, що пов'язана з неньютоновськими властивостями крові, у таких захворюваннях, як інфаркт міокарда, цереброваскулярні захворювання та гіпертонія; отже, реологічність крові слід застосовувати в чисельному моделюванні серцево-судинних систем. Крім того, внаслідок недавнього прогресу в комп'ютерній обчислювальній гідродинаміці тепер стало легше реалізувати складні неньютоновські припущення в рівняннях Нав'є – Стокса. У цій статті аналізується вплив торсійного руху стінок лівого шлуночка серця людини на характеристики кровообігу у камері ЛШ та в початковій ділянці аорти. Неньютоновські ефекти були враховані, використовуючи модель Карро – Ясуди. Ця модель описує кров як неньютоновську рідину з кінцевими ньютонівськими станами, що відповідають постійному значенню в'язкості. Важливо відзначити, що таке модельне представлення досить добре узгоджується з експериментальними даними.

Ключові слова: лівий шлуночок, торсійний рух, кровообіг, комп'ютерне моделювання, течія крові, поля тиску, поля швидкості, кардіальний цикл, різницева схема другого порядку точності, різниці проти потоку.

Introduction. Despite recent significant advancements in medicine, science, and technology, cardiovascular diseases remain one of the leading causes of mortality worldwide; thus, research aimed at assessing heart function is increasing daily. Previous studies have demonstrated that mechanical factors are closely linked to cardiovascular diseases. Therefore, understanding blood flow patterns in the heart has numerous applications in hemodynamic research and for the clinical assessment of heart function. For instance, this knowledge can be utilized in cardiac surgery and for the development of artificial hearts and heart valve prostheses.

Analysis of Recent Studies. The cardiac cycle consists of two main phases: the diastole and the systole. The first is the ventricular filling phase and the second is the *ventricular contraction phase*. The LA is located prior to the LV and therefore will serve as an inlet conduit for the LV. During a cycle the LA's function can be divided into three phases: the reservoir, conduit and contraction phase. The reservoir phase is during systole when the LA receives the oxygenated blood from the lungs through its *pulmonary veins (PVs)* and acts like a reservoir to the LV. The conduit phase is the passive emptying of the atrium due to the ventricular relaxation in the early diastole. The contraction phase occurs at the end of diastole when the LA contracts to re-increase the pressure and eject more blood into the ventricle. According to Fyrenius et al. [1], the normal LA has important roles in optimizing left ventricular filling. In vivo measurements indi-

cate that vortices develop in LA during the diastole before they disappear with atrial contraction. For the last decades, a few studies have concentrated on flow dynamics in the left atrium [1 – 3]. Hence, the understanding of the global flow pattern within the LA has remained yet unclear [1].

The left ventricular torsion (or twist) plays an important role with respect to LV ejection and filling [4 – 9]. In the cardiac cycle, there is a systolic twist and an early diastolic untwist of the LV around its long axis. This twist is caused by oppositely directed apical and basal rotations. Under consideration of the LV apex, we can observe the counterclockwise systolic apical rotation and the clockwise basal rotation. The characteristics of these torsional deformations have been described in different clinical and experimental investigations, where it was established that LV rotation is sensitive to local and global changes in LV. The left ventricular torsion caused by a motion of helically oriented miofibers is important to understanding the processes within the heart but difficult to measure. Ultrasound *speckle tracking imaging (STI)* is potentially suitable for measurement of angular motion because of its angle-independence [10]. The LV motion is shown on Fig. 1.

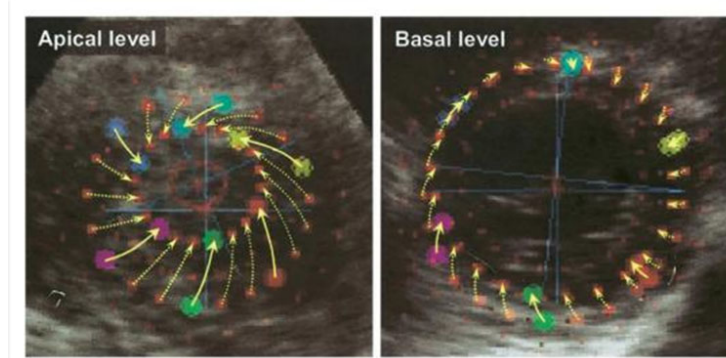


Fig. 1 – The Left ventricular rotation (LVrot) at apical and basal levels during systole by "overlaid" speckle tracking images [10].

End-systolic speckle tracking imaging acquisitions are overlaid at the end-diastolic image with corresponding local trajectories (the tail and the head of arrows indicate the location of end-diastole and end-systole). The LVrot was estimated from all of these regional angle displacements. Normally, on the apical level, the left ventricle rotates counterclockwise as viewed from apex, whereas the base rotates clockwise, as in this representative case. This gradient of LVrot between the two levels creates a «wringing» motion of the left ventricle [10].

MATERIALS AND METHODS. The full system of *Navier – Stokes equation* in three dimensional formulation was solved in unsteady laminar simulations using an implicit pressure-based solver. The pressure was calculated according to *the Standard scheme*. Concerning the pressure velocity coupling, the PISO scheme with *Skewness-Neighbor Coupling* was chosen. Momentum was discretized according to *Second Order Upwind scheme* [11].

The arterial wall was considered as rigid. This assumption is used in accordance with the results of [12, 13] which showed that shear stress values on the wall do not qualitatively and quantitatively differ practically in models using the approximation of rigid walls and elastic walls. This assumption has also made it possible to avoid using of source expensive *FSI algorithms*. For modeling *the non-Newtonian blood fluid* and the viscoelastic arterial wall *the Carreau model* governed by the following equation are used [14, 15, 16]:

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right)^a, \quad (1)$$

$\mu_{\infty} = 0.056 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, the zero shear rate viscosity, $\mu_0 = 0.0036 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, the infinite shear rate viscosity, $\lambda = 3.313$, $a = 0.3568$.

System of governing equations:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

A parabolic velocity profile corresponding to the volumetric blood flow was used as spatial part of the inlet boundary condition.

Two wave of cardiac circle was performed. Results was given from second ones. This assumption was based on our test simulation of non-Newtonian blood flow in a direct tube for three cardiac cycles. This simulations indicated that differences are significant between the first and second cycle model results, with negligible differences between the second and subsequent cycles. A 0 mmHG pressure outlet condition with back flow specification method from neighboring cell was assigned at the outlet boundary for all models [17]. A no-slip condition was assumed at the wall.

Results. The pressure in a rotating body i.e. left ventricle decreases from rotating walls to a center of rotation. The pressure gradient imparts the necessary centripetal acceleration. The fluids admit a motion on a curved path. We simulate the blood flow in the two systolic.

Phase 1: The ventricular pressure exceeds the pressure in the aorta, the aortic valve opens and a rapid ejection of blood into the aorta starts. The ventricular muscles begin to shorten and the ventricular volume decreases. As seen from [18], the pressure gradient between the aorta and the LV is quite small. This is possible because of the relatively large aortic opening (i.e., *the low resistance*). As a result of LV contraction and shortening, the mitral ring descends and the LA expands slightly. Thus decreasing of LA pressure occurs. Venous blood continues to flow into the LA from the veins and the atrial pressure begins to rise again.

Phase 2: The period of the reduced ejection begins. The LV pressure decreases gradually and begins a bit less then the aortic pressure, which is also decreases as well. However, the blood continues to flow out of the LV due to the inertial effects. At the end of systole, the LV pressure vanishes faster and the blood begins to flow back towards the LV. The blood flows into the edges of the aortic valve close abruptly. The passive filling of the atrial chamber continues during this period and to the end of second phase [18, 19].

The field of pressure in the vertical plane of T-model is presented on the Fig. 2. In case of positive rate and acceleration of flow at the begin of systole (Fig. 2, A) the pressure is decreasing from the apex to the aorta. We can observe two zones with small pressure in the root of the aorta. These zones can be associated with the thorus-like vortex. The mechanism of appearance of this vortex is similar to the vortex at the backward step. When the velocity is maximal (Fig. 2, B) the pressure field has more complex form. A basal zone has higher pressure than central, apical and aortic root parts. Separated zones loss a symmetric form. In the case of the negative acceleration of flow at the end of systole (Fig. 2, C), the pressure of the apical part of left ventricle is less than the pressure of the central one. This effect caused by the torsion motion where the velocity of a wall is more than one in the central part of the left ventricle. At the end of the systole (Fig. 2, D) the pressure doesn't have singularities and increases from the apex to the aortic part. Now the left ventricle is ready for filling in the diastolic part of the cardiac circle.

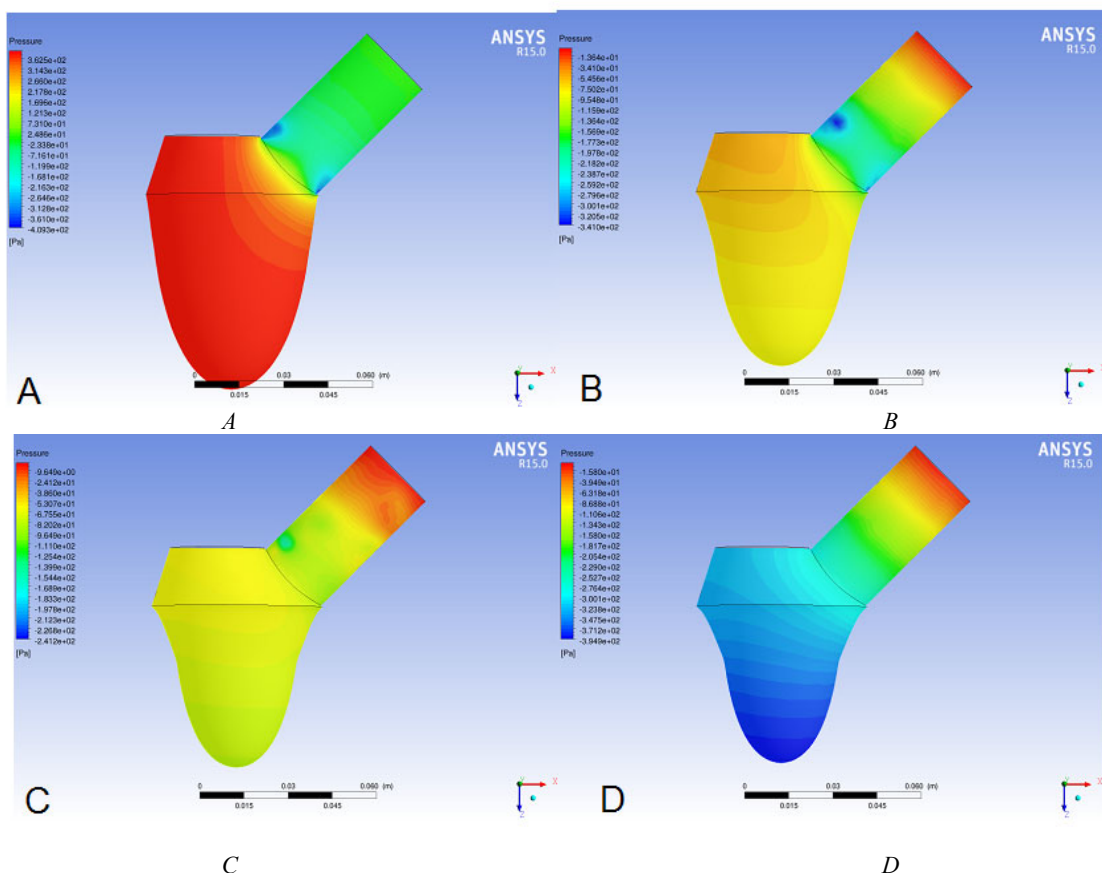


Fig. 2 – The pressure at the vertical cross plane for UT-models in the different time: A – time = 0.07 s ; B – time = 0.14 s ; C – time = 0.21 s ; D – time = 0.28 s .

The field of the pressure in the vertical plane of UT-model is presented on the Fig. 3. In the case of a positive rate and acceleration of flow (Fig. 3, *A*) the pattern of pressure is similar to the one from T-model.

When the velocity is maximal (Fig. 2, *B*), pressure has same behavior.

The great difference of the hydrodynamics of flow can be observed in the case of the negative acceleration of the flow in the second part of the systole (Fig. 2, *C*, 2, *D*). At first the pattern of flow on Fig. 3, *C* is similar to one on Fig. 2, *D*. Hence, the negative acceleration will be more if the torsion motion of left ventricle's wall is absent.

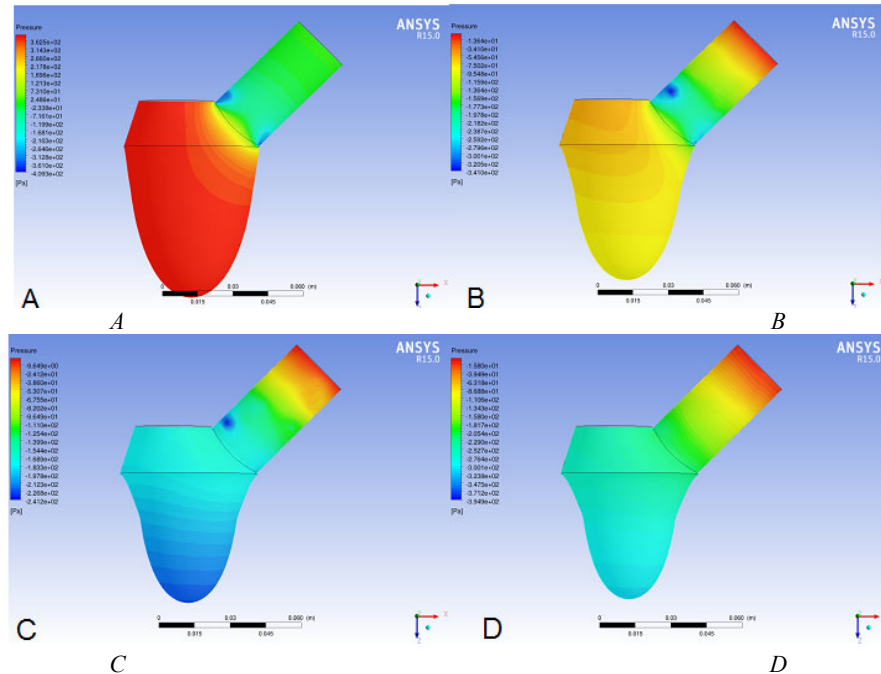


Fig. 3 – The pressure at the vertical cross plane for UT-models in the different time: *A* – time = 0.07s ; *B* – time = 0.14s ; *C* – time = 0.21s ; *D* – time = 0.28s .

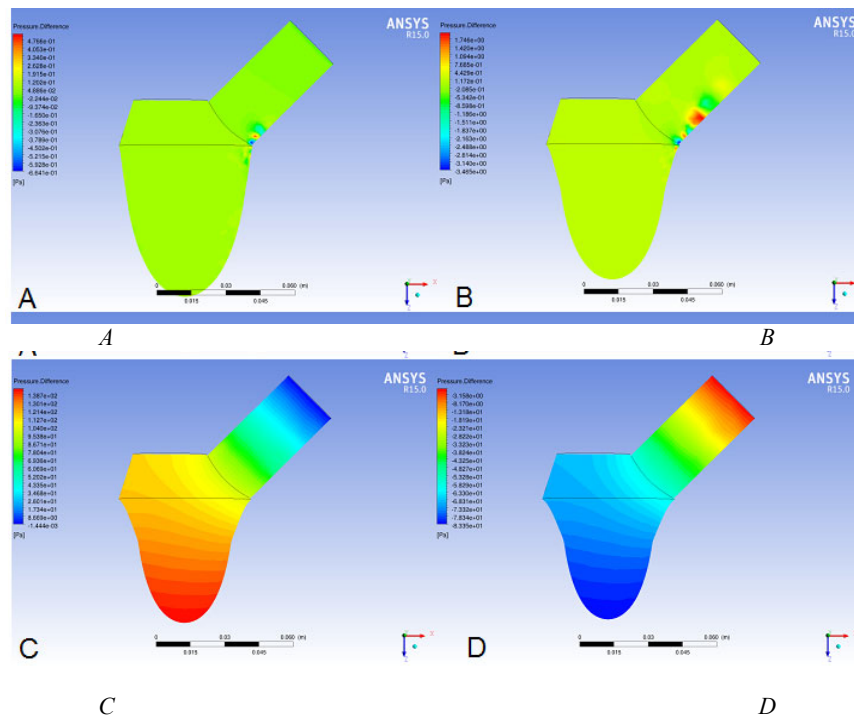


Fig. 4 – The difference of the pressure at the vertical cross plane for T- model and UT-model in the different time: *A* – time = 0.07s ; *B* – time = 0.14s ; *C* – time = 0.21s ; *D* – time = 0.28s .

At the end of systole (Fig. 3, *D*), the pressure has more uniformly type. The consequence is a reduction of a pressure's gradient and a increasing the time of filling of the left ventricle in the diastolic phase of the cardiac circle.

Differences between pressures for T-model and UT-model are present in Fig. 4. We can observe that differences are negligible for the most part of the left ventricle and the ascending aorta excludes bottom part of aorta. In this part, difference is significant. The alterations are nonlinear. We can observe oscillations of the pressure. It proves appearance of the vortex structure in the aorta (Fig. 4, A, 4, B).

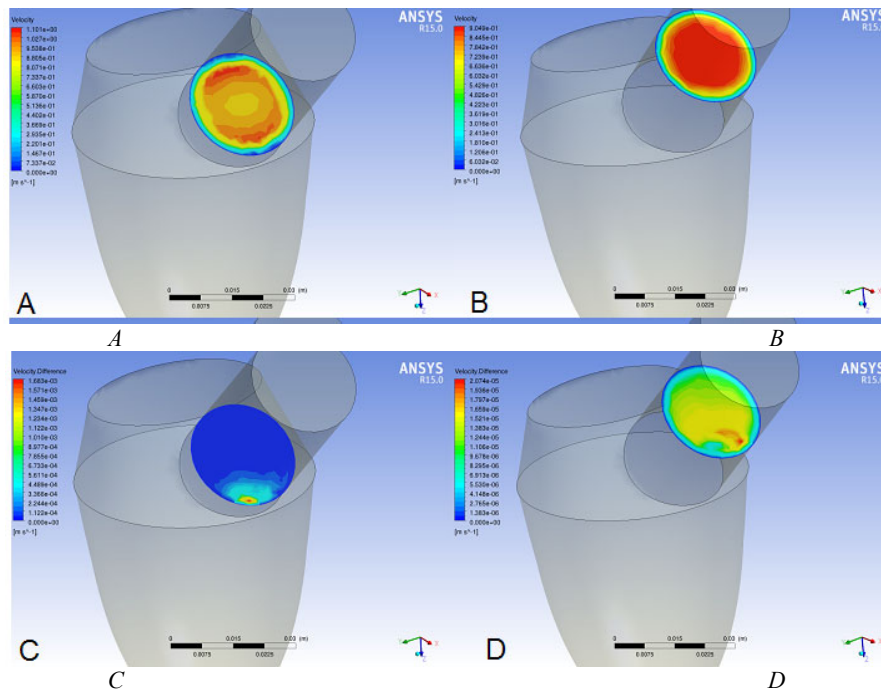


Fig. 5 – The velocity field at the aorta cross plane for T- models and the difference between data T-model and UT-model, time = 0.07s :

A – the velocity field at the beginning part of the aortic section; B – the velocity field in the middle part of the aortic section;
C – the difference for the beginning part of the aortic section; D – the difference for the beginning part of the aortic section.

In the third part of the systole the gradient of pressure in the direction from the apex to the aorta is higher on the 1 mmHg for T-model. It leads to acceleration of the blood flow throughout the aorta (Fig. 4, C). At the end of the systole the negative gradient of the pressure is higher for T-model. Thus the left ventricle is filled more quickly in the diastolic phase of the cardiac circle (Fig. 4, D).

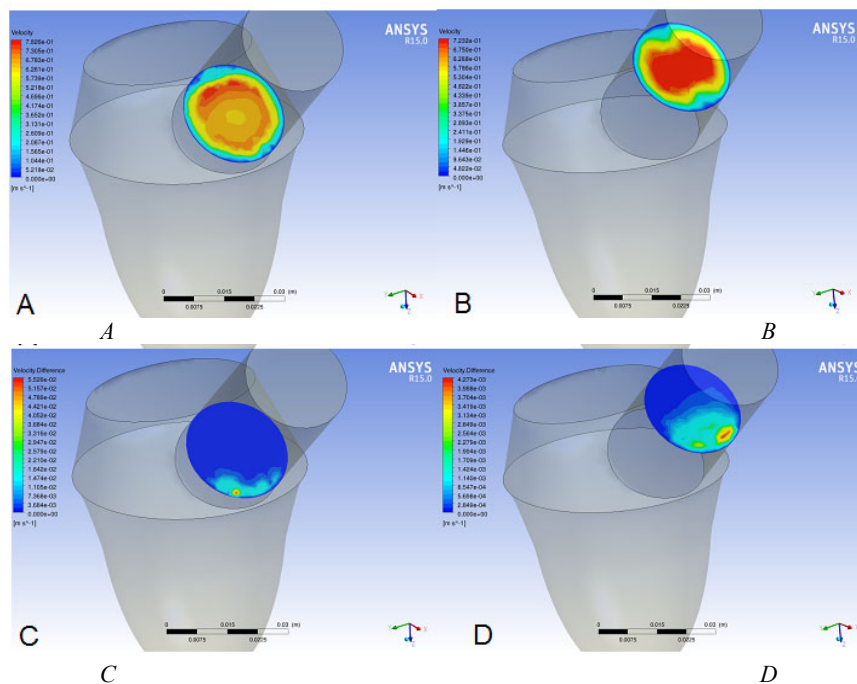


Fig. 6 – The velocity field at the aorta cross plane for T-models and the difference between data T-model and UT-model, time = 0.14s :

A – the velocity field at the beginning part of the aortic section; B – the velocity field in the middle part of the aortic section;
C – the difference for the beginning part of the aortic section; D – the difference for the beginning part of the aortic section.

At the beginning part of the systole the maximum velocity field is located between a core and walls (Fig. 5, *A*). It is a result of a confuser-like flow. The velocity field of middle part look like the straight pipe (Fig. 5, *B*). Differences between velocity's magnitudes are insignificant and asymmetric.

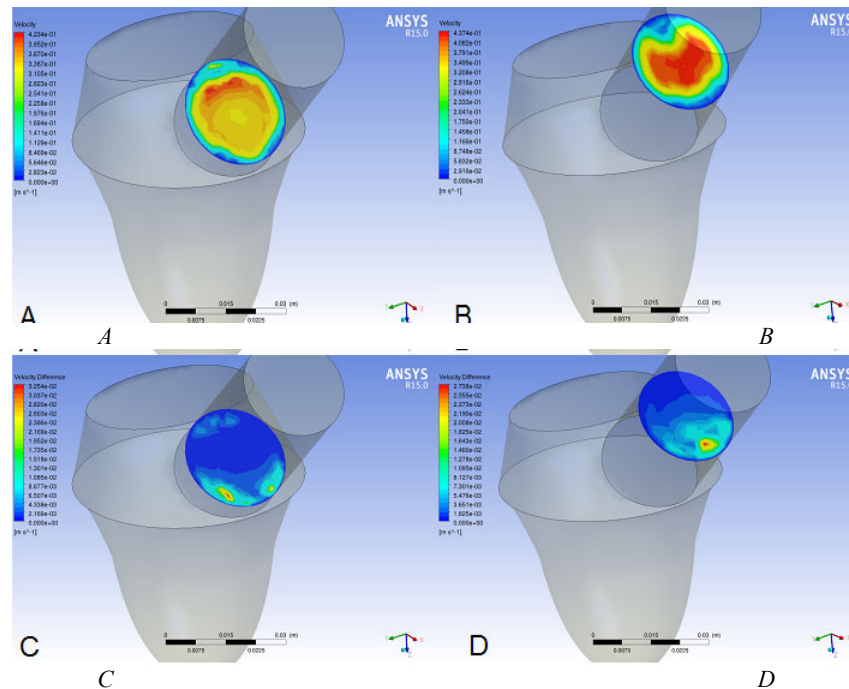


Fig. 7 – The velocity field at the aorta cross plane for T- models and the difference between data T-model and UT-model, time = 0.21s :

A – the velocity field at the beginning part of the aortic section; *B* – the velocity field in the middle part of the aortic section; *C* – the difference for the beginning part of the aortic section; *D* – the difference for the beginning part of the aortic section.

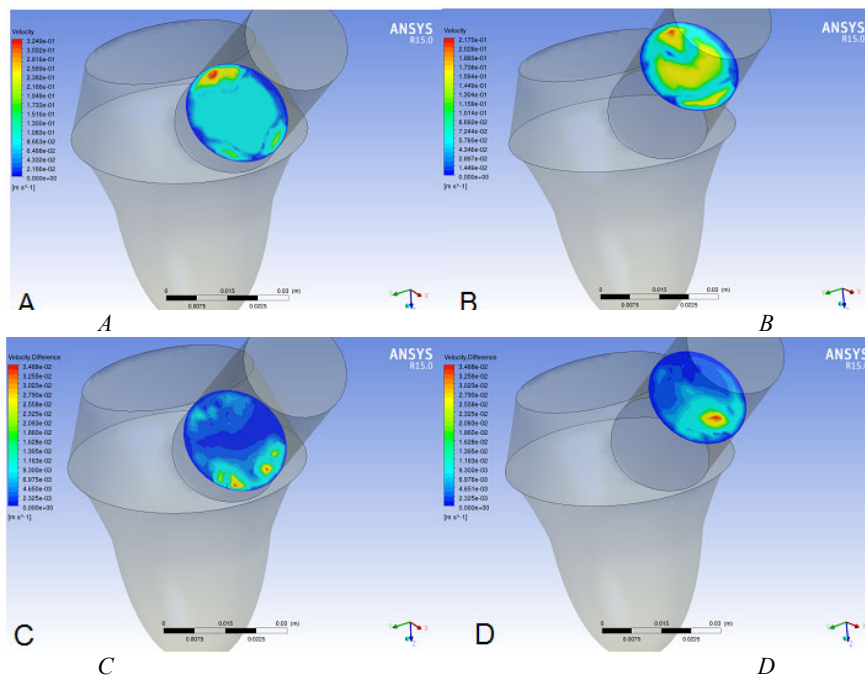


Fig. 8 – The velocity field at the aorta cross plane for T- models and the difference between data T-model and UT-model, time = 0.28s :

A – the velocity field at the beginning part of the aortic section; *B* – the velocity field in the middle part of the aortic section; *C* – the difference for the beginning part of the aortic section; *D* – the difference for the beginning part of the aortic section.

The symmetry of the flow increases in the middle part of the systole (Fig. 6, *A*, 6, *B*). Differences increase too (Fig. 6, *C*, 6, *D*) and reach 30 % for a small area at the «low-left» part of aorta's root section (Fig. 6, *C*). The pattern of the flow for the middle section has neglecting differences.

The asymmetry increases significantly in the phase of the negative acceleration (Fig. 7, *A*, 7, *B*). The pattern of flow has features for Dean's flow in curved vessels (Fig. 7, *B*). Differences between velocities for T-model and UT-model be-

come more significant (Fig. 7, C, 7, D), especially at the middle section (Fig. 7, D). It is 8 % from velocity's magnitude.

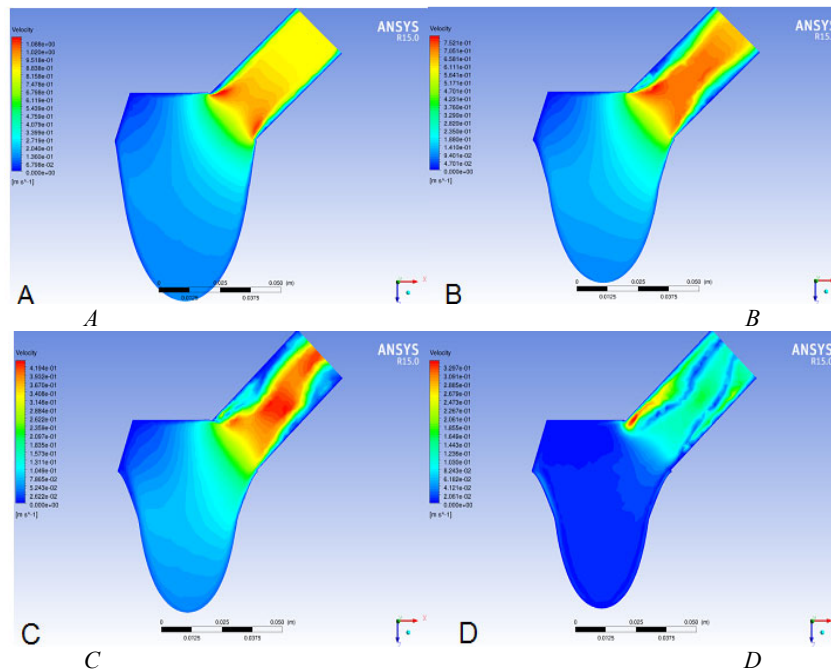


Fig. 9 – The velocity's field at the vertical cross plane for T- models in the different time: A – time = 0.07 s ; B – time = 0.14 s ; C – time = 0.21 s ; D – time = 0.28 s .

The pattern of the flow is more complicate in the final part of the systole. Secondary flows are more intensive (Fig. 8, C, 8, D) and differences between velocities for T-model and UT-model are significant for the main part of the cross section as well as aorta's root and the middle section (Fig. 8, C, 8, D).

The structure of flow is same as for the T-model as for UT-model. We can observe it when compare Fig. 9 and Fig. 10.

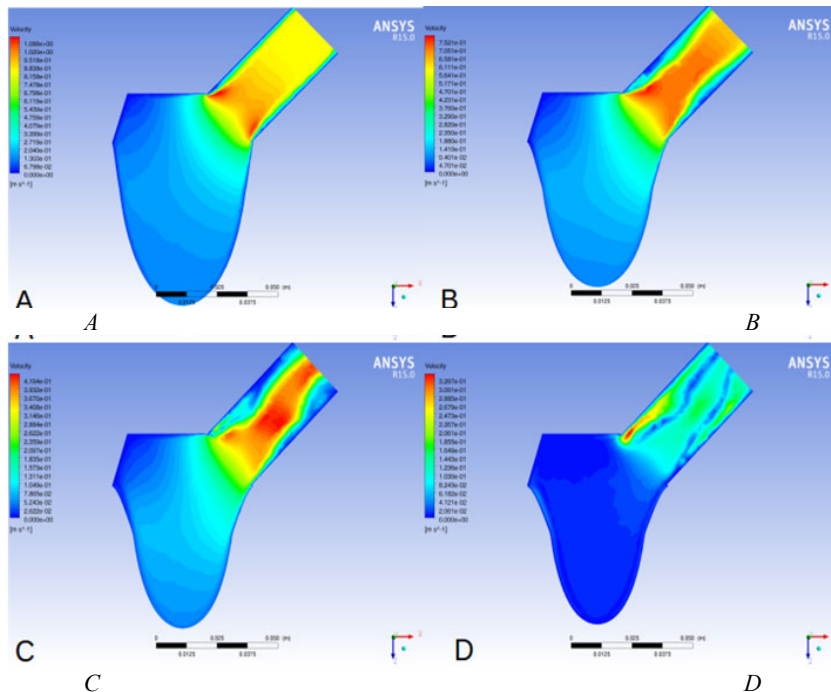


Fig. 10 – The velocity's field at the vertical cross plane for UT- models in the different time: A – time = 0.07 s ; B – time = 0.14 s ; C – time = 0.21 s ; D – time = 0.28 s .

The magnitude of the velocity for T-model in the vertical cross section is shown at Fig. 9. The initial phase of the systole is characterized by the main flow. It has the uniform structure for the most part of aortic's domain and has the maximum near the beginning part of the aorta (Fig. 9, A). After the flow begins to brake the main flow losses the uni-

form structure and achieves the structure with the maximum of velocity located near the axis of the flow (Fig. 9, *B*). The decreasing the velocity deforms the pattern of the flow and we can observe meandering of the flow (Fig. 9, *C*). The pattern of the flow is very difficult at the final part of the systole and the maximum of velocity relocates to walls of the aorta (Fig. 10, *D*).

But details of velocity's field are really different. Most of differences are located at the wall of the left ventricle for the beginning part of the systole (Fig. 11, *A*). The magnitude of velocity for the T-model significantly higher than for the UT-model at the bottom part of the aorta at next phase (Fig. 11, *B*). The braking of the flow leads to increase the magnitude of the velocity for the T-model for most part of aorta (Fig. 11, *C*). The increasing has a range from 7 % to 10 %. The velocity of the flow decrease but differences don't change. It is a evidence of appearing of a vortex structure (Fig. 11, *D*).

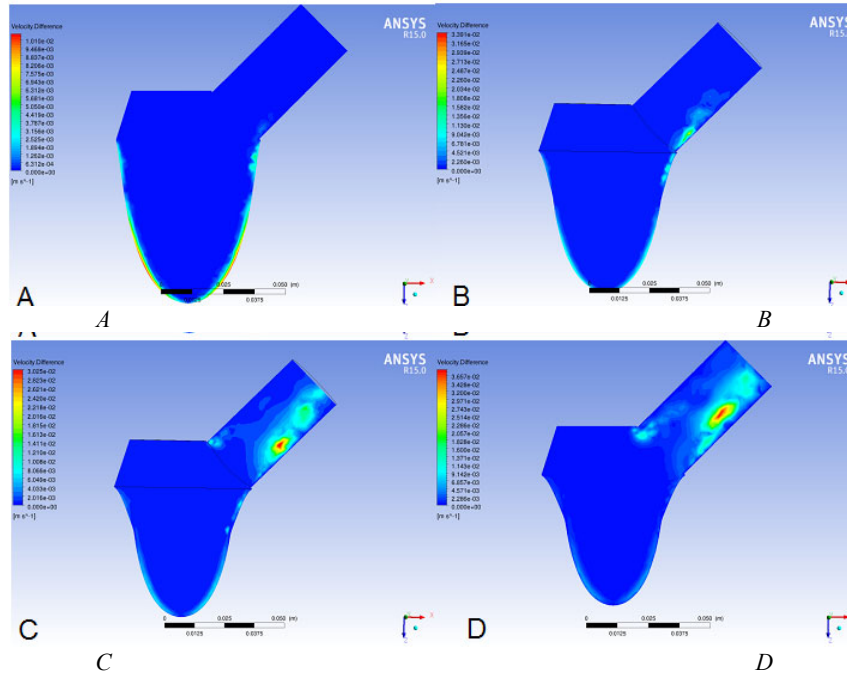


Fig. 11 – The difference between velocities at the vertical cross plane for T- models and UT-model in the different time:
A – time = 0.07 s ; *B* – time = 0.14 s ; *C* – time = 0.21 s ; *D* – time = 0.28 s .

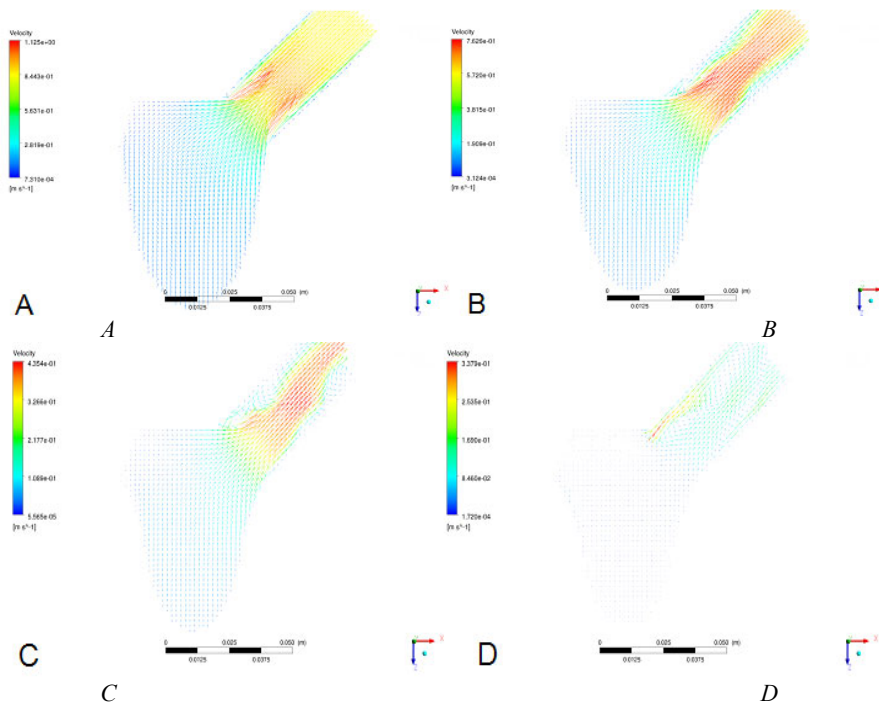


Fig. 12 – The pressure at the vertical cross plane for T- models in the different time:
A – time = 0.07 s ; *B* – time = 0.14 s ; *C* – time = 0.21 s ; *D* – time = 0.28 s .

The structure of the flow can be represented with vector plots. In the first half of the systolic phase the pattern of the flow is similar to the common ejection pattern as for the T-model (Fig. 12, *A, B*) and for the UT-model (Fig. 13, *A, B*). We can observe compression of the flow and the appearing of toroidal vortex in the root part of the aorta (Fig. 12, *A*, 13, *A*). When the acceleration of the flow decreases the vortex spreads along the aorta and the main flow becomes sinuous (Fig. 12, *B*, 13, *B*). The first part of the braking flow is characterized the more complicate vortex structure and creating of the backward flow (Fig. 12, *C*, 13, *C*). The insensitivity of the backward flow dominates in the final part of systola.

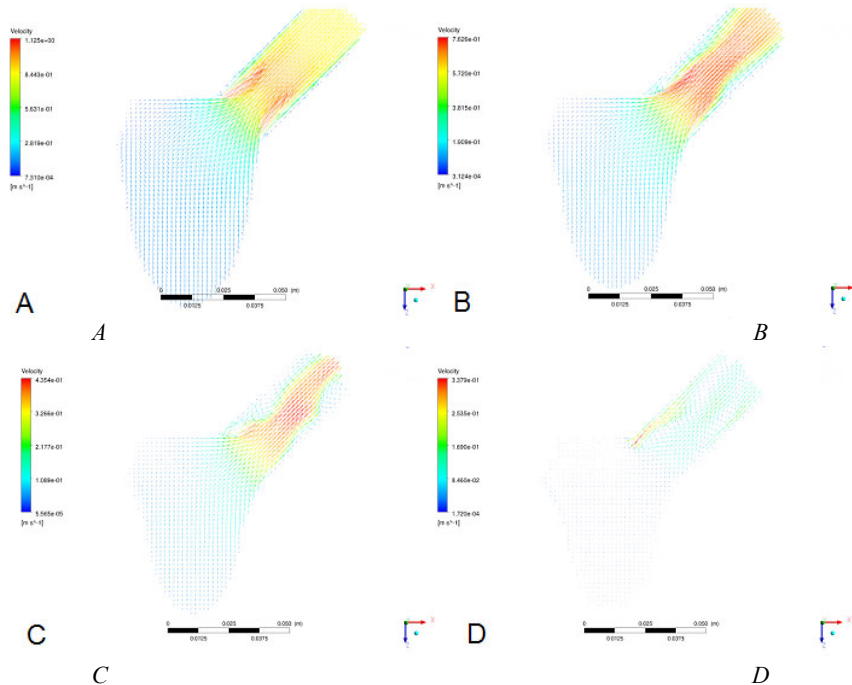


Fig. 13 – The pressure at the vertical cross plane for UT- models in the different time:
A – time = 0.07s ; *B* – time = 0.14s ; *C* – time = 0.21s ; *D* – time = 0.28s .

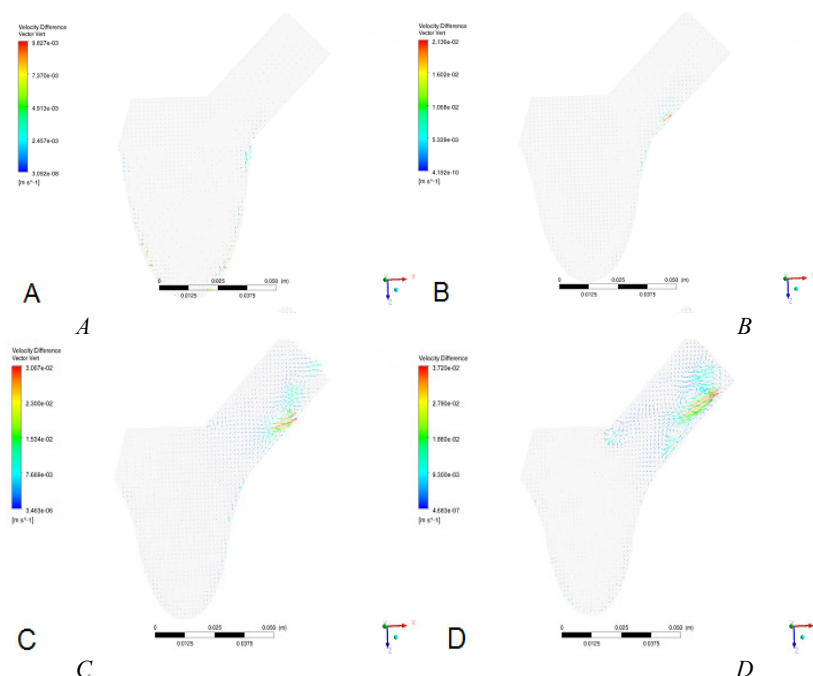


Fig. 14 – The difference between velocity's magnitudes for T-model and UT- models in the different time:
A – time = 0.07s ; *B* – time = 0.14s ; *C* – time = 0.21s ; *D* – time = 0.28s .

Differences between patterns of flow are negligible for the aortic part of the domain and significant near left ventricle's wall of the beginning part of systole (Fig. 14, *A*). The decreasing of the flow shifts the area with great differences to the aorta (Fig. 14, *B*). In the beginning phase of the braking flow we can observe great differences between models. Tor-

sion motion is a cause of more intensive rotate motion in aorta (Fig. 14, C). Moreover, the vortex structure for the T-model is more complicate then the pattern of the flow for the UT-model. Differences spread in a backward direction (from the aorta to the ventricle) in the last part of systole (Fig. 14, D).

Conclusion. We can note that torsional motion influences to the pattern of flow in the left ventricle. It creates the condition for more quick filling of the left ventricle because the gradient of the pressure significantly greater. The disturbance of torsional motion leads to deterioration of blood circulation and correspondingly decreasing oxygenation.

To fully understand the physiological principles of left ventricular torsion (LV torsion), further research is needed. Despite significant technical limitations, considerable knowledge has already been gained regarding left ventricular rotation in a healthy heart. However, only a single calculation method that describes rotation as an angular displacement around the circumference and along the longitudinal axis throughout the entire cardiac cycle and adjusts for centroid motion will enable the use of left ventricular torsion as a measure for the quantitative assessment of myocardial dysfunction associated with a wide range of heart diseases. Since the amount and timing of left ventricular torsion are directly related to the structure and function of the myocardium and cardiomyocytes, left ventricular torsion represents a promising measure for the qualitative as well as quantitative detection of (sub)clinical (systolic and diastolic) dysfunction.

This work was partially supported by a grant from the Simons Foundation (Award 1160640, Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants, Vitalii Overko).

Bibliography

1. Fyrenius A., Wigström L., Ebbers T., Karlsson M., Engvall J., Bolger A. Three dimensional flow in the human left atrium // *Heart (British Cardiac Society)*. – 2001. – vol. 86(4). – P. 448 – 455. DOI: 10.1136/heart.86.4.448.
2. Kilner P. J., Yang G.-Z., Wilkes A. J., Mohiaddin R. H., Firmin D. N., Yacoub M. H. Asymmetric redirection of flow through the heart // *Nature*. – 2000. – vol. 404(6779). – P. 759 – 764. DOI: 10.1038/35008075.
3. Tanne D., Bertrand E., Pibarot P., Rieu R. Asymmetric flows in an anatomical-shaped left atrium by 2C-3D+T PIV measurements // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. – COMPUT METHODS BIOMECH BIOMED, 2008. – vol. 11. – P. 209 – 211. DOI: 10.1080/10255840802298943.
4. Helle-Valle T., Crosby J., Edvardsen T., Lyseggen E., Amundsen B. H., Smith H. J., Rosen B. D., Lima J. A., Torp H., Ihlen H., Smiseth O. A. New noninvasive method for assessment of left ventricular rotation: speckle tracking echocardiography // *Circulation*. – 2005. – vol. 112. – P. 3149–3156. DOI: 10.1161/CIRCULATIONAHA.104.531558.
5. McDonald I. G. The shape and movements of the human left ventricle during systole: a study by cineangiography and by cineradiography of picardial markers // *The American journal of cardiology*. – 1970. – vol. 26(3). – P. 221 – 230. DOI: 10.1016/0002-9149(70)90787-3.
6. Rademakers F. E., Buchalter M. B., Rogers W. J., Zerhouni E. A., Weisfeldt M. L., Weiss J. L., Shapiro E. P. Dissociation between left ventricular untwisting and filling: accentuation by catecholamines // *Circulation*. – 1992. – vol. 85(4). – P. 1572 – 1581. DOI: 10.1161/01.cir.85.4.1572.
7. Gibbons Kroeker C. A., Ter Keurs H. E., Knudtson M. L., Tyberg J. V., Beyar R. An optical device to measure the dynamics of apex rotation of the left ventricle // *The American journal of physiology*. – 1993. – vol. 265(4 Pt 2). – P. H1444 – H1449. DOI: 10.1152/ajpheart.1993.265.4.H1444.
8. Moon M. R., Ingels N. B. Jr., Daughters G. T., Stinson E. B., Hansen D. E., Miller D. C. Alterations in left ventricular twist mechanics with inotropic stimulation and volume loading in human subjects // *Circulation*. – 1994. – vol. 89(1). – P. 142 – 150. DOI: 10.1161/01.cir.89.1.142.
9. Hansen D. E., Daughters G. T., Alderman E. L., Ingels N. B., Stinson E. B., Miller D. C. Effect of volume loading, pressure loading, and inotropic stimulation on left ventricular torsion in humans // *Circulation*. – 1991. – vol. 83(4). – P. 1315 – 1326. DOI: 10.1161/01.cir.83.4.1315.
10. Notomi Y., Lysyansky P., Setser R. M., Shiota T., Popović Z. B., Martin-Miklovic M. G., Weaver J. A., Oryszak S. J., Greenberg N. L., White R. D., Thomas J. D. Measurement of ventricular torsion by two-dimensional ultrasound speckle tracking imaging // *Journal of the American College of Cardiology*. – 2005. – vol. 45(12). – P. 2034 – 2041. DOI: 10.1016/j.jacc.2005.02.082.
11. Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *Journal of Computational Physics*. – 1986. – Vol. 62. – no. 1. – P. 40 – 65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
12. Stefanou K., Naka K., Michalis L., Filipović N., Parodi O. Blood flow in arterial segments: Rigid vs. deformable walls simulations // *J. Serbian Soc. Comput. Mech.* – 2011. – vol. 5. – pp. 69 – 77.
13. Shibeshi S. S., Collins W. E. The rheology of blood flow in a branched arterial system // *Applied rheology (Lappersdorf, Germany: Online)*. – 2005. – vol. 15(6). – pp. 398 – 405. DOI: 10.1901/jaba.2005.15-398.
14. Gharahi H., Zambrano B. A., Zhu D. C., DeMarco J. K., Baek S. Computational fluid dynamic simulation of human carotid artery bifurcation based on anatomy and volumetric blood flow rate measured with magnetic resonance imaging // *International journal of advances in engineering sciences and applied mathematics*. – 2016. – vol. 8(1). – pp. 46 – 60. DOI: 10.1007/s12572-016-0161-6.
15. Olufsen M. S. A one-dimensional fluid dynamic model of the systemic arteries // *Stud. Health Technol. Inform.* – 2000. – vol. 71. – pp. 79 – 97. PMID: 10977605.
16. Johnston B. M., Johnston P. R., Corney S., Kilpatrick D. Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: Steady state simulations // *J. Biomech.* – 2004. – vol. 37. – pp. 709 – 720. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2003.09.016.
17. Bell J. B., Colella P., Glaz H. M. Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations // *J. Comput. Phys.* – 1989. – vol. 283. – pp. 257 – 283. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90151-4.
18. Sigrid Kaarstad Dahl. Numerical Simulations of Blood Flow in the Left Side of the Heart. Thesis for the degree of Philosophiae Doctor Trondheim. – Norwegian University of Science and Technology, 2012. – 118 p.
19. Watanabe H., Sugiyama H., Kafuku H., Hisada T. Multiphysics simulation of left ventricular filling dynamics using fluid-structure interaction finite element method // *Biophysical journal*. – 2004. – Vol. 87(3). – pp. 2074 – 2085. DOI: 10.1529/biophysj.103.035840.

References (transliterated)

1. Fyrenius A., Wigström L., Ebbers T., Karlsson M., Engvall J., Bolger A. Three dimensional flow in the human left atrium. *Heart (British Cardiac Society)*. 2001, vol. 86(4), pp. 448–455. DOI: 10.1136/heart.86.4.448.
2. Kilner P. J., Yang G.-Z., Wilkes A. J., Mohiaddin R. H., Firmin D. N., Yacoub M. H. Asymmetric redirection of flow through the heart. *Nature*. 2000, vol. 404(6779), pp. 759–764. DOI: 10.1038/35008075.
3. Tanne D., Bertrand E., Pibarot P., Rieu R. Asymmetric flows in an anatomical-shaped left atrium by 2C-3D+T PIV measurements. *Computer*

- Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. COMPUT METHODS BIOMECH BIOMED, 2008, vol. 11, pp. 209–211. DOI: 10.1080/10255840802298943.
4. Thomas Helle-Valle, Jonas Crosby, Thor Edvardsen, Erik Lyseggen, Brage H. Amundsen, Hans-Jørgen Smith, Boaz D. Rosen, João A.C. Lima, Hans Torp, Halfdan Ihlen, Otto A. Smiseth. New Noninvasive Method for Assessment of Left Ventricular Rotation. *Circulation*. 2005, 112:3149–3156. DOI: 10.1161/CIRCULATIONAHA.104.531558.
 5. McDonald I. G. The shape and movements of the human left ventricle during systole: a study by cineangiography and by cineradiography of picardial markers. *The American journal of cardiology*. 1970, vol. 26(3), pp. 221–230. DOI: 10.1016/0002-9149(70)90787-3.
 6. Rademakers F. E., Buchalter M. B., Rogers W. J., Zerhouni E. A., Weisfeldt M. L., Weiss J. L., Shapiro E. P. Dissociation between left ventricular untwisting and filling: accentuation by catecholamines. *Circulation*. 1992, vol. 85(4), pp. 1572–1581. DOI: 10.1161/01.cir.85.4.1572.
 7. Gibbons Kroeker C. A., Ter Keurs H. E., Knudtson M. L., Tyberg J. V., Beyar R. An optical device to measure the dynamics of apex rotation of the left ventricle. *The American journal of physiology*. 1993, vol. 265(4 Pt 2), H1444–H1449. DOI: 10.1152/ajpheart.1993.265.4.H1444.
 8. Moon M. R., Ingels N. B. Jr., Daughters G. T., Stinson E. B., Hansen D. E., Miller D. C. Alterations in left ventricular twist mechanics with inotropic stimulation and volume loading in human subjects. *Circulation*. 1994, vol. 89(1), pp. 142–150. DOI: 10.1161/01.cir.89.1.142.
 9. Hansen D. E., Daughters G. T., Alderman E. L., Ingels N. B., Stinson E. B., Miller D. C. Effect of volume loading, pressure loading, and inotropic stimulation on left ventricular torsion in humans. *Circulation*. 1991, vol. 83(4), pp. 1315–1326. DOI: 10.1161/01.cir.83.4.1315.
 10. Notomi Y., Lysansky P., Setser R. M., Shiota T., Popović Z. B., Martin-Miklovic M. G., Weaver J. A., Oryszak S. J., Greenberg N. L., White R. D., Thomas J. D. Measurement of ventricular torsion by two-dimensional ultrasound speckle tracking imaging. *Journal of the American College of Cardiology*. 2005, vol. 45(12), pp. 2034–2041. DOI: 10.1016/j.jacc.2005.02.082.
 11. Issa R. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986, Vol. 62, no. 1, pp. 40–65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
 12. Stefanou K., Naka K., Michalis L., Filipović N., Parodi O. Blood flow in arterial segments: Rigid vs. deformable walls simulations. *J. Serbian Soc. Comput. Mech*. 2011, vol. 5, pp. 69–77.
 13. Shibeshi S. S., Collins W. E. The rheology of blood flow in a branched arterial system. *Applied rheology (Lappersdorf, Germany: Online)*. 2005, vol. 15(6), pp. 398–405. DOI: 10.1901/jaba.2005.15-398.
 14. Gharahi H., Zambrano B. A., Zhu D. C., DeMarco J. K., Baek S. Computational fluid dynamic simulation of human carotid artery bifurcation based on anatomy and volumetric blood flow rate measured with magnetic resonance imaging. *International journal of advances in engineering sciences and applied mathematics*. 2016, vol. 8(1), pp. 46–60. DOI: 10.1007/s12572-016-0161-6.
 15. Olufsen M. S. A one-dimensional fluid dynamic model of the systemic arteries. *Stud. Health Technol. Inform.* 2000, vol. 71, pp. 79–97. PMID: 10977605.
 16. Johnston B. M., Johnston P. R., Corney S., Kilpatrick D. Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: Steady state simulations. *J. Biomech*. 2004, vol. 37, pp. 709–720. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2003.09.016.
 17. Bell J. B., Colella P., Glaz H. M. Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.* 1989, vol. 283, pp. 257–283. DOI: 10.1016/0021-9991(89)90151-4.
 18. Sigrid Kaarstad Dahl. *Numerical Simulations of Blood Flow in the Left Side of the Heart. Thesis for the degree of Philosophiae Doctor Trondheim*. Norwegian University of Science and Technology, 2012. 118 p.
 19. Watanabe H., Sugiura S., Kafuku H., Hisada T. Multiphysics Simulation of Left Ventricular Filling Dynamics Using Fluid-Structure Interaction Finite Element Method. *Biophysical Journal*. 2004, Vol. 87(3), pp. 2074–2085. DOI: 10.1529/biophysj.103.035840.

Надійшла (received) 25.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Оверко Віталій Станіславович – молодший науковий співробітник, Інститут прикладної математики та механіки НАН України, м. Черкаси; тел.: (093) 013-82-05; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4861-3274>; e-mail: vitaliiverko@gmail.com.

Overko Vitalii Stanislavovych – Junior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Cherkasy; tel.: (093) 013-82-05; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4861-3274>; e-mail: vitaliiverko@gmail.com.

І. Ю. ПИЛИПЧЕНКО, С. О. ДОВГИЙ, Д. І. ЧЕРНІЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ З СИСТЕМОЮ КОНФУЗОРІВ БРІКСА-КОРТА

Літальні апарати типу VTOL викликають інтерес завдяки своїй універсальності та здатності діяти в умовах обмеженого простору. Перспективним розвитком цього напрямку є застосування комплексу технічних рішень з аеродинамічних компоновань, для забезпечення необхідної аеродинамічної якості ЛА на усіх режимах польоту одночасно, а саме – оснащення літаючої платформи системою насадків Брікса – Корта, які здатні підвищити аеродинамічну ефективність рушіїв ЛА як у вертикальному, так і в горизонтальному режимах польоту. Комплексне дослідження цієї концепції є необхідним кроком у напрямі створення концептуально нових літальних ЛА – систем надмалих мобільних літальних платформ, схема польоту яких залежить від орієнтації ЛА у просторі. Об'єкт дослідження: моделі літальних апаратів з насадками Брікса – Корта, для вертикального зльоту і приземлення та горизонтального польоту. Метою роботи є розробка теоретично обґрунтованої концепції літального апарата вертикального зльоту та горизонтального польоту (типу VTOL) з вантажопідйомністю до 200 кг, здатного забезпечити горизонтальний політ протягом 10 – 30 хвилин на швидкості до 100 км/год. Основна увага приділяється створенню ефективної аеродинамічної компоновки, аналізу тягових характеристик та дослідженню можливостей використання спеціалізованих аеродинамічних елементів (зокрема насадків типу Брікса – Корта) для підвищення ефективності рушіїв у режимах вертикального та горизонтального польоту.

Ключові слова: Насадок Брікса-Корта, моделювання течії, метод дискретних особливостей, літальний апарат, VTOL.

I. YU. PYLYPCHENKO, S. O. DOVGYI, D. I. CHERNIY

MODELING OF THE FLOW AROUND AN AIRCRAFT EQUIPPED WITH BRIX-KORT NOZZLE SYSTEM

VTOL aircraft are of growing interest due to their versatility and ability to operate in confined spaces. A promising development of this direction is the application of a set of technical solutions for aerodynamic layouts to ensure the necessary aerodynamic quality of the aircraft in all flight modes simultaneously, namely, equipping the flying platform with a system of Brix-Court nozzles, which are capable of increasing the aerodynamic efficiency of the aircraft engines in both vertical and horizontal flight modes. A comprehensive study of this concept is a necessary step towards the creation of conceptually new flying aircraft - systems of ultra-small mobile flying platforms, the flight pattern of which depends on the orientation of the aircraft in space. The object of research: models of aircraft with Brix-Court nozzles, for vertical take-off and landing and horizontal flight. The aim of the work is to develop a theoretically substantiated concept of a vertical take-off and horizontal flight (VTOL type) aircraft with a payload of up to 200 kg, capable of providing horizontal flight for 10 – 30 minutes at speeds up to 100 km/h. The main attention is paid to the creation of an effective aerodynamic layout, analysis of traction characteristics and research into the possibilities of using specialized aerodynamic elements (in particular, Brix-Court type nozzles) to increase the efficiency of engines in vertical and horizontal flight modes.

Key words: Brix- Kort nozzle, flow simulation, method of discrete singularities, aircraft, VTOL.

Вступ. Сучасна авіаційна техніка стрімко розвивається у відповідь на нові виклики, пов'язані з урбанізацією, потребою у швидкому доставленні вантажів у важкодоступні райони, а також зростанням попиту на *автономні та енергоефективні транспортні системи*. У цьому контексті особливу зацікавленість викликають *літальні апарати вертикального зльоту та посадки (VTOL)*, які здатні поєднувати переваги гвинтокрилів і літаків: маневреність і мобільність – з одного боку, та ефективність горизонтального польоту – з іншого.

Попри різноманіття існуючих типів *літальних апаратів (ЛА)* – від класичних літаків і гелікоптерів до мультікоптерів і конвертопланів – жоден із них не відповідає повною мірою вимогам до компактного, недорогого, універсального апарата, що здатний підіймати вантаж до 200 кг, здійснювати вертикальний злет і посадку, та летіти з крейсерською швидкістю до 100 км/год протягом 30 хвилин.

У даній роботі розглянуто перспективний підхід [1 – 4] до створення надмалої VTOL-платформи неklasичної схеми, яка здатна змінювати свою геометричну орієнтацію у просторі. Завдяки використанню спеціалізованих аеродинамічних елементів – зокрема, *насадок типу Брікса – Корта* – така конструкція дозволяє підвищити ефективність рушіїв без істотного збільшення маси. Представлено технологію моделювання нової схеми ЛА (рис. 1 – 6) [3, 4], що здатна забезпечити як вертикальний злет (рис. 1, 3, 5), так і економічний горизонтальний політ (рис. 2, 4, 6), відкриваючи нові можливості для створення автономних індивідуальних транспортних систем нового покоління.

1. Схема 1 з двома пропелерами в насадку та двома крилами під кутом.

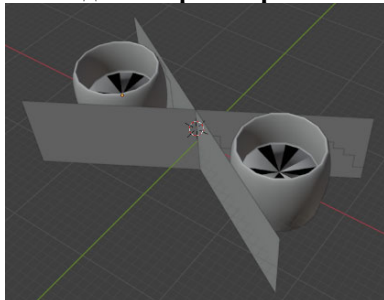


Рис. 1 – Вертикальний зліт.

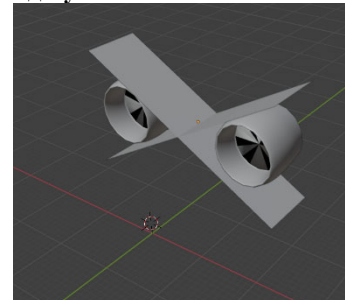


Рис. 2 – Горизонтальний політ.

2. Схема 2 з двома паралельними крилами та 2 пропелерами в насадку.

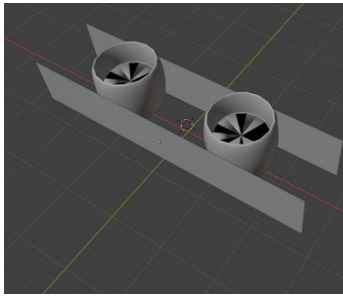


Рис. 3 – Вертикальний зліт.

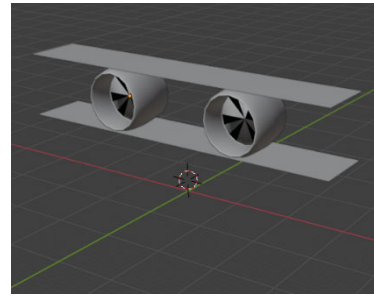


Рис. 4 – Горизонтальний політ.

3. Схема 3 з чотирма насадками та одним крилом.

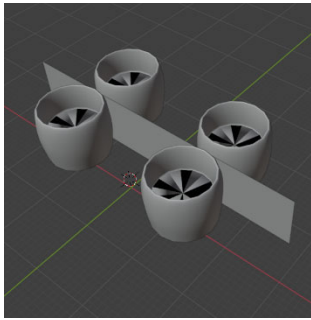


Рис. 5 – Вертикальний зліт.

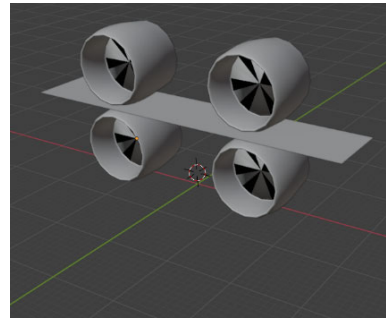


Рис. 6 – Горизонтальний політ.

Метою роботи є розробка теоретично обґрунтованої концепції літального апарату вертикального злету та горизонтального польоту (типу VTOL) з вантажопідйомністю до 200 кг, здатного забезпечити горизонтальний політ протягом 10–20 хвилин на швидкості до 100 км/год. Основна увага приділяється створенню нової мобільної аеродинамічної компоновки, аналізу тягових характеристик та дослідженню можливостей використання спеціалізованих аеродинамічних елементів (зокрема насадків типу Брікса – Корта) для підвищення ефективності рухів у режимах вертикального та горизонтального польоту.

Постановка задачі. Розглядається задача відривного обтікання літального апарату з системою конфузурів Брікса – Корта потоком ідеальної нестисливої рідини, яка рухається з заданою швидкістю. Вважаємо, що існує така скалярна функція $\varphi(x, r)$, що векторне поле швидкості $\vec{V}(x, r) = \nabla \varphi(x, r)$.

У області існують межі L_x типів: поверхня L_d та вихровий слід L_v – поверхні тангенціального розриву швидкості. Поза L_v , L_d , функція φ задовольняє умовам:

Для нашої задачі справедливе рівняння Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1)$$

Течія потенційна:

Течія на нескінченності має сталу скінченну швидкість:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_{\infty}, \quad (2)$$

$|r|$ – відстань від контуру,

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

Умова неперервності нормальної складової вектора швидкості на вільній рухомій межі L_v :

$$\left. \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \right|_{L_v} = \left. \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \right|_{L_v}. \quad (4)$$

Умова неперервності тиску при перетині вільної рухомої межі L_v :

$$p^+|_{L_v} = p^-|_{L_v}. \quad (5)$$

Умова непроникності потоку на поверхні насадки, літального апарату:

$$(\nabla \varphi) * \vec{n}^b = 0. \quad (6)$$

Умова визначення швидкості потоку у перерізі конфузору – поверхні диску, який імітує ідеальний пропелер:

$$(\nabla \varphi) * \vec{n}^{pr} = k * |\vec{V}_{\infty}|, \quad (7)$$

де $\vec{n}_p$ – орт нормалі к пропелеру; $\vec{n}_b$ – орт нормалі к ЛА; k – швидкість внутрішньої течії.

Дискретизована математична модель просторової аеродинамічної течії навколо ЛА. Дискретизована математична модель [5] для визначення швидкості течії, має представлення:

$$\vec{V}(x, y, z, t_{n+1}) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}_j(x, y, z, x_{0j}, y_{0j}, z_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}_j(x, y, z, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}), z_i^p(t_{n+1})), \quad (8)$$

де $\vec{V}_j(x, y, z, x_{0j}, y_{0j}, z_{0j})$ – швидкість у точці (x, y, z) , яка породжена вихровим елементом, який знаходиться в точці (x_{0j}, y_{0j}, z_{0j}) з інтенсивністю $\Gamma = 1$; Γ_j – інтенсивність вихорів на нерухомій поверхні; γ_i^p – інтенсивність вихорів після відриву.

Математична модель просторового потенціалу, в області зі змінною межею визначається задачею:

$$\left. \frac{\partial(\varphi^+ - \varphi^-)}{\partial t} \right|_{\vec{r}_v} = 0, \quad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = V(\vec{r}_v, t); \quad (10)$$

$$t = t_0 : L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0). \quad (11)$$

Результати моделювання ідеального пропелера в конфузурі Брікса-Корта для 3-х режимів польоту.

На рис. 7 – 12, рис. 19 – 24 та рис. 31 – 36: червоні лінії – ізолінії течії. Жовтими точками відмічені критичні точки, у яких швидкість течії $v = 0$. Зміщення критичної точки вздовж зовнішньої поверхні насадок забезпечує збільшення об'єму повітря, що проходить через насадок за одиницю часу, що збільшує імпульс на вихідному перерізі конфузору, що збільшує тягу рушія (табл. 1, табл. 2, табл. 3).

Моделювання течії за конфузуром Брікса-Корта при початковому режимі зльоту та посадки:

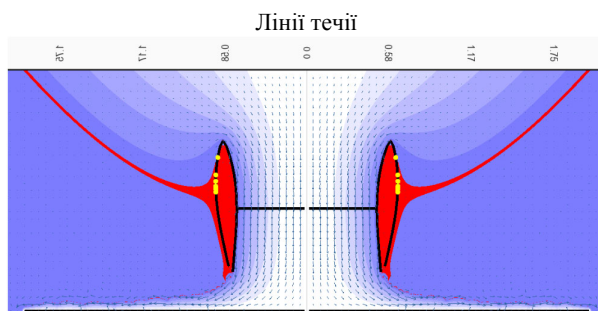


Рис. 7 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.

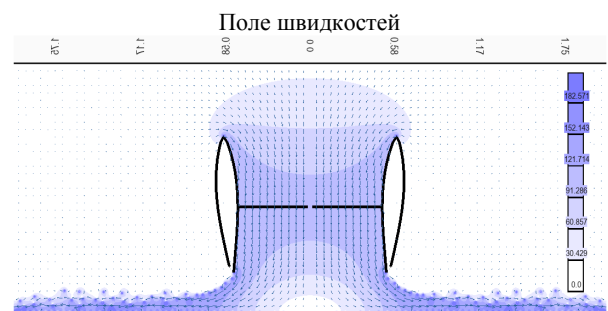


Рис. 8 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.

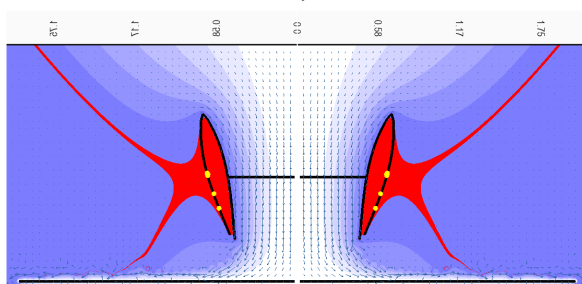


Рис. 9 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.

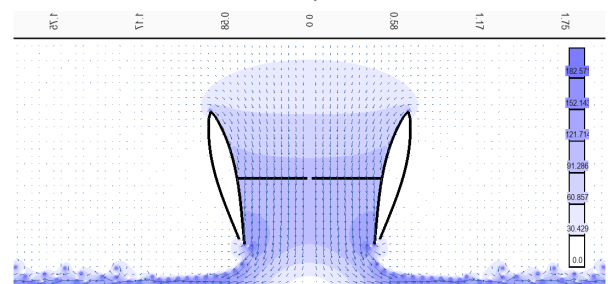


Рис. 10 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.

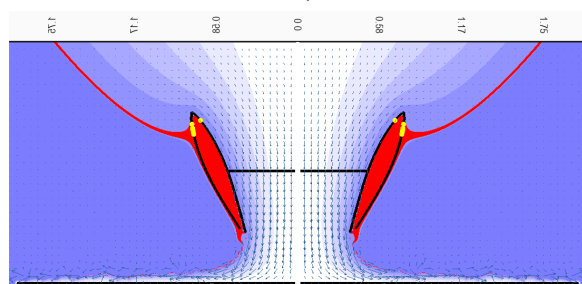


Рис. 11 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.

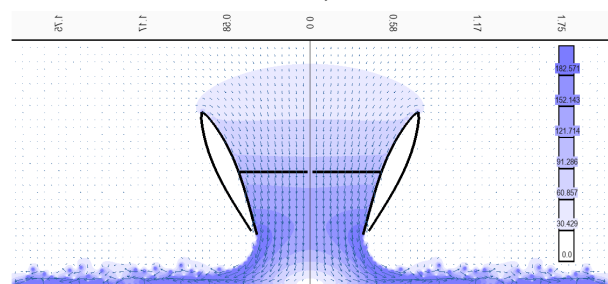
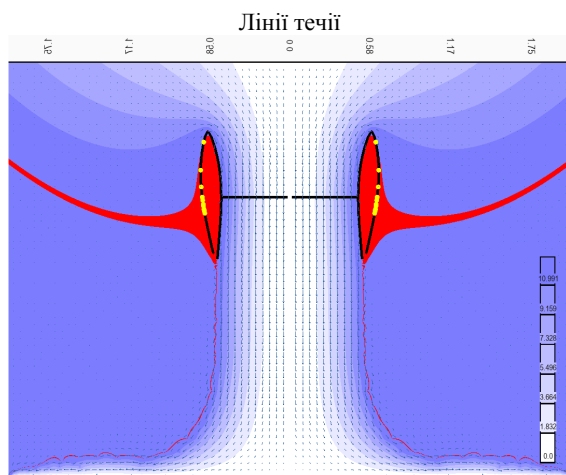
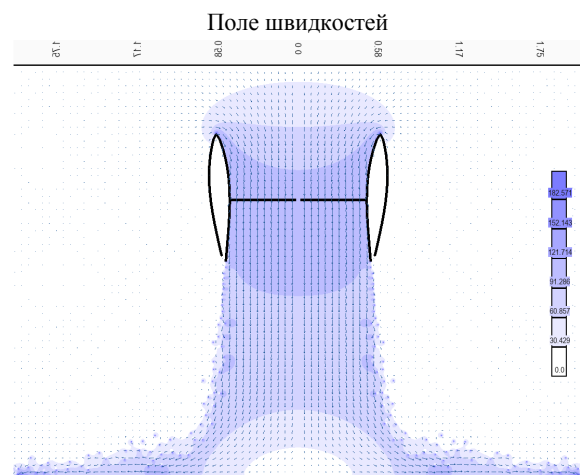
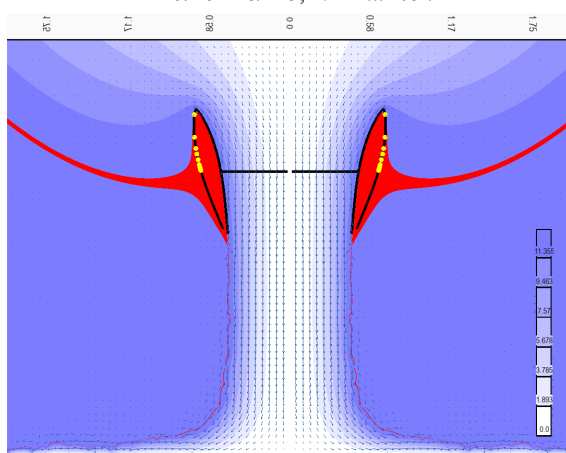
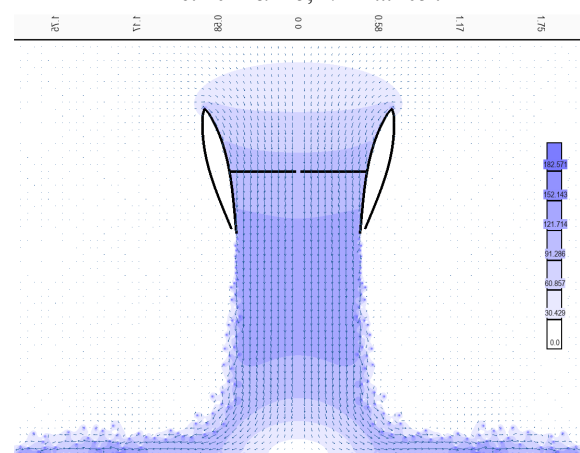


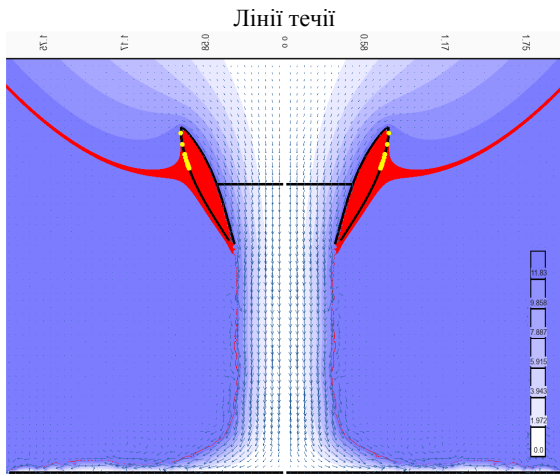
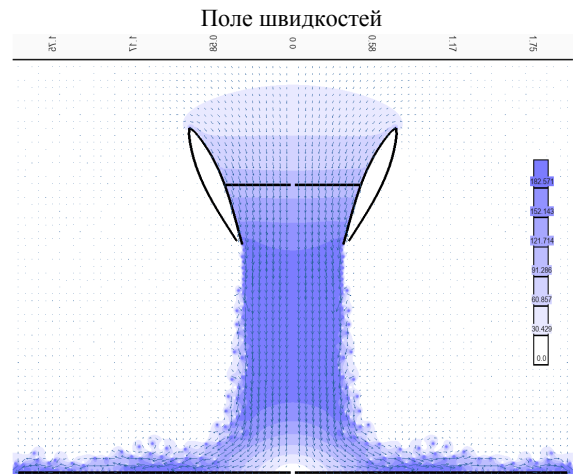
Рис. 12 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.

Таблиця 1 – Залежність параметрів $V(k)$, $x(k)$ – індуктивної швидкості течії і координати критичної точки по осі OX (рис. 13 – 18)

$\alpha = 5$	$\alpha = 15$	$\alpha = 25$
Рис. 13.	Рис. 14.	Рис. 15.
Рис. 16.	Рис. 17.	Рис. 18.

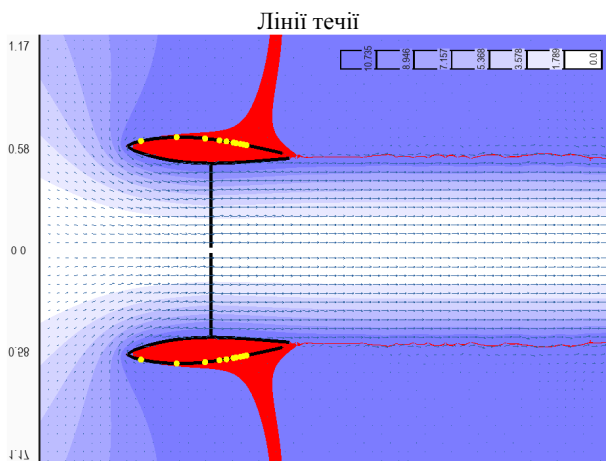
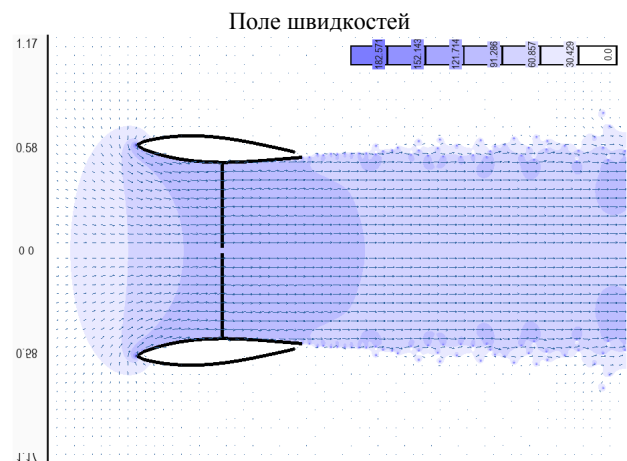
Моделювання течії конфузоров Брікса-Корта після відриву від платформи:

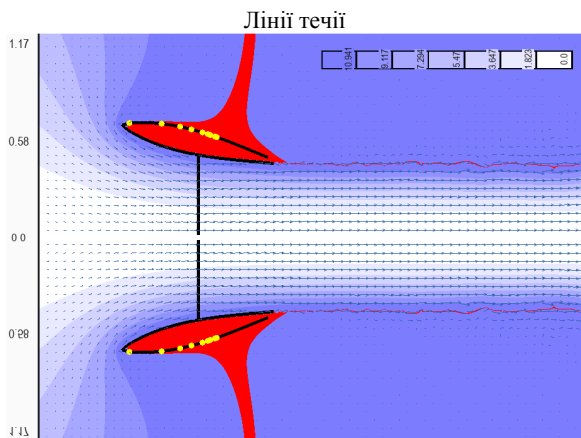
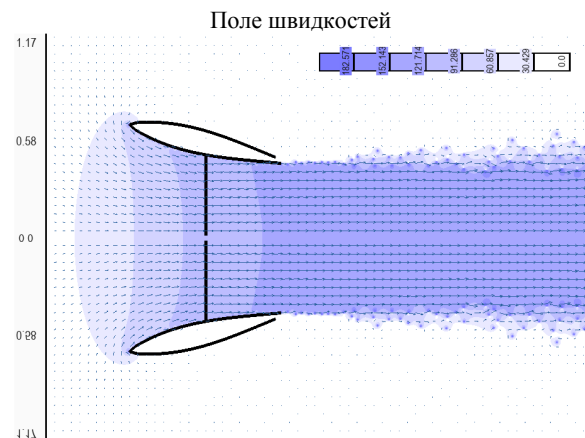
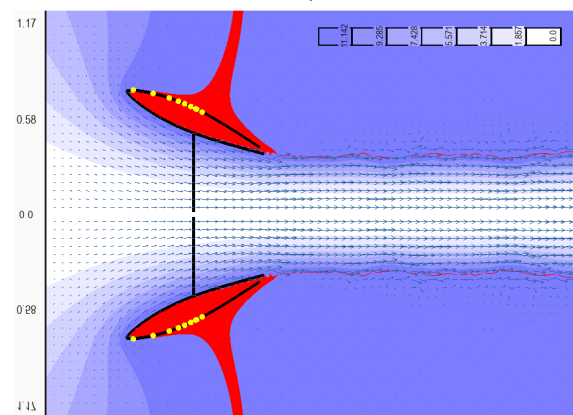
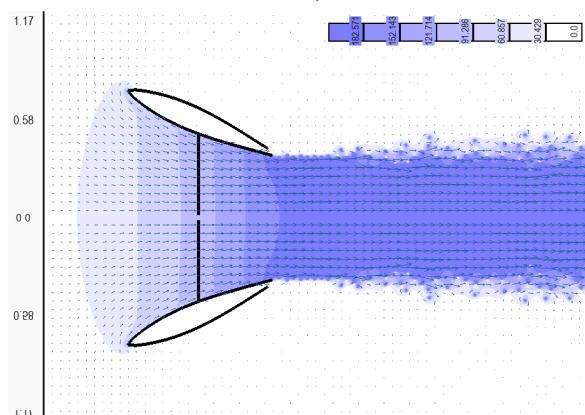
Рис. 19 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 20 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 21 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 22 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.

Рис. 23 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 24 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.Таблиця 2 – Залежність параметрів $V(k)$, $x(k)$ – індуктивної швидкості течії і координати критичної точки по осі OX (рис. 25 – 30)

$\alpha = 5$	$\alpha = 15$	$\alpha = 25$
Рис. 25.	Рис. 26.	Рис. 27.
Рис. 28.	Рис. 29.	Рис. 30.

Моделювання течії за конфуззором Брікса-Корта у горизонтальному положенні (режим горизонтального польоту):

Рис. 31 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 32 – $\alpha = 5$, $k = 1 \dots 105$.

Рис. 33 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 34 – $\alpha = 15$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 35 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.Рис. 36 – $\alpha = 25$, $k = 1 \dots 105$.Таблиця 3 – Залежність параметрів $V(k)$, $x(k)$ – індуктивної швидкості течії і координати критичної точки по осі OX (рис. 37 – 42)

$\alpha = 5$	$\alpha = 15$	$\alpha = 25$
Рис. 37.	Рис. 38.	Рис. 39.
Рис. 40.	Рис. 41.	Рис. 42.

Результати моделювання просторових течій навколо конструкції ЛА. Результати моделювання просторових течій навколо конструкції ЛА (варіант з рис. 1) для кутів атаки $0 \dots 10$ градусів, $k = 2 \dots 4$, $\lambda = 0 \dots 20$ градусів (рис. 43 – 54).

Моделювання течії при $k = 2$, $\alpha = 20$, кут атаки 0°

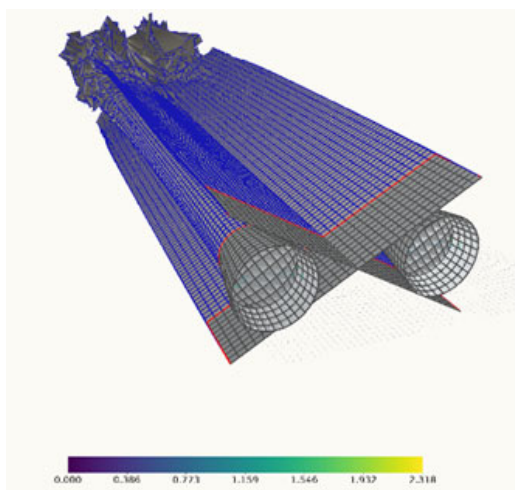


Рис. 43.

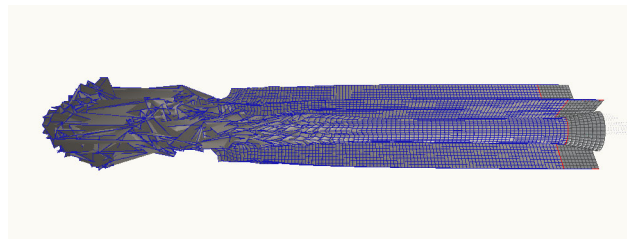


Рис. 44 – Вид збоку.

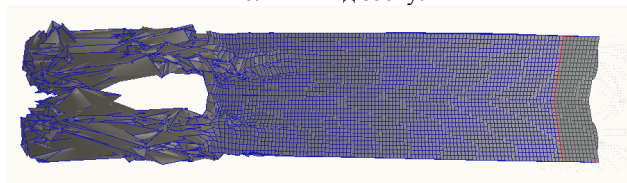


Рис. 45 – вид зверху.

Моделювання течії при $k = 2$, $\alpha = 20$, кут атаки 5°

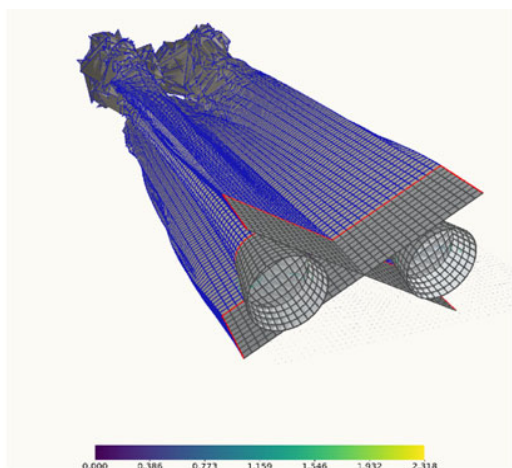


Рис. 46.

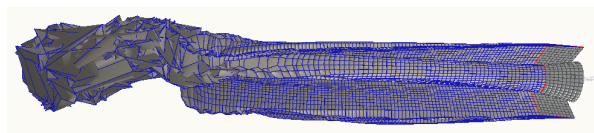


Рис. 47 – Вид збоку.

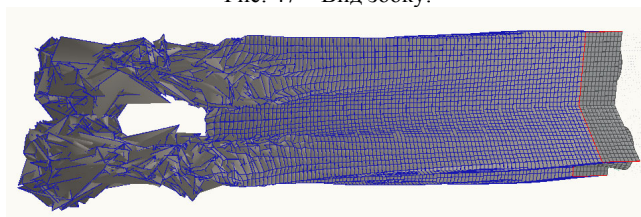


Рис. 48 – вид зверху.

Моделювання течії при $k = 4$, $\alpha = 20$, кут атаки 5°

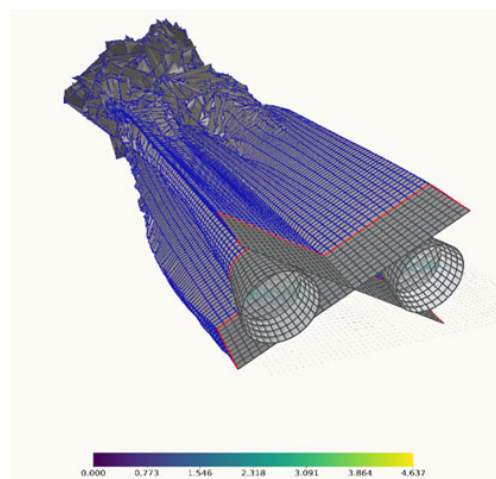


Рис. 49.

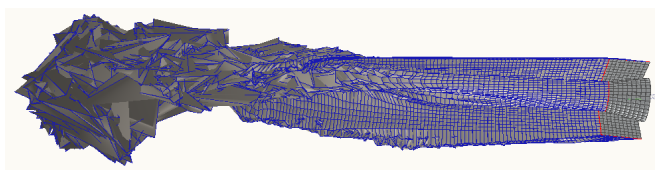


Рис. 50 – Вид збоку.

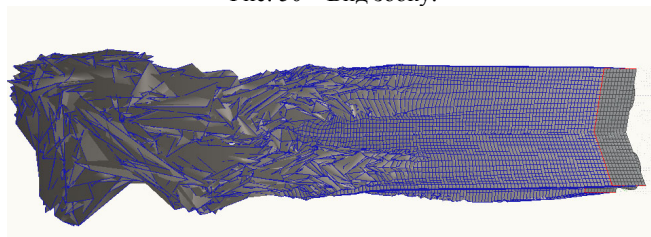


Рис. 51 – вид зверху.

Моделювання течії при $k = 2$, $\alpha = 20$, кут атаки 10°

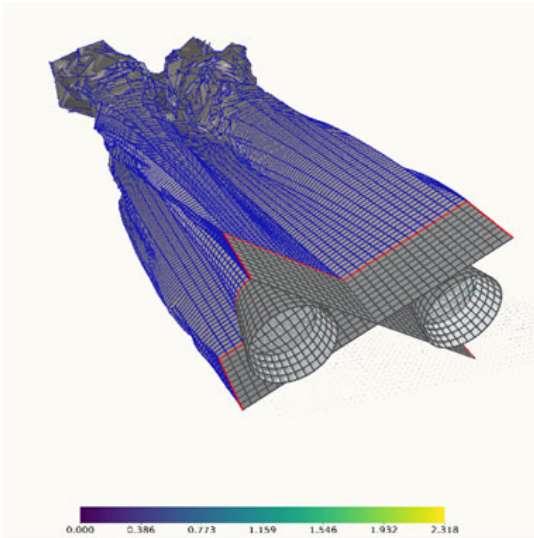


Рис. 52.

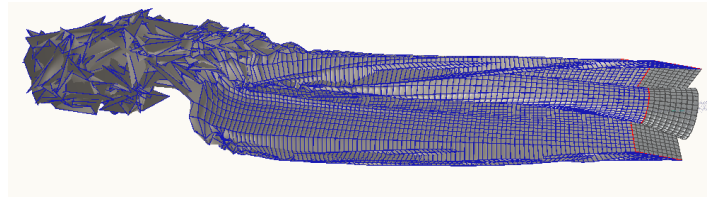


Рис. 53 – Вид збоку.

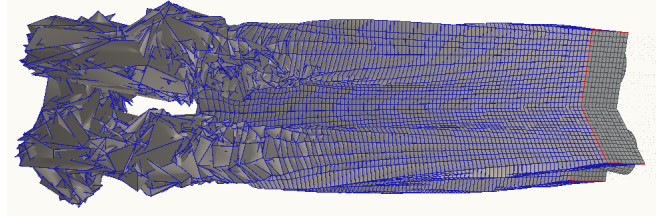


Рис. 54 – вид зверху.

Висновки. 1. Запропоновано математичну модель для концептуальної схеми індивідуального (малого, надлегкого ЛА нового компонування з новим режимом злету-посадки), який може бути оснащений системою електродвигунів для рушіїв з насадком Брікса-Корта.

2. Продемонстровано застосування обчислювальної технології, яка містить математичні моделі, методи та алгоритми обчислень, що надає можливість моделювати течії, які виникають навколо вісесиметричних перешкод або просторових перешкод довільної форми, а також течії, що породженні вісесиметричними пристроями, – системою конфузурів Брікса-Корта.

3. Продемонстровано, що струменеві течії за ідеальним пропелером з насадком Брікса-Корта (у вигляді конфузора) здатні у 1.5 – 2 рази збільшити швидкість струменя за конфузуром (що збільшує імпульс струменя та збільшує тягу рушія).

4. Представлені результати моделювання демонструють, що насадок-конфузор Брікса-Корта здатен значно підвищувати імпульс струменю, що дозволяє застосовувати його у якості аеродинамічного рушія.

5. Застосування конфузурів Брікса-Корта на системі рушіїв та вдале компонування на ЛА рушіїв з системою крил надає нові маневрові та злітно-посадкові якості проєктування надмалих (індивідуальних) літальних апаратів.

Список літератури

1. Черній Д. І., Васін П. О., Пилипченко І. Ю. Математичні моделі відривних течій // Тези. VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». (160-річчя кафедри механіки КНУ). – Київ, Україна, 2023. – С. 67.
2. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies // XXXVIII International Conference Problems of Decision MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023). – 2023. – Page 28.
3. Пилипченко І. Ю., Черній Д. І. Моделювання течії з насадком Бріггса-Форта // Taras Shevchenko National University of Kyiv Proceeding of XXII International Scientific-Practical Conference «Shevchenkivska Vesna – 2024». – Kyiv, Ukraine, 2024. – P. 47.
4. Пилипченко І. Ю., Черній Д. І. Моделювання течії при наявності насадка Бріггса-Форта // Комп'ютерна гідромеханіка: Матеріали дев'ятої міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 1–2 жовтня 2024 р.). – Київ : ІГМ НАН України, 2024. – P. 68–69.
5. Dovgij S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53. – no. 6. – P. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.

References (transliterated)

1. Cherniy D. I., Vasin P. O., Pylypchenko I. Yu. Matematychni modeli vidryvnykh techiy [Mathematical models of separated flows]. Tezy. VII Mizhnarodna naukova konferentsiya "Suchasni problemy mekhaniky" (160-richchya kafedry mekhaniky KNU) [Abstracts of the VII International Scientific Conference Modern Problems of Mechanics (160th Anniversary of the Department of Mechanics Taras Shevchenko National University of Kyiv)]. Kyiv, Ukraine, 2023. P. 67.
2. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies. XXXVIII International Conference Problems of Decision MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023). 2023. Page 28.
3. Pylypchenko I. Yu., Cherniy D. I. Modelyuvannya techiyi z nasadkom Briggsa-Forta [Modeling of flow with a Briggs-Fort nozzle]. Taras Shevchenko National University of Kyiv. Proceedings of the XXII International Scientific-Practical Conference "Shevchenkivska Vesna – 2024". Kyiv, Ukraine, 2024. P. 47.

4. Pylypchenko I. Yu., Cherniy D. I. Modelyuvannya techiyi pry nayavnosti nasadka Briggsa-Forta [Flow modeling in the presence of a Briggs-Fort nozzle]. *Komp'yuterna gidromekhanika : Materialy dev'yatoyi mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi (Kyiv, 1–2 zhovtnya 2024r.)* [Computer Hydromechanics: Proceedings of the Ninth International Scientific-Practical Conference (Kyiv, October 1–2, 2024)]. Kyiv, IHM NAN Ukrainy Publ., 2024. P. 68–69.
5. Dovgii S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017, Vol. 53, no. 6, pp. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.

Надійшла (received) 30.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Пилипенко Іван Юрійович – студент 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 056-47-19; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-3362-3018>; e-mail: vindiesel2771@gmail.com.

Pylypchenko Ivan Yuriiovych – 2nd-year Master's student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 056-47-19; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-3362-3018>; e-mail: vindiesel2771@gmail.com.

Довгий Станіслав Олексійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАНУ, завідувач відділу фізичного і математичного моделювання ІТГІП НАН України, м. Київ; тел.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Dovgii Stanislav Oleksiiovych – Doctor of Sciences, Professor, Academician of the NAS of Ukraine, Head of the Department of Physical and Mathematical Modeling, The Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Черній Дмитро Іванович – доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Cherniy Dmytro Ivanovych – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Ю. М. САВЧЕНКО, Ю. А. СЕМЕНОВ, Г. Ю. САВЧЕНКО

НЕЛІНІЙНІ ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ У ПОТОЦІ РІДИНИ В КАНАЛІ ІЗ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРІЮ ДНА, ВКРИТОГО БИТИМ ЛЬОДОМ

Розглянуто двовимірну нелінійну задачу про сталу течію в каналі, вкритому битим льодом з довільним рельєфом дна. Для розв'язання задачі використано метод інтегрального годографа, який зводиться до системи нелінійних рівнянь у модулі швидкості на вільній поверхні. Ці рівняння отримано з динамічної граничної умови. Результати, що показують вплив гравітації на геометрію вільної поверхні, представлені для широкого прямокутника і траншеї в широкому діапазоні чисел Фруда, включаючи як докритичні, так і надкритичні течії. Для надкритичних течій відтворено дві сім'ї розв'язків для довільної форми дна. Показано, що додаткова умова, яка вимагає, щоб вільна поверхня була плоскою на скінченній відстані від перешкоди, вибирає єдиний розв'язок для заданої висоти дна і ширини прямокутника для надкритичних течій. Це рішення є неперервним при переході від докритичного до надкритичного режиму течії. Розглядаються приклади для широкої прямокутної перешкоди і траншеї на дні каналу. Розглянуто два режими течії. Перший – докритичний режим, для якого хвиля, генерована профілем дна, поширюється тільки вниз за течією до нескінченності. Другий – надкритичний режим, для якого можуть існувати два різних типи розв'язків: один з меншою висотою гребеня хвилі, відомий як «збурена» хвиля, і інший з більшою висотою гребеня хвилі, названий «солітонною» хвилею. «Збурена» хвиля належить до сімейства стійких розв'язків, які відмежовуються від рівномірного потоку, коли висота перешкоди зростає від нуля. На противагу цьому, «солітонна» хвиля виникає з одиночного хвильового рішення, коли висота перешкоди зростає від нуля. Ці два сімейства розв'язків зливаються в точці згину, що характеризується мінімальним числом Фруда, $F_{\min}$. В діапазоні чисел Фруда $1 < F < F_{\min}$ не існує розв'язків. Прикметно, що як «збурені», так і «солітонні» розв'язки мають безхвилясті поверхні.

Ключові слова: течія в каналі, вільна поверхня, солітон, інтегральний метод годографа, комплексний потенціал.

YU. M. SAVCHENKO, YU. A. SEMENOV, G. YU. SAVCHENKO

NONLINEAR GRAVITY WAVES IN THE WATER STREAM IN THE CHANNEL WITH COMPLEX GEOMETRY OF THE BOTTOM COVERED BY BROKEN ICE

The two-dimensional nonlinear problem of a steady flow in a channel covered by broken ice with an arbitrary bottom topography is considered. An integral hodograph method is employed for solving the problem, which is reduced to a system of nonlinear equations in the velocity modulus on the free surface. These equations are obtained from the dynamic boundary condition. Results showing the effect of gravity on the geometry of the free surface are presented for a wide rectangle and a trench over a wide range of Froude numbers, including both subcritical and supercritical flows. For supercritical flows, two families of solutions for an arbitrary bottom shape are reproduced. It is shown that the additional condition requiring the free surface to be flat at a finite distance from the obstruction selects a unique solution for a given bottom height and width of the rectangle for supercritical flows. This solution is continuous in going from the subcritical to the supercritical flow regime. Case studies are carried out for a wide rectangular obstruction and a trench on the bottom of the channel. Two flow regimes are studied. The first is a subcritical regime, for which the wave generated by the bottom profile extends only downstream to infinity. The second is supercritical regime, for which two distinct types of solutions may exist: one with a smaller wave crest height, known as the 'perturbed' wave, and another with a larger wave crest height, termed the 'soliton' wave. The 'perturbed' wave belongs to a family of steady solutions that bifurcate from a uniform flow as the obstruction height increases from zero. In contrast, the 'soliton' wave emerges from a solitary wave solution as the obstruction height grows from zero. These two families of solutions merge at a fold point characterized by a minimum Froude number $F_{\min}$. No solutions exist within the Froude number range $1 < F < F_{\min}$. Notably, both the 'perturbed' and 'soliton' solutions exhibit wavy-free surfaces.

Key words: flow in the channel, free surface, soliton, integral hodograph method, complex potential.

Вступ. Межа між водами відкритого океану та щільними дрейфуючими льодами є особливо вразливою до фрагментації, спричиненої штормами та хвилями, що зароджуються у відкритому морі. Цей динамічний регіон відомий у науковій літературі як *зона маргінального льоду (ЗМЛ)*, названа так через його постійні зміни під впливом вітрів, океанічних течій, танення льоду та хвильової активності, що проникають углиб суцільних льодових масивів. Цікаво, що, незважаючи на помітне зменшення щільних льодових регіонів за останні чотири десятиліття, супутникові спостереження показують, що протяжність ЗМЛ залишається відносно постійною. Це явище виникає тому, що хвилі, які наближаються з відкритого океану, послідовно руйнують лід на передбачуваних відстанях, що значною мірою залежить від висоти хвиль, які надходять, та швидкості розсіювання їхньої енергії.

Аналіз останніх досліджень. Розуміння взаємодії хвиль і льоду в МІЗ має вирішальне значення для різних галузей, включаючи морський транспорт, рибальство, видобуток ресурсів і розвиток прибережної інфраструктури. Сучасні обчислювальні інструменти, такі як *WAVEWATCH III® (WW3)* [1], ефективно прогнозують глобальну і регіональну динаміку хвиль з надзвичайною точністю. Однак, як показують нещодавні дослідження, точність прогнозування значно знижується в межах ЗМЛ. Основний виклик для покращення цих прогнозів полягає у глибшому розумінні механізмів, що керують ослабленням енергії хвиль у *ЗМЛ-механізмах*, які залишаються лише частково зрозумілими.

Взаємодія між хвилями і фрагментованим льодом почала привертати значну увагу дослідників у 1960-х роках, що значною мірою було зумовлено розвитком *Північного морського шляху*. Хейсін [2] провів систематичний аналіз взаємодії льоду і хвиль у різних сценаріях, включаючи гравітаційні хвилі під фрагментованим льодом, згинально-гравітаційні хвилі в суцільних крижаних покривах, хвилі, викликані рухомими вантажами, і розсію-

вання хвиль через неоднорідність властивостей льоду і топографії морського дна. Тим не менш, точне прогнозування розповсюдження хвиль через ЗМЛ, що характеризується множинними тріщинами, крижинами і ополонками, вимагає передових математичних моделей динаміки льоду в поєднанні з нелінійними моделями взаємодії льоду і хвиль.

Значна частина досліджень минулого століття була присвячена вивченню реакції крижаного покриву на рухомі навантаження, що було зумовлено практичними потребами сезонних транспортних шляхів і злітно-посадкових смуг у полярних регіонах. Важливе експериментальне дослідження *згинально-гравітаційних хвиль*, що виникають під дією рухомих навантажень, було проведене *Сквайром* та ін. У наступних всебічних оглядах *Сквайра* та ін. детально обговорюються фундаментальні внески, включаючи піонерську роботу *Грінфілла* [3] в 1886 році, а також більш ранні експериментальні дослідження і математичне моделювання згинально-гравітаційних хвильових явищ.

Існує дві основні категорії моделей, що використовуються для вивчення взаємодії льодового покриву з хвилями: **1** – *моделі поодиноких крижин*, які розглядають розбитий лід як окремі крижини, що взаємодіють з хвилями і одна з одною, і **2** – *моделі суцільного льоду*, які представляють фізичні характеристики льодового покриву за допомогою *емпіричних реологічних параметрів*. Моделі суцільного льоду включають *моделі масового навантаження*, *моделі тонких пружних пластин* і *моделі в'язкого шару*, кожна з яких має свої переваги і недоліки. Часто необхідні додаткові припущення, щоб врахувати розсіювання енергії і загасання хвиль. Модель масового навантаження [4] розглядає лід як невазємодіючі точкові маси, в той час як модель пружної пластини представляє льодовий покрив як тонку, нескінченну пружну пластину, але за своєю суттю не має здатності до затухання хвиль, якщо не зробити додаткових припущень. Моделі в'язкого шару припускають наявність в'язкого шару льоду над невазкою водою, що включає механізми розсіювання енергії. Наприклад, *Хейсін* [2] представив в'язку модель, в якій основним механізмом дисипації є пластична деформація, тоді як *Вебер* [5] і *Келлер* [6] розробили моделі, що враховують пружні ефекти. Подальші вдосконалення *Ванга* і *Шена* [7] розширили початкові концепції Келлера.

Враховуючи неоднорідну природу морського льоду, визнано, що різні формулювання моделей ефективно застосовуються до різних льодових умов. Численні дослідження з використанням лінійної гравітаційної та згинально-гравітаційної хвильових теорій вивчали поширення хвиль у неоднорідних крижаних покритвах, що включають тріщини, крижини і ополонки. *Стурова* [8], яка проаналізувала нестаціонарну поведінку плаваючого льоду на мілководді зі змінною глибиною з використанням модальних функцій; *Кармакара* та ін. [9], які застосували широкомасштабні апроксимації для оцінки трансформації хвиль, спричинених донними сходінками та блоками.

Деякі автори також застосовували лінійну теорію для дослідження взаємодії між льодовиковим покривом, водою і зануреними тілами. Однак лінійні припущення часто не можуть повністю врахувати практичні сценарії через нелінійні ефекти, особливо щодо обмежень глибини занурення, нижче якої рішення може не існувати.

Основи *нелінійної теорії* взаємодії льоду з водою беруть свій початок у роботах *Форбса* [10, 11], який використовував розкладання в ряди високого порядку і *методи рядів Фур'є*. *Парау* і *Діаш* [12] передбачили депресійні гідропружні поодинокі хвилі, що характеризуються затухаючими хвостовими коливаннями, особливо коли швидкість навантаження наближається до критичних порогів. *Ванден-Брок* і *Парау* [13] отримали розв'язки для узагальнених поодиноких хвиль, а *Мілевські*, *Ванден-Брок* і *Вонг* [14] досліджували гідропружні поодинокі хвилі в глибоководних сценаріях. Також досліджувалися сильно нелінійні явища, такі як вплив водяних струменів на крижаний покрив і взаємодія льоду з бульбашками.

У цій роботі ми зосереджуємо увагу на поширенні хвиль у МІЗ. Ми використовуємо модель масового навантаження разом з моделлю в'язкого шару, що забезпечує затухання хвиль. Модель льоду поєднується з повністю нелінійним розв'язком для течії під шаром льоду. Модель масового навантаження *Пітерса* [4] та модель в'язкого шару *Хейсіна* [2] поєднані з повним розв'язком *Юна* та *Семенова* [15] повністю нелінійним розв'язком для течії у вільному поверхневому каналі. Потенціал течії визначається за допомогою *методу інтегрального го-дографа*, який дозволяє отримати вираз для потенціалу течії який включає величину швидкості на межі розділу фаз уявно. Це дозволяє нам легко пов'язати модель льоду з потенціалом течії за допомогою *рівняння Бернуллі*. Зв'язок базується на умові однакового тиску на межі розділу фаз: один з динаміки течії, а інший – з рівноваги льодового покриву.

Хвильові профілі представлені для різних товщин шару льоду і різних значень коефіцієнта в'язкості. Випадки, що відповідають найбільшій висоті перешкоди, для яких отримано збіжність чисельного методу, для яких отримано збіжність. Показано, що коефіцієнт тиску вздовж поверхні розділу стає від'ємним поблизу гребеня хвилі і демонструє сильно нелінійну поведінку, особливо при відносно малих товщини шару льоду. Для надкритичних течій розв'язок пророкує як збурену хвилю, так і солітонну хвилю, подібно до випадку вільної поверхні. Шар льоду зменшує амплітуду збуреної хвилі, але майже не впливає на амплітуду солітонної хвилі.

Постановка крайової задачі. Зазвичай поширення хвиль розглядають у спокійній воді. Однак, у випадку прогресуючих хвиль, що рухаються зі швидкістю U , зручніше використовувати систему координат, що рухається з гребенем хвилі. У системі координат такого типу межа розділу лід-вода не змінюється в часі, а вся рідина рухається зі швидкістю U у протилежному напрямку. Схему визначення показано на рис. 1.

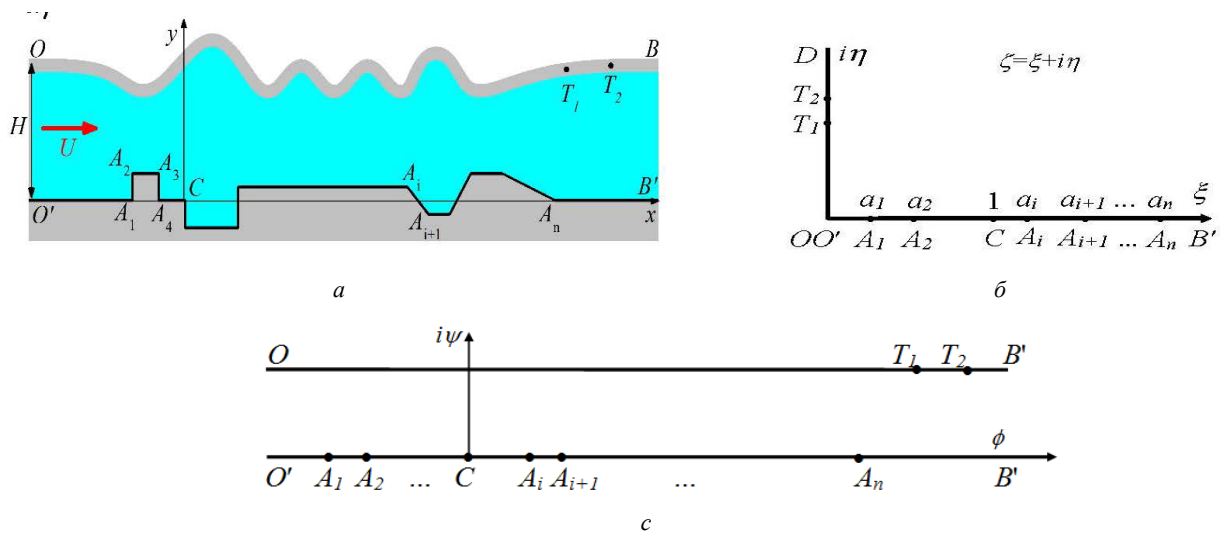


Рис. 1 – Схема визначення: *a* – фізична площа; *b* – площа параметра або ξ – plane; *c* – площа комплексного потенціалу.

Льодовий покрив (показано на рис. 1, *a* сірим кольором) має постійну товщину Δ . Вводиться декартова система координат XY , початок якої знаходиться на дні русла. Вісь X суміщена з напрямком течії, підтримуючи рівномірну швидкість U на нескінченності, в той час як вісь Y простягається вертикально вгору. Схему такої конфігурації показано на рис. 1, *a*.

Вважається, що рідина нев'язка і нестислива, на неї діє гравітаційне прискорення g . Течія є обертальною, що дозволяє застосувати теорію потенціальної течії. Дно каналу складається з прямих відрізків $A_i A_{i+1}$, кожен з яких утворює кут β_i з віссю X .

Шукається розв'язок, що задовольняє асимптотичну умову: $Y(X) \rightarrow H$ при $Y \rightarrow -\infty$, де H – глибина каналу. Ми вводимо комплексний потенціал швидкості потоку, $W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$, де $\Phi(X, Y)$ – потенціал швидкості, а $\Psi(X, Y)$ – функція потоку, причому $Z = X + iY$.

Керуюча крайова задача для потенціалу швидкості формулюється таким чином:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0. \quad (1)$$

Гранична умова на дні каналу, $Y = b = Y_b(X)$, забезпечує непроникність:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial Y_b}{\partial X}, \quad \Psi = 0. \quad (2)$$

Динамічна гранична умова на межі льоду і рідини, $Y = Y(X)$, задається рівнянням Бернуллі:

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho g Y + p_{ice} + p_{ext} = \rho \frac{U^2}{2} + \rho g H + p_{\infty}, \quad (3)$$

де $V = |\nabla \Phi|$ – величина швидкості; $p_{ice}(X)$ – тиск на межі розділу льоду та рідини (тиск, викликаний згином льодового покриву, дорівнює гідродинамічному тиску); $p_{\infty} = p_a + \rho_i g \Delta$ – його значення на нескінченності. Тут p_a – атмосферний тиск, ρ_i – густина льоду, Δ – товщина льодового покриву, а g – прискорення сили тяжіння. Зовнішній тиск $p_{ext}(X)$ прикладається на інтервалі $X_{T1} < X < X_{T2}$ для забезпечення безхвильової межі далеко вниз за течією.

Оскільки течія стала, функція течії на межі льоду та рідини залишається постійною і дорівнює витраті рідини через канал:

$$\Psi = UH. \quad (4)$$

Умова на нескінченності має вигляд:

$$\Phi \rightarrow U \quad \text{при} \quad X \rightarrow -\infty, \quad 0 \leq Y \leq H \quad (5)$$

Математична модель розбитої криги. Елемент льодового мату $dm = \rho_i h dx$, що рухається разом із рідиною вздовж межі поділу, зазнає вертикального прискорення, викликаного різницею тиску на верхній та нижній сторонах льоду. В'язкі сили виникають унаслідок деформації льодового покриву:

$$\rho_i \Delta(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu \Delta(x) \frac{\partial k}{\partial t} = p - p_{\infty}, \quad (6)$$

де ν – коефіцієнт в'язкості; k – кривина межі поділу; p – гідродинамічний тиск уздовж межі.

Існують два граничні випадки структури льодового мату. Перший випадок спостерігається при відносно великій товщині льоду, коли частинки льоду знаходяться в контакті одна з одною. У такому разі мат рухається як нерозтяжний шар із сталою швидкістю U ; тоді $\partial/\partial t = U\partial/\partial s$. Другий випадок є протилежним – середня товщина льоду є відносно малою, або частинки льоду плавають у рідині без контакту між собою. У цьому випадку вважається, що $\partial/\partial t = V\partial/\partial s$, де V – швидкість рідини на межі поділу.

Для полегшення розв'язання задачі вводиться безрозмірне представлення змінних, використовуючи швидкість U та глибину каналу H як еталонні величини. Безрозмірні координати визначаються як $x = X/H$, $y = Y/H$, $s = S/H$, а товщина льодовикового шару виражається як $\delta = \Delta/H$. Профілі дна та вільної поверхні описуються як $y_b(x) = Y_b(X)/H$ і $y(x) = Y(X)/H$ відповідно. Подібним чином, потенціал швидкості Φ та функція течії Ψ нормуються за характеристичною величиною UH , що дає безрозмірні змінні $\phi = \Phi/UH$ та $\psi = \Psi/UH$. У цьому нормованому вигляді функція течії набуває значень вздовж дна каналу та на межі лід-рідина.

У безрозмірному вигляді рівняння Бернуллі можна записати так:

$$v^2 = 1 - \frac{2(y-1)}{F^2} - 2\frac{\rho_i}{\rho}\delta\frac{d^2y}{ds^2} - 2\nu\frac{\nu}{\rho UH}\delta\frac{d^3y}{ds^3}, \quad (7)$$

де $\nu = V/U$ – це безрозмірна швидкість і число Фруда визначається як

$$F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

і характеризує режим течії залежно від глибини каналу.

Дисперсійне співвідношення. Розглядається стаціонарна хвилеподібна межа з малою амплітудою. Величину швидкості та вертикальну координату можна записати у вигляді:

$$v(s) = 1 + \Delta v e^{ikHs + i\varphi}, \quad y(s) = 1 + \Delta y e^{ikHs}, \quad (8)$$

де k – хвильове число, а φ – фазова різниця між швидкістю та вертикальним відхиленням. Диференціюючи рівняння (7) за довжиною дуги та нехтуючи величинами другого порядку мализни, отримаємо:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{F^2} - \frac{\rho_i}{\rho}\delta\frac{d^3y}{ds^3} - \frac{\nu}{\rho UH}\delta\frac{d^4y}{ds^4}. \quad (9)$$

Згідно з лінійною теорією гравітаційних хвиль на вільній поверхні в каналі глибиною H , маємо [16]:

$$\frac{1}{F^2} = \frac{kH}{\tanh \tanh kH}. \quad (10)$$

Поклавши товщину льодового мату у рівнянні (9) рівною нулю, отримаємо:

$$\Delta v = \frac{kH}{\tanh kH} \Delta y,$$

а використовуючи це рівняння при $\delta \neq 0$, отримаємо співвідношення між числом Фруда та хвильовим числом у присутності льодового мату:

$$\frac{i\eta}{\rho UH}\delta(kH)^3 F^2 + 1 - \frac{\rho_i}{\rho}\delta(kH)^2 F^2 - F^2 \frac{kH}{\tanh kH}. \quad (11)$$

Підставивши у рівняння (11) співвідношення між частотою хвилі та хвильовим числом для монохроматичної хвилі, що рухається в нерухомій воді:

$$\omega^2 = k^2 U^2 = k^2 F^2 gH,$$

ми отримуємо дисперсійне співвідношення, виведене у Хейсіна [2]:

$$\frac{i\eta\Delta\omega}{\rho g}k^2 + 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 - \frac{\omega^2}{kH} = 0, \quad (12)$$

де $\omega_b^2 = \rho g / \rho_i \Delta$ – власна частота поплавка.

Значення хвильових чисел, визначені з рівняння (12), є комплексними. Припускаючи, що для низьких частот ($\omega \ll \omega_b$) коефіцієнт загасання малий, хвильове число можна подати у вигляді:

$$k = k_0(1 + i\varepsilon), \quad (13)$$

де k_0 – хвильове число у випадку без загасання, а ε – мала величина.

З наведених рівнянь випливає, що загасання хвиль у зоні зламаного льоду зростає зі збільшенням середньої товщини льоду, а також зі збільшенням частоти хвилі. Залежність хвильового числа від числа Фруда, отримана з

розв'язку рівняння (12), показана на рис. 2 для різних товщин льодового покриття. Видно, що розв'язок дисперсійного рівняння існує лише для докритичних течій ($F < 1$), і кожному значенню числа Фруда відповідає одне значення хвильового числа. Хвильове число зменшується зі збільшенням товщини льодового покриття. Для надкритичних течій профіль вільної поверхні буде отримано далі з використанням повністю нелінійної постановки задачі.

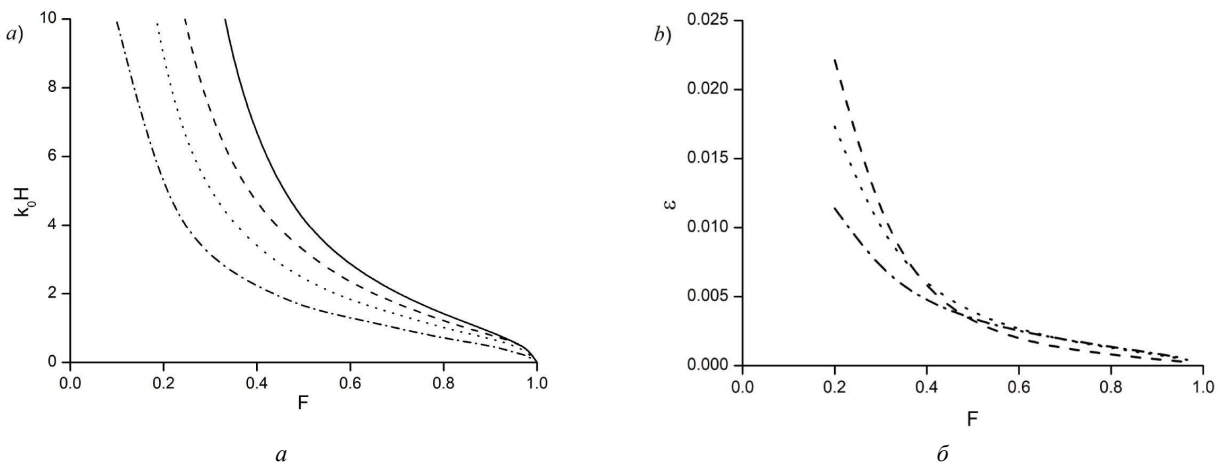


Рис. 2 – Розв'язок дисперсійного рівняння (11): а – хвильове число; б – коефіцієнт загасання $\varepsilon = \text{Im}(k)/\text{Re}(k)$ у залежності від числа Фруда: $\delta = 0$ – суцільна лінія, $\delta = 0.1$ – штрихова лінія, $\delta = 0.3$ – пунктирна лінія, $\delta = 1.0$ – штрих-пунктирна лінія. Значення параметра $\eta/(\rho UH) = 0.005$.

Коефіцієнт загасання ε , показаний на рис. 2, б, зменшується зі збільшенням числа Фруда. Оскільки довжина хвилі збільшується, а кривина, очевидно, зменшується, в'язка сила зменшується (рівняння (6)). Із рис. 2, б видно, що вплив товщини на коефіцієнт загасання є відносно слабким. Це пояснюється тим, що, з одного боку, збільшення товщини льоду призводить до збільшення ε . З іншого боку, збільшення товщини льоду викликає зменшення/збільшення хвильового числа/довжини хвилі, як видно з рис. 2, а. Це зменшує кривину та в'язку силу. Ці ефекти урівноважують один одного.

Інтегральний метод годографа для течії в каналі. Метод інтегрального годографа застосовується для аналітичного розв'язання задач про встановлену нелінійну течію в каналі зі змінною вільною поверхнею. Він базується на переході від фізичних координат до площини комплексного потенціалу потоку $w = \phi + i\psi$, що значно спрощує постановку задачі. У цій площині лінії струму і потенціалу є прямими, а профіль вільної поверхні перетворюється у лінію з відомими граничними умовами. Завдяки цьому метод дає змогу сформулювати задачу у вигляді інтегрального рівняння для функції, яка описує геометрію поверхні розділу.

Комплексний потенціал. Класичний метод годограми був розроблений Жуковським (1890) [17] і Мітчеллом (1890) [18]. Вони запропонували ввести допоміжну параметричну площину, або ζ – площину, яка зазвичай вибирається як верхня півплощина. Далі розглядалися дві функції: комплексний потенціал $w(\zeta)$ і функція

$$\omega(\zeta) = -\ln \frac{dw}{v_0 dz} = -\ln \frac{v}{v_0} + i\beta. \quad (14)$$

Тут v та β – це відповідно модуль і напрямок швидкості; v_0 – модуль швидкості на вільній поверхні, який вважається сталим. Коли ці функції відомі, швидкість і область течії можуть бути визначені в параметричній формі так:

$$\frac{dw}{dz} = \exp[-\omega(\zeta)], \quad z(\zeta) = z_0 + \int_0^\zeta \frac{dw}{d\zeta'} / \frac{dw}{dz} d\zeta', \quad (15)$$

функція $z(\zeta)$ називається *функцією відображення*.

Підхід Жуковського – Мітчелла дозволяє розв'язувати задачі про течію з вільною поверхнею навколо тіл з полігональними контурами за умови сталої швидкості вздовж вільної поверхні/границі (тобто без врахування гравітації, поверхневого натягу або інших зовнішніх сил). У таких випадках функції $\omega(\zeta)$ і $w(\zeta)$ визначають полігональні області. Конформне відображення верхньої півплощини на ці області може бути отримане за допомогою *інтеграла Шварца – Кристоффеля*.

Однак значні труднощі виникають, коли нахил контуру тіла змінюється або коли швидкість на вільній поверхні/границі залежить від гравітації, поверхневого натягу або інших сил. У цих випадках граничні умови для

комплексної швидкості змінюються: уздовж твердого контуру напрямок швидкості визначається нахилом тіла, тоді як на вільній поверхні/границі модуль швидкості визначається з рівняння Бернуллі. Це призводить до змішаної крайової задачі для функції комплексної швидкості.

У цій роботі ми застосовуємо *інтегральну формулу* [19, 20], яка дозволяє визначити комплексну функцію за її аргументом уздовж дійсної осі та модулем уздовж уявної осі в першому квадранті. Таким чином, ми вибираємо перший квадрант як область параметричної змінної $\varsigma = \xi + i\eta$ замість півплощини, як показано на рис. 1, *b*. У фізичній площині $z = x + iy$ (рис. 1, *a*) ця параметрична область відповідає рідинній області: дійсна вісь представляє дно каналу, а уявна вісь – межу. Теорема про конформне відображення дозволяє зафіксувати положення трьох точок: $O(O')$ при $\varsigma = 0$, C при $\varsigma = 1$, та $B(B')$ при $\varsigma = \infty$, як показано на рис. 1, *b*. Проте положення точок A_i , $i = 1, n$ (при $\varsigma = a_i$) залишаються невизначеними й мають бути знайдені за додатковими фізичними умовами. Функція комплексної швидкості має вид:

$$\frac{dw}{dz} = \prod_1^n \left(\frac{a_i - \varsigma}{a_i + \varsigma} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[-\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \frac{i\eta - \varsigma}{i\eta + \varsigma} d\eta \right], \quad (16)$$

де $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1}$ – зміна напрямку швидкості при проходженні кута в точці A_i , $i = 1, \dots, n$, причому β_0 .

На дні каналу функція течії $\psi \equiv 0$, а на межі $\psi \equiv 1$, як впливає з граничних умов (2) та (4), тоді як потенціал змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином, область комплексного потенціалу $w = \phi + i\psi$ – це нескінченна смуга одиничної ширини: $-\infty < \phi < \infty$, $0 \leq \psi \leq 1$. Через просту геометрію області w ми можемо використати конформне відображення, щоб негайно записати комплексний потенціал w як функцію параметричної змінної ς :

$$a : w(\varsigma) = \frac{2}{\pi} \ln \varsigma; \quad b : \frac{dw}{d\varsigma} = \frac{2}{\pi \varsigma}. \quad (17)$$

Комплексний потенціал (17a) є логарифмічною функцією змінної ς , тобто ς експоненційно залежить від комплексного потенціалу $w = \phi + i\psi$. Координати довжини дуги $s_b \sim \phi$ та $s \sim \psi$ уздовж дна та межі відповідно. Це означає, що ς експоненційно залежить від s . Тому виникають труднощі при обчисленнях на довжині області більше ніж $5H$. Ми можемо усунути логарифмічну особливість, якщо виключимо параметричні змінні ς , ξ , η з рівняння (16) за допомогою (17a). Підставляючи дійсну частину (17a) у (16), отримуємо комплексну швидкість як функцію комплексного потенціалу w , зворотна до якої є похідною функції відображення $z = z(w)$:

$$\frac{dz}{dw} = \prod_1^n \left(\frac{a_i + e^{w'}}{a_i - e^{w'}} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi'} \ln \left(\frac{ie^{\phi'} - e^{w'}}{ie^{\phi'} + e^{w'}} \right) d\phi' \right], \quad (18)$$

де $w' = \pi w / 2$, $\phi' = \pi \phi / 2$, $a_i = e^{\phi_{A_i}}$, а ϕ_{A_i} – потенціал у кутовій точці A_i . Ядро інтегралу в (18) експоненційно спадає зі зростанням різниці $|\phi' - w'|$. Інтегрування (18) уздовж $-\infty < \phi < \infty$, $\psi = 1$, у w – площині дає межу OB ; інтегрування уздовж $-\infty < \phi < \infty$, $\psi = 0$ дає дно каналу.

Потенціали ϕ_{A_i} є невідомими і мають бути визначені з довжини сегментів $|A_i - 1, A_i| = s_{bi}$:

$$s_{bi} = \int_{\phi_{A_{i-1}}}^{\phi_{A_i}} \frac{ds_b}{d\phi'} d\phi', \quad (19)$$

де

$$\frac{ds_b}{d\phi'} = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=\phi'} = \prod_1^n \left| \frac{a_i + e^{\phi'}}{a_i - e^{\phi'}} \right|^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi''} \left[\pi - 2 \arctan(e^{\phi''} - e^{\phi'}) \right] d\phi'' \right]. \quad (20)$$

Модуль швидкості вздовж межі визначається з динамічної граничної умови (7), яка залежить від форми межі $y(s)$, її кривини та похідних вищих порядків. Форма межі лід/рідина визначається інтегруванням похідної функції відображення (18) вздовж верхньої межі смуги у w – площині:

$$y(\phi) = y(-\phi^*) + \text{Im} \left\{ \int_{-\phi^* + i}^{\phi + i} \prod_1^n \left(\frac{a_i + e^{w'}}{a_i - e^{w'}} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi'} \ln \left(\frac{ie^{\phi'} - e^{w'}}{ie^{\phi'} + e^{w'}} \right) d\phi' \right] dw' \right\}, \quad (21)$$

де $y(-\phi^*) = H$. Тут $-\phi^*$ та ϕ^* – нижня і верхня межа обчислювальної області; канал у фізичній площині усічений, і вважається, що течія за межами області $|\phi| > \phi^*$ є сталою.

Координата дуги вздовж межі:

$$s(\phi) = s_0 + \int_0^\phi \frac{d\phi'}{v(\phi')}, \quad (22)$$

де $s_0 = 0$ обрано при $\phi = 0$. Далі кривина та її похідні визначаються з використанням сплайнової апроксимації межі $[x(s), y(s)]$.

Чисельне визначення функції $v(\phi)$. У дискретному вигляді розв'язок шукається в заданих точках $-\phi^* < \phi_j < \phi^*$, $j = 1, \dots, N$, що лежать на верхній стороні смуги (рис. 1, c). Інтеграли, що входять до рівняння (16), обчислюються аналітично з використанням точок дискретизації уявної осі першого квадранта в ζ – площині, $\eta_j = \exp \pi \phi_j / 2$, і лінійної інтерполяції функції на інтервалах:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \frac{i\eta - \zeta}{i\eta + \zeta} d\eta = \Delta(\ln v)_j c_j(\zeta), \quad (23)$$

де

$$\Delta(\ln v)_j = \ln v_j - \ln v_{j-1} = \ln \frac{v_j}{v_{j-1}}, \quad (24)$$

$$c_j(\zeta) = \frac{1}{\pi \Delta \eta_j} \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \ln \frac{i\eta - \zeta}{i\eta + \zeta} d\eta. \quad (25)$$

Інтеграл у виразі вище легко обчислюється, і результатом є неособливий вираз для функцій $c_j(\zeta)$. Підставляючи (25) в (16), можна обчислити інтеграли у формулі (18).

Кривина та її похідні визначаються з використанням сплайнової інтерполяції вузлів $y_m = y(\bar{\phi}_m)$ та $s_m = s(\bar{\phi}_m)$, отриманих з рівнянь (21) та (22). Вузли вибираються як кожна четверта точка з множини дискретних точок $\bar{\phi}_m = \phi_{4m}$, $m = 1, \dots, M$, $M = N/4$. Обрано сплайн п'ятого порядку, який забезпечує безперервність похідних до четвертого порядку включно:

$$y(s) = y_m + a_{1,m}(s - s_{\eta m-1}) + \dots + a_{n,m}(s - s_{\eta m-1})^n, \quad s_{\eta m-1} < s < s_{\eta m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 5. \quad (26)$$

Кривина та її похідні отримуються шляхом диференціювання (26)

Застосовуючи динамічну граничну умову (7) у формі коефіцієнтів тиску у вузлах $\bar{\phi}_m$, отримуємо таку систему нелінійних рівнянь:

$$G_m(\bar{V}) = c_{pm}(\bar{V}) - c_{pm}^{ice}(\bar{V}) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (27)$$

де $\bar{V} = (v_1, \dots, v_M)^T$ вектор невідомих швидкостей $v_m = v(\bar{\phi}_m)$,

$$c_{pm}(\bar{V}) = 1 - v_m^2 - \frac{2[y_m(\bar{V}) - 1]}{F^2} - C_d v_m^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (28)$$

коефіцієнт тиску через течію, а

$$c_{pm}^{ice}(\bar{V}) = 2 \frac{\rho_i \delta}{\rho} \frac{d^2 y}{ds^2} - 2v \frac{v \delta}{\rho UH} \frac{d^3 y}{ds^3} \quad (29)$$

коефіцієнт тиску через згин льоду.

Система рівнянь (27) розв'язується *методом Ньютона*. Якобіан цієї системи обчислюється чисельно з використанням центральної різниці при $\Delta v = 10^{-8}$. При кожному обчисленні функції $G(V)$, система нелінійних рівнянь (19) розв'язується також методом Ньютона в рамках внутрішньої ітераційної процедури. Значення швидкостей v_j , $j = 4m - 3, 4m - 2, 4m - 1$, між вузлами s_{m-1} та s_m , визначаються лінійною інтерполяцією значень $\ln v_m$, отриманих із розв'язку системи рівнянь (27), для $m = 1, \dots, M$.

Результат розрахунків. Для моделювання прямокутної перешкоди кути в вершинах задаються як $\alpha_1 = \alpha_4 = 0.5\pi$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -0.5\pi$. Параметри ϕ_{A_i} , $i = 1, \dots, 4$, визначаються з рівняння (19) з урахуванням висоти $a = 0.12$ та ширини $b = 3$ прямокутника. Перешкода призводить до утворення хвиль, які поширюються вниз по потоку так само, як і в разі гравітаційних хвиль за відсутності льоду. Профілі межі для різної товщини льоду показано на рис. 3, a. Видно, що товщина льоду впливає на амплітуду хвилі, а також суттєво збільшує її довжину.

Така поведінка перебуває в повній відповідності з дисперсійним співвідношенням на рис. 2 (зі збільшенням товщини льодового мату, хвильове число зменшується). Із зростанням товщини льоду форма хвилі наближається до синусоїдальної. Це свідчить про те, що льодовий мат перешкоджає утворенню загострення у випадку вільної поверхні, і розв'язок може існувати для більшої висоти перешкоди. Коефіцієнт тиску вздовж межі показано на рис. 3, *b* для різних товщин льоду. Чим більша товщина льоду, тим більшою є амплітуда коефіцієнта тиску вздовж межі. Це відповідає тому, що товстіший (інерційний) шар льоду чинить більше навантаження на рідину.

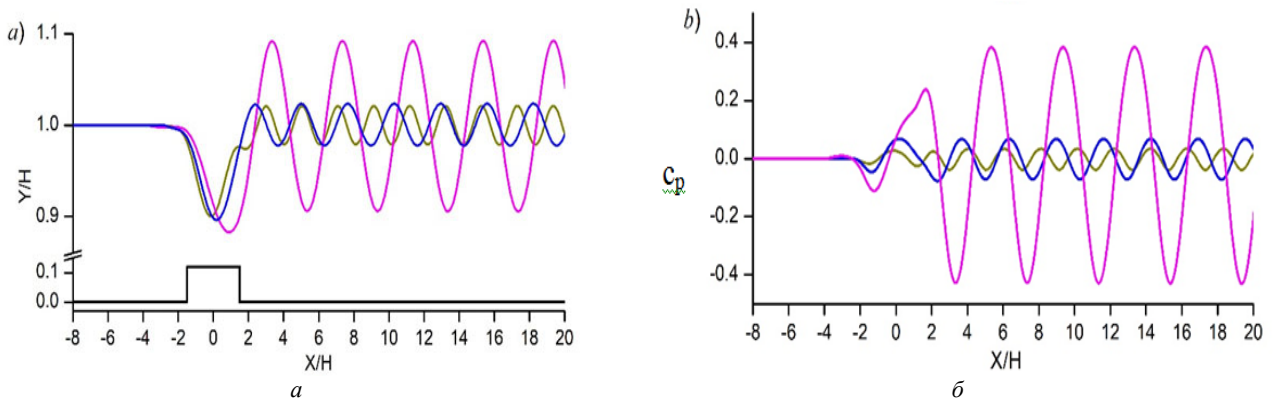


Рис. 3 – *a* – вплив товщини льоду на форму межі при висоті прямокутника $a = 0.12$, ширині $b = 3.0$ та *b* – коефіцієнт тиску вздовж межі: $\delta = 0.1$ – темно-жовтий, $\delta = 0.3$ – синій, $\delta = 1.0$ – пурпурний. Коефіцієнт в'язкості $\nu = 0$.

На рис. 4 показано профілі межі для числа Фруда $F = 0.5$, товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різної ширини перешкоди. Зі зміною ширини перешкоди амплітуда хвилі після перешкоди демонструють осцилюючу поведінку.

Червона ($b = 3.0$) і пурпурна лінія ($b = 6.0$) відповідають випадкам, за яких над прямокутником розташовується ціла кількість хвиль: для червоної – одна хвиля і для пурпурової – дві. При цьому течія симетрична щодо центральної лінії. За ширини перешкоди $b = 4.5$ течія несиметрична й амплітуда хвилі за перешкодою досягає максимального значення (рис. 5).

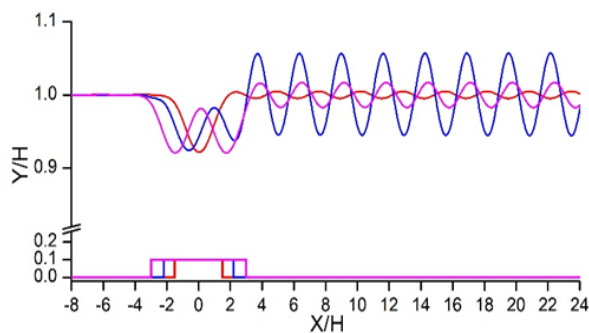


Рис. 4 – Профілі межі для числа Фруда $F = 0.5$, товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різної ширини прямокутника: $b = 3.0$ – червоний, 4.5 – синій, 6.0 – пурпурний. Коефіцієнт в'язкості $\nu = 0$.

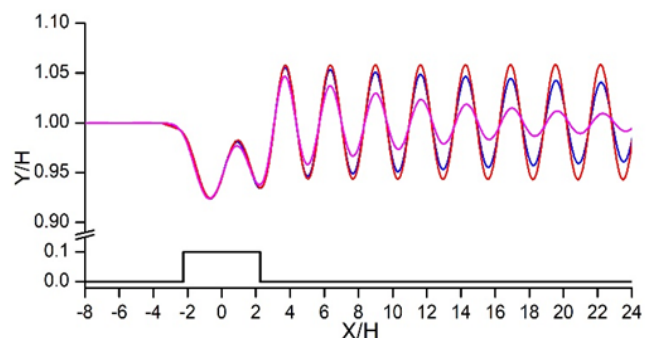


Рис. 5 – Профілі хвиль для числа Фруда $F = 0.5$, $a = 0.1$, $b = 4.5$ та товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різних значень коефіцієнта в'язкості: $\nu = 0$ – червона лінія, 0.01 – синя лінія та 0.05 – пурпурна лінія.

Висновки. Поточне дослідження присвячене нелінійній взаємодії між гравітаційними хвилями на поверхні та зламаним льодом. Для аналізу поведінки монохроматичної хвилі, що породжується перешкодою на дні, використано модель масового навантаження з в'язким шаром. Нелінійну задачу для рідини розв'язано за допомогою інтегрального методу годографа через побудову комплексного потенціалу потоку, що повністю задовольняє нелінійні граничні умови на дні каналу та на межі лід-рідина. Виведено та чисельно розв'язано систему нелінійних та інтегральних рівнянь. Метод розроблено для довільної форми дна, але результати подано для півциліндричної перешкоди на плоскому дні. Модель в'язкого шару Хейсина [2] для нееластичної взаємодії між льодовими частинками використано для передбачення загасання хвилі. Узгодження між потоком і льодовим покривом базується на однаковому розподілі тиску вздовж межі: один отримується з розв'язку задачі для рідини, інший забез-

печує рівновагу льодового покриву. Такий загальний підхід до узгодження дозволяє враховувати інші моделі льодового покриву та інші механізми загасання хвилі. При зміні ширини перешкоди амплітуда хвилі над нею залишається практично сталою, тоді як амплітуди хвиль за перешкодою демонструють осцилюючу поведінку. Реальні значення коефіцієнта демпфування мають визначатися на основі експериментальних досліджень або натурних спостережень загасання хвиль.

Список літератури

1. WW3DG – The WAVEWATCH III® Development Group. User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 5.16 (Tech. Note No. 329. – 2016).
2. Kheisin D. E. Dynamics of Floating Ice Cover. – 1967. – 215 p. [in Russian. Technical English Translation in: Tech. Rep. FSTC-HT-23-485-69, U.S. Army Foreign Science and Technology Center, 1969, Washington DC].
3. Greenhill A. G. Wave motion in hydrodynamics // *Am. J. Math.* – 1886. – № 9(1). – P. 62 – 96.
4. Peters A. S. The effect of a floating mat on water waves // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1950. – vol. 3. – pp. 319 – 354. DOI: 10.1002/cpa.3160030402.
5. Weber J. E. Wave attenuation and wave drift in the marginal ice zone // *J. Phys. Oceanogr.* – 1987. – vol. 17(12). – pp. 2351 – 2361. DOI: 10.1175/1520-0485(1987)017<2351:WAAWDI>2.0.CO;2.
6. Keller J. B. Gravity waves on ice-covered water // *J. Geophys. Res.* – 1998. – vol. 103(C4). – pp. 7663 – 7669. DOI: 10.1029/97JC02966.
7. Wang R., Shen H. H. Gravity waves propagating into an ice-covered ocean: A viscoelastic model // *Journal of Geophysical Research*. – 2010. – vol. 115(C6). DOI: 10.1029/2009JC005591.
8. Sturova I. V. Time-dependent response of a heterogeneous elastic plate floating on shallow water of variable depth // *J. Fluid Mech.* – 2009. – vol. 637. – pp. 305 – 325. DOI: 10.1017/S0022112009990504.
9. Karmakar D., Bhattacharjee J., Sahoo T. Oblique flexural gravity-wave scattering due to changes in bottom topography // *J. Engng Maths.* – 2010. – vol. 66. – pp. 325 – 341. DOI: 10.1007/s10665-009-9297-8.
10. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution // *J. Fluid Mech.* – 1986. – vol. 169. – pp. 409 – 428. DOI: 10.1017/S0022112086000708.
11. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solution // *J. Fluid Mech.* – 1988. – vol. 188. – pp. 491 – 508. DOI: 10.1017/S0022112088000813.
12. Părău E. I., Dias F. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load // *J. Fluid Mech.* – 2002. – vol. 460. – pp. 281 – 305. DOI: 10.1017/S0022112002008236.
13. Vanden-Broeck J.-M., Părău E. I. Two-dimensional generalized solitary waves and periodic waves under an ice sheet. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2011, vol. 369, pp. 2957–2972. DOI: 10.1098/rsta.2011.0108.
14. Milewski P. A., Vanden-Broeck J.M., Wang Z. Hydroelastic solitary waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 679, pp. 628–640. DOI: 10.1017/jfm.2011.163.
15. Yoon B.-S., Semenov Y. A. Separated Inviscid Sheet Flows // *J. Fluid Mech.* – 2011. – vol. 678. – pp. 511 – 534. DOI: 10.1017/jfm.2011.123.
16. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. Theoretical Hydromechanics. – Wiley Interscience, 1964. – 577 p.
17. Joukowski N. E. Modification of Kirchhoff's method for determination of a fluid motion in two directions at a fixed velocity given on the unknown streamline // *Math. Sbornik*. – 1890. – vol. 15 (1). – pp. 121 – 278.
18. Michell J. H. On the theory of free streamlines // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. – 1890. – vol. 181. – pp. 389 – 431.
19. Semenov Y. A., Iafrazi A. On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges // *J. Fluid Mech.* – 2006. – vol. 547. – pp. 231 – 256. DOI: 10.1017/S0022112005007329.
20. Semenov Y. A., Yoon B.-S. Onset of flow separation at oblique water impact of a wedge // *Phys. Fluids*. – 2009. – vol. 21. – pp. 112103 – 112111. DOI: 10.1063/1.3261805.

References (transliterated)

1. WW3DG – The WAVEWATCH III® Development Group. User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 5.16 (Tech. Note No. 329. – 2016).
2. Kheisin D. E. Dynamics of Floating Ice Cover. 1967. 215 p. [in Russian. Technical English Translation in: Tech. Rep. FSTC-HT-23-485-69, U.S. Army Foreign Science and Technology Center, 1969, Washington DC].
3. Greenhill A. G. Wave motion in hydrodynamics. *Am. J. Math.* 1886, Vol. 9(1), pp. 62–96.
4. Peters A. S. The effect of a floating mat on water waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950, vol. 3, pp. 319–354. DOI: 10.1002/cpa.3160030402.
5. Weber J. E. Wave attenuation and wave drift in the marginal ice zone. *J. Phys. Oceanogr.* 1987, vol. 17(12), pp. 2351–2361. DOI: 10.1175/1520-0485(1987)017<2351:WAAWDI>2.0.CO;2.
6. Keller J. B. Gravity waves on ice-covered water. *J. Geophys. Res.* 1998, vol. 103(C4), pp. 7663–7669. DOI: 10.1029/97JC02966.
7. Wang R., Shen H. H. Gravity waves propagating into an ice-covered ocean: A viscoelastic model. *Journal of Geophysical Research*. 2010, vol. 115(C6). DOI: 10.1029/2009JC005591.
8. Sturova I. V. Time-dependent response of a heterogeneous elastic plate floating on shallow water of variable depth. *J. Fluid Mech.* 2009, vol. 637. pp. 305–325. DOI: 10.1017/S0022112009990504.
9. Karmakar D., Bhattacharjee J., Sahoo T. Oblique flexural gravity-wave scattering due to changes in bottom topography. *J. Engng Maths.* 2010, vol. 66, pp. 325–341. DOI: 10.1007/s10665-009-9297-8.
10. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution. *J. Fluid Mech.* 1986, vol. 169, pp. 409–428. DOI: 10.1017/S0022112086000708.
11. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solution. *J. Fluid Mech.* 1988, vol. 188, pp. 491–508. DOI: 10.1017/S0022112088000813.
12. Părău E. I., Dias F. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load. *J. Fluid Mech.* 2002, vol. 460, pp. 281–305. DOI: 10.1017/S0022112002008236.

13. Vanden-Broeck J.-M., Părău E. I. Two-dimensional generalized solitary waves and periodic waves under an ice sheet. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2011, vol. 369, pp. 2957–2972. DOI: 10.1098/rsta.2011.0108.
14. Milewski P. A., Vanden-Broeck J.M., Wang Z. Hydroelastic solitary waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 679, pp. 628–640. DOI: 10.1017/jfm.2011.163.
15. Yoon B.-S., Semenov Y. A. Separated Inviscid Sheet Flows. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 678, pp. 511–534. DOI: 10.1017/jfm.2011.123.
16. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics*. Wiley Interscience, 1964. 577 p.
17. Joukowski N. E. Modification of Kirchhoff's method for determination of a fluid motion in two directions at a fixed velocity given on the unknown streamline. *Math. Sbornik*. 1890, vol. 15 (1), pp. 121–278.
18. Michell J. H. On the theory of free streamlines. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1890, vol. 181, pp. 389–431.
19. Semenov Y. A., Iafrati A. On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges. *J. Fluid Mech.* 2006, vol. 547, pp. 231–256. DOI: 10.1017/S00222112005007329.
20. Semenov Y. A., Yoon B.-S. Onset of flow separation at oblique water impact of a wedge. *Phys. Fluids*. 2009, vol. 21, pp. 112103–112111. DOI: 10.1063/1.3261805.

Надійшла (received) 31.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Савченко Юрій Миколайович – член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, завідувач відділу Течій з вільними межами Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3435-9316>; e-mail: : SavchenkoYu@nas.gov.ua.

Savchenko Yuriy Mykolaiiovych – Corresponding member of the NAS of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Head of the department of Free Boundary Flows at the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3435-9316>; e-mail: : SavchenkoYu@nas.gov.ua.

Семенов Юрій Асафійович – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу Течій з вільними межами Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1228-9097>; e-mail: yuriy.a.semenov@gmail.com.

Semenov Yuriy Asaphiiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientist at the Department of Free Boundary Flows, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1228-9097>; e-mail: yuriy.a.semenov@gmail.com.

Савченко Георгій Юрійович – кандидат технічних наук, завідувач лабораторії Сучасної гідромеханіки Інституту гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7177-3228>; e-mail: georgiy.savchenko@yahoo.com.

Savchenko Georgiy Yuriiovych – Candidate of Technical Sciences, Head of the laboratory of Modern Hydro-mechanics at the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7177-3228>; e-mail: georgiy.savchenko@yahoo.com.

L. SCHEK, E. N. VILCHEVSKAYA, W. H. MÜLLER

COMPUTATIONAL ANALYSIS OF THE DEFORMATION BEHAVIOR OF 4D-PRINTED LIQUID CRYSTAL ELASTOMERS UNDER CHANGE OF TEMPERATURE

This paper focuses on an FE simulation of Liquid Crystal Elastomers (LCE). For this purpose, a new method is proposed based on the combination of nonlinear deformation analysis based on a St. Venant – Kirchhoff law, i.e., a physically linear but geometrically nonlinear stress-strain relationship. The deformation gradient is decomposed multiplicatively into elastic, (classical) thermal, and phase transformation parts. For the transformation part a novel representation is chosen based on an orientation parameter within a distribution function for the mesogens. This parameter can be linked to temperature. The stiffness tensor in the St. Venant – Kirchhoff law as well as the tensor of thermal expansion (for the thermal part of the deformation gradient) are obtained from Mori-Tanaka homogenization schemes. It is shown that classical thermal expansion with positive expansion coefficients and realistic values does not contribute much to the total large deformations. The mayor contribution comes from phase transformation. It is, therefore, misleading to model the deformation of LCEs during temperature change by classical thermal expansion, although exactly this is done in the literature by a trick—namely, using negative anisotropic thermal expansion coefficients.

Key words: 4D printing, liquid crystal elastomer, FE simulation, Mori-Tanaka scheme, distribution function, shape function.

Л. ШЕК, Е. Н. ВІЛЬЧЕВСЬКА, В. Г. МЮЛЛЕР

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ ПОВЕДІНКИ РІДКОКРИСТАЛІЧНИХ ЕЛАСТОМЕРІВ, НАДРУКОВАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ 4Д-ДРУКУ, ПРИ ЗМІНІ ТЕМПЕРАТУРИ

Ця стаття зосереджена на моделюванні методом скінченних елементів рідкокристалічних еластомерів (РКЕ). Для цього запропоновано новий метод, заснований на комбінації нелінійного аналізу деформації на основі закону Сен-Венана – Кірхгофа, тобто фізично лінійної, але геометрично нелінійної залежності напруження-деформації. Градієнт деформації мультиплікативно розкладається на пружну, теплову та фазово-перетворювальну частини. Для перетворювальної частини вибрано нове представлення на основі параметра орієнтації в межах функції розподілу мезогенів. Цей параметр може бути пов'язаний з температурою. Тензор жорсткості в законі Сен-Венана – Кірхгофа, а також тензор теплового розширення (для теплової частини градієнта деформації) отримані зі схем гомогенізації Морі-Танаки. Показано, що класичне теплове розширення з позитивними коефіцієнтами розширення та реалістичними значеннями не робить значного внеску в загальну величину великих деформацій. Тому моделювання деформації РКЕ під час зміни температури за допомогою класичного теплового розширення є помилкою, хоча саме це робиться в літературі за допомогою хитрощів, а саме, використовуючи негативні анізотропні коефіцієнти теплового розширення.

Ключові слова: 4D-друк, рідкокристалічний еластомер, моделювання методом скінченних елементів, схема Морі-Танаки, функція розподілу, функція форми.

Introduction. 4D printing of *liquid crystal elastomers (LCEs)* is an emerging field that combines the anisotropic responsiveness of LCEs with additive manufacturing techniques to create structures capable of dynamic, stimuli-induced shape transformations over time [1]. LCEs are crosslinked polymer networks that incorporate liquid crystalline *mesogens*. These mesogens can be aligned during fabrication, enabling the material to undergo reversible, anisotropic deformations in response to external stimuli such as heat (temperature change), light, or electric fields. This unique combination of properties makes LCEs particularly suitable for 4D printing applications, where time-dependent shape changes are desired [2]. Several *additive manufacturing methods* have been adapted for 4D printing of LCEs:

- *Direct Ink Writing (DIW)* [3]: This extrusion-based technique allows for the alignment of mesogens along the printing path due to shear forces during extrusion. Post-printing, the structures are typically cured using UV light to fix the alignment. DIW is noted for its flexibility and rapid printing speed [3].
- *Vat Photopolymerization* (e.g., SLA and DLP) [3]: These methods use light to cure photosensitive resins layer by layer, achieving high-resolution prints. They are particularly useful for creating complex geometries with fine features.
- *Inkjet Printing*: This technique deposits tiny droplets of material to build up structures and is valued for its high resolution and ability to handle multiple materials simultaneously.

Each method offers distinct advantages and is chosen based on the desired properties and applications of the final LCE structure [4]. LCEs exhibit several key properties that make them ideal for 4D printing:

- *Stimuli-Responsive Behavior* [4]: They can undergo significant, reversible shape changes when exposed to external stimuli.
- *Programmable Anisotropy* [2], [5]: The directionality of deformation can be programmed during fabrication by controlling the alignment of mesogens.
- *Complex Deformation Modes* [2]: By designing specific mesogen alignments, LCEs can achieve intricate movements such as bending, twisting, and folding.

The unique properties of 4D-printed LCEs open up a range of applications:

- *Soft Robotics* [1]: Creating actuators and robotic components that can move and adapt their shape in response to stimuli.
- *Biomedical Devices* [5]: Developing implants or drug delivery systems that change shape or function within the body.

- *Optical Devices* [6], [7]: Fabricating components that alter their optical properties through shape changes.
- *Wearable Technology*: Designing garments or accessories that adapt to environmental conditions or user needs.

Simulating the deformation of LCEs. The deformation behavior of LCEs has been extensively studied using various simulation methodologies, each capturing different aspects of their complex, stimuli-responsive mechanics. These approaches range from continuum mechanics models to molecular simulations, providing insights at both macroscopic and microscopic scales. Below is a summary of the primary simulation methods employed so far:

Continuum Mechanics Models

- *Neoclassical Theory*: This framework extends classical rubber elasticity to LCEs by incorporating the anisotropic nature of liquid crystal mesogens. It models the coupling between mechanical deformation and mesogen orientation, effectively capturing soft elasticity and large deformations [8].
- *Pseudo-Anelastic Models*: To account for stress softening and residual strains observed in LCEs under cyclic loading, pseudo-anelastic models introduce separate strain-energy functions for loading and unloading phases. This approach allows for the simulation of Mullins-like effects within LCEs [9].
- *Ogden-Type Strain-Energy Functions*: These phenomenological models are adept at representing complex elastic behaviors, including the auxetic response (negative Poisson's ratio) observed in certain LCEs under large strains [10].

Finite Element Analysis (FEA)

- *Thermomechanical Simulations*: FEA has been utilized to simulate the bending and curling behaviors of LCE beams under thermal stimuli. By incorporating temperature-dependent strain differences due to mesogen alignment, these models predict deformation patterns such as bending angles and curvature [11].
- *Mechanical Instabilities and Pattern Formation*: Advanced FEA models have been developed to study phenomena like wrinkling and buckling in LCEs. These simulations consider factors like material heterogeneity and external constraints to predict complex deformation modes [12].

Molecular Simulations

- *Monte Carlo (MC) Simulations*: MC methods have been employed to investigate the molecular-level behavior of LCEs, particularly focusing on the effects of electric fields and temperature changes on mesogen orientation and network deformation. These simulations provide insights into the microscopic mechanisms driving macroscopic actuation [13].
- *Molecular Dynamics (MD) Simulations*: Coarse-grained MD simulations have been used to study the relationship between molecular architecture and mechanical properties in LCEs. These models help in understanding how variations in crosslink density and mesogen alignment affect the overall material behavior [14].

Phase Field Modeling

- *Domain Evolution and Polydomain Structures*: Phase field models couple the elastomer network's mechanical energy with the liquid crystal's free energy to simulate the evolution of domain structures within LCEs. This approach is particularly useful for studying the formation and dynamics of polydomain configurations under various stimuli [15].

Geometric and Reduced-Order Models

Bending-Twisting Rod Models: Reduced-order models, such as those based on the Kirchhoff rod theory, have been adapted to LCEs to simulate bending and twisting behaviors. These models incorporate the coupling between curvature, torsion, and mesogen orientation to predict complex deformations in slender LCE structures [16].

Mathematical Model. We consider LCEs as a heterogeneous material consisting of an isotropic matrix with stiffness C_0 and thermal expansion coefficient α_0 , containing a large number of uniformly distributed mesogens, which we idealize as spheroids with equatorial axes a and polar axis a_3 , composed of an isotropic material with properties C_1 and α_1 . The mesogens exhibit a certain degree of orientation after the printing and curing process at low temperatures. However, as the temperature increases, they are able to rotate freely, leading to a random orientation distribution when the temperature reaches T_{iso} , as illustrated in the top row of Fig. 1. At this stage, we neglect internal stresses that may arise due to mesogen rotation. Moreover, we do not consider the internal dynamics of the process, and instead study a sequence of quasi-static thermomechanical states of the heterogeneous material under varying degrees of mesogen alignment.

In continuum mechanics, the primary elements are material particles whose macroscopic thermomechanical properties are understood as effective quantities obtained by averaging the corresponding meso-scale fields. Unlike classical approaches, we assume that a change in the degree of alignment of micro-particles not only alters the effective elastic moduli and thermal expansion coefficient, but also results in a change in the effective shape of the macro-particle. Fig. 1 illustrates the underlying transition process from the molecular to the continuum level: three different situations of the *Representative Volume Element (RVE)* of the LCE are shown. Shown on the left is the ideal low-temperature scenario,

where all mesogens are perfectly aligned. On the continuum level this corresponds to a very slender spheroid. In the RVE on the right the high temperature situation is shown, where the mesogens are isotropically (better: fully randomly) oriented. On the continuum level this corresponds to a sphere. Finally, at some intermediate temperature $T(t)$ at time t we find less order but not complete chaos, which corresponds to a spheroid on its way to become a sphere. Traditionally, such effects are modeled using a micromorphic continuum, which significantly complicates the model. Theories have been proposed on that subject, *notably by Eringen* [17]. However, in this article we do not make any use of them. We propose instead to treat the degree of particle alignment as an additional degree of freedom, the variation of which induces transformation deformations F^{tr} at the macroscopic level.

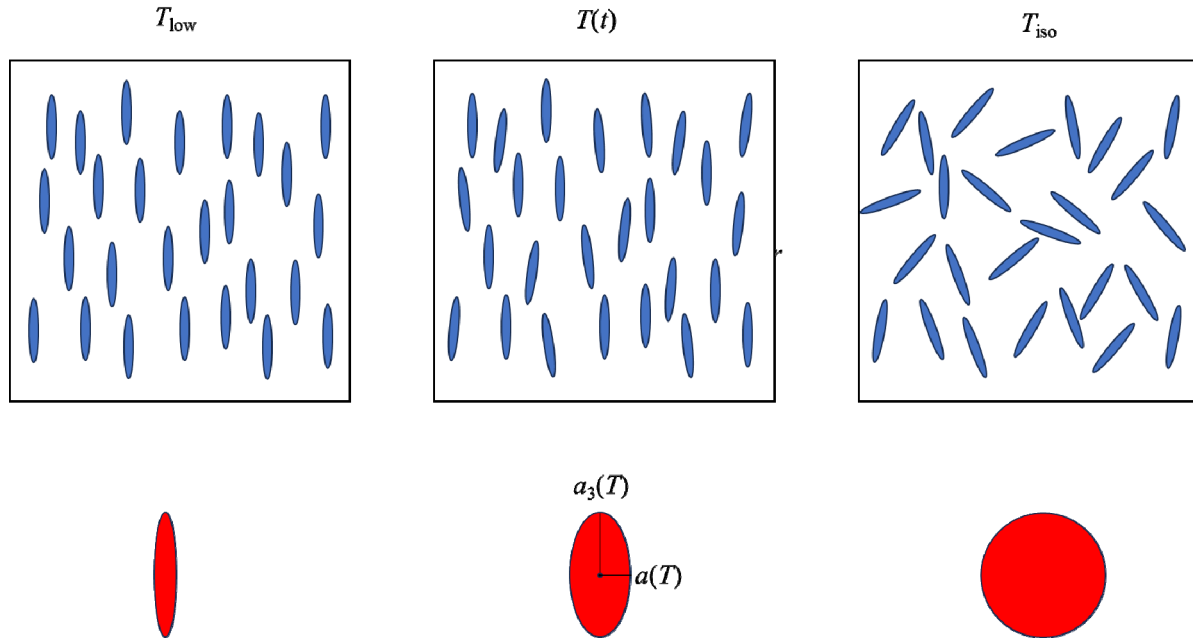


Fig. 1 – Illustrating the transition from the molecular (first row) to the continuum level (second row).

Thus, within this approach, the primary macroscopic quantities are characterized by the degree of alignment of the mesogens relative to a prescribed direction m . Let us denote by n the symmetry axis of an individual spheroid, with its deviation from the given direction m described by the angle φ . The randomness of the direction of the deviation implies transverse isotropy of the overall properties and allows us to introduce a probability density function of the form [18], Section 5.3.5:

$$\psi_\lambda(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[(\lambda^2 + 1)e^{-\lambda\varphi} + \lambda e^{(-\lambda\pi/2)} \right], \quad \text{with} \quad \int_\Phi \psi_\lambda(\varphi) d\Phi = 1, \quad (1)$$

where $d\Phi$ refers to integration over half of the unit sphere, and the scatter parameter λ characterizes the degree of anisotropy.

The behavior of $\psi_\lambda(\varphi)$ for different values of λ is shown in Fig. 2: the smaller λ , the closer we get to an isotropic distribution of mesogens and for $\lambda \rightarrow \infty$ we get a perfect orientation in m -direction, i.e., to the transversally isotropic state. We can link this parameter to the temperature T whilst we know that at high temperatures T_{iso} the isotropic state prevails. This is achieved by means of the following empirical assignment:

$$\lambda = \lambda(T) = \frac{\lambda_\infty}{2} \left(1 - \tanh \frac{\frac{T}{T_{iso}} - \alpha}{\beta} \right). \quad (2)$$

In here λ_∞ is a sufficiently large number, which characterizes the relatively ordered state of the mesogens right after printing (typically at room temperature). Moreover, α and β are two parameters for scaling and shifting, see Fig. 3.

To obtain F^{tr} we first note the shape tensor of an individual spheroid in the form:

$$A = a(1 - nn) + a_3 nn, \quad (3)$$

where 1 is the unit tensor and n is a unit vector in direction of the polar axis, and $1 - nn$ is a projection operator onto

the plane of isotropy. In spherical coordinates we have:

$$n = \cos \theta \sin \varphi e_1 + \sin \theta \sin \varphi e_2 + \cos \varphi e_3. \quad (4)$$

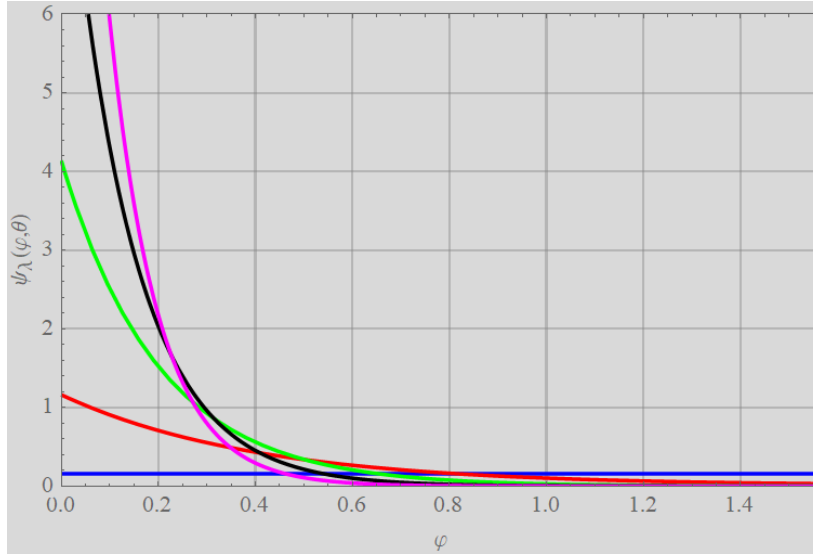


Fig. 2 – Distribution function $\psi_\lambda(\varphi)$ for different values of $\lambda = 0$ (blue), 2.5 (red), 5 (green), 7.5 (black), 10 (magenta).

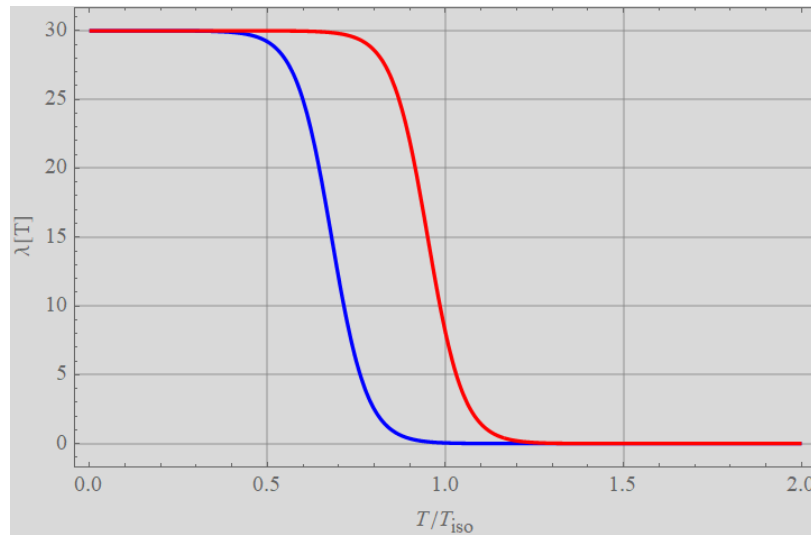


Fig. 3 – Orientation parameter as a function of temperature, $\lambda(T)$, for $\lambda_\infty = 30$ and $\alpha = 0.68$ (blue), $\alpha = 0.95$ (red), $\beta = 0.1$.

Consequently, the average shape tensor for the spheroid on the continuum scale can be obtained by means of the distribution function from Eq. (1) through homogenization by integration over (half) the unit sphere Φ :

$$\langle A \rangle = \int_{\Phi} A \psi_\lambda(\varphi) d\Phi \quad (5)$$

and we obtain

$$\langle A \rangle = a(\lambda)(1 - mm) + a_3(\lambda)mm \quad (6)$$

with

$$a(\lambda) = a \left[1 + (\gamma - 1) \frac{18 - \exp(-\lambda\pi/2)\lambda(8 + \lambda^2)}{6(9 + \lambda^2)} \right], \quad a_3(\lambda) = a_3 \left[\frac{1}{\gamma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{[3 + \exp(-\lambda\pi/2)\lambda](3 + \lambda^2)}{3(9 + \lambda^2)} \right]. \quad (7)$$

In here $\gamma = a_3/a$ is known as *the aspect ratio*. In the present case of the LCE mesogens we have typically $\gamma \approx 5$ [19]. This means our spheroid is of prolate shape.

Introducing the transformation deformations as a tensor that links the initial and current shape, $\langle A \rangle = F^{\text{tr}} \cdot \langle A \rangle(\lambda_\infty)$, we find that

$$F^{\text{tr}} = \frac{a(\lambda)}{a(\lambda_\infty)}(1 - mm) + \frac{a_3(\lambda)}{a_3(\lambda_\infty)}mm. \quad (8)$$

Geometrically nonlinear stress strain relation. We use a multiplicative decomposition of the deformation gradient,

$$F = F^{\text{el}} \cdot F^{\text{th}} \cdot F^{\text{tr}}, \quad (9)$$

with, F^{th} and F^{el} being the contributions related to classical thermal, and (nonlinear) elastic respectively.

Now recall the definition of the *Green-Lagrange strain tensor*, applied only to the elastic deformation:

$$E^{\text{el}} = \frac{1}{2}(C^{\text{el}} - 1), \quad C^{\text{el}} = (F^{\text{el}})^T \cdot F^{\text{el}}. \quad (10)$$

This strain tensor is used in the *St. Venant–Kirchhoff constitutive law* [20]:

$$S = C_{\text{hom}}(\lambda) : E^{\text{el}}, \quad S = \det F^{\text{el}} (F^{\text{el}})^{-1} \cdot \sigma \cdot (F^{\text{el}})^{-T}, \quad (11)$$

where S is the *second Piola-Kirchhoff stress*, σ is the *Cauchy stress tensor*, and $C_{\text{hom}}(\lambda)$ is the fourth order homogenized stiffness tensor, derived from the properties of the matrix and the mesogens using the **Mori–Tanaka scheme**. Since homogenization via the Mori-Tanaka approach is a well-established method—particularly effective even for higher volume fractions of inclusions—we present here only the final expression:

$$C_{\text{hom}}(\lambda) = C_0 + p \left(p(C_1 - C_0)^{-1} + (1 - p) \left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle^{-1} \right)^{-1}, \quad (12)$$

where p is the volume fraction of mesogens, and the (averaged) stiffness contribution tensor,

$$\left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle = \int_{\Phi} {}^4\overline{N} \psi_{\lambda}(\varphi) d\Phi, \quad {}^4\overline{N} = \left[(C_1 - C_0)^{-1} + {}^4P \right]^{-1}, \quad (13)$$

which is a function of λ . Moreover, 4P denotes *Hill's tensor*, which characterizes the strain at a point x :

$${}^4P = \left(\nabla \int_{V_{\text{in}}} G(x - x') \nabla' dx' \right)_{(12)(34)}^s, \quad (14)$$

where V_{in} is the volume of an inclusion, $G(x - x')$ is the *Green's function for displacement*, and s indicates appropriate symmetrization. For an ellipsoidal domain 4P is a constant and depends on the shape of the inclusion. Specific values of 4P and further information on Eq. (12) are provided in **Appendix B**.

For the thermal part of the deformation gradient, we assume the following form:

$$F^{\text{th}} = (1 + \alpha_{\text{hom},1}(\lambda)\Delta T)(1 - mm) + (1 + \alpha_{\text{hom},3}(\lambda)\Delta T)mm, \quad (15)$$

where the homogenized coefficients of thermal expansion, $\alpha_{\text{hom},1/3}(\lambda)$, can also be computed via homogenization. A detailed derivation under the *Mori–Tanaka framework* is provided in **Appendix C**:

$$\alpha_{\text{hom}}(\lambda) = \alpha_0 + p \left\{ \left[p {}^41 + (1 - p) \left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle^{-1} \right]^{-1} : \left({}^41 - \left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle^{-1} \right) + \left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle^{-1} \right\} : (\alpha_1 - \alpha_0) \Delta T. \quad (16)$$

Here α_0 and α_1 are isotropic thermal expansion tensors known from experimental data, ΔT is the temperature change, and 41 is the fourth-order identity tensor. The extended (averaged) compliance contribution tensor $\left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle$ is defined as:

$$\left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle = \int_{\Phi} {}^4\overline{H}_T \psi_{\lambda}(\varphi) d\Phi, \quad {}^4\overline{H}_T = \left[{}^41 + (S_1 - S_0) : {}^4Q \right]^{-1}, \quad (17)$$

where $S_k = C_k^{-1}$ are the compliance tensors of the matrix and the inclusions, and ${}^4Q = C_0 - C_0 : {}^4P : C_0$. $\left\langle {}^4\overline{H}_T \right\rangle$ is also a function of λ .

Homogenization schemes applied to LCEs. We assign to the elastomer matrix $\mu_0 \approx 1 \text{ MPa}$ and $k_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \approx 10 \text{ MPa}$ (see [21] for typical values). The mesogens are essentially rigid (see [22]). Fig. 4 shows results for the

homogenized stiffnesses $C_{\text{hom}}(\lambda)$ for $\mu_1 = 10\mu_0$, $k_1 = 10k_0$ (computed by using (12)) on the left and for rigid inclusions (computed with (50)) on the right, both for a volume fraction $p = 0.3$ (chosen for demonstration purposes). Recall that high values of λ correspond to the transversally isotropic state at room temperature and $\lambda = 0$ to the isotropic state at higher temperatures (ca. 100°C). The difference between the two plots at high temperatures ($\lambda = 0$) is small. As expected, the stiffnesses in the direction of transversal axis are higher at room temperature (large λ) in the rigid case. For higher volume fractions p the values increase accordingly.

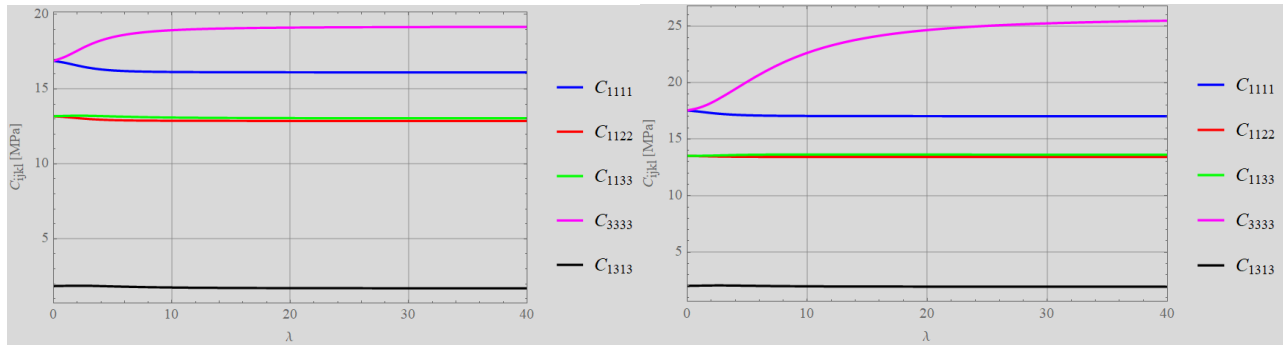


Fig. 4 – Homogenized stiffnesses $C_{\text{hom}}(\lambda)$, see text.

For the (isotropic) thermal expansion of the matrix we choose $\alpha_0 = 80\text{ ppm/K}$ (elastomer matrix) and for the mesogens $\alpha_1 = 40\text{ ppm/K}$ (see [23]). From (16) we obtain the result shown in Fig. 5 for a volume fraction $p = 0.3$ using the stiffnesses from before. The blue curve stands for the coefficients within the isotropic plane $\alpha_{\text{hom},1} = \alpha_{\text{hom},2}$ and the red one for the transverse direction $\alpha_{\text{hom},3}$.

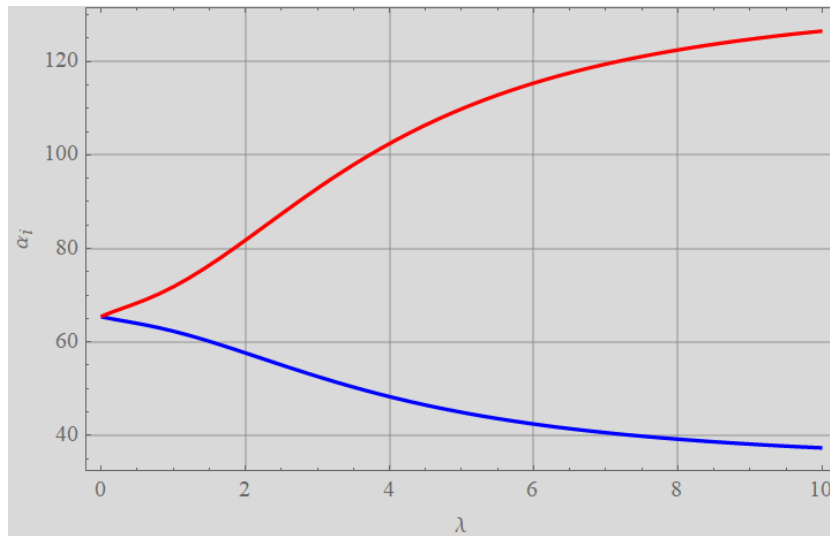


Fig. 5 – Homogenized thermal expansion tensor $\alpha_{\text{hom}}(\lambda)$ in ppm/K, see text.

Simulation of nonlinear deformations. As a first example we shall now model the deformation of double layer LCE sheets as described in [24] within the framework of our method. Such LCE sheet structures are also mentioned in [25], Fig. 12 and [26]. They are simple and serve perfectly to illustrate the point without distracting the attention of the reader by complicated geometries. Clearly, for technical applications, more complicated shapes should be studied.

As shown in Fig. 6 a double, perpendicularly printed rectangular LCE structure is heated up from room temperature to about 100°C . As noted in the supporting information to [24] the sheets are typically $35 \times 5\text{ mm}$ in dimension. The sample thickness varies between ca. 0.5 and 2 mm. In the real experiment the heating is achieved by electric currents through internal wiring as indicated in the cartoon. The clamping visible in the second row of pictures is definitely not the one used in technical mechanics when studying statically determinate systems. It is probably somewhat close to a rigid support. A strongly non-linear smiley-type deformation behavior is observed that leads to curling of the specimen. It is therefore not surprising that one technical application of LCEs is to use them as grippers [27], [28], [29], Fig. 77.

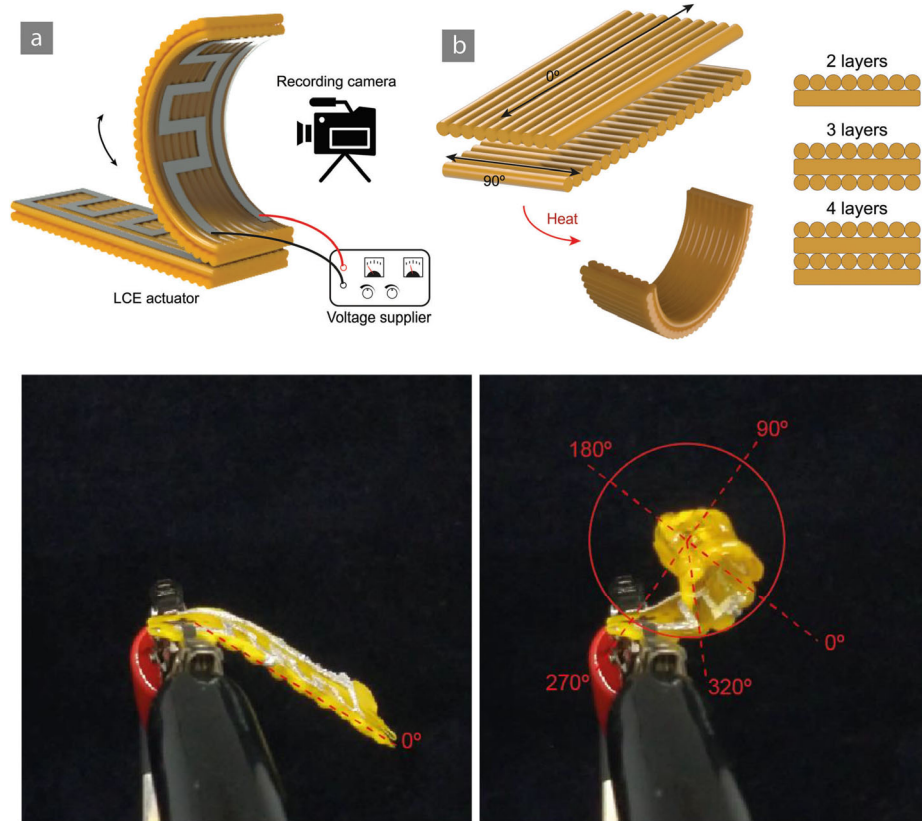


Fig. 6 – LCE double layer sheet structures and their highly non-linear deformation behavior during temperature change starting from room temperature (flat) to about 100°C , top: cartoon, bottom: reality (all figures from [24]).

In our simulations, Eqs. (9) – (17) are solved numerically using the programmable finite element software FEniCS [30]. The mesh including dimensions is shown in Fig. 7. A $40 \times 8 \times 12$ hexagonal mesh, which is subdivided into tetrahedra was used. The trial functions were linear in order to reduce computation time. The top half of the FE-model shows a printing direction $m = e_1$ and the bottom half has been assigned $m = e_3$. Also, the side plane was constrained with one node completely fixed, and all others only fixed in x -direction, allowing for free sliding in the two other directions, so that no artificial stresses would occur at the supported end. The resulting deformation pattern shown in Fig. 8 has a remarkable resemblance to the cartoon as well as to the experimental result shown in Fig. 6. It should be stressed again that this simulation is based on realistic data and by using the concept of the temperature dependent orientation parameter λ alone. No tricks are involved.

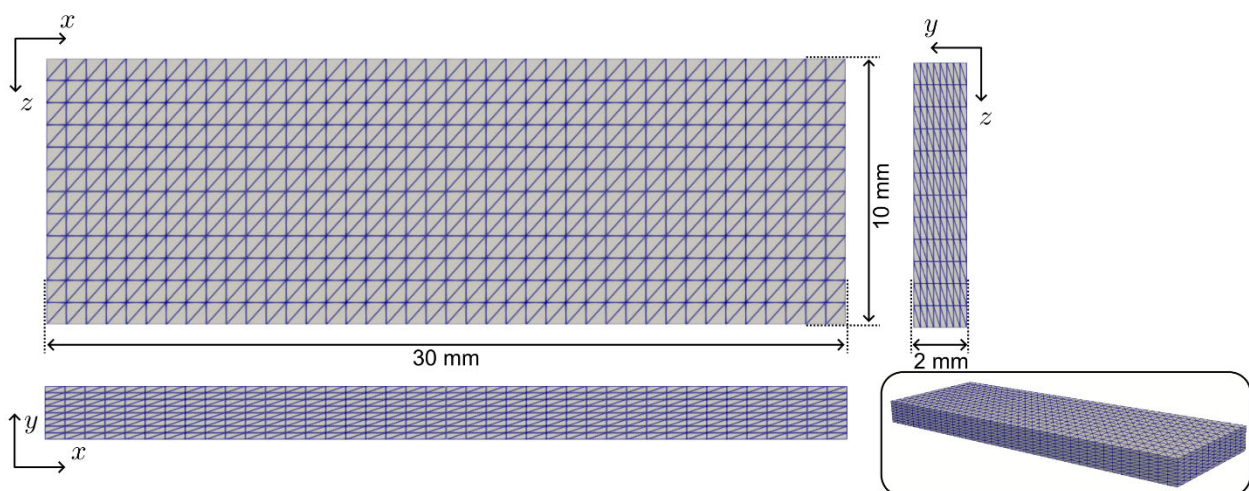


Fig. 7 – FE-mesh used during simulations.

Next, we explore the effect of classical thermal expansion on deformation alone. In order to get a visible effect, we use *constant* extreme values from Fig. 5, namely in printing direction m we choose ≈ 120 ppm/K and in the perpendicular directions ≈ 40 ppm/K. But even then, the effect shown in Fig. 9 is small compared to the deformation from phase transition in Fig. 8. In hindsight one should say that the computation of $\alpha_{\text{hom}}(\lambda)$ based on the Mori-Tanaka scheme was perfectly legitimate, because its application is limited to small deformations.

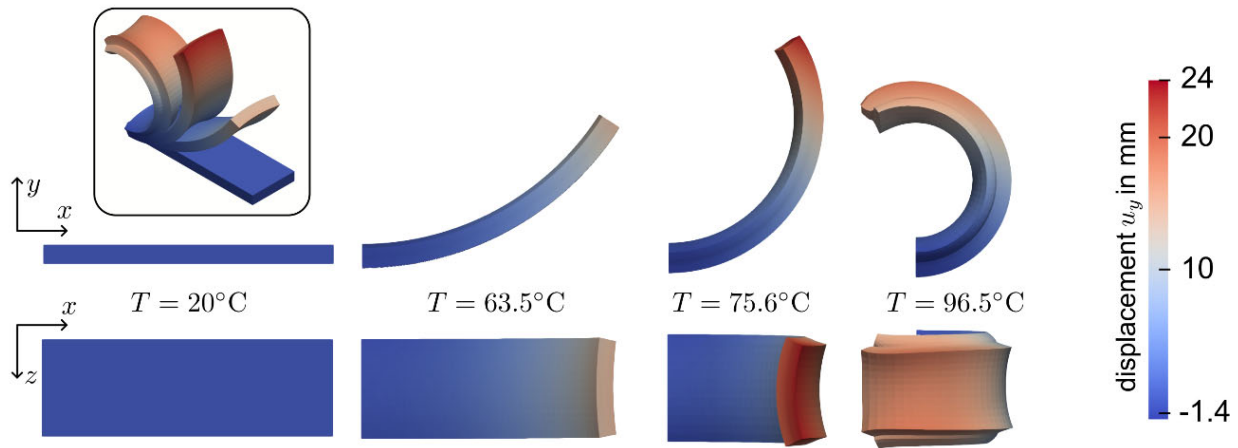


Fig. 8 – Orientation parameter λ based modeling of a LCE double layer sheet structure and its highly non-linear deformation behavior during temperature change starting from room temperature (flat) to about 100°C .

We now follow a suggestion for modeling the deformation behavior suggested in [31]: "LCE was modeled as a linear thermoelastic material with anisotropic thermal expansion coefficients and a Poisson's ratio of 0.499. The thermal expansion coefficient α was determined from the measurements presented in [left out intentionally], and the thermal expansion coefficients in the directions perpendicular to the axial direction were set as $-\alpha/2$ ". The use of anisotropic expansion coefficients with negative values is clearly a dirty trick to model the large deformations, albeit an effective one. We extended it somewhat and put

$$F^{\text{th}} = (1 - \alpha \Delta T) e_1 e_1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha \Delta T}} (e_2 e_2 + e_3 e_3). \quad (18)$$

The use of a square root goes back to [32]. With the fictive value $\alpha = 3500$ ppm/K, we obtain the result shown in Fig. 10. It is very similar to Fig. 8, indeed, but it is based on questionable premises, and, what is more, the value chose for the coefficient of thermal expansion is absurdly large.

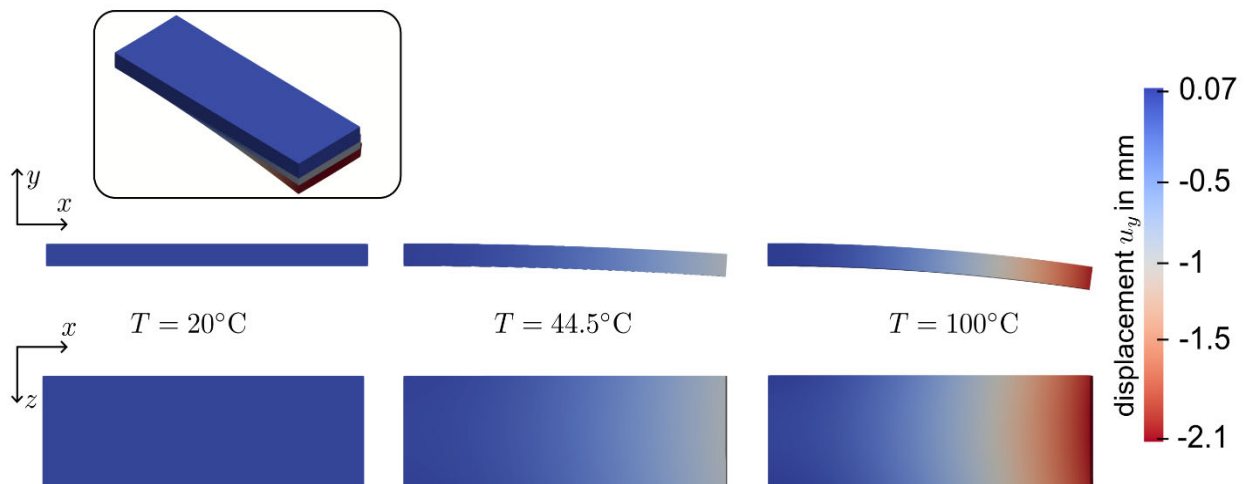


Fig. 9 – LCE double layer sheet structures modeled by assuming regular thermal expansion only.

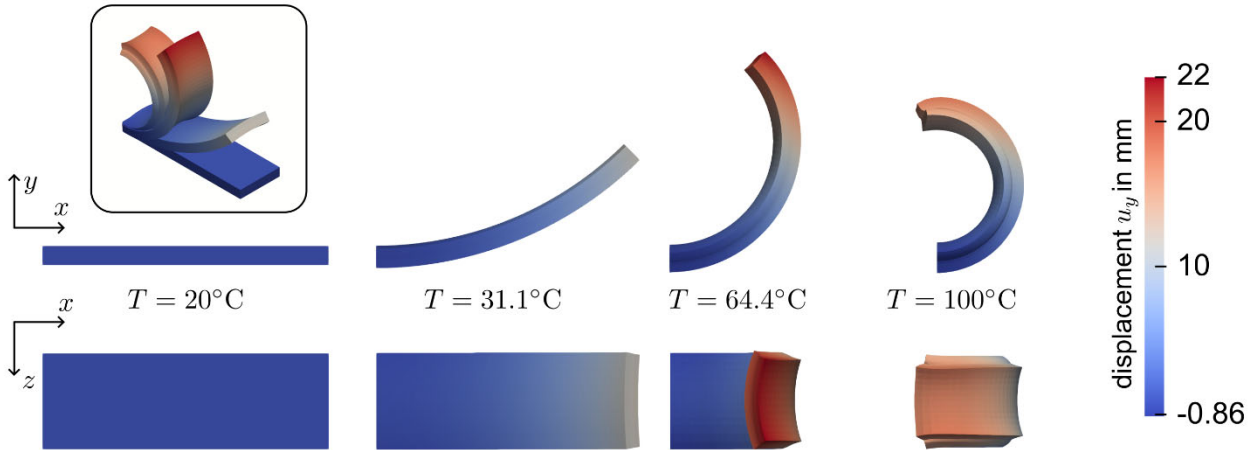


Fig. 10 – LCE double layer sheet structures modeled by assuming (artificial) negative anisotropic thermal expansion coefficients.

Conclusions. Thus, in this work, we presented, first, an overview on the making (4D-printing) and currently used simulation techniques applied in context with Liquid Crystal Elastomers (LCEs). Second, the thermo-mechanical setting was presented: nonlinear deformation together with the new concept of a temperature-dependent orientational parameter, characterizing the distribution of the LCE mesogens, to be used in a St. Venant – Kirchhoff stress-strain relationship. Third, the basics of homogenization techniques required for effective stiffnesses and thermal expansion coefficients as a function of the orientational parameter were presented. The use of this parameter was critically examined in context with higher continuum theories. In order to be capable of accounting for high volume concentrations of mesogens Mori-Tanaka schemes were used and explained in appendices. Forth, simulations based on the new concept were presented and compared to the commonly used modeling way with anisotropic negative thermal expansion coefficients. It was shown that the latter had to be unreasonably large to create adequate results, which is not necessary when using the newly proposed method of an orientational parameter.

Appendix (a): Some information about transversally isotropic tensors of the fourth rank. For transversely-isotropic tensors 4A it is convenient to use a tensor base consisting of the following six tensors 4T_i :

$${}^4A = \sum_{i=1}^6 a_i {}^4T_i \quad (19)$$

with

$$\begin{aligned} {}^4T_1 &= \bar{1}\bar{1}, \quad {}^4T_2 = {}^41 - \frac{1}{2}\bar{1}\bar{1}, \quad {}^4T_3 = \bar{1}mm, \quad {}^4T_4 = mm\bar{1}, \\ {}^4T_5 &= \frac{1}{4}(e_k m e_k m + m e_k m e_k + m e_k e_k m + e_k m m e_k), \quad {}^4T_6 = mmmm, \\ \bar{1} &= 1 - mm, \quad {}^41 = \frac{1}{2}(e_k e_s e_k e_s + e_k e_s e_s e_k), \quad e_k, e_s \perp m, k, s \in 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

The multiplication table for the T -tensors is as follows (the column represents the 4B in a multiplication of two tensors of the fourth rank, ${}^4A : {}^4B$):

$$\begin{array}{c|cccccc} & {}^4T_1 & {}^4T_2 & {}^4T_3 & {}^4T_4 & {}^4T_5 & {}^4T_6 \\ \hline {}^4T_1 & 2 {}^4T_1 & \mathbf{0} & 2 {}^4T_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^4T_2 & \mathbf{0} & {}^4T_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^4T_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^4T_1 & \mathbf{0} & {}^4T_3 \\ {}^4T_4 & 2 {}^4T_4 & \mathbf{0} & 2 {}^4T_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^4T_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^4T_5/2 & \mathbf{0} \\ {}^4T_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^4T_4 & \mathbf{0} & {}^4T_6 \end{array} \quad (21)$$

If x_3 is chosen as the axis of transverse symmetry, any *transversely isotropic* tensor 4A , when represented in this basis, has the following components:

$$a_1 = \frac{A_{1111} + A_{1122}}{2}, \quad a_2 = 2A_{1212}, \quad a_3 = A_{1133}, \quad a_4 = A_{3311}, \quad a_5 = 4A_{3131}, \quad a_6 = A_{3333}. \quad (22)$$

Moreover, the inverse Tensor ${}^4A^{-1}$ can be calculated explicitly,

$${}^4A^{-1} = \frac{a_6}{2\Delta} {}^4T_1 + \frac{1}{a_2} {}^4T_2 - \frac{a_3}{\Delta} {}^4T_3 - \frac{a_4}{\Delta} {}^4T_4 + \frac{4}{a_5} {}^4T_5 + \frac{2a_1}{\Delta} {}^4T_6, \quad \Delta = 2(a_1a_6 - a_3a_4), \quad (23)$$

and double outer scalar products are given by

$${}^4A : {}^4B = (2a_1b_1 + a_3b_4) {}^4T_1 + a_2b_2 {}^4T_2 + (2a_1b_3 + a_3b_6) {}^4T_3 + \\ + (2a_4b_1 + a_6b_4) {}^4T_4 + \frac{1}{2}a_5b_5 {}^4T_5 + (a_6b_6 + 2a_4b_3) {}^4T_6. \quad (24)$$

Unit tensors of fourth rank can also be spanned in this base:

$${}^41 = \frac{1}{2} {}^4T_1 + {}^4T_2 + 2 {}^4T_5 + {}^4T_6, \quad 11 = {}^4T_1 + {}^4T_3 + {}^4T_4 + {}^4T_6. \quad (25)$$

Appendix (b): Hill's and Property contribution tensors. The homogenization is based on the solution for the Eshelby problem of an inhomogeneity. The region V_1 , called the *inhomogeneity* (i.e., the mesogens), has elastic properties C_1 or $S_1 = C_1^{-1}$ (the so-called *compliance tensor* fourth rank) that differ from those of the surrounding material, i.e., the polymer matrix (C_0 or $S_0 = C_0^{-1}$). In the present case we will assume both of them to be isotropic. The matrix is subjected to remotely applied loading by stress or strain, σ_0 or ε_0 , respectively. The primary objective of this problem is to determine the resulting stresses and strains both inside and outside V_1 , as well as the stress concentrations along its boundary. If V_1 is an ellipsoid, the solution can be expressed in a closed form using elliptic functions, which simplify to elementary functions when V_1 has the spheroidal shape. We are primarily interested in the strain and stress fields inside the inhomogeneity. For an ellipsoidal domain, the strain field is given by

$$\varepsilon_{\text{in}} = {}^4\Lambda_\varepsilon : \varepsilon_0, \quad {}^4\Lambda_\varepsilon = \left[{}^41 + {}^4P : (C_1 - C_0) \right]^{-1}, \quad (26)$$

where ${}^4\Lambda_{\text{in}}$ is the strain concentration tensor and 4P is Hill's tensor which determines the strain at a point x :

$${}^4P = \left(\nabla \int_V G(x-x') \nabla' dx' \right)_{(12)(34)}^s, \quad (27)$$

where s refers to the appropriate symmetrization and $G(x-x')$ is the (known) Green's function. For a spheroidal inhomogeneity 4P remains constant within the interior points of V_1 , which implies uniform strain within. Similarly,

$$\sigma_{\text{in}} = {}^4\Lambda_\sigma : \sigma_0, \quad {}^4\Lambda_\sigma = \left[{}^41 + {}^4Q : (S_1 - S_0) \right]^{-1}, \quad (28)$$

where the tensors 4Q and ${}^4\Lambda_\sigma$ are defined as

$${}^4Q = C_0 - C_0 : {}^4P : C_0, \quad {}^4\Lambda_\sigma = S_0 : {}^4\Lambda_\varepsilon : C_1. \quad (29)$$

Isotropic stiffnesses (for the polymer matrix and for the mesogens) are given by (λ and μ are the two Lamé parameters):

$${}^4C = \lambda 11 + 2\mu {}^41 = \sum_{i=1}^6 C_i {}^4T_i, \quad C_1 = \lambda + \mu, \quad C_2 = 2\mu, \quad C_3 = C_4 = \lambda, \quad C_5 = 4\mu, \quad C_6 = \lambda + 2\mu. \quad (30)$$

For a spheroidal inhomogeneity the tensors 4P and 4Q , are elementary functions of the aspect ratio $\gamma = a_3/a$, namely,

$${}^4P = \sum_{i=1}^6 p_i(\gamma) {}^4T_i, \quad {}^4Q = \sum_{i=1}^6 q_i(\gamma) {}^4T_i \quad (31)$$

with

$$p_1 = \frac{1}{2\mu} [(1-\kappa)f_0 + \kappa f_1], \quad p_2 = \frac{1}{2\mu} [(2-\kappa)f_0 + \kappa f_1], \quad p_3 = p_4 = -\frac{\kappa}{\mu} f_1, \\ p_5 = \frac{1}{\mu} [1 - f_0 - 4\kappa f_1], \quad p_6 = \frac{1}{\mu} [(1-\kappa)(1-2f_0) + 2\kappa f_1], \quad \kappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad (32)$$

and

$$q_1 = \mu [4\kappa - 2(3\kappa - 1)f_0 - 2\kappa f_1], \quad q_2 = 2\mu [1 - (2-\kappa)f_0 - \kappa f_1], \\ q_3 = q_4 = 2\mu [(2\kappa - 1)f_0 + 2\kappa f_1], \quad q_5 = 4\mu (f_0 + 4\kappa f_1), \quad q_6 = 8\mu\kappa (f_0 - f_1), \quad (33)$$

where for a prolate inclusion (as in the case of the mesogens) we must put

$$f_0 = \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \left(1 - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} \right), \quad f_1 = \frac{\gamma^2}{4(\gamma^2 - 1)^2} \left[(2\gamma^2 + 1) \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}} - 3 \right]. \quad (34)$$

The next important concept is the property contribution tensors, which describe the contribution of an inhomogeneity to the effective property of interest. This is done under the assumption that the inhomogeneity is embedded in a uniform applied, σ_0 or ε_0 (tractions or displacements on the RVE have the form $t|_{\partial V} = n \cdot \sigma_0$ or $u|_{\partial V} = x \cdot \varepsilon_0$). We consider an RVE, V , containing an isolated inhomogeneity of volume V_1 (the mesogen). The volume-averaged stress and strain fields can be expressed as

$$\langle \sigma \rangle = C_0 : \varepsilon_0 + \Delta \sigma, \quad \langle \varepsilon \rangle = S_0 : \sigma_0 + \Delta \varepsilon. \quad (35)$$

Since the material is assumed to be linearly elastic, the additional stress and strain contributions due to the inhomogeneity are linear functions of the applied field:

$$\Delta \sigma = {}^4N : \varepsilon_0, \quad \Delta \varepsilon = {}^4H : \sigma_0, \quad (36)$$

where 4N and 4H are the so-called stiffness and compliance contribution tensors.

For an ellipsoidal inhomogeneity, the property contribution tensors can be expressed in terms of Hill's tensors, which provide the average field inside the inhomogeneity in terms of the applied field. By introducing the strain averages over the inhomogeneity, $\langle \varepsilon \rangle_{\text{in}}$, and over the matrix, $\langle \varepsilon \rangle_{\text{out}}$, we obtain

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{V - V_1}{V} \langle \varepsilon \rangle_{\text{out}} + \frac{V_1}{V} \langle \varepsilon \rangle_{\text{in}} = \frac{V - V_1}{V} S_0 : \langle \sigma \rangle_{\text{out}} + \frac{V_1}{V} S_1 : \langle \sigma \rangle_{\text{in}}. \quad (37)$$

By expressing $\langle \sigma \rangle_{\text{out}}$ from the relation

$$\frac{V_1}{V} \langle \sigma \rangle_{\text{in}} + \frac{V - V_1}{V} \langle \sigma \rangle_{\text{out}} = \sigma_0 \quad (38)$$

we obtain

$$\langle \varepsilon \rangle = S_0 : \sigma_0 + \frac{V_1}{V} (S_1 - S_0) : \langle \sigma \rangle_{\text{in}} = S_0 : \sigma_0 + \langle \sigma \rangle_{\text{out}} + \frac{V_1}{V} (S_1 - S_0) : {}^4\Lambda_\sigma : \sigma_0 \quad (39)$$

so that

$${}^4H = \frac{V_1}{V} (S_1 - S_0) : {}^4\Lambda_\sigma. \quad (40)$$

Using (28)₂ we conclude that

$${}^4\Lambda_\sigma = \left[{}^41 + {}^4Q : (S_1 - S_0) \right]^{-1} \Rightarrow {}^4H = \frac{V_1}{V} \left[(S_1 - S_0)^{-1} + {}^4Q \right]^{-1}. \quad (41)$$

A similar procedure applies for stresses, leading to the stiffness contribution tensor,

$${}^4N = \frac{V_1}{V} (C_1 - C_0) : {}^4\Lambda_\varepsilon, \quad (42)$$

and with (26)₂:

$${}^4\Lambda_\varepsilon = \left[{}^41 + {}^4P : (C_1 - C_0) \right]^{-1} \Rightarrow {}^4N = \frac{V_1}{V} \left[(C_1 - C_0)^{-1} + {}^4P \right]^{-1}. \quad (43)$$

So far only one inclusion was involved. Now let us assume there are many inclusion types labeled by the index k . The simplest approximation is to assume *no interaction*, such that the inhomogeneities are treated as isolated entities, and interactions between neighbors are neglected. In this approximation, the property contribution tensors weighted by volume fractions simply sum up, and (36) reads:

$$\Delta C = \left(\sum_k {}^4N_k \right), \quad \Delta S = \left(\sum_k {}^4H_k \right) \text{ in } \Delta \sigma = \Delta C : \varepsilon_0, \quad \Delta \varepsilon = \Delta S : \sigma_0. \quad (44)$$

In comparison with (35) we obtain the homogenized stiffness

$$C_{\text{hom}} = C_0 + \left(\sum_k {}^4N_k \right), \quad S_{\text{hom}} = S_0 + \left(\sum_k {}^4H_k \right). \quad (45)$$

In this equation we still allow that each type of inclusion has different contribution tensors,

$${}^4N_k = \frac{V_k}{V} \left[(C_k - C_0)^{-1} + {}^4P_k \right]^{-1}, \quad {}^4H_k = \frac{V_k}{V} \left[(S_k - S_0)^{-1} + {}^4Q_k \right]^{-1}. \quad (46)$$

It should be noted that the inclusion types can have different aspect ratios and be oriented differently, ${}^4P_k = {}^4P_k(\gamma_k, m_k)$, ${}^4Q_k = {}^4Q_k(\gamma_k, m_k)$. In order to prepare for continuous distributions, we now assume that all types of inclusions contribute with the same volume fraction ΔV , so that $p = \frac{1}{V} \sum_k V_k = \frac{k \Delta V}{V}$ represents the total volume fraction of inclusions. Let us further replace the summation of the property contribution tensors by integration over ori-

entations using the distribution function from Eq. (1). Similarly, as in Eq. (5), we then obtain

$$\left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle = \int_{\Phi} {}^4\overline{N}\psi_{\lambda}(\varphi, \theta) d\Phi, \quad {}^4\overline{N} = \left[(C_1 - C_0)^{-1} + {}^4P \right]^{-1}, \quad C_{\text{hom}} = C_0 + p \left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle, \quad (47)$$

and

$$\left\langle {}^4\overline{H} \right\rangle = \int_{\Phi} {}^4\overline{H}\psi_{\lambda}(\varphi, \theta) d\Phi, \quad {}^4\overline{H} = \left[(S_1 - S_0)^{-1} + {}^4Q \right]^{-1}, \quad S_{\text{hom}} = S_0 + p \left\langle {}^4\overline{H} \right\rangle. \quad (48)$$

This is the *Non-Interaction-Approximation* (NIA) for the case of a continuous randomized distribution of inclusions all of the same stiffness and compliance, C_1 , S_1 , respectively. It holds for p -values that are not too large, say 1 % – 10 %. Note that the property contribution tensors $\left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle$ and $\left\langle {}^4\overline{H} \right\rangle$ are transversely isotropic tensors of the fourth rank depending on the orientation parameter λ .

The NIA homogenization can be improved: in the advanced *Mori-Tanaka schemes* (see [18], Section 5.6.2) the interactions between inhomogeneities are accounted for by placing the inhomogeneities—treated as isolated ones—into a uniform field that is equal to its average over the matrix part of the composite and that generally differs from the remotely applied one. Then the effective elastic stiffness and compliances are given by:

$$C_{\text{hom}} = C_0 + p \left(p(C_1 - C_0)^{-1} + (1-p) \left\langle {}^4\overline{N} \right\rangle^{-1} \right)^{-1}, \quad S_{\text{hom}} = S_0 + p \left(p(S_1 - S_0)^{-1} + (1-p) \left\langle {}^4\overline{H} \right\rangle^{-1} \right)^{-1}. \quad (49)$$

If the inclusions are rigid (as the mesogens are when compared to the matrix) these equations simplify:

$$C_{\text{hom}} = C_0 + \frac{p}{1-p} \left\langle {}^4\overline{P} \right\rangle, \quad S_{\text{hom}} = S_0 + \frac{p}{1-p} \left\langle {}^4\overline{Q} \right\rangle^{-1}. \quad (50)$$

Appendix (c): Mori-Tanaka scheme for thermal expansion. For homogenization of the thermal expansion coefficients α similar ideas as in the previous Appendix apply: each inhomogeneity is treated as an isolated one placed into a uniform stress field that is equal to its average over the matrix part of the heterogeneous material, $\sigma_* = \langle \sigma \rangle_m$, and that generally differs from the remote stress σ_0 . The stress averaged over the RVE reads:

$$\sigma_0 = \langle \sigma \rangle = \Sigma_k \left[p_k \langle \sigma \rangle_k + (1-p_k) \langle \sigma \rangle_m \right], \quad p_k = \frac{V_k}{V}. \quad (51)$$

According to the basic idea of Mori-Tanaka scheme stresses within an inhomogeneity is defined as

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_* - \int_{V_k} {}^4Z(x-x') : \left[(S_k - S_0) : \sigma(x') + (\alpha_k - \alpha_0) \langle \sigma \rangle_m \right], \quad p_k = \frac{V_k}{V}, \\ {}^4Z(x-x') &= C_0 : \left[\nabla G(x-x') \nabla' \right] : C_0 - C_0 \delta(x'). \end{aligned} \quad (52)$$

Note that later we will assume that the tensors of thermal expansion of the inclusions and of the matrix (i.e., α_k and α_0 , respectively) are isotropic. ΔT denotes the temperature change. If the domains V_k are ellipsoidal then the stresses inside are uniform and therefore

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \sigma_* - {}^4Q_k : \left[(S_k - S_0) : \langle \sigma \rangle_k + (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right], \\ {}^4Q_k(\gamma_k, m_k) &= C_0 - C_0 : {}^4P_k(\gamma_k, m_k) : C_0, \quad {}^4P_k(\gamma_k, m_k) = \left(\nabla \int_{V_k} G(x-x') \nabla' dx' \right)_{(12)(34)}^3. \end{aligned} \quad (53)$$

It follows that

$$\langle \sigma \rangle_k = {}^4\Lambda_k^{\sigma} : \left[\sigma_* - {}^4Q_k : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right], \quad {}^4\Lambda_k^{\sigma} = \left[{}^41 + {}^4Q_k : (S_k - S_0) \right]^{-1}, \quad (54)$$

and therefore from (51):

$$\sigma_0 = \Sigma_k \left[p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} + (1-p_k) {}^41 \right] : \sigma_* - \Sigma_k \left[p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} : {}^4Q_k : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right] \quad (55)$$

or

$$\sigma_* = \left[\Sigma_k \left(p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} + (1-p_k) {}^41 \right) \right]^{-1} : \left\{ \sigma_0 + \Sigma_k \left[p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} : {}^4Q_k : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right] \right\} \quad (56)$$

and so

$$\langle \sigma \rangle_i = {}^4\Lambda_i^{\sigma} : \left\{ \left[\Sigma_k \left(p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} + (1-p_k) {}^41 \right) \right]^{-1} : \left(\sigma_0 + \Sigma_k \left[p_k {}^4\Lambda_k^{\sigma} : {}^4Q_k : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right] \right) - {}^4Q_i : (\alpha_i - \alpha_0) \Delta T \right\} \quad (57)$$

The strain averaged over the RVE is given by

$$\langle \varepsilon \rangle = \Sigma_k \left[p_k \langle \varepsilon \rangle_k + (1-p_k) \langle \varepsilon \rangle_m \right] = \Sigma_k \left[p_k (S_k : \langle \sigma \rangle_k + \alpha_k \Delta T) + (1-p_k) (S_0 : \langle \sigma \rangle_m + \alpha_0 \Delta T) \right]. \quad (58)$$

We now take into account that

$$(1 - p_k) \langle \sigma \rangle_m = \sigma_0 - \Sigma_k p_k \langle \sigma \rangle_k. \quad (59)$$

and find with (55):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= S_0 : \sigma_0 + \alpha_0 \Delta T + \Sigma_k p_k \left[(S_k - S_0)^{-1} : \langle \sigma \rangle_k + (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right] = \\ &= S_0 : \sigma_0 + \alpha_0 \Delta T + \left\{ \Sigma_k p_k {}^4H_k : \left[p_k (S_k - S_0)^{-1} : {}^4H_k + (1 - p_k) {}^41 \right]^{-1} \right\} : \sigma_0 + \\ &= \Sigma_k \left(p_k {}^4H_k : \left\{ \Sigma_k \left[p_k (S_k - S_0)^{-1} : {}^4H_k + (1 - p_k) {}^41 \right] \right\}^{-1} \right) : \Sigma_k \left[p_k {}^4\Lambda_k^\sigma : {}^4Q_k : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right] + \\ &\quad + \Sigma_k \left[p_k ({}^41 - {}^4H_k : {}^4Q_k) : (\alpha_k - \alpha_0) \Delta T \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

We note that

$${}^4H_k = (S_k - S_0) : {}^4\Lambda_k^\sigma = \left[(S_k - S_0)^{-1} + {}^4Q_k \right]^{-1}. \quad (61)$$

We define

$${}^41 - {}^4H_k : {}^4Q_k = {}^4H_k : ({}^4H_k^{-1} - {}^4Q_k) = {}^4H_k : (S_k - S_0)^{-1} = {}^4\overline{H}_{Tk} \quad (62)$$

and conclude

$${}^4\Lambda_k^\sigma : {}^4Q_k = (S_k - S_0)^{-1} : {}^4H_k : {}^4Q_k = (S_k - S_0)^{-1} : ({}^41 - {}^4\overline{H}_{Tk}). \quad (63)$$

Let us finally consider a two-phase material with identical inhomogeneities and assume that the inhomogeneities distribution over size is statistically independent of the distribution over orientation. Then after recalling (48) and adjust ${}^4\overline{H}_k \rightarrow {}^4\overline{H}_{Tk}$ or rather $\langle {}^4\overline{H} \rangle \rightarrow \langle {}^4\overline{H}_T \rangle$ we get:

$$\Sigma_k (p_k {}^4H_k) : \left\{ \Sigma_k \left[p_k (S_k - S_0)^{-1} : {}^4H_k + (1 - p_k) {}^41 \right] \right\}^{-1} = p \left[p (S_1 - S_0)^{-1} + (1 - p) \langle {}^4\overline{H} \rangle^{-1} \right]^{-1} \quad (64)$$

recover (49)₂ and obtain finally

$$\alpha_{\text{hom}} = \alpha_0 + p \left\{ \left[p {}^41 + (1 - p) \langle {}^4\overline{H}_T \rangle^{-1} \right]^{-1} : \left({}^41 - \langle {}^4\overline{H}_T \rangle^{-1} \right) + \langle {}^4\overline{H}_T \rangle^{-1} \right\} : (\alpha_1 - \alpha_0) \Delta T. \quad (65)$$

It should be noted that the Mori-Tanaka scheme for thermal expansion seems to be less known than the one for stiffnesses, since articles on it have been published relatively recently, [33].

Acknowledgments. This work was financially supported by DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) under project MU 1752/68-1 525235558 for LS and ENV, which is most gratefully acknowledged.

Bibliography

1. Mahmood A., Perveen F., Chen S., Akram T., Irfan A. Polymer Composites in 3D/4D Printing: Materials, Advances, and Prospects // *Molecules*. – 2024. – Vol. 29. – no. 2. – P. 319. DOI: 10.3390/molecules29020319.
2. Wang Y., Yang H., Qi H. J., Fang D. Recent advances in molecular programming of liquid crystal elastomers with additive manufacturing for 4D printing // *Mol. Syst. Des. Eng.* – 2022. – Vol. 7. – no. 5. – P. 511 – 533. DOI: 10.1039/D2ME00124A.
3. Bae J., Kang S. H., Ryu M., Kim Y., Kim Y. T. Advances in 4D printing of liquid crystalline elastomers: materials, techniques, and applications // *Horiz.* – 2022. – Vol. 9. – no. 10. – P. 2756 – 2774. DOI: 10.1039/D2MH00232A.
4. Liao Y., Wang Y., Wang Z., Li Y., Yang H. 4D Printing of Shape-Morphing Liquid Crystal Elastomers // *Chem. Bio. Eng.* – 2024. – Vol. 11. – no. 1. – P. 1 – 15. DOI: 10.1021/cbe.4c00027.
5. Wang J., Li C., Yuan C., Li Y., Wang Z., Yang H. 4D printing of a liquid crystal elastomer with a controllable orientation gradient // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. – 2020. – Vol. 12. – no. 18. – P. 20819 – 20827. DOI: 10.1021/acsami.9b18037.
6. Gelebart A. H., Vantomme G., Meijer E. W., Broer D. J. Mastering the photothermal effect in liquid crystal networks: A general approach for self-sustained mechanical oscillators // *Adv. Mater.* – 2017. – Vol. 29. – no. 43. – P. 1606712. DOI: 10.1002/adma.201606712.
7. Zeng H., Wasylczyk P., Wiersma D. S., Priimagi A. Light robots: Bridging the gap between microrobotics and photomechanics in soft materials // *Adv. Mater.* – 2018. – Vol. 30. – no. 44. – P. 1703554. DOI: 10.1002/adma.201703554.
8. Zhu W., Shelley M., Palfy-Muhoray P. Modeling and simulation of liquid-crystal elastomers // *Phys. Rev. E*. – 2011. – Vol. 83. – no. 5. – P. 051703. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.051703.
9. Goriely A., Taffetani M. A pseudo-anelastic model for stress softening in liquid crystal elastomers // *Proc. R. Soc. A*. – 2021. – Vol. 477. – no. 2250. – P. 20200558.
10. Taffetani M., Goriely A. A mathematical model for the auxetic response of liquid crystal elastomers // *Philos. Trans. R. Soc. A*. – 2022. – Vol. 380. – no. 2218. – P. 20210326. DOI: 10.1098/rsta.2021.0326.
11. Lee K., Kim J. Numerical simulation and experimental validation of bending and curling behaviors of liquid crystal elastomer beams under thermal actuation // *Appl. Phys. Lett.* – 2021. – Vol. 118. – no. 24. – P. 241903. DOI: 10.1063/5.0054243.
12. Zhang J., Wang Y., Li Y., Yang H. Morphing of stiffness-heterogeneous liquid crystal elastomers via mechanical training and locally controlled photopolymerization // *Matter*. – 2022. – Vol. 5. – no. 9. – P. 3133 – 3147. DOI: 10.1016/j.matt.2022.07.002.

13. Skačaja M., Zannoni C. Molecular simulations elucidate electric field actuation in swollen liquid crystal elastomers // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* – 2012. – Vol. 109. – no. 14. – P. 5134–5139. DOI: 10.1073/pnas.1121235109.
14. Yamamoto T., Takahashi M., Yamaguchi T. Regression analysis for predicting the elasticity of liquid crystal elastomers // *Polymers*. – 2022. – Vol. 14. – no. 23. – P. 5192. DOI: 10.3390/polym14235192.
15. Oates W. S., Smith R. C. Phase field modeling of domain evolution in liquid crystal elastomers // *Polymers*. – 2021. – Vol. 13. – no. 10. – P. 1650. DOI: 10.3390/polym13101650.
16. Bartels S., Griehl M., Keck J., Neukamm S. Modeling and simulation of nematic LCE rods // *arXiv preprint*. – 2022. – arXiv:2205.15174. – Пе- жим доступу : <https://arxiv.org/abs/2205.15174>. – Дата звертання : 25 травня 2025 р.
17. Eringen A. C. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*. – New York : Springer-Verlag, 1999. – 325 p.
18. Kachanov M., Sevostianov I. *Micromechanics of materials, with applications*. 0925-0042; 249. – Springer, 2018. – 712 p.
19. Moran B. D., Lee E., Krikorian C. C., Bekker L. Patent US11794406B1, United States. Stereolithography Additive Manufacturing of Photoaligned Liquid Crystal Elastomers. [patents.google.com](https://patents.google.com/patent/US11794406B1). – Lawrence Livermore National Security LLC, 2023.
20. Stupkiewicz S., Maciejewski G., Petryk H. Elastic micro-strain energy of austenite–martensite interface in NiTi // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 2012. – Vol. 20. – no. 3. – P. 035001. DOI: 10.1088/0965-0393/20/3/035001.
21. Johnston I. D., McCluskey D. K., Tan C. K. L., Tracey M. C. Mechanical characterization of bulk Sylgard 184 for microfluidics and microengineering // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. – 2014. – Vol. 24. – No. 3. – P. 035017. DOI: 10.1088/0960-1317/24/3/035017.
22. Ganicz T., Stańczyk W. Side-chain liquid crystal polymers (SCLCP): Methods and materials. An overview // *Materials*. – 2009. – Vol. 2. – no. 1. – P. 95–128. DOI: 10.3390/ma2010095.
23. Farren C., Akatsuka M., Takezawa Y., Itoh Y. Thermal and mechanical properties of liquid crystalline epoxy resins as a function of mesogen concentration // *Polymer*. – 2001. – Vol. 42. – no. 4. – P. 1507–1514. DOI: 10.1016/S0032-3861(00)00481-2.
24. Sgotti V. J., Reis C. M., Molter R., Vinciguerra M., Yao L., Majidi C., Tavakoli M. Toward Fully Printed Soft Actuators: UV-Assisted Printing of Liquid Crystal Elastomers and Biphasic Liquid Metal Conductors // *Advanced Materials Technologies*. – 2023. – Vol. 8. – No. 15. – P. 2300144. DOI: 10.1002/admt.202300144.
25. Zang T., Fu S., Cheng J., Zhang C., Lu X., Hu J., Xia H., Zhao Y. 4D printing of shape-morphing liquid crystal elastomers // *Chem & Bio Engineering*. – 2024. – Vol. 1. – No. 6. – P. 488–515. DOI: <https://doi.org/10.1021/cbe500018e>.
26. Da Cunha M. P., Debije M. G., Schenning A. P. H. J. Bioinspired light-driven soft robots based on liquid crystal polymers // *Chemical Society Reviews*. – 2020. – Vol. 49. – no. 18. – P. 6568–6578. DOI: <https://doi.org/10.1039/D0CS00435A>.
27. Roach D. J., Kuang X., Yuan C., Chen K., Qi H. J. Novel ink for ambient condition printing of liquid crystal elastomers for 4D printing // *Smart Materials and Structures*. – 2018. – Vol. 27. – no. 12. – P. 125011. DOI: 10.1088/1361-665X/aae9fa.
28. Ryan K. R., Down M. P., Banks C. E. Future of additive manufacturing: Overview of 4D and 3D printed smart and advanced materials and their applications // *Chemical Engineering Journal*. – 2021. – Vol. 403. – P. 126162. DOI: 10.1016/j.ccej.2020.126162.
29. Momeni F., Liu X., Ni J. A review of 4D printing // *Materials & Design*. – 2017. – Vol. 122. – P. 42–79. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.02.068.
30. Logg A., Mardal K.-A., Wells G. N. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book*. – Springer, 2012. – 731 p.
31. Qiu W., He X., Fang Z., Wang Y., Dong K., Zhang G., Xu X., Ge Q., Xiong Y. Shape-tunable 4D printing of LCEs via cooling rate modulation: stimulus-free locking of actuated state at room temperature // *ACS Applied Materials & Interfaces*. – 2023. – Vol. 15. – № 40. – P. 47509–47519. DOI: 10.1021/acsami.3c14589.
32. Kang W., Cheng Q., Liu C., Wang Z., Li D., Liang X. A constitutive model of monodomain liquid crystal elastomers with the thermal-mechanical-nematic order coupling // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2025. – Vol. 196. – P. 105995. DOI: 10.1016/j.jmp.2024.105995.
33. Lu P. Further studies on Mori–Tanaka models for thermal expansion coefficients of composites // *Polymer*. – 2013. – Vol. 54. – no. 6. – P. 1691–1699. DOI: 10.1016/j.polymer.2013.01.057.

References (transliterated)

1. Mahmood A., Perveen F., Chen S., Akram T., Irfan A. Polimerni kompozity v 3D/4D-druku: materialy, dosyagnennya ta perspektyvy [Polymer Composites in 3D/4D Printing: Materials, Advances, and Prospects]. *Molecules*. 2024, Vol. 29, no. 2, P. 319. DOI: 10.3390/molecules29020319.
2. Wang Y., Yang H., Qi H. J., Fang D. Recent advances in molecular programming of liquid crystal elastomers with additive manufacturing for 4D printing. *Mol. Syst. Des. Eng.* 2022, Vol. 7, no. 5, pp. 511–533. DOI: 10.1039/D2ME00124A.
3. Bae J., Kang S. H., Ryu M., Kim Y., Kim Y. T. Advances in 4D printing of liquid crystalline elastomers: materials, techniques, and applications. *Mater. Horiz.* 2022, Vol. 9, no. 10, pp. 2756–2774. DOI: 10.1039/D2MH00232A.
4. Liao Y., Wang Y., Wang Z., Li Y., Yang H. 4D Printing of Shape-Morphing Liquid Crystal Elastomers. *Chem. Bio. Eng.* 2024, Vol. 11, no. 1, pp. 1–15. DOI: 10.1021/cbe.4c00027.
5. Wang J., Li C., Yuan C., Li Y., Wang Z., Yang H. 4D printing of a liquid crystal elastomer with a controllable orientation gradient. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2020, Vol. 12, no. 18, pp. 20819–20827. DOI: 10.1021/acsami.9b18037.
6. Gelebart A. H., Vantomme G., Meijer E. W., Broer D. J. Mastering the photothermal effect in liquid crystal networks: A general approach for self-sustained mechanical oscillators. *Adv. Mater.* 2017, Vol. 29, no. 43, P. 1606712. DOI: 10.1002/adma.201606712.
7. Zeng H., Wasylczyk P., Wiersma D. S., Priimagi A. Light robots: Bridging the gap between microrobotics and photomechanics in soft materials. *Adv. Mater.* 2018, Vol. 30, no. 44, P. 1703554. DOI: 10.1002/adma.201703554.
8. Zhu W., Shelley M., Palfy-Muhoray P. Modeling and simulation of liquid-crystal elastomers. *Phys. Rev. E*. 2011, Vol. 83, no. 5, P. 051703. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.051703.
9. Gorieli A., Taffetani M. A pseudo-anelastic model for stress softening in liquid crystal elastomers. *Proc. R. Soc. A*. 2021, Vol. 477, no. 2250, P. 20200558.
10. Taffetani M., Gorieli A. A mathematical model for the auxetic response of liquid crystal elastomers. *Philos. Trans. R. Soc. A*. 2022, Vol. 380, no. 2218, P. 20210326. DOI: 10.1098/rsta.2021.0326.
11. Lee K., Kim J. Numerical simulation and experimental validation of bending and curling behaviors of liquid crystal elastomer beams under thermal actuation. *Appl. Phys. Lett.* 2021, Vol. 118, no. 24, P. 241903. DOI: 10.1063/5.0054243.
12. Zhang J., Wang Y., Li Y., Yang H. Morphing of stiffness-heterogeneous liquid crystal elastomers via mechanical training and locally controlled photopolymerization. *Matter*. 2022, Vol. 5, no. 9, pp. 3133–3147. DOI: 10.1016/j.matt.2022.07.002.
13. Skačaja M., Zannoni C. Molecular simulations elucidate electric field actuation in swollen liquid crystal elastomers. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2012, Vol. 109, no. 14, pp. 5134–5139. DOI: 10.1073/pnas.1121235109.
14. Yamamoto T., Takahashi M., Yamaguchi T. Regression analysis for predicting the elasticity of liquid crystal elastomers. *Polymers*. 2022, Vol. 14, no. 23, P. 5192. DOI: 10.3390/polym14235192.
15. Oates W. S., Smith R. C. Phase field modeling of domain evolution in liquid crystal elastomers. *Polymers*. 2021, Vol. 13, no. 10, P. 1650. DOI: 10.3390/polym13101650.
16. Bartels S., Griehl M., Keck J., Neukamm S. *Modeling and simulation of nematic LCE rods*. arXiv preprint. 2022. arXiv:2205.15174. Available at: <https://arxiv.org/abs/2205.15174>. (accessed 25 May 2025).

17. Eringen A. C. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*. New York, Springer-Verlag, 1999. 325 p
18. Kachanov M., Sevostianov I. *Micromechanics of materials, with applications*. 0925-0042; 249. Springer, 2018. 712 p.
19. Moran B. D., Lee E., Krikorian C. C., Bekker L. Stereolithography Additive Manufacturing of Photoaligned Liquid Crystal Elastomers. patents.google.com. Patent United States, Lawrence Livermore National Security LLC, no. US11794406B1, 2023.
20. Stupkiewicz S., Maciejewski G., Petryk H. Elastic micro-strain energy of austenite–martensite interface in NiTi. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2012, Vol. 20, no. 3, P. 035001. DOI: 10.1088/0965-0393/20/3/035001.
21. Johnston I. D., McCluskey D. K., Tan C. K. L., Tracey M. C. Mechanical characterization of bulk Sylgard 184 for microfluidics and microengineering. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2014, Vol. 24, No. 3, P. 035017. DOI: 10.1088/0960-1317/24/3/035017.
22. Ganicz T., Stańczyk W. Side-chain liquid crystal polymers (SCLCP): Methods and materials. An overview. *Materials*. 2009, Vol. 2, no. 1, pp. 95–128. DOI: 10.3390/ma2010095.
23. Farren C., Akatsuka M., Takezawa Y., Itoh Y. Thermal and mechanical properties of liquid crystalline epoxy resins as a function of mesogen concentration. *Polymer*. 2001, Vol. 42, no. 4, pp. 1507–1514. DOI: 10.1016/S0032-3861(00)00481-2.
24. Sgotti V. J., Reis C. M., Molter R., Vinciguerra M., Yao L., Majidi C., Tavakoli M. Toward Fully Printed Soft Actuators: UV-Assisted Printing of Liquid Crystal Elastomers and Biphasic Liquid Metal Conductors. *Advanced Materials Technologies*. 2023, Vol. 8, No. 15, P. 2300144. DOI: 10.1002/admt.202300144.
25. Zang T., Fu S., Cheng J., Zhang C., Lu X., Hu J., Xia H., Zhao Y. 4D printing of shape-morphing liquid crystal elastomers. *Chem & Bio Engineering*. 2024, Vol. 1, No. 6, pp. 488–515. DOI: <https://doi.org/10.1021/cbe500018e>.
26. Da Cunha M. P., Debije M. G., Schenning A. P. H. J. Bioinspired light-driven soft robots based on liquid crystal polymers // *Chemical Society Reviews*. – 2020. – Vol. 49. – no. 18. – P. 6568 – 6578. DOI: <https://doi.org/10.1039/D0CS00435A>.
27. Roach D. J., Kuang X., Yuan C., Chen K., Qi H. J. Novel ink for ambient condition printing of liquid crystal elastomers for 4D printing. *Smart Materials and Structures*. 2018, Vol. 27, no. 12, P. 125011. DOI: 10.1088/1361-665X/aae9fa.
28. Ryan K. R., Down M. P., Banks C. E. Future of additive manufacturing: Overview of 4D and 3D printed smart and advanced materials and their applications. *Chemical Engineering Journal*. 2021, Vol. 403, P. 126162. DOI: 10.1016/j.cej.2020.126162.
29. Momeni F., Liu X., Ni J. A review of 4D printing. *Materials & Design*. 2017, Vol. 122, P. 42–79. DOI: 10.1016/j.matdes.2017.02.068.
30. Logg A., Mardal K.-A., Wells G. N. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Springer, 2012. 731 p.
31. Qiu W., He X., Fang Z., Wang Y., Dong K., Zhang G., Xu X., Ge Q., Xiong Y. Shape-tunable 4D printing of LCEs via cooling rate modulation: stimulus-free locking of actuated state at room temperature. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2023, Vol. 15, no. 40, pp. 47509–47519. DOI: 10.1021/acsami.3c14589.
32. Kang W., Cheng Q., Liu C., Wang Z., Li D., Liang X. A constitutive model of monodomain liquid crystal elastomers with the thermal-mechanical-nematic order coupling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2025, Vol. 196, P. 105995. DOI: 10.1016/j.jmps.2024.105995.
33. Lu P. Further studies on Mori–Tanaka models for thermal expansion coefficients of composites. *Polymer*. 2013, Vol. 54, no. 6, pp. 1691–1699. DOI: 10.1016/j.polymer.2013.01.057.

Надійшла (received) 30.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Шек Лука – аспірант, Технічний університет Берліна, Інститут механіки, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Берлін; тел.: + 49 (30) 314-778-06; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2544-3185>; e-mail: l.schek@tu-berlin.de.

Lucca Schek – Ph.D. candidate, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Berlin; tel.: + 49 (30) 314-778-06; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2544-3185>; e-mail: l.schek@tu-berlin.de.

Вільчевська Олена Микитівна – гостьовий професор та стипендіат програми Меркатор, Технічний університет Берліна, Інститут механіки, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Берлін; тел.: + 49 (30) 314-276-82; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5173-3218>; e-mail: vilchevska@gmail.com.

Vilchevska Elena Nikitichna – Guest Professor and Mercator Follow, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Berlin; tel.: + 49 (30) 314-276-82; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5173-3218>; e-mail: vilchevska@gmail.com.

Мюллер Вольфганг Гельмут – професор та завідувач кафедри механіки суцільних середовищ та теорії конститутивних рівнянь, Технічний університет Берліна, Інститут механіки, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Берлін; тел.: + 49 (30) 314-276-82; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0880-0726>; e-mail: wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de.

Wolfgang Helmut Müller – Professor and Chair of Continuum Mechanics and Constitutive Theory, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, LKM, Einsteinufer 5, 10587 Berlin; tel.: + 49 (30) 314-276-82; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0880-0726>; e-mail: wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de.

В. В. ФІЛОНОВ, Г. О. ВОРОПАЄВ**ЕНЕРГЕТИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ КЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМІШІ ДЛЯ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ДЕТОНАЦІЇ В ОБМЕЖЕНОМУ ОБ'ЄМІ**

Наведено особливості оцінки параметрів детонації в обмеженому об'ємі з урахуванням кінетики узагальненої реакції горіння в контексті параметричної задачі максимізації одиничного реактивного імпульсу. Розрахунок характерних величин ударного фронту та безпосереднього стану середовища базуються на моделі суміші без урахування можливої морфологічної гетерогенності у вигляді об'ємних сил, що характеризують міжфазну взаємодію. Реагенти та продукти горіння розглядаються індивідуальними компонентами (з точки зору їх теплофізичних властивостей) та описуються єдиним полем швидкості, тиску та температури з відстежуванням матеріальних співвідношень. Загалом такий підхід безпосередньо для опису переносу середовища є розповсюдженим для такого типу задач, проте виникає певна незручність з точки зору розрахунку енергетичного виходу реакції, яка базується на тепломасообмінному члені (в загальному – дифузійний член) рівняння енергії для суміші. Це призводить до того, що в переважній більшості випадків необхідним є узгодження залежностей теплофізичних властивостей компонент (ізобарна/ізохорна теплоємність, ентальпія та ентропія). При цьому принципово відсутня можливість будь-яким чином впливати на енергетичний вихід реакції, що здебільшого призводить до значно більших прогнозних температур середовища у порівнянні з адиабатичними параметрами детонації. У роботі в першому наближенні запропонована модифікація, яка дозволяє враховувати енергетичний вихід реакції явним чином, та значною мірою спрощує вимоги щодо підготовки самоузгоджених функцій калоричного рівняння стану кожної із компонент. Для врахування кінетики реакції детонаційного горіння на основі співвідношення Арреніуса побудована модифікована функція швидкості прямої реакції, яка мультиплікативно враховує «турбулізацію» потоку, що все ще потребує обговорення. Запропоновані модельні співвідношення були імплементовані у вигляді користувачської моделі горіння в ANSYS CFX, та застосовувалися для попередньої оцінки одиничного детонаційного імпульсу в обмеженому просторі.

Ключові слова: детонація, дефлаграційно-детонаційний перехід (DDT), реактивна сила, імпульсна камера згоряння, рівняння енергії.

V. V. FILONOV, G. O. VOROPAIEV**ENERGY FEATURES OF THE CLASSICAL MIXTURE MODEL FOR ESTIMATING DETONATION PARAMETERS IN A LIMITED VOLUME**

The article presents the features of detonation parameters estimation in a limited volume taking into account the kinetics of the generalized combustion reaction in the context of the parametric problem of unit reactive impulse maximization. The calculation of the characteristic values of the shock front and the state of the medium are based on the mixture model without taking into account possible morphological heterogeneity in the form of volume forces characterizing interphase interaction. Reagents and combustion products are considered as individual components (in terms of their thermophysical properties) and described by a single field of velocity, pressure, and temperature with tracking of material relationships. In general, this approach to describing the transport of the medium is common for this type of problem, but there is a certain inconvenience in calculating the energy yield of the reaction, which is based on the heat and mass transfer term (diffusion term) of the energy equation for the mixture. This leads to the fact that in the vast majority of cases it is necessary to reconcile the dependencies of the thermophysical properties of the components (isobaric/isochoric heat capacity, enthalpy and entropy). In this case, there is basically no possibility to influence the energy yield of the reaction, which mostly leads to significantly higher predicted temperatures of the environment compared to the adiabatic parameters of detonation. The article suggests a modification that in the first approximation allows explicit consideration of the reaction energy yield and significantly simplifies the requirements for preparing self-consistent functions of the caloric equation of state of each component. To take into account the kinetics of the detonation combustion reaction, a modified direct reaction rate function is constructed on the basis of the Arrhenius relation, which multiplicatively takes into account the "turbulization" of the flow, which still needs to be discussed. The proposed model relations were implemented in the form of a custom combustion model in ANSYS CFX, and were used for preliminary evaluation of a single detonation pulse in a limited volume.

Key words: detonation, deflagration-detonation transition (DDT), reactive force, impulse combustion chamber, energy equation.

Вступ. Оцінка параметрів детонаційного процесу горіння має практичне значення у контексті проектування імпульсних реактивних двигунів. В цілому, оцінка параметрів детонації, особливо коли розглядається динаміка переходу від дефлаграції до детонації (DDT) після короткотривалої ініціації, є вивченою проблемою з точки зору моделювання [1 – 3]. Сучасні методи [4] та спеціалізовані інструменти [5] дозволяють як якісно, так і кількісно враховувати основні процеси, притаманні реагуючому потоку із інтенсивним (деякою мірою вибуховим) енерговиділенням. Проте для інженерної практики, особливо для задачі пошуку та оптимізації геометрії обмеженої камери згоряння, виникають суттєві проблеми, насамперед пов'язані з розрахунковими ресурсами. Тому все ще актуальною є розробка таких математичних наближень, які деякою мірою спрощують та універсальнують попередні оцінки вже для подальших детальних розрахунків.

Аналіз останніх досліджень. З точки зору газодинаміки та тепломасообміну задача переносу реагуючого середовища є найбільш повною з точки зору формалізму багатоконпонентного середовища і в загальному випадку потребує врахування особливостей не тільки силової взаємодії на контактній границі, але й масообміну за рахунок фазового переходу (одним із продуктів є вода) [1, 5]. Сучасна практика базується або на *спроценні задачі переносу (рівняння Ейлера)* та детальному кінетичному механізмі в симбіозі зі спеціалізованими підходами дискретизації високого порядку [6], або на застосуванні універсальних та спеціалізованих моделей горіння в *комерційних CFD пакетах* [4, 7]. В обох випадках у переважній більшості застосовується класичне наближення суміші, де безпосереднє енерговиділення за рахунок реакції горіння визначається завдяки балансу *ентальпії* реагентів та продуктів реакції. В такому випадку оцінка параметрів детонації (особливо температура та тиск) досить чутливі до поліномів калорійних параметрів, що суттєво обмежує можливості адаптації математичної мо-

делі горіння. Практика оцінки впливу на прогноз детонаційного процесу [8] показує, що необхідною умовою більш реального прогнозу температури (і також тиску в силу рівняння стану) є застосування каскаду елементарних реакцій замість узагальненої. Такі підходи є значною мірою затратними для параметричних оцінок.

Метою даної роботи є побудова відносно простого наближення для оцінки параметрів детонації з використанням концепції узагальненої реакції та модифікацією рівняння переносу енергії у вигляді об'ємного джерела з явним виходом енергії на одиницю маси палива. Наведені наближення використовуються для аналізу геометричної конфігурації напівобмеженої камери згоряння для максимізації одиночного імпульсу реактивної сили.

Постановка задачі. Оцінюється застосовність енергетичної модифікації класичної моделі суміші [9] для одностадійної (узагальненої) реакції окислення метану/пропану для оцінки параметрів ударної хвилі з урахуванням динаміки її розповсюдження. Розглядається формування та розвиток фронту горіння на основі простих функцій захвату монофронту на основі власної користувацької моделі детонаційного горіння в пакеті *ANSYS CFX*. Виконано перше наближення щодо геометричної конфігурації проточної частини імпульсної камери. Задача розглядається в фізичних координатах. Термодинамічний стан компонентів відповідає ідеальному газу, суміш вважається також ідеальною. Процеси, пов'язані з переносом середовища, приймаються необоротними.

Математична модель. Розглядається багатокомпонентне середовище, яке вважається рівноважним з силової, механічної та енергетичної точки зору. Тобто задача переносу описується системою нестационарних рівнянь Рейнольдса, які записуються із використанням властивостей суміші. Таким чином, використовується одне рівняння нерозривності з нульовою правою частиною, 3 (або 2 в 2D постановці) рівняння збереження імпульсу, та $(n-1)$ транспортне рівняння переносу концентрації (n – кількість компонент, останнє рівняння характеризує матеріальну рівність). Рівняння збереження повної енергії записується також для суміші. Вищезазначена система доповнюється системою алгебраїчних та трансцендентних співвідношень для каскаду елементарних реакцій, що, в загальному випадку, разом із рівняннями збереження (переносу) утворює гібридну систему, де $(n-1)$ концентраційне співвідношення є жорсткими з позиції чисельних методів. Вищенаведена постановка є відомою [9, 10] і доступна в переважній більшості CFD пакетів, тому детальний формалізм у даній роботі не розглядається. Додатково зауважимо, що не враховуються і сили взаємодії між кожною із компонент, що безумовно суттєво спрощує постановку, проте такий спосіб є розповсюдженим для даного типу задач [3 – 5].

Класичне рівняння збереження повної енергії (з урахуванням добавки в контексті вихрової в'язкості) для суміші може бути представлено як:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U} E) = \nabla \cdot \left[\left(\lambda + \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla T + \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial P} \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla P}_{\text{дросилування}} \right] + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_c} \nabla \cdot \left[h_i \left(\left\{ \frac{\lambda}{c_p} \right\}_i + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla Y_i \right]}_{\text{енерговиділення (II)}}, \quad (1)$$

де $\vec{U}$ – швидкість суміші; E – повна питома енергія суміші; Y_i – концентрація реагентів/продуктів; N_c – кількість компонент в суміші; μ_t та Pr_t – вихрова в'язкість та турбулентне число Прандтля, яке за замовчуванням прийнято рівним 0.9.

Саме дифузійний член (II) і визначає тепловиділення за рахунок горіння та суттєвим чином залежить від функціональної залежності ізобарної теплоємності від температури. Причому поліноми для теплоємності (а також ентальпії та ентропії) повинні бути узгодженими між кожними з компонент, що для горючих матеріалів є дещо синтетичним. Річ у тому, що технічне визначення залежності калориметричних параметрів від температури для горючих величин суттєвим чином ускладнено температурою samozapalovannya (яка знаходиться в межах 700 ÷ 900 K для газоподібних речовин, що розглядаються). Тобто інформація відносно частини теплофізичних властивостей палив фізично екстраполюється застосовуючи поняття питомого тепловиділення одиниці маси палива. Такий спосіб хоч і є розповсюдженим, проте він не дозволяє простим чином «керувати» в математичній постановці саме цією величиною. Альтернатива полягає в заміні (II) на об'ємне джерело з явним використанням питомої теплоти згоряння палива, за аналогією з фундаментальною теоретичною моделлю Зельдовича – Неймана – Дерінга.

Розглянемо інтегральну форму енерговиділення за рахунок реакції окиснення, яка може бути представлена наступним чином:

$$Q_\Sigma \left[\frac{Bm}{m^3} \right] \sim \sum_{i=1}^N \left(\int_{T_{ref}^0}^T c_p(T) dT \right)_i n_i \mu_i R_k^i \Rightarrow \underbrace{q_{fuel} \mu_{fuel}}_{q_{fuel}^\mu} n_{fuel} R_k(T) \Rightarrow q_{fuel}^\mu R_k(T) \rightarrow q_{fuel}^\mu \underbrace{\frac{\partial R_k(T)}{\partial T}}_{\text{лінеаризований член}} T, \quad (2)$$

де $R_k(T)$ – швидкість реакції горіння; q_{fuel}^μ – питома теплота згоряння газоподібного палива, Дж/кг; μ_i – млярна маса компонента; n_i – стехіометрична постійна в реакції окиснення.

Лінеаризована форма необхідна лише з технічної точки зору для прискорення конвергенції при імплементації в CFD пакет. Сумарне об'ємне джерело енергії Q_Σ в рівнянні збереження повної енергії задається у вигляді *додаткового терму*. У постановці моделі суміші [10], дифузійний член (II) може бути «виключений» двома способами: перший базується на введенні аналогічного терму, але протилежного знаку, другий – шляхом введення концепції «універсальних» властивостей газу. Перший спосіб потребує спеціального контролю *солвера* (дисбалансів енергії), оскільки дискретизація та концептуалізація розрахунків «базового» терму вихідного рівняння, строго кажучи, відрізняється від еквівалентного об'ємного джерела. Тому в першому наближенні застосовується універсалізація поняття теплоємності для суміші, яке може бути сформоване так: «необхідно задати деякі «спільні» властивості компонент, які б гарантували тотожність нулю енерговиділення (II)». Свого роду це є деякою абстракцією з теплофізичної точки зору, яка досить легко вирішується шляхом реалізації у власних розрахункових інструментах. У подальшому аналізі середня ізобарна теплоємність суміші приймається рівною $2500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, а молекулярне число Прандтля 0.72 , що для заданої залежності динамічної в'язкості цілком визначає теплопровідність. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{N_c} Y_i \equiv 1.0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N_c} \nabla Y_i \equiv 0,$$

стандартний член енерговиділення (II) набуває нульового значення.

Безпосередньо розрахунок швидкості прямої узагальненої реакції горіння базується на співвідношенні Арреніуса, яке було модифіковано до наступної параметричної форми:

$$R_k(T^*) = \underbrace{A_{xim} \left(\frac{T^*}{T_0} \right)^\alpha \left(\frac{P}{P_0} \right)^\beta \exp \left(-\frac{E_a}{RT^*} \right) [\tilde{Y}_{fuel}]^{n_1} [\tilde{Y}_{ox}]^{n_2}}_{xim} \underbrace{\left(\frac{\mu_m \varepsilon}{\rho k^2} \right)^{n_t}}_{турб} B_d(T_{min}, T_{max}), \quad (3)$$

де, T^* – визначальна температура; A_{xim} – константа реакції; E_a – енергія активації, Дж/моль; $\tilde{Y}_{fuel}$, $\tilde{Y}_{ox}$ – безрозмірна мольна концентрація палива та окиснювача; μ_m – молекулярна в'язкість; k , ε – кінетична енергія турбулентності та її питома дисипація; n_1 та n_2 – порядки узагальненої реакції; α , β та n_t – емпіричні константи.

Функція $B_d(T_{min}, T_{max})$ (4) характеризує затухання реакції в залежності від нижньої межі (приймається рівною температурі самоспалаху), T_{max} – верхня модельна межа (приймається рівною 5000 К). Обрані межі, як показують експериментальні дослідження [11], є цілком прийнятними, оскільки мінімальна температура джерела ініціації (сферичної форми) є принаймні у два рази більшою за температуру самоспалаху (наприклад, для метану ці значення дорівнюють 1473 К та 650 К відповідно), а обмежуюча температура є більшою, ніж теоретично можлива – адіабатична температура детонації:

$$B_d(T_{min}, T_{max}) = \frac{1}{4} \left[1 - th \left(\Omega \frac{T - T_{min}}{\Delta T_{ref}} \right) \right] \left[1 - th \left(\Omega \frac{T - T_{max}}{\Delta T_{ref}} \right) \right]. \quad (4)$$

Варто відзначити, що функція (4) введена не лише для верхнього та нижнього обмеження швидкості реакції, але й виконує роль часткового подолання «невизначеності» в пристінковій зоні ε/k^2 , що може призводити до нефізичної ініціації горіння через суттєві градієнти швидкості потоку біля стінки.

Взагалі ідея, що покладена в модифіковане співвідношення Арреніуса, полягає в простому поєднанні *моделі скінчено-швидкісної хімічної реакції з концепцією вихрової дисипації*, що в загальному є незалежними наближеннями для моделювання горіння [10]. Іноді для подібного роду наближень застосовують додаткове транспортне рівняння абстрактного пасивного скаляру, який, як правило, характеризує кількість горючого матеріалу (наприклад, співвідношення Магнуссена – Арреніуса [12]). Проте існуючі моделі, як правило, використовують *предикативний (або відсічний) механізм* визначення швидкості хімічної реакції, що в загальному не є прийнятним для ударних процесів. У запропонованому варіанті модифікації наявність турбулентності виконує роль підсилення хімічної реакції. Покладений зміст в

$$\left(\frac{\mu_m \varepsilon}{\rho k^2} \right)^{n_t}$$

все ще потребує обґрунтування, і в першому наближенні може інтерпретуватися як чинник, стимулюючий зародження *детонаційних чарунок*.

Динамічна в'язкість для суміші оцінюється за допомогою *залежності Сазерленда* (коефіцієнти прийняті в демонстраційних цілях в рамках даної роботи):

$$\mu_m = a_s \frac{\sqrt{T}}{1 + T_s/T}, \quad a_s \approx 1.67 \cdot 10^{-6}; \quad T_s \approx 170.7. \quad (5)$$

В якості замикаючої моделі турбулентності може використовуватися будь-яка *двопараметрична URANS модель вихрової в'язкості*.

Варто відзначити, що застосування узагальненої реакції для оцінки параметрів детонації можливо лише тоді, коли відповідні ефективні константи (окрім модельних співвідношень) визначені за допомогою експерименту або ж аналітично адаптовані для відповідних умов.

Валідація запропонованої модифікації (FRC_EM). Для демонстрації застосовності запропонованої модифікації фактично моделі *скінченної кінетики (Finite Rate Chemistry – FRC, EM – Energy Modification)* [10] на основі одностадійної прямої реакції виконана оцінка одиничного імпульсу на основі експериментальних досліджень для пульсаційного аеродинамічного реактивного двигуна [13]. Як правило, детальну специфікацію такого типу експерименту (в плані практичних газоподібних палив і їх детонації) отримати важко, тому деякі параметри прийняті на основі досвіду авторів.

Розглядається *стехіометрична суміш пропану (C_3H_8) та кисню (O_2)* за умов, що є близькими до нормальних (абсолютний тиск – 1 атм., температура – 293 К). Розглядається геометрична конфігурація без урахування *шнекоподібної спіралі Щолькіна* для ініціації гетерогенної детонації, що дозволяє виконати оцінки в осесиметричній постановці. Загальний вигляд геометрії та її дискретизації показано на рис. 1.

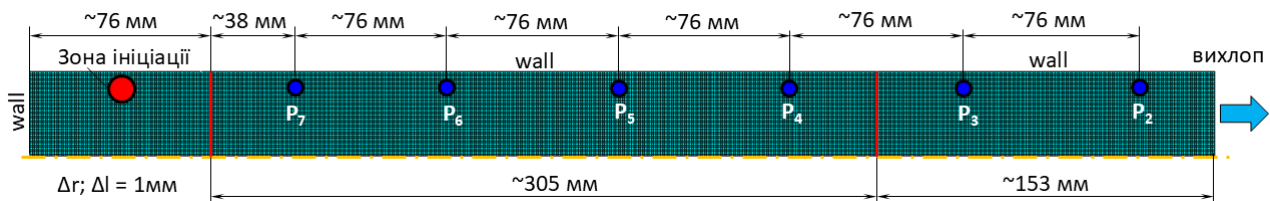


Рис. 1. – Спрощена розрахункова область (проточна частина камери згоряння) [13].

Параметри ініціації в розрахунковій моделі приймалися наступними. Оскільки в [13] наведені лише інтегральні характеристики тепловиділення ініціатора для 1-го імпульсу ($E_{init} = 13.5$ Дж/імпульс) без уточнення його геометричних та таймінгових характеристик, то оцінка в моделі відбувається у вигляді еквівалентного джерела з наперед заданою температурою T_{init} . Таким чином, характерний геометричний розмір ініціатора можна знайти, використовуючи співвідношення (6), де покладено, що ініціатор є «тороподібним» внаслідок двовимірності постановки. Безпосередня ініціація призводить до локального прогріву середовища в області з характерним радіусом r_{init} , а вже потім до розвитку перехідного процесу горіння:

$$r_{init} = \sqrt{\frac{E_{init}}{2\pi^2 \rho c_p (T_{init} - T_0) R_0}}, \quad (6)$$

R_0 – радіус проточної частини (36.2 мм).

Приймаючи температуру ініціації рівною 800 К/1500 К/2500 К, радіус r_{init} оцінюється в 3.4 мм/2.2 мм/1.6 мм відповідно. Нижня температура ініціатора приймається близькою до температури самозапалювання суміші.

Для оцінки параметрів імпульсу тиску в місцях датчиків P_{2-7} (рис. 1) для співвідношення одностадійної хімічної кінетики (3) приймалися наступні значення коефіцієнтів:

- Константа реакції $A_{xim} = 9.1 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, енергія активації $E_a = 104.5 \text{ кДж/моль}$ ([11]).
- Константи впливу тиску та температури: $\alpha = 1.77$; $\beta = -0.2$ (за аналогією поправки для швидкості розповсюдження полум'я, строго кажучи, потребують узгодження).
- Порядок реакції n_1, n_2 приймаються рівними 0.1 та 1.65 відповідно.
- Розглядається два значення показника n_t степені для терму турбулентного «підсилення»: 0.25 (приймається за аналогією *наближення Магнуссена*), та 0.75 (за аналогією визначення безрозмірного масштабу турбулентності).
- Нижня межа температури реакції (T_{min}), яка здатна самопідтримуватися, приймається рівною 745 К, а верхня границя обмежена значенням в 5000 К, що в переважній більшості є нижчим за теоретичне значення.
- Визначальна температура T^* для оцінки швидкості реакції може прийматися, виходячи із термодинамічних міркувань $T^* = T$, або енергетичних. У такому випадку, вважаючи, що кожен компонент та їх суміш є ідеальним газом, опорна температура визначається з урахуванням повної кінетичної енергії потоку $T + U^2/2c_p + k/c_p$.

Додатково виконані оцінки з використанням *стандартної моделі FRC* з параметрами хімічної кінетики, що відповідають факельному горінню пропану [11] ($A_{xLM} = 8.6 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$; $E_a = 125.4 \text{ кДж/моль}$).

Параметри ударної хвилі в першому наближенні оцінювалися із використанням поняття функції «схемного» розриву $\psi(t, r, l)$, що характеризує перехід дискретизації адвекції від другого на перший порядок апроксимації в області умовного стрибка густини/тиску. Тоді основні розрахункові величини детонаційної хвилі можуть бути встановлені, виходячи зі співвідношень (7), які застосовні лише тоді, коли в розрахунковій області наявний одиничний ударний фронт.

$$l_D = \max[l \cdot \psi(t, r, z)]; \phi_D = \max[\phi \cdot \psi(t, r, z)]; \Delta l = \pi \left(\max[r \psi(t, r, z)] \right)^{-2} \int_V \phi(t, r, z) dV, \quad (7)$$

де l_D – максимальна геометрична позиція ударної хвилі; ϕ_D – значення скаляра в ударному фронті (наприклад температур, тиску); δL – наближена товщина ударного фронту (строго кажучи, лише для оцінки порядку величини через наявність числової дифузії).

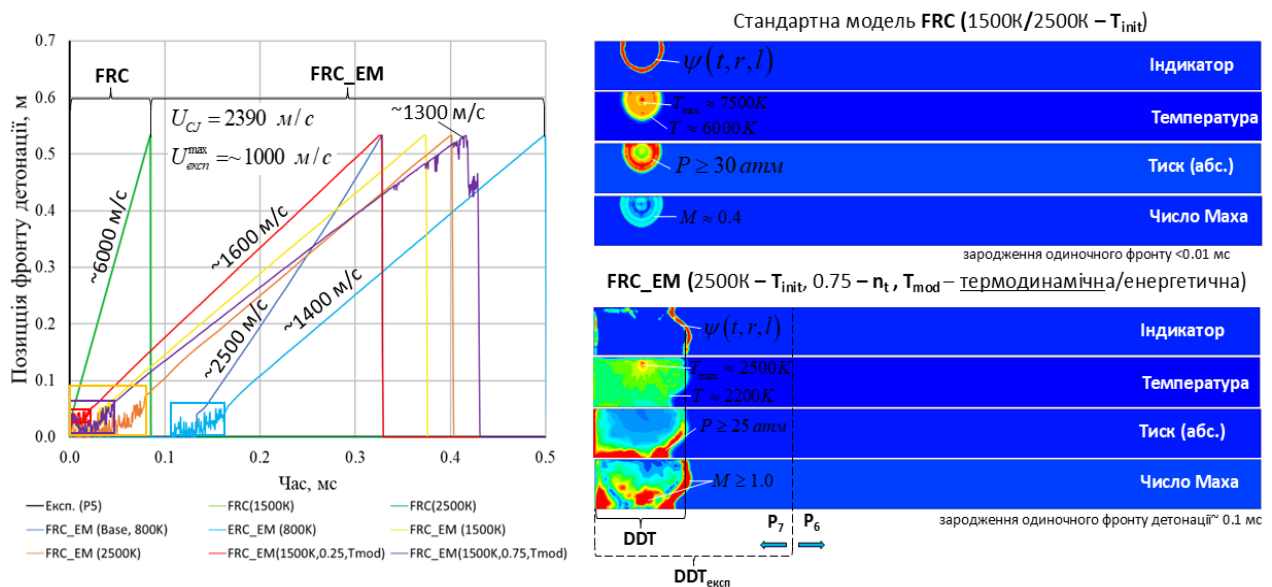


Рис. 2 – Результати оцінки позиції ударної (детонаційної) хвилі для різних варіантів коефіцієнтів та температури ініціації.

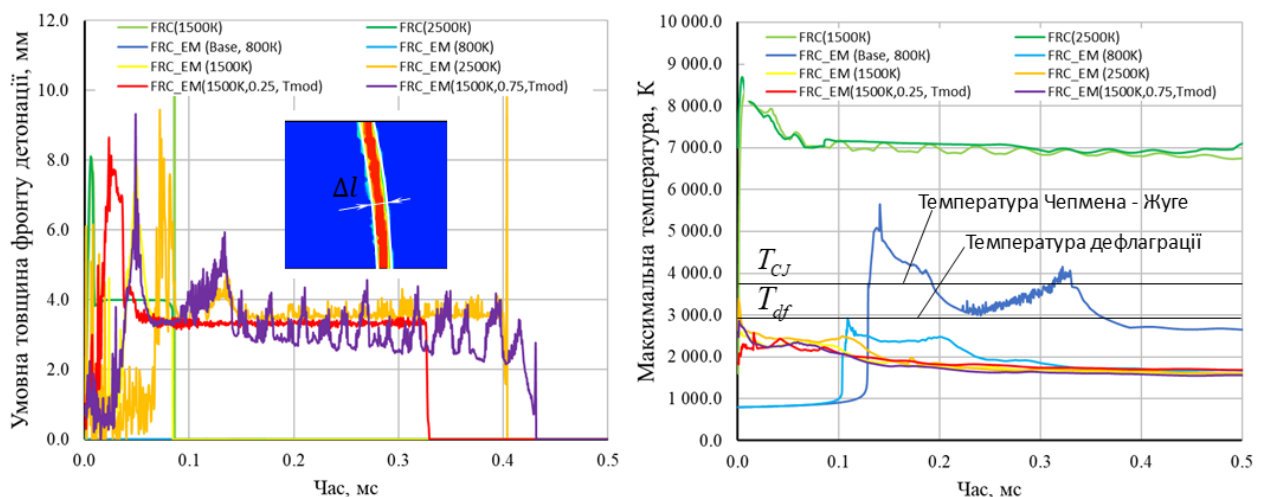


Рис. 3 – Результати оцінки характерної товщини (порядок) та температури ударної (детонаційної) хвилі для різних варіантів коефіцієнтів і температури ініціації.

Характерний розмір розрахункової чарунки дискретизації складає 1мм, а крок інтегрування за часом 0.5мкс, що забезпечує значення CFL не вище 0.5. У даному випадку адаптація розрахункової сітки не використовувалася, хоча є характерною (і в деяких випадках невід’ємною частиною) для такого типу задач. Використовується другий порядок апроксимації *адвективного члену* з переключенням на *протипотокову схему (upwind)* в місці розриву. Використовується другий порядок апроксимації за часом. Застосовувалася *SST модель турбулентності* без урахування *ламінарно-турбулентного переходу*.

На рис. 2 та рис. 3 наведено основні оціночні параметри фронту ударної хвилі (позиція l_D , характерна товщина та температура) для різних наборів параметрів у співвідношенні (3) та початкової температури ініціації T_{init} .

Отримані результати є досить показовими у порівнянні зі стандартною моделлю скінченної хімічної кінетики (FRC) із використанням одностадійної (узагальненої реакції). Запропоновані модифікації рівняння енергії (2) та швидкості прямої хімічної реакції (3) суттєво поліпшують прогнози детонаційної хвилі: максимальну температуру та тиск, а також швидкість розповсюдження ударної хвилі. Фактично при застосуванні стандартної FRC для температур ініціації 1500 K та 2500 K детонація відбувається практично миттєво, тобто дефлаграційно-детонаційний перехід (DDT) відсутній. При цьому швидкість розповсюдження ударної хвилі за індикаторною оцінкою (7) складає близько 6000 м/с, що більше ніж в два рази перевищує теоретичну швидкість детонації (~ 2390 м/с) для *стехіометричної пропан – кисневої суміші*. В цілому, такі результати узгоджуються з оцінками [8], де зроблений висновок про непридатність застосування FRC з одностадійною реакцією через суттєву переоцінку параметрів детонації. Варто відзначити, що для класичної моделі FRC розглядався і варіант з низькою температурою ініціації (800 K), що не породжує дефлаграційне горіння, а лише відтермінує детонацію на $1 \div 1.5$ мс з практично незмінною динамікою та її параметрами у порівнянні із варіантами ініціації в 1500 K та 2500 K. При застосуванні FRC_ЕМ отримані результати значно краще узгоджуються з експериментом [13]. По перше, для різних параметрів температури ініціації детонація відбувається не миттєво, а через DDT з різною геометричною шириною. Тобто детонація відбувається фронтом у повний поперечний переріз на деякому віддаленні від зони ініціації. Причому з графіків рис. 2 видно, що початкове розповсюдження фронту горіння має невисоку швидкість з суттєвими «осциляціями» позиційної координати. Швидкість розповсюдження в такому випадку є нижчою за теоретичну (параметри Чепмена – Жуге), проте значно краще узгоджується з експериментальною [13], що знаходиться в межах від 500 м/с до 1100 м/с. Варто відзначити наступну особливість: при застосуванні *немодифікованого рівняння Арреніуса* з параметрами [11] ($A_{xlm} = 9.1 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$; енергія активації $E_a = 104.5 \text{ кДж/моль}$), які підібрані для детонаційного режиму горіння, оціночна (FRC_ЕМ) швидкість розповсюдження ударної хвилі є близькою до теоретичної (рис. 2, варіант FRC_ЕМ (Base, 800 K)).

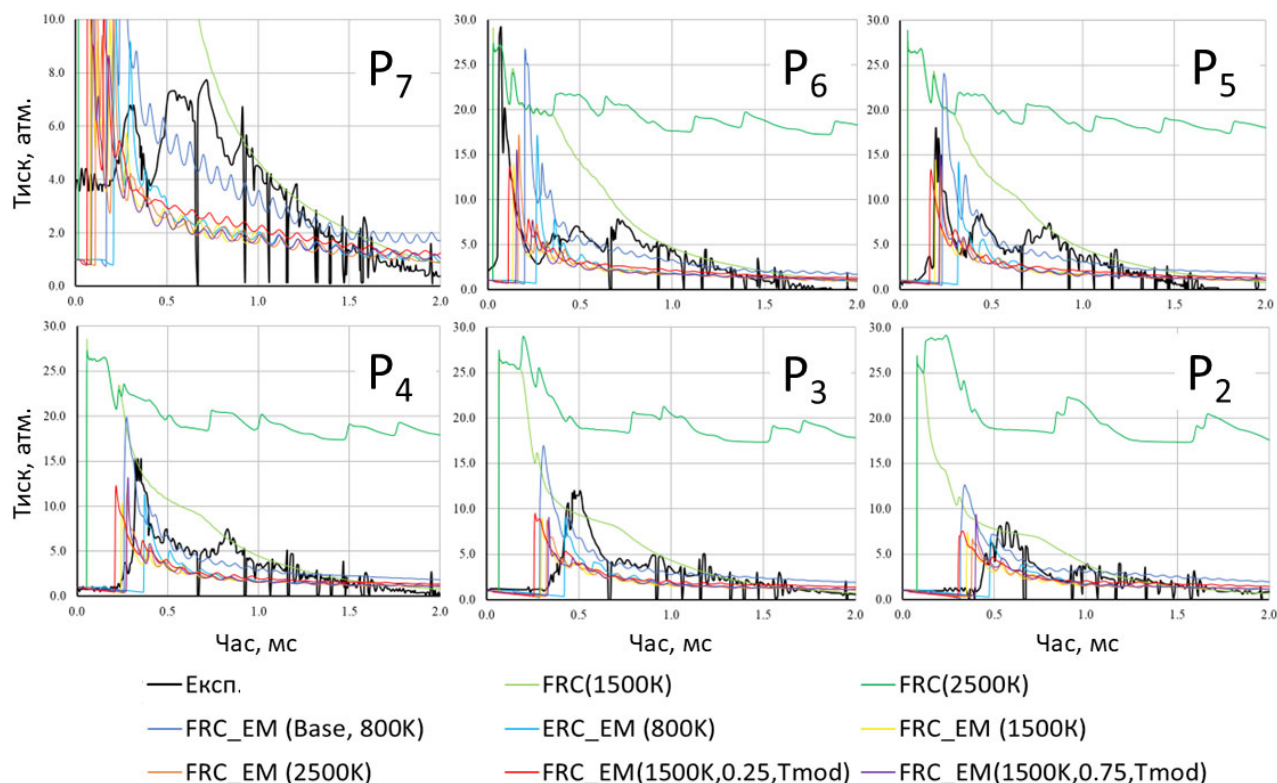


Рис. 4 – Порівняння експериментальної та розрахункової динаміки профілів тиску при утворенні одиничного імпульсу.

З точки зору енергетичного виходу (рис. 3), максимальна температура (при застосуванні FRC_ЕМ) на початок розвитку детонації в цілому є сумірною з параметрами Чепмена – Жуге ($T_{CJ} \sim 3800$ K) з подальшим зменшенням під час розширення до значень нижчих за оцінку температури дефлагації ($T_{df} \sim 2900$ K). Прогноз із застосуванням FRC демонструє значно більші значення температури, причому не лише максимальної, але й сере-

дною в області горіння (більше 6000 K).

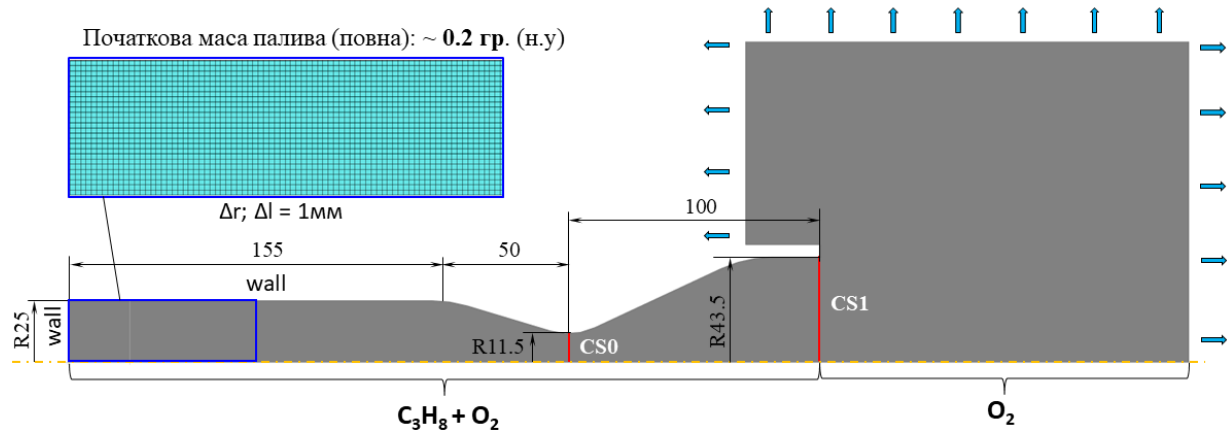


Рис. 5 – Базова геометрична конфігурація та її дискретизація.

На рис. 4 наведено порівняння експериментальних та розрахункових часових профілів тиску для різних розрахункових варіантів. Модифікації, що були запропоновані для рівняння енергії та одностадійної хімічної кінетики, суттєво поліпшили прогностичні властивості утворення детонаційної хвилі у порівнянні зі стандартним наближенням FRC. Енергетична оцінка температури (з урахуванням кінетичної енергії потоку) в цілому призводить до більш низького порогу активації інтенсивного горіння. Показник степені в турбулентному члені (3) визначає «ширину» переходу від дефлаграції до детонації.

Зважаючи на наявні невизначеності в параметрах ініціації, а також застосування осесиметричної постановки (еквівалентність зони підпалу) в першому наближенні запропоновані модифікації можуть застосовуватися для концептуальних напрацювань щодо пошуку та оптимізації геометрії камери згорання.

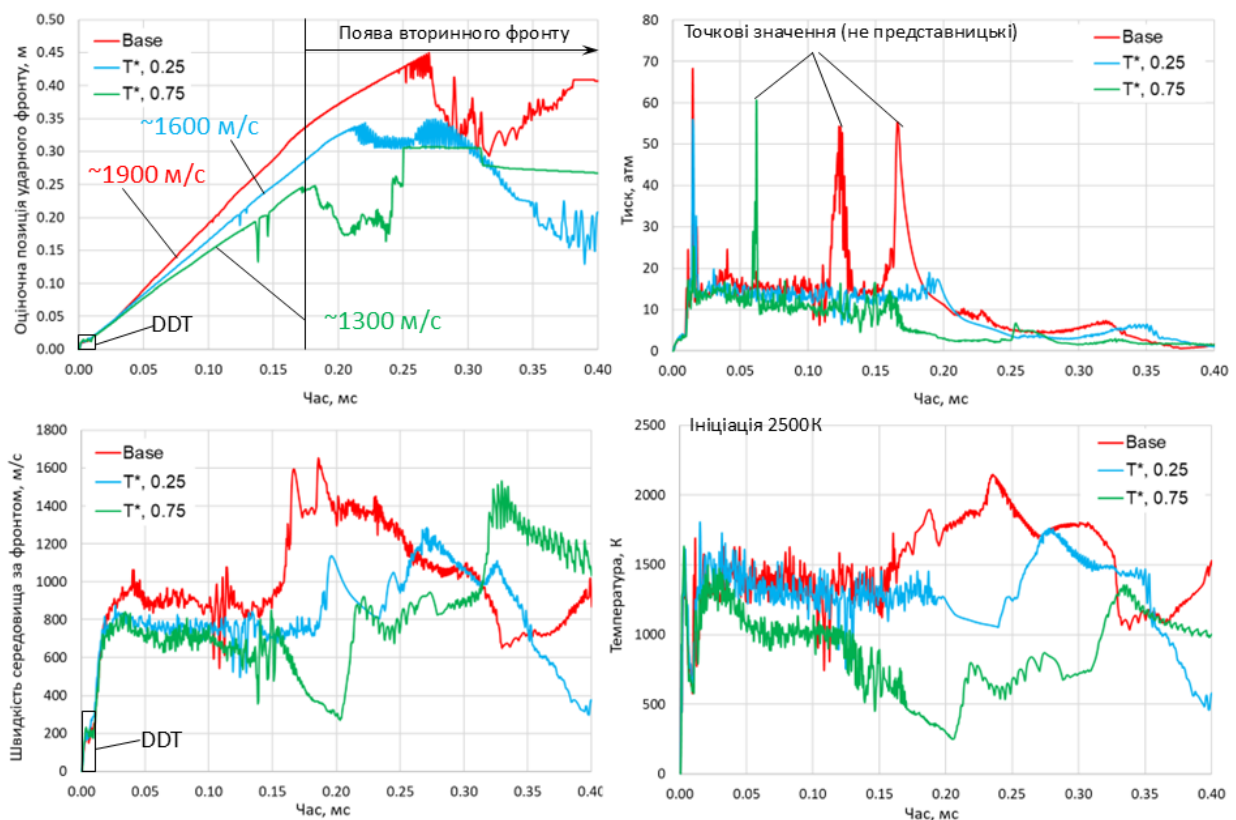


Рис. 6 – Основні параметри детонаційного фронту для різних розрахункових варіантів (T^* – варіант опорної температури з урахуванням кінетичної енергії осередненого потоку).

Пре-концептуальна оцінка геометрії детонаційної камери згорання базується на запропонованому підході (FRC_EM) з коефіцієнтами, що прийняті при валідації (для однозначності: опорна температура термодинамічна, показник степені в турбулентному члені – 0.75). Параметри налаштування розрахунків також аналогічні валідації. Базова геометрична конфігурація, що стала початковою точкою при аналізі, наведена на рис. 5. Розглядається пропан-киснева стехіометрична суміш. Основною метою пре-концептуальної оцінки є пошук опти-

мальних геометричних параметрів для максимізації параметрів одиничного імпульсу.

Радіус області ініціації приймається рівним 5 мм з температурою 2500 K, що задається через початковий стан (фактично безінерційне збурення температурою). Вважається, що заповнення камери згорання є ідеальним, тобто «границя» суміші $C_3H_8 + O_2$ та O_2 відповідає вихідному перерізу CS1. На рис. 6 наведені основні параметри детонаційного фронту, які оцінені з урахуванням співвідношень (7). Під базовим варіантом «Base» розглядаються налаштування за замовчуванням, що наведені на початку (за результатами валідації).

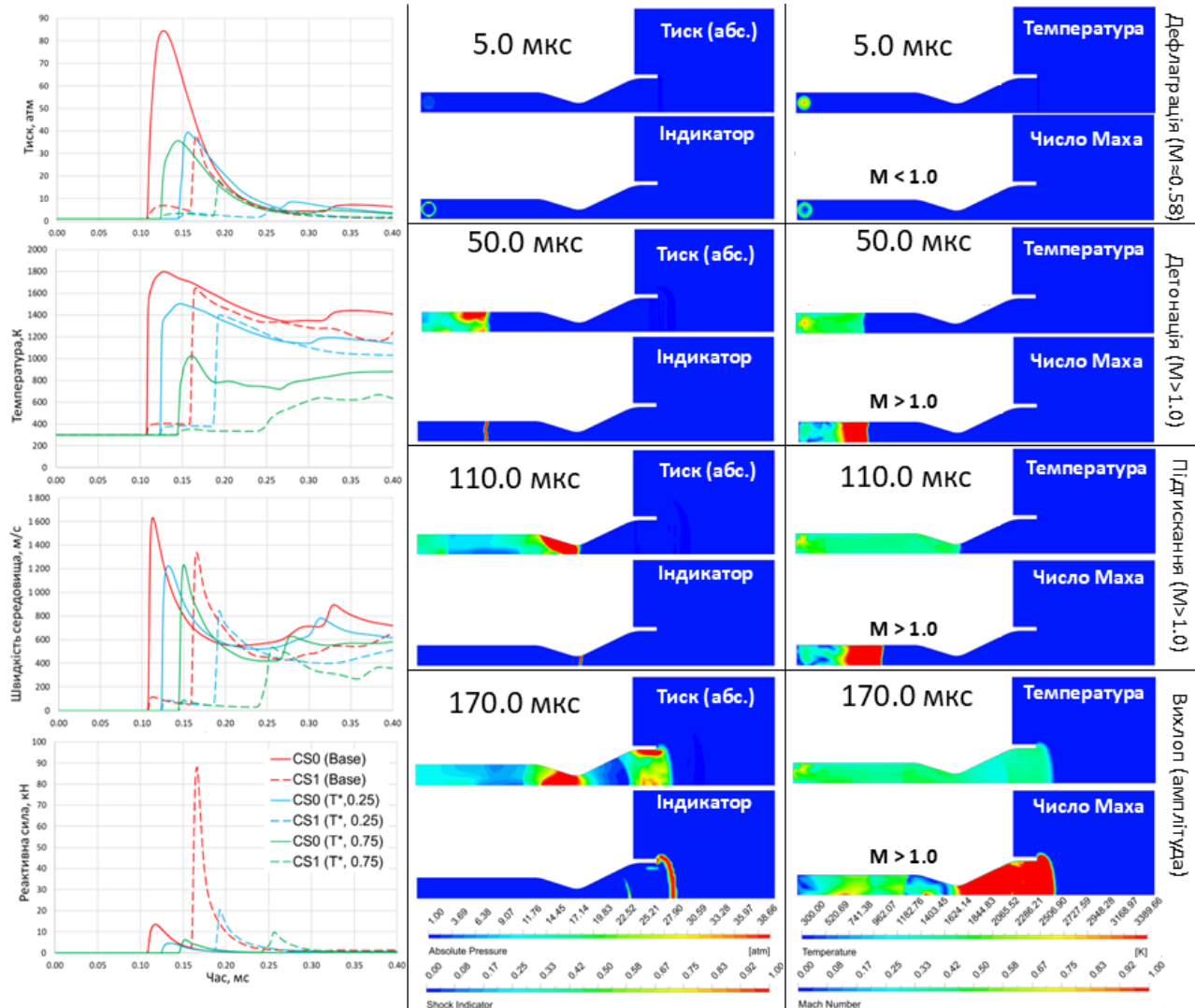


Рис. 7 – Результати оцінки параметрів одиничного імпульсу для базової геометричної конфігурації в обраних поперечних перерізах CS0 та CS1.

Безпосередньо основні характеристики одиничного імпульсу в референтних поперечних перерізах CS0 та CS1 наведені на рис. 7, де для конфігурації «Base» епізодично показані поля тиску, індикатор-функції $\psi(t, r, l)$, температури та локального числа Маха. Отримані результати показують, що для кожного із варіантів відбувається утворення стійкої детонаційної хвилі, приблизно в 30–40 мм від місця ініціації (число Маха стає більшим за одиницю). Тобто умовна зона дефлаграційно-детонаційного переходу складає 1 калібр, що принаймні для діаметра в 50 мм дозволяє позбутися локальної зони «підтискання», а навпаки камеру згорання конфігурувати у вигляді плавного розширення.

Температура вихлопу в середньому нижча за 1600 K (пікове значення може сягати 1800 K), що в цілому дозволяє застосовувати вже відомі технічні рішення для охолодження вихідного сопла. Пікове значення реактивної сили в 90 кН досягається при використанні базових налаштувань моделі FRC_EM, що запропонована в даній роботі. В інших випадках реактивна сила є значно меншою і не перевищує 20 кН. Така суттєва різниця в кінцевому результаті пояснюється більш низькою термодинамічною температурою (через наявність кінетичної добавки середнього потоку в опорному значенні T^*), що здатна підтримувати реакцію. У цих випадках ударна хвиля все одно утворюється, але з параметрами недостигненої детонації, яка є граничною до дефлагації (термодинамічна інтерпретація, рис. 8).

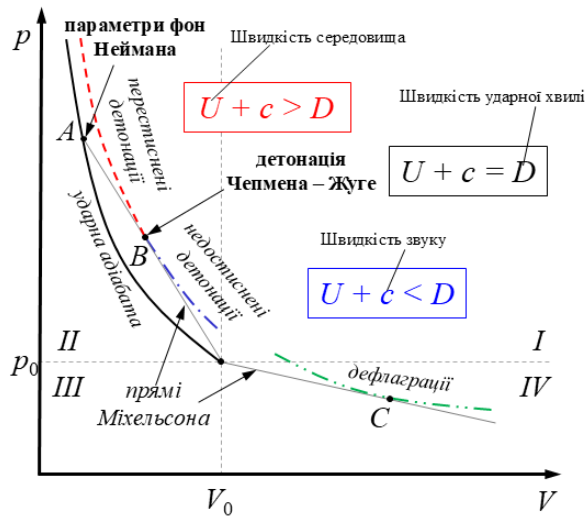


Рис. 8 – Термодинамічна інтерпретація параметрів дефлагації-детонації.

геометричні конфігурації із співвідношенням площі поперечного перерізу вихідного сопла і умовної зони DDT (ступінь розширення): ~ 2.9 , ~ 7.7 та 16.0 (характерне значення для сопел, що працюють у щільних шарах атмосфери землі).

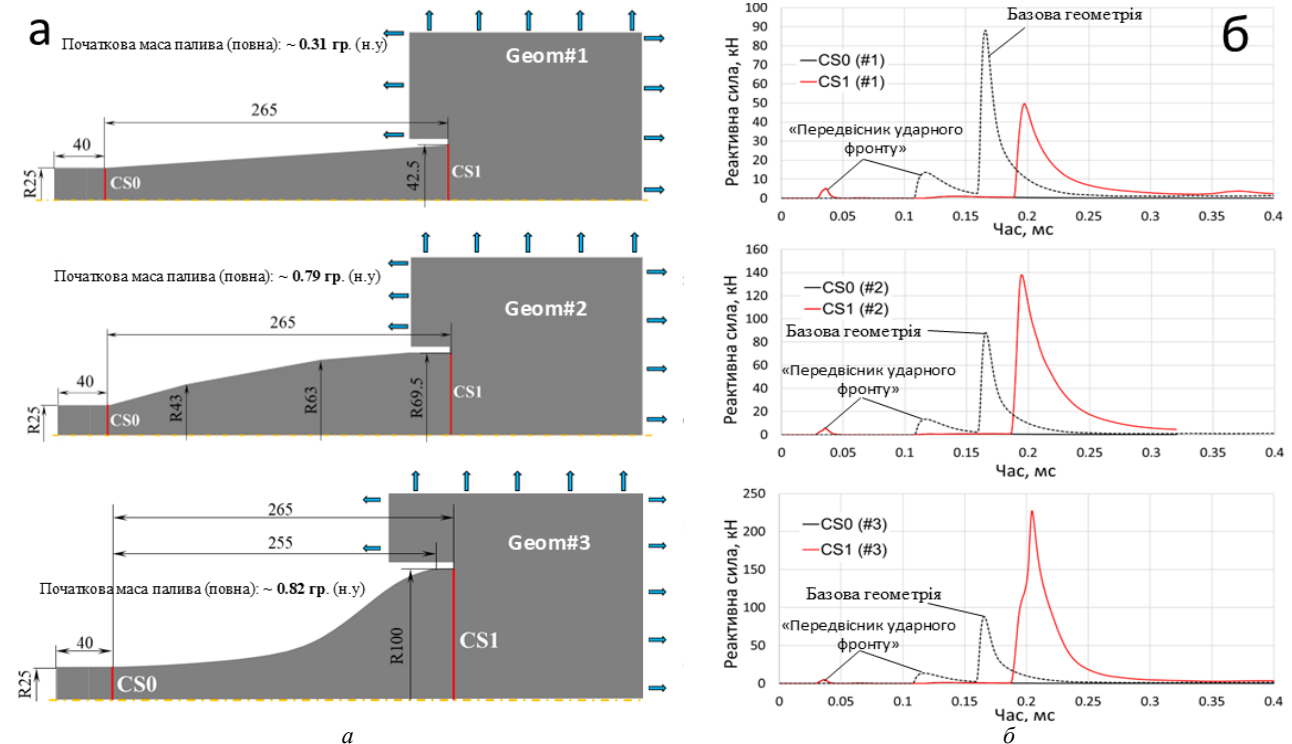


Рис. 9 – а – Основні геометричні характеристики проточної частини камери згоряння; б – отримані одиничні імпульси на пропан-кисневій стехіометричній суміші.

Результати оцінки параметрів одиничного імпульсу наведені на рис. 9, б. Поступове збільшення площі поперечного перерізу вздовж проточної частини каналу в сторону виходу призводить до підвищення параметрів одиничного імпульсу, проте швидкість розповсюдження ударної хвилі зменшується (видно по зміщенню амплітуди піку відносно базової геометричної конфігурації). Аналіз отриманих результатів показав, що збільшення реактивної сили для обраних геометричних конфігурацій носить в першу чергу екстенсивний характер, тобто визначається збільшенням площі та кількості маси палива (тобто енергетичного запасу на одиницю імпульсу). Для базової геометрії в момент «виходу» амплітуди реактивної сили, пікове значення тиску та швидкості продуктів складає ~ 40 атм. та близько 1300 м/с відповідно (пікова температура – 1600 К). На момент релаксації імпульсу до 1% від амплітуди сили, швидкість середовища все ще залишається суттєвою (близько 500 м/с), проте в декілька десятків разів зменшується густина через падіння тиску до 1.5 атм. (температура вихлопу – 1300 К). Для геометрії **Geom#1**, яка в сенсі початкової маси палива та за ступенню розширення є близькою до

У загальному, отримані параметри детонаційної хвилі є нижчими за теоретичні (детонація Чепмена – Жуге: тиск – 33 атм.; температура – ~ 3900 К; швидкість детонаційного фронту – ~ 2400 м/с) для заданих початкових параметрів.

Отримані результати першого наближення для базової геометричної конфігурації (рис. 5) дозволяють виконати певні уточнення проточної частини умовної камери згоряння задля максимізації параметрів одиничного імпульсу. Приймаючи, що діаметр камери залишається незмінним (50 мм), розглянуто три спрощені геометричні варіанти, що враховують наявність переходу до детонації в межах перших 40 – 50 мм від області ініціації і досягненні одиниці числа Маха руху продуктів згоряння за умовним детонаційним фронтом. Основна ідея в цих випадках полягає у «стимулюванні» прискорення шляхом розширення поперечного перерізу надзвукового потоку. Основні геометричні характеристики наведені на рис. 9, а. Розглядаються

базової вищезазначені параметри наступні: 20 атм./800 м/с/1300 К – пік імпульсу; 3.6 атм./450 м/с/1200 К – падіння до 1 % від амплітуди реактивної сили. Для **Geom#2** отримані такі величини: 22.5 атм./1000 м/с/1250 К та 5 атм./450 м/с/1000 К відповідно. Геометрична конфігурація **Geom#3** характеризується такими параметрами: 26.2 атм./915 м/с/1250 К та 3.5 атм./280 м/с/1100 К при релаксації імпульсу.

З практичної точки зору це означає, що оптимізація геометрії камери згоряння і проточної частини за можливості повинна призводити і до інтенсифікації процесів горіння, тобто організовувати перестиснену детонацію (рис. 8). Це в свою чергу потребує застосування спеціальних засобів (наприклад, *шнеку типу Щьолкіна*, резонаторів) та більш тонкого (з точки зору власних параметрів) калібрування та налаштування.

Окремо слід зауважити, що за результатами розрахунків в усіх випадках наявний так званий «передвісник» ударного фронту, що проявляється як реактивна сила невеликої амплітуди перед основним імпульсом. Однозначно встановити, з чим це пов'язано досить складно (наприклад особливості конвергенції за масою в системі із рівнянь переносу з ефектом подібним до «теплової втечі»). В експериментальних дослідженнях [13] на профілях тиску також видна наявність невеликих збурень перед основним імпульсом, проте такі ефекти авторами не обговорюються. Узагальнюючі параметри одиночного імпульсу, що оцінені для різних конфігурацій геометрії з використанням запропонованої моделі **FRC_EM**, наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Усереднені та узагальнені параметри одиночного імпульсу для різних геометричних конфігурацій

Номер експерименту	Початкова кількість палива, гр.	Умовна затримка, мкс	Амплітуда імпульсу, кН	Орієнтовна ширина імпульсу, мкс	Приведене значення на 1 Гц, Н/Гц	Режим*
Базова конфігурація	0.20	158.0	86.0	~140.0	~ 2.1	Детонація
Geom#1	0.31	189.0	48.0	~ 160.0	~ 1.6	Детонація
Geom#2	0.79	186.0	137.0	~ 160.0	~ 4.4	Детонація
Geom#3	0.82	187.0	220.0	~ 160.0	~ 5.9	Детонація
* параметри ініціації обрані таким чином, щоб мінімізувати час затримки переходу до детонації (2500 К, та радіус збурення 5 мм). В практичних задачах спосіб ініціації горіння є суттєвою складовою у визначенні технічного періоду одиночного циклу (продувка/наповнення, ініціація, утворення та вихід імпульсу)						

Перспективи подальших досліджень. Автори виділяють декілька основних напрямків, які пов'язані з концептуалізацією та реалізацією математичної моделі, а також безпосередньо прикладне значення. Щодо першого напрямку, то вбачається перспективною побудова спеціального «більш фізичного» непридикативного індикатора інтенсифікації хімічної реакції за рахунок турбулентності, можливо із застосуванням спеціального рівняння переносу. Також слід зазначити, що перехід на каскадні реакції (прямі та зворотні) та схеми дискретизації високого порядку по простору скоріше за все потребуватимуть розробки спеціального коду, оскільки можливості комерційних пакетів є обмеженими. Під другим напрямком розуміється розробка автоматизованих процедур оптимізації геометричних параметрів камери згоряння шляхом вирішення газодинамічних оптимізаційних задач, що в перспективі суттєво прискорить проектування відповідних технічних рішень, та конкретизацію тих параметрів, які повинні визначатися натурними дослідженнями.

Висновки. Таким чином, у даній роботі представлено перше наближення для поліпшення прогностичних властивостей скінченної-хімічної моделі горіння (FRC) на основі одностадійної прямої реакції. Для цього запропонована модифікація рівняння переносу енергії, в якій член масо-енергообміну замінюється на явне об'ємне джерело енергії виходу реакції горіння. Додатково запропоновано мультиплікативний спосіб адаптації співвідношення швидкості реакції, що враховує турбулізацію потоку, що дозволяє оцінювати також область дефлаграційно-детонаційного переходу. Отримана розрахункова модель (FRC_EM) дозволяє більш якісно та кількісно прогнозувати параметри детонації, що підтверджується відповідними валідаційними оцінками для пропан-кисневої стехіометричної суміші. Запропоноване наближення FRC_EM використане для пре-концептуальної оцінки детонаційної камери згоряння, отримані параметри одиночного імпульсу реактивної сили, що підтвердили її застосовність насамперед для швидкого параметричного аналізу.

Список літератури

1. Zhao W., Deiterding R., Cai X., Liang J., Yang X., Sun M. Flame acceleration and detonation transition in premixed and inhomogeneous supersonic flows // Journal of Fluid Mechanics. – 2024. – 1001:A36. DOI:10.1017/jfm.2024.812.
2. Mikoshiba K., Sardeshmukh S. V., Stephen D. Heister, Impulse generated from detonation waves in non-premixed and partially premixed reactants // Applications in Energy and Combustion Science. – 2024. – V. 18. DOI: 10.1016/j.jaecs.2024.100264.
3. Xiao Liang, Rui-li Wang. Verification and validation of detonation modeling // Defence Technology. – 2019. – Volume 15. – Issue 3. – pp. 398 – 408. DOI: 10.1016/j.dt.2018.11.005.
4. Shamsadin Saeid M. H., Ghodrat M. Numerical Simulation of the Influence of Hydrogen Concentration on Detonation Diffraction Mechanism // Energies. – 2022. – 15. 8726. DOI: .3390/en15228726.
5. Wandong Zhao, Caizhi Fan, Ralf Deiterding, Xiaokang Li, Jianhan Liang, Xiong Yang. A new rapid deflagration-to-detonation transition in a short smooth tube // Physics of Fluids. – 2024; 36 (3): 036104. DOI: 10.1063/5.0191500.

6. Romick Christopher M., Aslam Tariq D. High-order shock-fitted detonation propagation in high explosives. – United States: N. p., 2016. Web. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.11.049.
7. Fotis Rigas, Spyros Sklavounos. Experimentally validated 3-D simulation of shock waves generated by dense explosives in confined complex geometries // *Journal of Hazardous Materials*. – 2005. – Volume 121. – Issues 1–3. – P. 23–30. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2005.01.031.
8. Трифонов О. В., Брега Д. А., Болоховец А. А., Палазюк Е. С. Влияние выбора моделей горения и механизмов реакций на достоверность прогнозирования перехода горения в детонацию // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Х., 2014. – Вып. 63. – С. 160–169.
9. Manninen, Mikko, Taivassalo and other. On the mixture model for multiphase flow. – Espoo 1996, Technical Research Centre of Finland, VTT Publications, 1996. – 288. – 67 p.
10. ANSYS Inc., ANSYS CFX 18 -Solver Theory Guide, 2017.
11. Налисько Н. Н. Параметры макрокинетики горения углеводородов в численном расчете аварийных взрывов в горных выработках // Надзвичайні ситуації: попередження та ліквідація. – 2017. – № 1 (2017). – С. 75–88.
12. Poinso T., Veynante D. Theoretical and numerical combustion. 2nd ed. – Philadelphia : Edwards, 2005. – 522 p.
13. Frank Lu, Meyers Jason, Wilson Donald. Experimental study of propane-fueled pulsed detonation rocket // 12th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies. – 2003. – 6974.

References (transliterated)

1. Zhao W., Deiterding R., Cai X., Liang J., Yang X., Sun M. Flame acceleration and detonation transition in premixed and inhomogeneous supersonic flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 2024, 1001:A36. DOI:10.1017/jfm.2024.812.
2. Mikoshiba K., Sardeshmukh S. V., Stephen D. Heister, Impulse generated from detonation waves in non-premixed and partially premixed reactants. *Applications in Energy and Combustion Science*. 2024, V. 18. DOI: 10.1016/j.jaecs.2024.100264.
3. Xiao Liang, Rui-li Wang. Verification and validation of detonation modeling. *Defence Technology*. 2019, Volume 15, Issue 3, pp. 398–408. DOI: 10.1016/j.dt.2018.11.005.
4. Shamsadin Saeid M. H., Ghodrati M. Numerical Simulation of the Influence of Hydrogen Concentration on Detonation Diffraction Mechanism. *Energies*. 2022, 15, 8726. DOI: 10.3390/en15228726.
5. Wandong Zhao, Caizhi Fan, Ralf Deiterding, Xiaokang Li, Jianhan Liang, Xiong Yang. A new rapid deflagration-to-detonation transition in a short smooth tube. *Physics of Fluids*. 2024; 36 (3): 036104. DOI: 10.1063/5.0191500.
6. Romick Christopher M., Aslam Tariq D. High-order shock-fitted detonation propagation in high explosives. United States: N. p., 2016. Web. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.11.049.
7. Fotis Rigas, Spyros Sklavounos. Experimentally validated 3-D simulation of shock waves generated by dense explosives in confined complex geometries. *Journal of Hazardous Materials*. 2005, Volume 121, Issues 1–3, pp. 23–30. DOI: 10.1016/j.jhazmat.2005.01.031.
8. Трифонов О. В., Брега Д. А., Болоховец А. А., Палазюк Е. С. Влияние выбора моделей горения и механизмов реакций на достоверность прогнозирования перехода горения в детонацию [The influence of the combustion models and reaction mechanisms choice on the reliability of predicting the transition of combustion to detonation]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii: sb. Nauch. Tr. Nats. Ayero-kosm. Un-ta im. N.E. Zhukovskogo "KhAI"* [Open Information and Computer Integrated Technologies: coll. of scientific papers. National Aerospace University. "Kharkiv Aviation Institute"]. Kharkov, 2014, vol. 63, pp. 160–169.
9. Manninen, Mikko, Taivassalo and other. On the mixture model for multiphase flow. Espoo 1996, Technical Research Centre of Finland, VTT Publications, 1996. 288. 67 p.
10. ANSYS Inc., ANSYS CFX 18 -Solver Theory Guide, 2017.
11. Налисько Н. Н. Параметри макрокинетики горения углеводородов в численном расчете аварийных взрывов в горных выработках [Parameters of hydrocarbon combustion macrokinetics in numerical calculation of emergency explosions in mine workings]. *Nadzvychnyi sytuatsiyi: poperedzheniya ta likvidatsiya* [Emergency Situations: Prevention and Liquidation]. 2017, no. 1 (2017), pp. 75–88.
12. Poinso T., Veynante D. Theoretical and numerical combustion. 2nd ed. Philadelphia, Edwards, 2005. 522 p.
13. Frank Lu, Meyers Jason, Wilson Donald. Experimental study of propane-fueled pulsed detonation rocket. *12th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies*. 2003. 6974.

Надійшло (received) 03.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Філонов Владислав Віталійович – PhD, старший науковий співробітник, Відділ гідробіоніки та керування примезовим шаром, Інститут гідромеханіки НАН України; Завідувач відділу моделювання процесів тепло-масообміну та переносу випромінювання, ТОВ «ІПП-ЦЕНТР», м. Київ; тел.: (093) 596-84-65; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8123-026X>; e-mail: workfvv@gmail.com.

Filonov Vladyslav Vitaliiovich – Doctor of Philosophy (PhD), senior researcher of the Hydrobionics and Boundary Layer Control department, Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine; Head of the Department of Heat&Mass and Radiation Transfer Processes Modeling at IPP-Centre LLC, Kyiv; tel.: (093) 596-84-65; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8123-026X>; e-mail: workfvv@gmail.com.

Воропаєв Геннадій Олександрович – доктор фізико-математичних наук, професор, директор Інституту гідромеханіки НАН України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

Voropaiev Gennadii Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director Institute of Hydromechanics National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-17; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5615-6344>; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com.

ЗМІСТ

Башияков О. М., Матвієнко В. Т., Пічкур В. В. Обчислювальні методи оптимізації пучка траєкторій з негладким критерієм якості	3
Васін П. О., Довгий С. О., Лебідь О. Г., Черній Д. І. Моделювання обтікання системи керованих крил (профіль) у потоці ідеальної нестисливої рідини	10
Воропасв Г. О., Баскова О. О. Дослідження впливу часткового гофрування на розвиток вихрових утворень в трубі при перехідних числах Рейнольдса	20
Воропасв Г. О., Коваль С. О. Формування вентиляованої каверни при турбулентному режимі обтікання дискового кавітатора	28
Горбань І. М., Басовський В. Г. Генерація акустичного поля потоком рідини над двовимірними циліндричними канавками різної глибини	39
Денисов К. І., Пічкур В. В. Аналіз стійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами	49
Димитрієва Н. Ф. Моделювання вихрової структури всередині вентиляованої каверни	56
Кузь В. В., Шатирко А. В. Автоматична ідентифікація музичних інструментів	62
Кузьменко В. В., Троценко Я. П. Моделювання поширення звукових хвиль у плоскому хвилеводі з вигинами	70
Мельник О. С., Козаревич В. О. Моделі програмованих мікро- та наноструктур	80
Нагайченко О. О. Фізико-математичне моделювання напівпровідникових наноприладів	85
Нечуйвітер О. П., Іванов В. В., Шніцар А. С., Гіщак О. Р., Заборний А. В. Ефективне чисельне інтегрування двовимірних швидкоосцильованих функцій загального виду	91
Overko V. S. The influence of the torsion motion of left ventricle (LV) on features of blood flow	104
Пилипченко І. Ю., Довгий С. О., Черній Д. І. Моделювання обтікання літального апарату з системою конфузоров Брікса-Корта	115
Савченко Ю. М., Семенов Ю. А., Савченко Г. Ю. Нелінійні гравітаційні хвилі у потоці рідини в каналі із складної геометрії дна, вкритого битим льодом	124
Schek L., Vilchevskaya E. N., Müller W. H. Computational analysis of the deformation behavior of 4D-printed liquid crystal elastomers under change of temperature	134
Філонов В. В., Воропасв Г. О. Енергетичні особливості класичної моделі суміші для оцінки параметрів детонації в обмеженому об'ємі	149

CONTENTS

Bashniakov O. M., Matvienko V. T., Pichkur V. V. Computational methods for optimization of a beam of trajectories with a non-smooth quality functional	3
Vasin P. O., Dovgyi S. O., Lebid O. G., Cherniy D. I. Modeling the flow around a system of controlled wings (air-foils) in a stream of ideal incompressible fluid.....	10
Voropaiev G. O., Baskova O. O. Investigation of the influence of partial corrugation on the development of vortex structures in a tube at a transient Reynolds numbers.....	20
Voropaiev G. O., Koval S. O. Formation of a ventilated cavity in a turbulent flow regime around a disk cavitator	28
Gorban I. M., Basovsky V. G. Generation of an acoustic field by a fluid flow over two-dimensional cylindrical cavities of various depth	39
Denysov K. I., Pichkur V. V. Stability analysis of solutions of a linear matrix differential equation with constant coefficients	49
Dimitrieva N. F. Modeling of the vortex structure inside a ventilated cavity	56
Kuz V. V., Shatyрко A. V. Automatic identification of musical instruments	62
Kuzmenko V. V., Trotsenko YA. P. Modeling of acoustic wave propagation in a planar waveguide with bends.....	70
Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Model of programmed micro- and nanostructures.....	80
Nahaichenko O. O. Physico-mathematical modeling of semiconductor nanodevices.....	85
Nechuiviter O. P., Ivanov V. V., Shnitsar A. S., Hishchak O. R., Zaborny A. V. Efficient numerical integration of two-dimensional highly oscillating functions of general type.....	91
Overko V. S. The influence of the torsion motion of left ventricle (LV) on features of blood flow	104
Pylypchenko I. YU., Dovgyi S. O., Cherniy D. I. Modeling of the flow around an aircraft equipped with Brix-Kort nozzle system	115
Savchenko YU. M., Semenov YU. A., Savchenko G. YU. Nonlinear gravity waves in the water stream in the channel with complex geometry of the bottom covered by broken ice.....	124
Schek L., Vilchevskaya E. N., Müller W. H. Computational analysis of the deformation behavior of 4D-printed liquid crystal elastomers under change of temperature.....	134
Filonov V. V., Voropaiev G. O. Energy features of the classical mixture model for estimating detonation parameters in a limited volume.....	149

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 2 (9) ' 2025

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.

Технічний редактор Нижник С. Д.

Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук, доц. Набока О. О.

Мовні рецензенти української мови: асистент Католик І. М.,

канд. фіз.-мат. наук, доц. Софронова М.С.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».

Кафедра вищої математики.

Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 19.09.2025 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 1085. Ціна договірна.

Друк : Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Залізнична, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК № 5493 від 22.08.2017 р.