



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХНУ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 1 (8)'2025

**Харків
2025**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№1 (8)'2025

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Харків
НТУ «ХПІ»
2025**

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No.1 (8)'2025

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

**Kharkiv
NTU "KhPI"
2025**

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2025. — № 1 (8). — 138 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проєктування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців у галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Ідентифікатор медіа R30-02563 згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 11.01.2024 №333.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров Є. Є., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Кошовий Г. І., канд. фіз.-мат. наук, доц., ІРЕ НАНУ, Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Мюллер В. Г., д-р прир. наук, проф., Берлінський технічний університет, Німеччина;

Ніколаєв О. Г., д-р фіз.-мат. наук, проф., НАУ «ХАІ», Україна;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук, НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 5 від 18 квітня 2025 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Koshoviy G., PhD, Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., IRE of NASU, Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Müller W. H., Dr. rer. Nat, Dr.h.c., Prof., Technische Universität Berlin, Germany;

Nikolaev O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NAU «KhAI», Ukraine;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershin I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

В. А. ВАНІН, Г. І. КОШОВИЙ**МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗСІЮВАННЯ Е-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ ДВОМА ПРОВІДНИМИ СТІРЧКАМИ З ІМПЕДАНСОМ**

Проведено детальне дослідження задачі розсіювання E – поляризованої хвилі компланарною системою з двох провідних стрічок з імпедансом. Основна увага приділена кільком важливим методам її розв’язку, як аналітичним, так і прямим чисельним. Спершу до даної задачі розсіювання застосовано класичний метод інтегрального рівняння, щоб знайти загальну математичну модель у вигляді системи особливих інтегральних рівнянь першого роду. Далі до загальної коректної математичної моделі розсіювання провідними стрічками з імпедансом застосовано асимптотичний метод Релея. Як результат, отримаємо розв’язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво звужує частотний діапазон. Щоб отримати розв’язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот застосуємо два відомих та добре обґрунтованих прямих чисельних методи. Це різновиди методу механічних квадратур з цільовим вибором вузлових точок та точок колокацій. Досліджується вплив довжини хвилі та кута її падіння на розподіл параметру струму в структурі із двох стрічок.

Ключові слова: розсіювання електромагнітної хвилі, стрічкові системи, сингулярні інтегральні рівняння, чисельні методи.

V. A. VANIN, G. I. KOSHOVY**METHODS OF STUDYING THE SCATTERING OF AN E-POLARIZED WAVE BY TWO CONDUCTIVE RIBBONS WITH IMPEDANCE**

A detailed study of the scattering problem of the E – polarized wave from coplanar system of two conductive strips with impedance is presented. The main attention is paid to several important methods of the scattering problem solution, both analytical and direct numerical. Firstly, the classical integral equation method is applied to this problem in order to find the general mathematical model as a system of the first kind singular integral equations. Secondly, the remarkable Rayleigh method is applied to the general correct mathematical model of scattering from electrical narrow strips with impedance. As a result, we obtain a solution of the scattering problem in an explicit analytical form, which significantly narrows the frequency range. To find a solution to the scattering problem in the entire frequency range, we ought to apply two well-known and well-grounded direct numerical methods. These are varieties of the mechanical quadratures method with a targeted selection of node points and points of collocations. The influence of the wavelength and the angle of its incidence on the distribution of the current parameter in the structure of two strips is studied.

Key words: electromagnetic wave scattering, strip systems, singular integral equations, numerical methods.

Вступ. У сучасній радіоелектроніці використовують багато пристроїв, де у якості одного з основних вузлів присутні *різного татунку ґратки*, впорядковані за *рівновіддаленим принципом* [1, 2]. Це давало можливість теоретичне дослідження розсіювання *електромагнітної (ЕМ) хвилі* ґратками обмежувати *періодичним законом розміщення її елементів*. При цьому, з огляду на частотний діапазон використання зазначених пристроїв, дослідження обмежувалося ідеальною провідністю металів з яких виготовлялись ґратки [3 –6]. Розвиток радіоелектроніки привів до надвисоких (3 – 30 ГГц) і навіть надзвичайно високих (30 – 300 ГГц) частотних діапазонів, що вимагає більш досконалих електронних пристроїв. Поліпшення наявних пристроїв може бути, зокрема, за рахунок врахування *неідеальної провідності металу*, з якого виготовлені певні їх елементи. Вказане поліпшення можна також здійснити і за рахунок нових способів впорядкування елементів ґратки, які ґрунтуються на законах творення різноманітних нід не щільних досконалих множин [6 – 11].

У теоретичному плані врахування не ідеальної провідності металу приводить до ускладнення задачі і необхідності розробки нових підходів до побудови *коректних математичних моделей розсіювання хвиль* просто провідними стрічковими ґратками. Так, коли мова йде про *розсіювання E – поляризованої хвилі*, то у випадку ідеально провідних стрічок у якості вихідної математичної моделі розсіювання маємо *найпростішу граничну задачу Діріхле* для класичного хвильового рівняння [12, 13]. Для випадку неідеальної провідності стрічок виникає найскладніша з трьох можливих типів граничних задач – змішана гранична задача для того ж хвильового рівняння [14 – 16].

Дана стаття присвячена дослідженню задачі розсіювання E – поляризованої хвилі двома *провідними стрічками з імпедансом*, розташованими на паралельних площинах. Основна увага буде приділена кільком важливим методам її розв’язку, як аналітичним, так і прямим чисельним. Спершу до загальної коректної математичної моделі розсіювання провідними стрічками з імпедансом буде застосовано *асимптотичний метод Релея*. Як результат, отримаємо розв’язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво звужує частотний діапазон. Щоб отримати розв’язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот, часто застосовуються відомі та добре обґрунтовані *прямі чисельні методи*. Це *метод механічних квадратур* та *метод дискретних особливостей*, розроблених вітчизняними науковцями [4, 17, 18, 19]. Відмітимо успішне застосування *методу скінчених різниць* для задач дифракції на біперіодичних ідеально провідних просторових конструкціях з використанням *рівнянь Максвелла* [20, 21]. Вони добре себе зарекомендували при дослідженні двовимірних задач розсіювання хвиль ідеально провідними екранами.

Класичний метод інтегрального рівняння у задачі розсіювання E -поляризованої хвилі провідними стрічками з імпедансом. Використовуючи *класичний метод інтегрального рівняння* безпосередньо, спочатку отримаємо змішане *інтегрально-диференціальне рівняння*, як це зроблено для випадку плоскої ґратки у науковій

публікації [15]. Далі відділимо диференціальну частину від інтегральної та скористаємось *методом малого параметра*, що приведе до значного спрощення задачі розсіювання. У результаті застосування такої модифікації класичного методу інтегрального рівняння отримаємо коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі компланарною системою електронно-провідних стрічок з імпедансом, що подана у статті [16]. В останній науковій публікації проведено детальне дослідження процесу так званої «регуляризації», коли здійснюється перехід від особливих інтегральних рівнянь першого роду до інтегральних рівнянь другого роду. Цей перехід ґрунтується на відомій *формулі обернення*, отриманій *К. Карлеманом* ще 1922 року (деталі можна знайти у монографії [13]).

Наведемо основні моменти зазначеної вище модифікації методу інтегрального рівняння для повної інформативності даної статті, зупиняючись тільки на отриманні системи з особливих інтегральних рівнянь першого роду. Отже, при відділенні диференціальної частини від інтегральної у змішаному інтегрально-диференціальному рівнянні, маємо досить прості та добре вивчені *диференціальні рівняння другого порядку*:

$$\mu^2 \cdot \Psi_m''(x) + k^2 (\mu^2 - 1) \cdot \Psi_m(x) = 4ik^2 (1 + \mu \cdot q_2) \cdot \exp\{ik[q_1(x_m + x) + q_3 z_m]\},$$

$$(x_m, z_m) \in S_m, \quad m = 1, 2. \quad (1)$$

Літера k позначає хвильове число, параметр $\mu = w/\chi$ є безрозмірним, бо величина w є поверхневим імпедансом матеріалу, з якого виготовлені стрічки, а грецька літера χ позначає хвильовий опір середовища навколо стрічок. Геометричні параметри $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = b$, $z_2 = c$, що визначають положення центрів стрічок, показані на рис. 1.

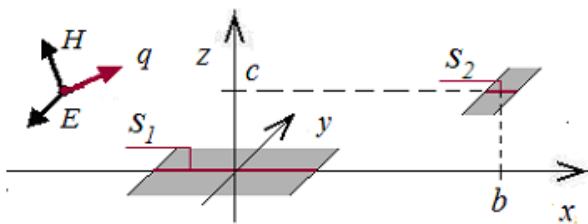


Рис. 1 – Розсіювання E – поляризованої хвилі компланарною системою з двох стрічок.

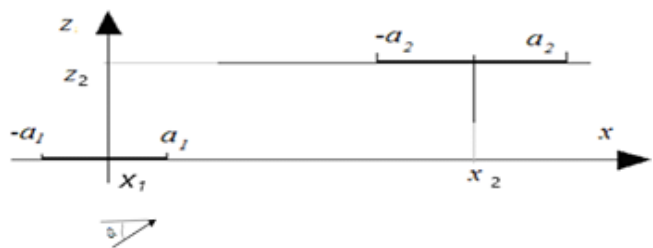


Рис. 2 – Поперечний перетин двострічкової системи.

Невідомими функціями у цих диференціальних рівняннях другого порядку будуть інтегральні перетворення функцій, що визначають поздовжні складові щільності поверхневих струмів на стрічках. Вони мають такий вигляд:

$$\Psi_m(x) = \sum_{n=1}^2 \int_{-a_n}^{a_n} \psi_n(x') \cdot H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x_n + x' - x_m - x)^2 + (z_n - z_m)^2}\right) dx', \quad x_1 = 0, \quad x_2 = b, \quad (2)$$

де символ $H_0^{(1)}(z)$ позначає *циліндричну функцію Ганкеля* першого роду нульового порядку; a_n визначають півширину відповідної стрічки. У правій частині диференціальних рівнянь (1) містяться дві складові напрямного вектора ЕМ хвилі, яка набігає на стрічкову систему. Тобто компоненти $q_1 = \cos \phi_0$, $q_3 = \sin \phi_0$, де ϕ_0 – кут відносно осі Ox , під яким набігає зазначена ЕМ хвиля.

Коли знайдемо потрібний єдиний розв'язок диференціального рівняння (1) за *методом збурення* з використанням степеневих рядів, то інтегральні перетворення (2) приведуть до відповідної системи особливих інтегральних рівнянь першого роду [15, 16]. Вони вже будуть визначати потрібні функції, за допомогою яких отримаємо поздовжні складові щільності поверхневих струмів на стрічках. Так отримаємо коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої ЕМ хвилі компланарною системою з двох електронно-провідних стрічок з імпедансом. Її можна записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$\Psi_m(x) = 4i \cdot \exp\{ik[q_1(x_m + x) + q_3 z_m]\} \cdot (q_3 \mu - 1)^{-1}, \quad m = 1, 2. \quad (3)$$

З огляду на інтегральні перетворення (2), ці рівняння складатимуть систему особливих інтегральних рівнянь першого роду. Щоб мати більш зручну для подальших практичних застосувань зазначених вище методів математичну модель, перейдемо до безрозмірних величин. Для цього множимо обидві змінні x і x' на хвильове число k . Тоді після акуратної заміни цих змінних на нові приходимо до наступної системи *сингулярних інтегральних рівнянь (CIP)* першого роду:

$$\sum_{n=1}^2 \int_{-1}^1 j_n(t) \cdot H_0^{(1)} \left(\sqrt{(k(x_n - x_m) + \alpha_m \tau - \alpha_n t)^2 + k^2(z_n - z_m)^2} \right) dt = 4i \frac{\exp[ik(q_1 x_m + q_3 z_m)]}{q_3 \mu - 1} \cdot \exp(iq_1 \alpha_m \tau),$$

$$|\tau| < 1, \quad m = 1, 2. \quad (4)$$

У якості нових невідомих функцій маємо:

$$j_n(t) = a_n \psi_n(x_{n0} - \alpha_n t) / \left(\sqrt{1 - t^2} \right), \quad \alpha_n = k a_n.$$

До такої системи вже може застосовуватись *прямий чисельний метод дискретних особливостей*, що є певною його перевагою над іншими чисельними методами. Зокрема, для *методу механічних квадратур* ще потрібно виділяти логарифмічну особливість та використовувати відому квадратурну формулу [4]. Звернемо увагу, що для побудови розв'язку для (4) не обов'язково виокремлювати кореневу особливість. Чисельні методи можливо застосовувати безпосередньо до (4).

Для тестування алгоритмів чисельних методів та перевірки правильності розв'язку задачі розсіювання важливо мати його у явному аналітичному вигляді. Зрозуміло, що це здійснюється при певних припущеннях, які можуть значно звужити частотний діапазон застосування асимптотичних математичних моделей. Така можливість була реалізована при розробці теорії взаємодії плоскої електромагнітної хвилі з електрично-вузькими стрічками [15, 16, 20]. Тому зараз приділимо певну увагу розробці асимптотичної моделі взаємодії E – поляризованої хвилі електрично-вузькими стрічками з імпедансом.

Вузькострічкова модель розсіювання E -поляризованої хвилі провідними стрічками з імпедансом.

Основним припущенням при розробці даної асимптотичної моделі є те, що довжина хвилі має бути великою у порівнянні з шириною стрічок, а стрічки достатньо віддалені одна від іншої. Тому дану асимптотичну модель можемо вважати довгохвильовою, а систему стрічок слабо наповненою, як у випадку з ґратками [14]. Основним методом буде класичний метод Релея, який добре себе зарекомендував при дослідженні задач розсіювання хвиль ідеально провідними стрічками чи щілинами у ідеально провідному екрані [11, 12]. Для нашої задачі розсіювання вже є правильна математична модель у вигляді системи особливих інтегральних рівнянь першого роду (4). Тому слід приділити увагу дослідженню ядерних функцій та функцій у правих частинах зазначеної системи. Це дослідження визначає вид подання шуканої вихідної функції довгохвильової моделі. Почнемо з діагональних ядерних функцій, що визначаються відомою циліндричною функцією від аргументу $\alpha_n |\tau - t|$. Звідси стає очевидно логарифмічна особливість діагональних ядерних функцій у разі співпадіння внутрішньої змінної із зовнішньою. Її варто виокремити, скориставшись відомим розвиненням циліндричної функції в майже степеневий ряд:

$$H_0^{(1)}(\alpha |u|) = \frac{2i}{\pi} \left\{ \ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha |u|}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} - \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Тут постійна $\ln \gamma = C \approx 0,5772\dots$ є *постійною Ейлера*. Відомі функції у правій частині визначаються звичайними експоненціальними функціями, що мають гарне і добре знане розвинення у степеневий ряд.

Застосуємо класичний метод Релея, припускаючи, що безрозмірні частотні параметри $\alpha_n = k a_n$ є достатньо малими, щоб можна було обмежуватись кількома доданками в рядах, що представляють відомі та невідомі величини. Слід також зважати на те, що стрічки достатньо віддалені одна від іншої. Зокрема, використовуючи зазначені вище розвинення діагональних ядерних функцій в ряд (5) та відомі функції у правій частині, приходимо до такої системи особливих інтегральних рівнянь першого роду:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 j_{10}(t) \cdot \ln \frac{\gamma \alpha_1}{2i} |\tau - t| dt + j_{20} \cdot R_{12} = \frac{2\pi}{q_3 \mu - 1}, \quad |\tau| < 1; \\ j_{10} \cdot R_{21} + \int_{-1}^1 j_{20}(t) \cdot \ln \frac{\gamma \alpha_2}{2i} |\tau - t| dt = \frac{2\pi}{q_3 \mu - 1} \cdot \exp[ik(q_1 b + q_3 c)]. \end{cases} \quad (6)$$

Тут нові невідомі функції $j_{m0}(t)$, $m = 1, 2$ визначають головні доданки вихідних функцій даної довгохвильової математичної моделі. Введені для спрощення також невідомі та відомі сталі:

$$j_{m0} = \int_{-1}^1 j_m(t) dt, \quad R_{12} = R_{21} = \pi \cdot H_0^{(1)}(\rho_{12}) / 2i, \quad \rho_{12} = k \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ця система найпростіших особливих інтегральних рівнянь першого роду вже має явний аналітичний розв'язок, який можна отримати за тією ж схемою, що і у випадку задачі розсіювання однією стрічкою [21]. От-

же, скориставшись *формулою обернення Карлемана*, отримаємо явний аналітичний розв'язок системи особливих інтегральних рівнянь першого роду (6) у $j_{m0}(x) = j_{m0} : (\pi\sqrt{1-x^2})$. Невідомі сталі величини j_{m0} досить просто знайти з системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} j_{10} \cdot \ln \frac{\gamma\alpha_1}{4i} + j_{20} \cdot R_{12} = \frac{2\pi}{q_3\mu-1}, \\ j_{10} \cdot R_{12} + j_{20} \cdot \ln \frac{\gamma\alpha_2}{4i} = \frac{2\pi}{q_3\mu-1} \cdot \exp[ik(q_1b + q_3c)]. \end{cases} \quad (7)$$

Отже, маємо розв'язок задачі розсіювання E – поляризованої хвилі двома провідними стрічками з імпедансом у явному аналітичному вигляді, який дозволяє проводити певні дослідження [15, 16, 20]. Основним недоліком довгохвильової математичної моделі розсіювання E – поляризованої хвилі двома достатньо віддаленими стрічками є те, що частотний діапазон суттєво звужується. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот застосуємо два відомих та добре обґрунтованих прямих чисельних методи. Це метод механічних квадратур та метод дискретних особливостей, що розроблені вітчизняними науковцями.

Чисельні методи. Алгоритмізація. Застосуємо квадратурні формули для обчислення інтегралів у системі СІР першого роду (4) використовуючи квадратурні вузли:

$$t_l = -\cos[(l-1/2) \cdot \pi / N], \quad l = 1, \dots, N,$$

та обчислюючи їх на множині точок коллокацій:

$$\tau_{k1} = -\cos[(k1-1/2+s) \cdot \pi / N], \quad k1 = 1, \dots, N, \quad s = 0.25,$$

тоді отримаємо для значень $n, m = 1, 2$:

$$\int_{-1}^1 H_0^{(1)}(\sqrt{(k(x_{n0}-x_{m0})+\alpha_m\tau_{k1}-\alpha_nt)^2+k^2(z_{n0}-z_{m0})^2}) \cdot \psi_m(t) dt \approx \sum_{l=1}^N Anm_{k1,l} \cdot \psi_{m_l}.$$

Введемо компоненти чотирьох квадратних матриць:

$$Anm_{k1,l} = \frac{2}{N} H_0^{(1)}\left(\sqrt{(k(x_{n0}-x_{m0})+\alpha_m\tau_{k1}-\alpha_nt_l)^2+k^2(z_{n0}-z_{m0})^2}\right), \quad (8)$$

та матриці взаємних відстаней для вузлових точок та точок колокацій:

$$drnm_{k1,l} = \sqrt{(k(x_{n0}-x_{m0})+\alpha_m\tau_{k1}-\alpha_nt_l)^2+k^2(z_{n0}-z_{m0})^2}.$$

Позначимо також вектори правих частин

$$Fm_{k1} = 4i \frac{\exp[ik(q_1x_{m0} + q_3z_{m0})]}{q_3\mu-1} \cdot \exp(iq_1\alpha_m\tau_{k1}),$$

що приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для СІР першого роду (4) відносно невідомих компонент векторів $\psi_{m_l} = \psi_m(\tau_l)$:

$$\sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^N Anm_{k1,l} \cdot \psi_{m_l} = Fm_{k1}, \quad n = 1, 2.$$

Таку систему для СІР першого роду (4) представимо в блочному вигляді як

$$\begin{cases} A11 \cdot \psi 1 + A12 \cdot \psi 2 = F1, \\ A21 \cdot \psi 1 + A22 \cdot \psi 2 = F2 \end{cases} \quad (9)$$

або в стандартній формі

$$A \cdot \psi = F, \quad (10)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi 1 \\ \psi 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F1 \\ F2 \end{pmatrix}.$$

Виділяючи сингулярні (з логарифмічною особливістю в (8) з урахуванням (5)) та регулярні складові у блочних матрицях $A_{nn} = S_{nn} + R_{nn}$, систему (9) перепишемо у вигляді, зручному для побудови чисельного алгоритму:

$$\begin{cases} (S11 + R11) \cdot \psi 1 + A12 \cdot \psi 2 = F1, \\ A21 \cdot \psi 1 + (S22 + R22) \cdot \psi 2 = F2. \end{cases}$$

Введемо матриці

$$S = \begin{pmatrix} S11 & 0 \\ 0 & S22 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R11 & A12 \\ A21 & R22 \end{pmatrix},$$

тоді (10) можна переписати у такому вигляді:

$$S \cdot J + R \cdot J = F.$$

Відповідно до перетворення Карлемана, дискретний аналог розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з логарифмічною особливістю має вигляд:

$$\psi = (I + S^{-1} \cdot R)^{-1} \cdot S^{-1} \cdot F. \quad (11)$$

Елементи матриці A в (10), обчислюються в (8) через значення функції Ганкеля 1 роду нульового порядку, яка є фундаментальним розв'язком рівняння Гельмгольца.

Систему (9) можна досліджувати, об'єднавши її в одну систему (10) або розглядаючи її як систему для двох невідомих векторів з матричними коефіцієнтами. Тоді, використовуючи аналог *формули Крамера* для систем з матричними коефіцієнтами з векторними невідомими, її розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (A11 \cdot A22 - A21 \cdot A12)^{-1} \cdot (A22 \cdot F1 - A12 \cdot F2), \\ \psi_2 &= (A11 \cdot A22 - A21 \cdot A12)^{-1} \cdot (A11 \cdot F2 - A21 \cdot F1). \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок (9) можливо записати як

$$\begin{aligned} \psi_2 &= (A22 - A21 \cdot A11^{-1} \cdot A12)^{-1} \cdot (F2 - A21 \cdot A11^{-1} \cdot F1), \\ \psi_1 &= -A11^{-1} \cdot A12 \cdot \psi_2 + A11^{-1} \cdot F1. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналіз особливостей чисельного методу. Проведене чисельне дослідження розв'язків СЛАР у вигляді (11) при різних N в довгохвильовому наближенні для двострічкової системи (рис. 1 та рис. 2) при їх ширині $2 \cdot a_1 = 2 \cdot a_2 = 2$. Координати центрів двох стрічок $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = b$, $z_2 = c$. Поперечний перетин двострічкової системи має вигляд двох компланарних сегментів.

Результати розрахунків, отриманих за допомогою (11) та за формулами (12), (13), співпадають. Наведемо деякі характеристики дискретизованої моделі СІР та результати порівняння розрахунків з асимптотичною поведінкою розподілу густини струму на стрічках. Так, матриці відстаней $drnm$ мають вигляд (рис. 3) при $n, m = 1, 2$, $N = 25$.

Помітне діагональне домінування елементів матриць відстаней в межах однієї стрічки і помірне симетричне заповнення загальної матриці для відстаней між різними стрічками. Обчислюємо на них значення елементів блочних матриць Anm , апроксимуючих ядра СІР з використання функцій Ганкеля (рис. 4).

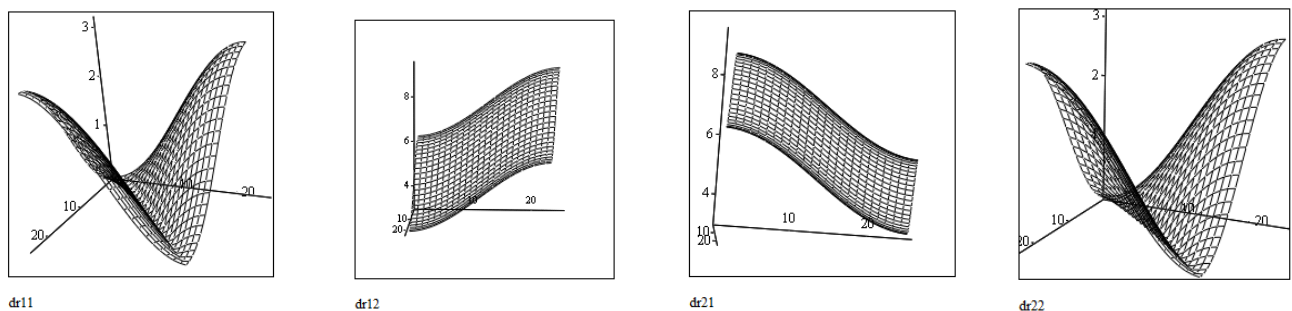
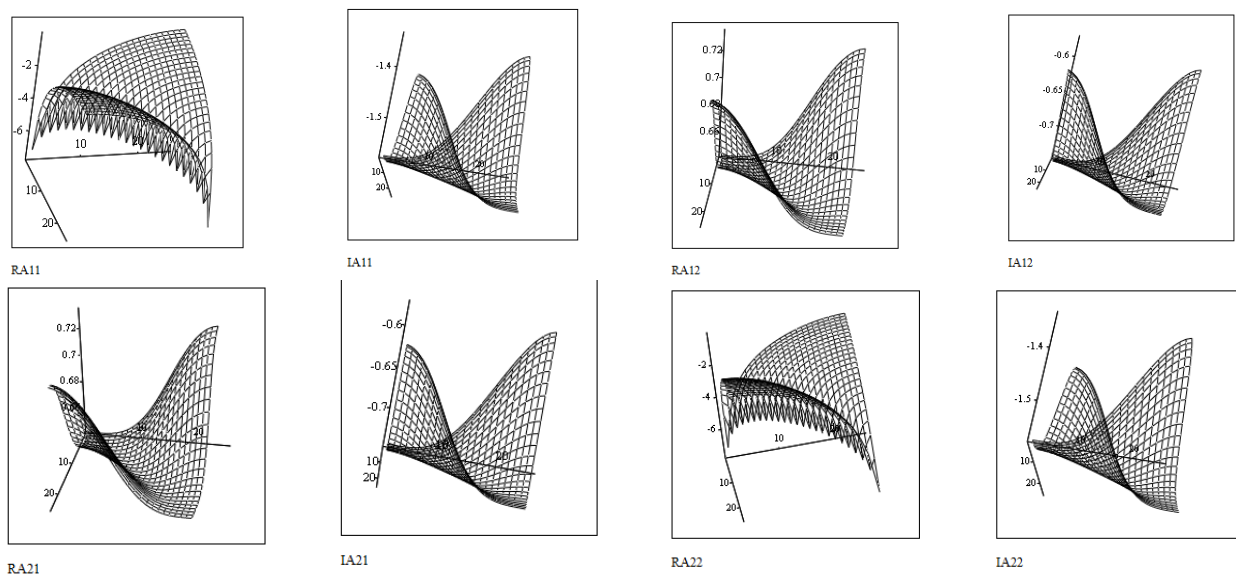
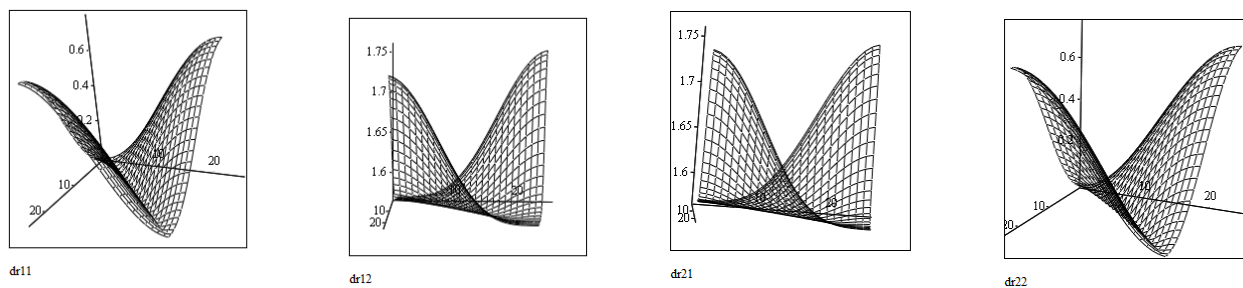
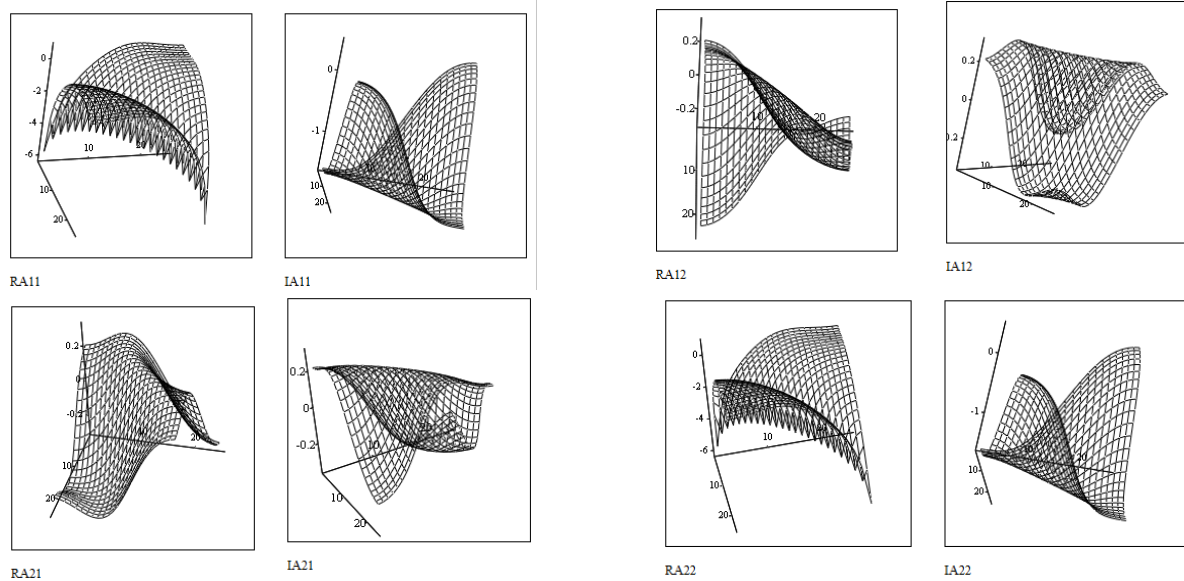


Рис. 3 – Матриці відстаней.

Відмічаємо домінування діагональних елементів об'єднаної матриці, як і в матриці відстаней. Особливості блочних матриць в (9) відслідковуються по зображенням дійсних і уявних частин.

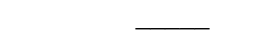
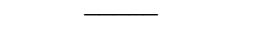
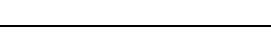
Аналіз дійсних ($RA11$, $RA22$, $RA12$, $RA21$) та уявних ($IA11$, $IA22$, $IA12$, $IA21$) складових у структурі блочних матриць (рис. 4) показує наявність діагонального домінування, що позитивно впливає на властивості чисельного методу для дослідження СЛАР в (9). У випадку, коли $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $z_2 = c$ (паралельне розташування стрічок), всі блочні матриці в (2) мають діагональне домінування, в загальна матриця A системи (10) має три домінуючі діагоналі, рознесені симетрично головної діагоналі (рис. 5, а, рис. 5, б).



$\lambda = 16 \cdot a_1$. На рис. 6, в – рис. 17, в – порівняння розрахунків ($M\psi C1, M\psi C2$ – 1, 2 стрічка) з асимптотичним розподілом при ортогональному падінні електромагнітної хвилі.

Досліджуються наступні режими розсіювання електромагнітної хвилі на стрічках з імпедансом у одній площині та паралельних площинах (табл. 1).

Таблиця 1 – Режимы розсіювання електромагнітної хвилі

1. Далеке розташування стрічок у одній площині	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 10, z_2 = 0$	
2. Близьке розташування стрічок у одній площині	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 3, z_2 = 0$	
3. Далеке розташування стрічок (компланарні)	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 10, z_2 = 4$	
4. Близьке розташування стрічок (компланарні)	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 3, z_2 = 4$	
5. Розташування стрічок з перекриттям (компланарні)	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 1, z_2 = 4$	
6. Паралельне розташування стрічок	$x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 0, z_2 = 4$	

Розглянемо послідовно наведені структури.

1. Далеке розташування стрічок у одній площині – $x_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 10, z_2 = 0$.

Віддалені стрічки мають слабкий взаємний вплив. Розподіл характеристик струмів при кутах падіння хвилі на 1 та 2 стрічці приблизно співпадають при віддзеркаленні (як для ізолюваних). (рис. 6, а, б), для довжини $\lambda = 4 \cdot a_1$. У випадку, коли $\lambda = 16 \cdot a_1$, реалізується симетрія віддзеркалення відповідно до зміни кутів падіння (рис. 7 а, б). Результати розрахунків близькі до асимптотичних значень (рис. 7, в).

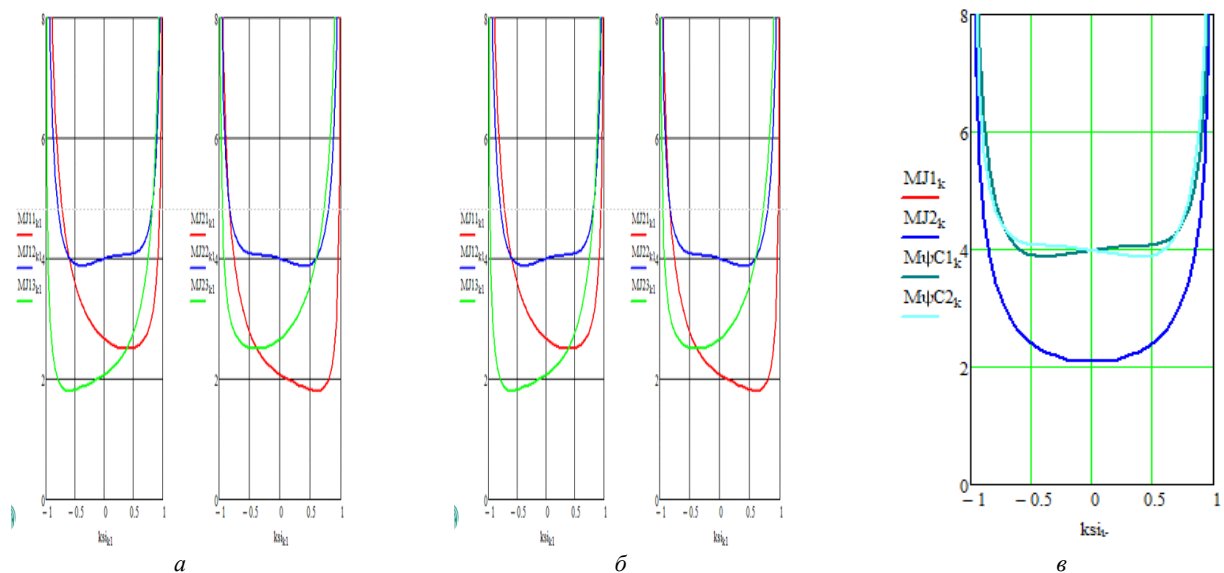


Рис. 6 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1, \phi_0 = \pi/4, \phi_0 = \pi/2, \phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

При великій відстані між стрічками вплив слабкий і зберігається симетрія при різних кутах падінні довгої електромагнітної хвилі.

Зближення стрічок в одній площині призводить до посилення взаємного впливу, кутова симетрія зберігається. Розподіл на 1-й стрічці при $\phi_0 = \pi/4$ співпадає при дзеркальному відображенні з розподілом на 2-й стрічці при $\phi_0 = 3\pi/4$, і навпаки (рис. 8, а, б, рис. 9, а, б).

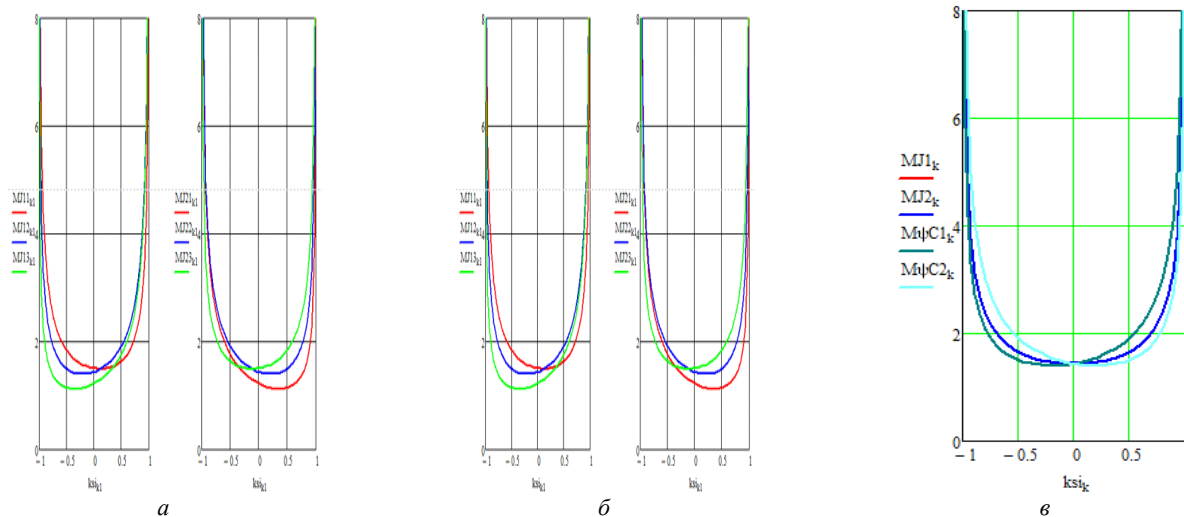


Рис. 7 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): *a* – 1 стрічка; *б* – 2 стрічка; *в* – порівняння з асимптотичним розподілом.

2. Близьке розташування стрічок у одній площині – $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z_2 = 0$.

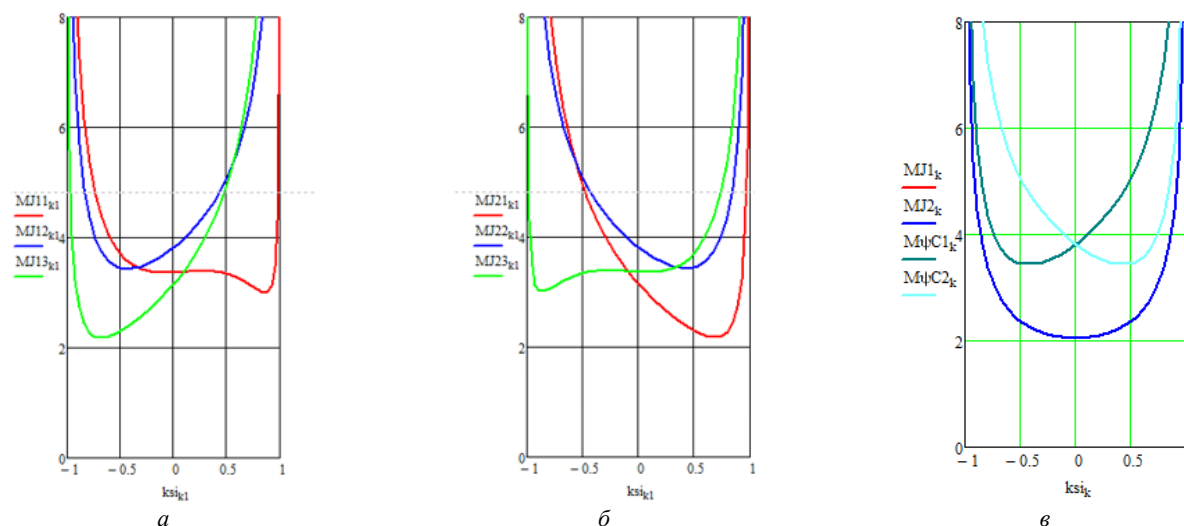


Рис. 8 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): *a* – 1 стрічка; *б* – 2 стрічка; *в* – порівняння з асимптотичним розподілом.

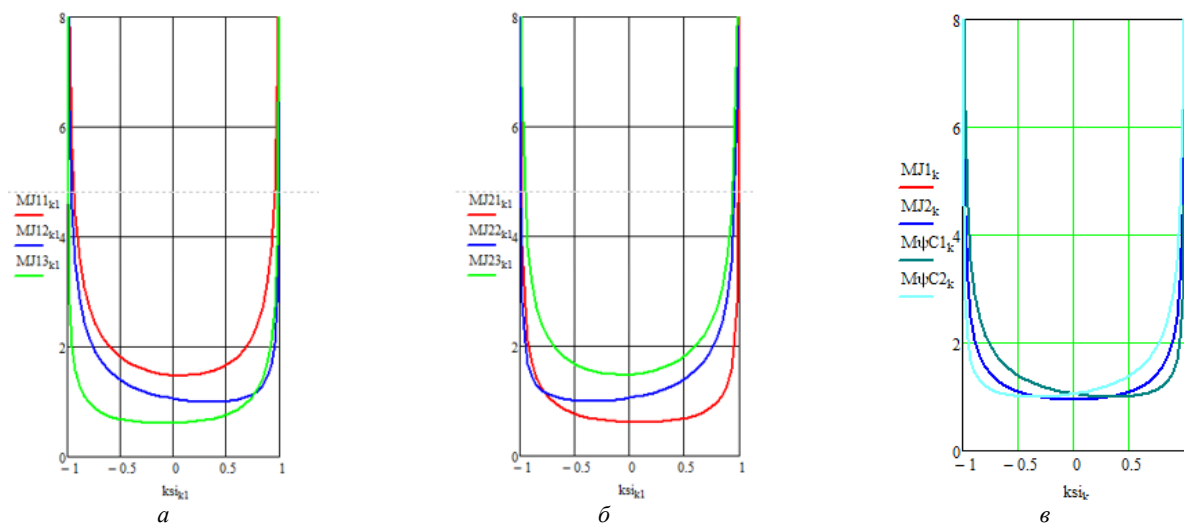


Рис. 9 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): *a* – 1 стрічка; *б* – 2 стрічка; *в* – порівняння з асимптотичним розподілом.

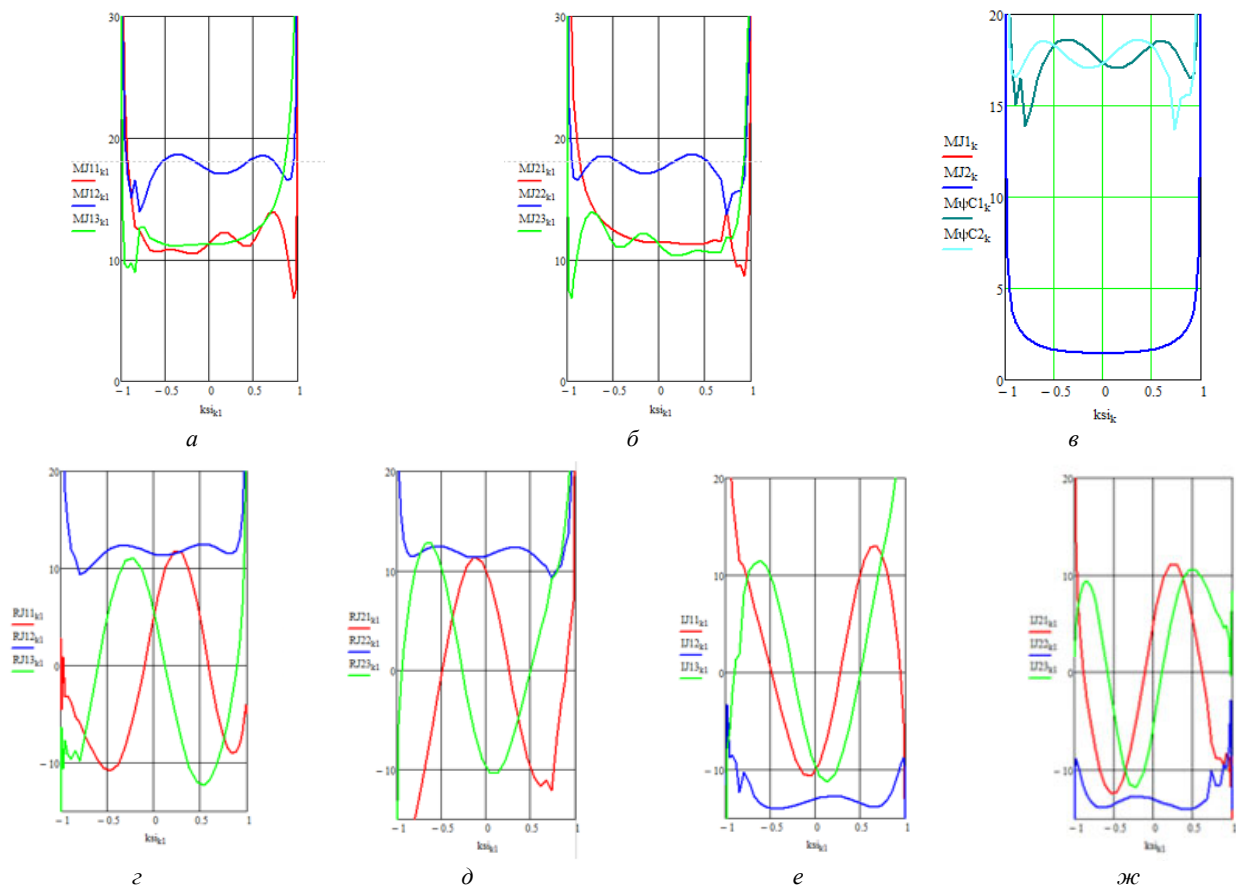


Рис. 10 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 1 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом; г, е – дійсні частини розподілу струмів на стрічках; д, ж – уявні частини розподілу струмів на стрічках.

При падінні короткої хвилі довжиною в половину ширини стрічки ($x_2 = 3$) величини розподілів струму збільшуються на порядок. Розподіли на стрічках при однакових неортогональних кутах падіння хвилі близькі (симетрія віддзеркалення). При нормальному падінні хвилі симетрія віддзеркалення у розподілі густини струму визначена взаємним впливом стрічок при близькому розташуванні в одній площині. Відзначимо при аналізі дійсних (рис. 10 г, е) та уявних (рис. 10 д, ж) частин розподілу струмів на стрічках наявність різних знаків у них на краях стрічок.

3. Далеке розташування стрічок (компланарні) – $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 10$, $z_2 = 4$.

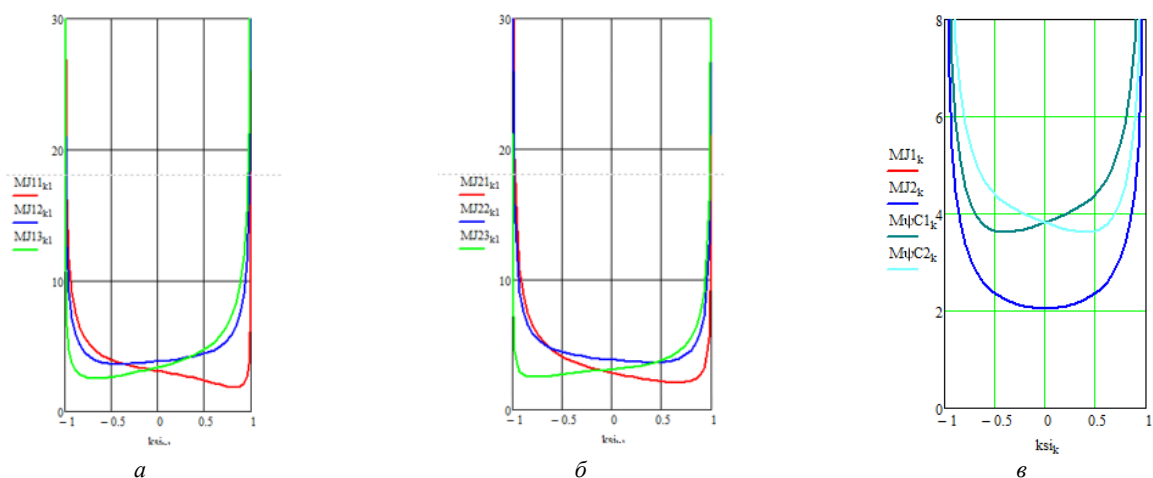


Рис. 11 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

На довжині $\lambda = 1 \cdot a_1$ зберігається симетрія віддзеркалення при нормальному падінні електромагнітної хви-

лі в розподілі струмів (рис. 11 а, б), але маємо значне відхилення від асимптотичного розподілу (рис. 10 в). Несиметрична конфігурація стрічок породжує несиметричний розподіл густин струмів при падінні різних довгих хвиль (рис. 11 а, б, рис. 12 а, б).

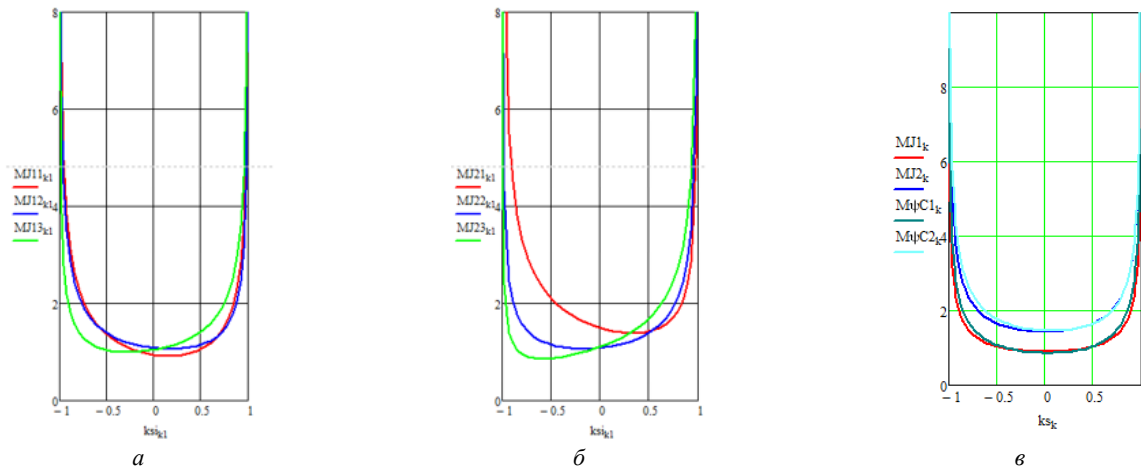


Рис. 12 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

Зближення компланарних стрічок посилює їх електромагніту взаємодію (рис. 13 а, б, рис. 14 а, б) при вказаних довжинах хвиль та кутах їх падіння.

4. Близьке розташування стрічок (компланарні) – $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z_2 = 4$.

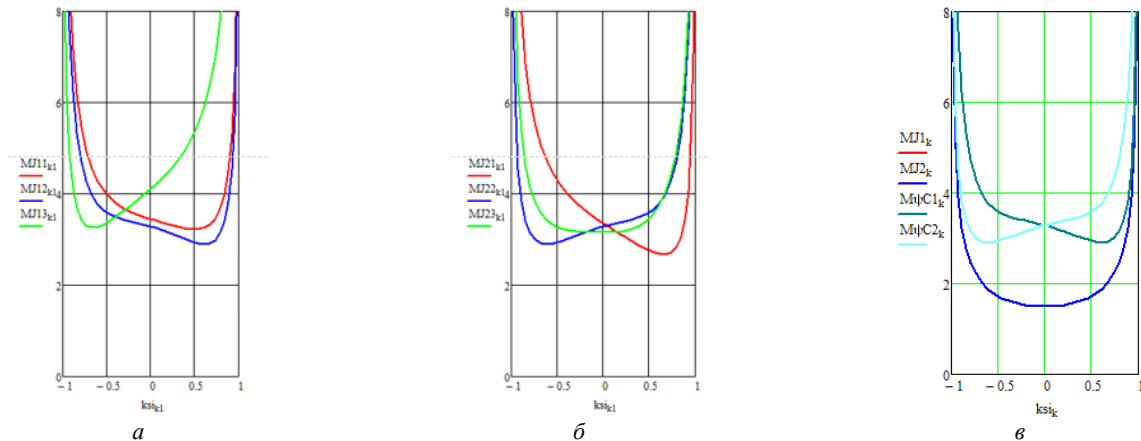


Рис. 13 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

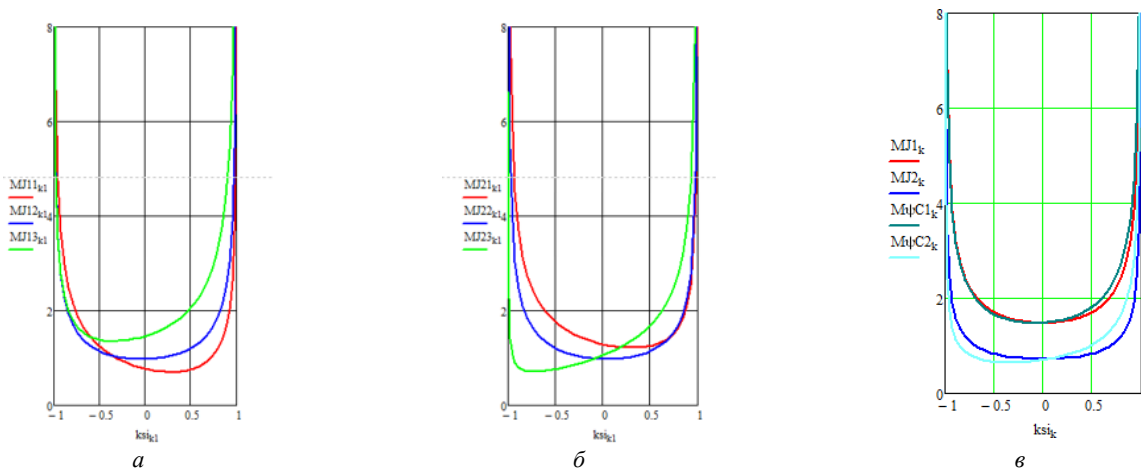


Рис. 14 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

Подальше зближення стрічок з перекриттям (рис. 15 а, б) приводить до суттєвої різниці в розподілах густини струму на них при $\lambda = 4 \cdot a_1$. Збільшення довжини хвилі, $\lambda = 16 \cdot a_1$ нівелює різницю в розподілах (рис. 16 а, б).

5. Розташування стрічок з перекриттям (компланарні) – $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z_2 = 4$.

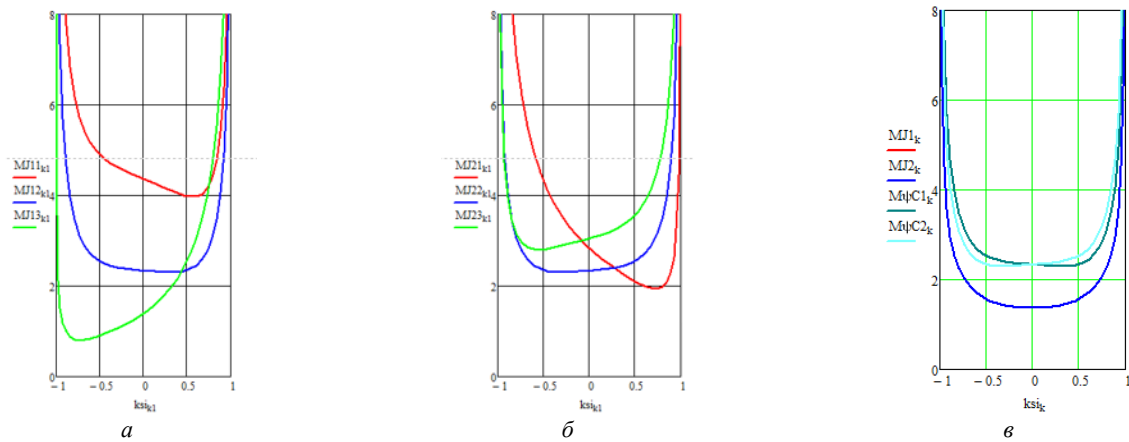


Рис. 15 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

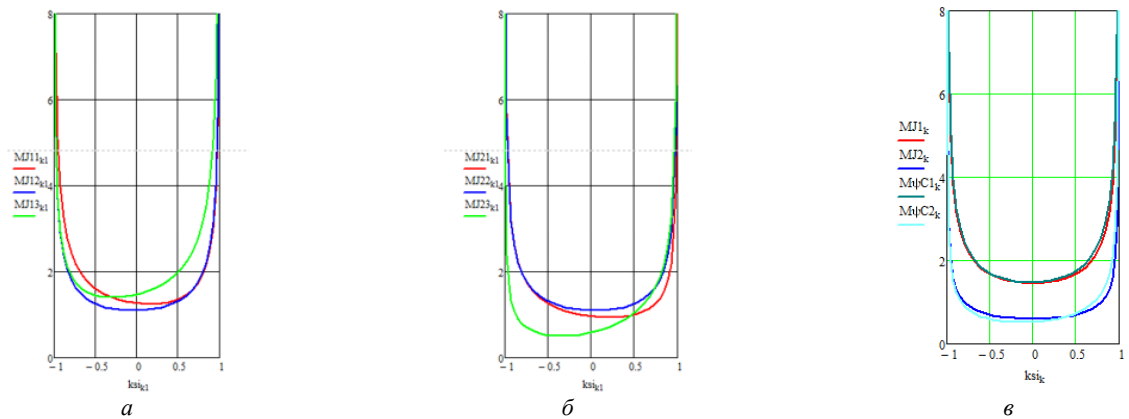


Рис. 16 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

При паралельному розташуванні однакових стрічок розподіли симетризуються по куту в межах кожної стрічки (рис. 17 а, б, $\lambda = 4 \cdot a_1$, рис. 18 а, б, $\lambda = 16 \cdot a_1$) і є близькі по відповідній формі між стрічками. Довга хвиля ($\lambda = 16 \cdot a_1$) породжує розподіли густини струму, які мало відрізняються при різних величинах перекриття стрічок (рис. 16 а, б та рис. 18 а, б).

6. Паралельне розташування стрічок – $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $z_2 = 4$.

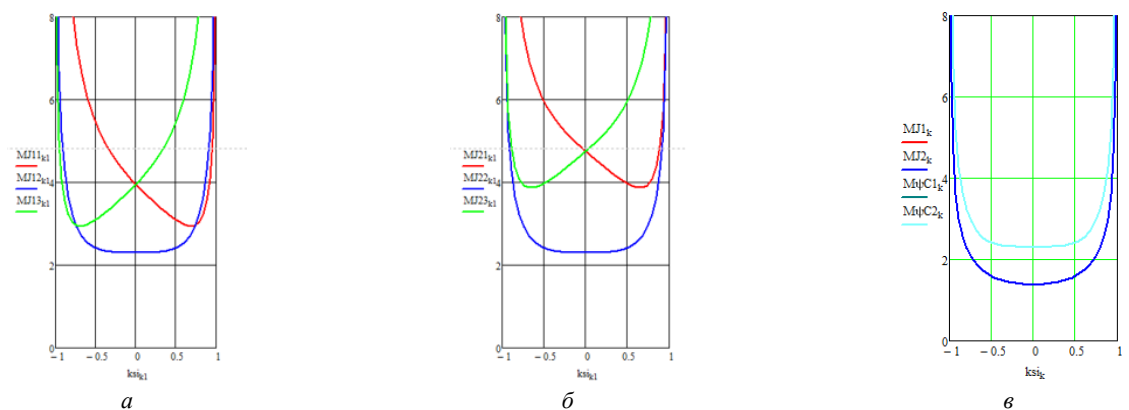


Рис. 17 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 4 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

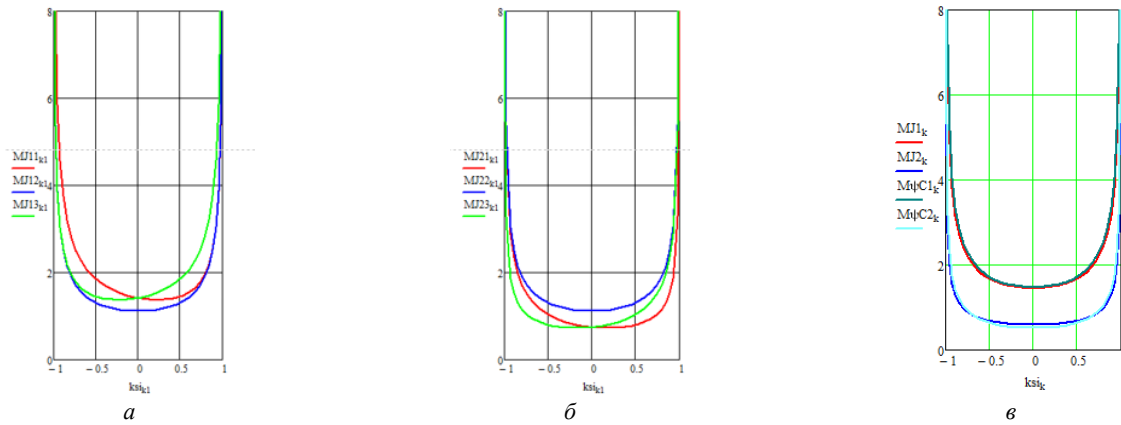


Рис. 18 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 16 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом.

Зменшення довжини хвилі приводить до суттєвого збільшення густини струму в розподілах на стрічках і формує значну його неоднорідність між краями стрічок (рис. 19 а, б) і помітне відхилення від асимптотичних значень (рис. 19 в). Якій така неоднорідність проявляється в розподілах дійсної і уявної частини величини густини струму у випадку розташування стрічок в одній площині (рис. 10 з, д, е, ж) та в різних з перекриттям (рис. 19 з, д, е, ж).

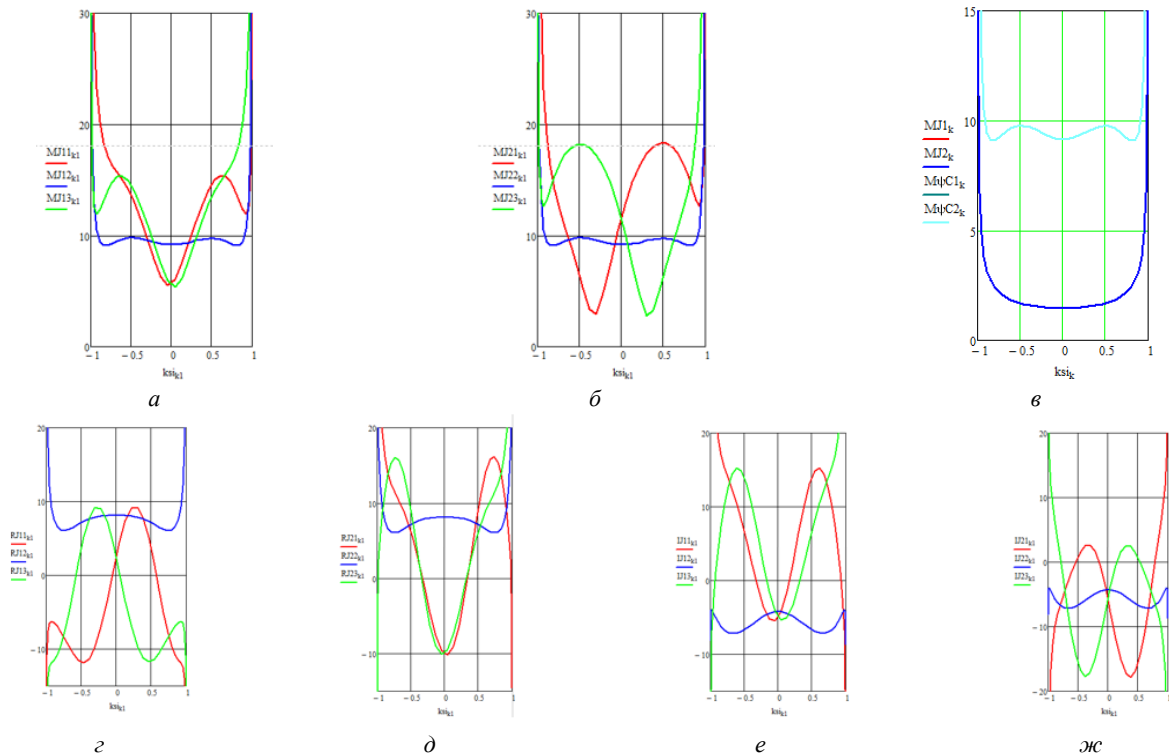


Рис. 19 – Розподіл густин струмів на двох стрічках ($\lambda = 1 \cdot a_1$, $\phi_0 = \pi/4$, $\phi_0 = \pi/2$, $\phi_0 = 3\pi/4$): а – 1 стрічка; б – 2 стрічка; в – порівняння з асимптотичним розподілом; з, е – дійсні частини розподілу струмів на стрічках; д, ж – уявні частини розподілу струмів на стрічках.

Перспективи подальших досліджень. Надалі необхідність дослідження полів, створених струмами на стрічках, в точках поза стрічками, приведе до відповідних квадратурних формул для інтегрального представлення параметрів електромагнітного поля.

Важливе дослідження резонансних умов для неперіодичних (фінітних) структур із стрічок ідеально провідних та з імпедансом при довільному розташуванні їх слідів в площині $y = 0$, визначення геометричного фактора резонансу.

Висновки. Для дослідження розсіявання E – поляризованої хвилі компланарною системою з двох стрічок з імпедансом спочатку використовується класичний метод інтегрального рівняння. В результаті виникне мате-

матична модель у вигляді системи змішаних інтегрально-диференціальних рівнянь. Далі відділенням диференціальної частини від інтегральної та користуючись методом малого параметра отримано коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі як системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду.

Для тестування алгоритмів для прямих чисельних методів та перевірки правильності розв'язку задач розроблена асимптотична модель розсіювання E – поляризованої хвилі електрично-взв'язаними стрічками з імпедансом. Важливо, що у цьому випадку розв'язок задачі розсіювання отримано у явному аналітичному вигляді. Зрозуміло, що це здійснювалось при певних припущеннях, які можуть значно звужити частотний діапазон застосування асимптотичних математичних моделей. Для знаходження розв'язку задачі розсіювання у всьому діапазоні частот були успішно застосовані два відомі та добре обґрунтовані прямі чисельні методи. Це метод механічних квадратів та метод дискретних особливостей, розроблені вітчизняними науковцями.

Ефективність чисельного методу пов'язана з досконалістю методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Відзначимо вплив дистанції між стрічками на розподіл параметра струму по ній в залежності від довжини хвилі та кута падіння.

Достатнє співпадіння розподілів параметрів струму по стрічці, отриманих в розрахунковій моделі та з асимптотичними по імпедансу значеннями.

Розподіл по ширині стрічки параметру струму аналізується по його величинам модуля та дійсної і уявної частини. Уявна частина є малою в порівнянні із дійсною.

Список літератури

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. М., Масалов С. О., Сологуб В. Г. Дифракція хвиль на ґратках. – Х. : Вид. Харьк. держ. ун-та, 1973. – 287 с.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. О., Масалов С. О., Сіренко Ю. К. Резонансне розсіювання хвиль. У 2 т. 1 т. Дифракційні ґратки. – Київ: Наукова Думка, 1986. – 232 с.
3. Литвиненко Л. М., Просвірнін С. Л. Спектральні оператори розсіювання у задачах дифракції хвиль на плоских екранах. – Київ : Наукова Думка, 1984. – 240 с.
4. Назарчук З. Т. Числові дослідження дифракції хвиль на циліндричних структурах. – Київ : Наукова думка, 1989. – 256 с.
5. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. О., Поединчук А. Ю., Сіренко Ю. К. Нові методи розв'язку прямих та обернених задач теорії дифракції. – Х. : Основа, 1997. – 283 с.
6. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – New York : W.H. Freeman and Company, 1983. – 655 p.
7. Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – Wiley. Chichester. 2003. – 435 p.
8. Edgar G. A., Measure. Topology and Fractal Geometry. – New York : Springer, 2008. – 543 p.
9. Jaggard D. L. Fractal Electrodynamics : Wave interactions with discretely self – similar structure, in: C. Baum and H. Kritikos // Electromagnetic Symmetry. – Washington DC, Taylor and Francis Publishers, 1995. – pp. 231 – 261.
10. Werner D. H., Ganguly S. An Overview of fractal antenna engineering research // IEEE Antenna & Propagation magazine. – 2003. – vol. 45(1). – pp. 38 – 57.
11. Koshovy G. I. Wave's diffraction by pre-fractal system of splits in a plane screen // Journal of Nano- and Electronic Physics. – 2011. – vol. 3(4). – pp. 66 – 72.
12. Хьонл Х., Мауе А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М. : Мир, 1964. – 428 с.
13. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
14. Koshovy G. I. The plane H – polarized electromagnetic wave scattering by pre-fractal grating of impedance strips // Int. Journal of Microwave and Wireless Technologies. – 2020. – vol. 12 (10). – pp. 269 – 275.
15. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E – polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips // IET Microwaves, Antennas and Propagation. – 2021. – vol. 15(10). – pp. 1218 – 1224.
16. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Regularization Technique in Modeling of the Plane E – Polarized EM Wave Scattering by Coplanar System of Electrically Conducting Flat Strips // Applied Sciences (Switzerland). – 2023. – vol. 13(9). 5488.
17. Гандель Ю. В., Душкін В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции : Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Х. : АБВ МБСУ, 2012. – 544 с.
18. Koshovy G. I., Koshovy A. G., Ahapova O. O. Investigation of Problems of Electromagnetic Wave Scattering by Conductive Strip Gratings Using Integral Equation Method // Radio electronics and Communications Systems. – 2023. – vol. 66(9). – pp. 439 – 453. DOI:10.3103/S0735272723080022.
19. Душкін В. Д., Жученко С. В. Чисельне моделювання розсіювання електромагнітних хвиль на решітках з одновимірною квазіфрактальною структурою періоду // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 110 – 115. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.16.
20. Ванин В. А., Просвірнін С. Л. Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решётке // Радиофизика и радиоастрономия. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 417–429.
21. Vanin V. A., Pershyina Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2024. – №1(68). – P. 41 – 50.

References (transliterated)

1. Shestopolov V. N., Litvinenko L. M., Masalov S. O., Sologub V. G. *Dyfraktsiya khvyli' na gratkakh* [Diffraction of waves on gratings]. Kharkiv, Vyd. Kharkiv. derzh. Un-ta, 1973. 287 p.
2. Shestopolov V. N., Kyrylenko A. O., Masalov S. O., Sirenko Yu. K. *Rezonansne rozsiyuvannya khvyli'. U 2 t., t. 1. Dyfraktsiyni gratky* [Resonant wave scattering. In 2 volumes. 1 volume. Diffraction gratings]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1986. 232 p.
3. Lytyvnenko L. M., Prosvirnin S. L. *Spektral'ni operatory rozsiyuvannya u zadachakh dyfraktsiyi khvyli' na ploskykh ekranakh* [Spectral scattering operators in problems of wave diffraction on flat screens]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1984. 240 p.
4. Nazartschuk Z. T. *Chyslove doslidzhennya dyfraktsiyi khvyli' na tsylindrychnykh strukturakh* [Numerical study of wave diffraction on cylindrical structures]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1989. 256 p.
5. Shestopolov V. N., Tuchyn Yu. O., Poedynchuk A. Yu., Sirenko Yu. K. *Novi metody rozv'yazku pryamykh ta obrnennykh zadach teoriyi dy-*

- fraktsiyi* [New methods for solving direct and inverse problems of diffraction theory]. Kharkiv, Osnova Publ., 1997. 283 p.
6. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York, W.H. Freeman and Company, 1983. 655 p.
 7. Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, Chichester, 2003. 435 p.
 8. Edgar G. A., Measure. *Topology and Fractal Geometry*. New York, Springer, 2008. 543 p.
 9. Jaggard D. L. Fractal Electrodynamics : Wave interactions with discretely self – similar structure, in: C. Baum and H. Kritikos. *Electromagnetic Symmetry*. Washington DC, Taylor and Francis Publishers, 1995. pp. 231–261.
 10. Werner D. H., Ganguly S. An Overview of fractal antenna engineering research. *IEEE Antenna & Propagation magazine*. 2003, vol. 45(1), pp. 38–57.
 11. Koshovy G. I. Wave's diffraction by pre-fractal system of splits in a plane screen. *Journal of Nano- and Electronic Physics*. 2011, vol. 3(4), pp. 66–72.
 12. Khon' Kh., Maue A., Vestpfall' K. *Teoriya difraktsii* [Diffraction theory]. Moscow, Mir Publ., 1964. 428 p.
 13. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
 14. Koshovy G. I. The plane H – polarized electromagnetic wave scattering by pre-fractal grating of impedance strips. *Int. Journal of Microwave and Wireless Technologies*. 2020, vol. 12 (10), pp. 269–275.
 15. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E – polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021, vol. 15(10), pp. 1218–1224.
 16. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Regularization Technique in Modeling of the Plane E – Polarized EM Wave Scattering by Coplanar System of Electrically Conducting Flat Strips. *Applied Sciences (Switzerland)*. 2023, vol. 13(9), 5488.
 17. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. *Matematicheskie modeli dvukhmernykh zadach difraktsii : Singulyarnye integral'nye uravneniya i chislennye metody diskretnykh osobennostey* [Mathematical models of two-dimensional diffraction problems : Singular integral equations and numerical methods of discrete singularities]. Kharkiv, ABB MVSU Publ., 2012. 544 p.
 18. Koshovy G. I., Koshovy A. G., Ahapova O. O. Investigation of Problems of Electromagnetic Wave Scattering by Conductive Strip Gratings Using Integral Equation Method // *Radio electronics and Communications Systems*. – 2023. – vol. 66(9). – pp. 439 – 453. DOI:10.3103/S0735272723080022.
 19. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V. Chysel'ne modelyuvannya rozsiyuvannya elektromagnitnykh khvyli' na reshitkakh z odnovymirnoyu kvazifrak-tal'noyu strukturoyu periodu [Numerical modeling of the dispersion of electromagnetic coils on lattices with a one-dimensional quasi-fractal period structure]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1, pp. 110–115. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.16.
 20. Vanin V. A., Prosvirnin S. L. Difraktsiya nestatsionarnoy elektromagnitnoy volny na biperyodicheskoy reshetke [Diffraction of non-stationary electromagnetic waves on biperyodic grates]. *Radiophysika i radioastronomiya* [Radiophysics and radio astronomy]. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 417–429.
 21. Vanin V. A., Pershyna Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2024, no. 1(68), pp. 41–50.

Надійшла (received) 27.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3523-7505>; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3523-7505>; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Кошовий Георгій Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, Вул. Проктури 12, м. Харків; тел.: (098) 851-32-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7991-8591>; e-mail: gikosh@gmail.com.

Koshovy George Ivanovych – PhD, Associate Professor, Senior Scientist of the Department №35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Vul. Proskury 12, Kharkiv; tel.: (098) 851-32-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7991-8591>; e-mail: gikosh@gmail.com.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОМЕНТІВ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ БАЛКИ ТИМОШЕНКА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Елементи конструкцій із шарнірним обпиранням широко використовують як у техніці, так і в установках для дослідження деформування різних елементів конструкцій. Урахування тертя в шарнірних опорах необхідне для моделювання реальних умов. Також можна використовувати тертя в шарнірах для демпфування коливань. Метою цієї роботи є розробка методу ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка під час її нестационарного навантаження. Розглядалась схема навантаження балки за симетричного розташування опор відносно точки прикладання нестационарної зосередженої сили. Ідентифікацію проводили за прогином певної точки балки як функції часу. Для моделювання коливань балки було використано систему диференціальних рівнянь для балки Тимошенка. Розв'язання цієї системи отримано з використанням розкладання невідомих функцій у ряди Фур'є і перетворення Лапласа. Під час розв'язання оберненої задачі з ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах використовувався метод регуляризації Тихонова. У результаті дослідження розроблено метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах для балки Тимошенка. Було проведено числовий експеримент. Як вихідні дані було взято прогин у деякій точці балки (як функцію часу), який було отримано під час розв'язання прямої задачі. Проведено дослідження впливу неточності заданих вихідних даних на стійкість і точність ідентифікації. Результати розрахунків показали, що розроблений метод ідентифікації, який базується на використанні методу регуляризації Тихонова, дає змогу ефективно отримати стійкий розв'язок відповідної оберненої задачі навіть без попереднього доопрацювання вихідних даних. Розроблений метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах може мати подальший розвиток для більш складних схем навантаження балок, а також для інших видів елементів конструкцій.

Ключові слова: балка Тимошенка, нестационарне навантаження, тертя в опорах, момент тертя, обернена задача, інтегральні рівняння Вольтерра, регуляризації Тихонова.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV, S. I. POVALIAIEV, A. S. SHARAPATA

IDENTIFICATION OF FRICTION MOMENTS IN HINGE SUPPORTS OF TIMOSHENKO BEAM UNDER NON-STATIONARY LOADING

Structural elements with hinged support are widely used both in engineering and in plants to study the deformation of various structural elements. Consideration of friction in hinged supports is necessary for modeling natural conditions. It is also possible to use friction in joints to damp vibrations. The purpose of this work is to develop a method of identification of friction moments in the hinge supports of Timoshenko beam under its non-stationary loading. The loading scheme of the beam under symmetric arrangement of supports relative to the point of application of non-stationary concentrated force was considered. Identification was carried out on the deflection of a certain point of the beam as a function of time. The system of differential equations for the Timoshenko beam was used to model the beam vibrations. The solution of this system was obtained using Fourier series expansion of unknown functions and Laplace transform. The Tikhonov regularization method was used to solve the inverse problem for identification of friction moments in hinge supports. As a result of the study, a method for identification of friction moments in hinged supports for Timoshenko beam was developed. A numerical experiment was carried out. The deflection at some point of the beam (as a function of time), which was obtained by solving the direct problem, was taken as input data. The influence of inaccuracy of initial data setting on stability and identification accuracy was investigated. The results of calculations have shown that the developed method of identification based on the use of the Tikhonov regularization method allows to effectively obtain a stable solution of the corresponding inverse problem even without preliminary processing of the initial data. The developed method of identification of friction moments in hinge supports can be further developed for more complex loading schemes of beams, as well as for other types of structural elements.

Key words: Timoshenko beam, non-stationary loading, friction in supports, friction moment, inverse problem, Volterra integral equations, Tikhonov regularization.

Вступ та аналіз літератури. Відомо, що елементи конструкцій у вигляді *балок* мають широке розповсюдження. У багатьох випадках *крайові умови* для балок відповідають наступним випадкам – ідеалізаціям: шарнірне обпирання, вільне обпирання, жорстке защемлення тощо. Але навіть в *шарнірних опорах*, які виготовлені для лабораторних установок (рис. 1), має місце певна дисипація енергії, яку бажано враховувати при дослідженні коливальних процесів, особливо нестационарних.

Окрім моделювання опору в шарнірних опорах викликає інтерес кількісне визначення моментів опору (тертя) в шарнірах (рис. 2).

Дослідження дисипації енергії у шарнірах та опорах, а також питання, пов'язані з кількісною оцінкою тертя в шарнірних опорах, є виключно актуальними. Більшість оцінок виконується на основі експериментальних та стендових досліджень та використання числових моделей (які найчастіше базуються на методі скінченних елементів). Аналітичні підходи зустрічаються відносно рідко. Також можна умовно розділити *моделі дисипації енергії* у крайніх шарнірних опорах, у проміжних опорах багатопрогонових балок та моделі дисипації енергії безпосередньо у матеріалі балки (за рахунок урахування внутрішнього тертя).

Наведемо декілька робіт, у яких досліджується тертя безпосередньо в шарнірних опорах.

У роботі [1] представлені результати стендових випробувань та числового аналізу, проведених з метою визначення характеристик тертя у шарнірних опорах. Для аналітичного визначення роботи тертя у шарнірах було використано *функціональну модель (фізичну та математичну)*. Було використано *модель прилипання-ковзання переважчастого руху та модель сухого тертя*. В результаті аналізу було визначено робочу характеристику тертя у шарнірі при осьовому стиску та його міцність на розтяг (тобто зусилля розтягу з'єднання). Було визначено вплив коефіцієнта тертя між взаємодіючими фасонними профілями на характеристики опор. У статті також представлені результати стендових випробувань тертя у шарнірних опорах при осьовому стисканні та виконано

порівняння з результатами числового аналізу. Розроблена модель може бути використана для оптимізації роботи шарнірних опор.



Рис. 1 – Шарнірно-оберта балка для експериментальних досліджень.

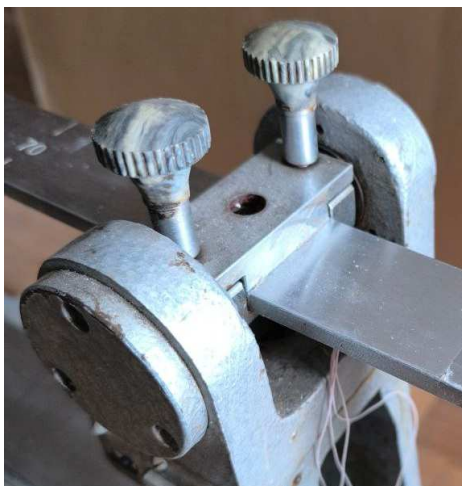


Рис. 2 – Конструкція шарнірних опор.

У статті [2] представлені результати експериментальних досліджень тертя кочення двох циліндричних роликів на спеціальному випробувальному стенді, що імітує роботу обертового опорного вузла печі. Момент тертя кочення визначається за допомогою спеціальної пластинчастої муфти на валу ведучого валка. Змінними параметрами є окружна швидкість кочення, радіальне навантаження та стан контактних поверхонь роликів. Розраховано фактичні значення коефіцієнта тертя кочення за різних умов кочення. Встановлено закономірності зміни коефіцієнта тертя кочення від швидкості кочення, в'язкості мастила та контактного тиску від радіального навантаження, що відповідає реальним значенням в основних опорних вузлах промислових обертових печей. Визначено вплив інтенсивності зношування на момент тертя кочення. Рекомендовано діапазон коефіцієнта тертя кочення, який слід враховувати при розрахунках втрат потужності в опорних вузлах великогабаритних обертових вузлів.

У роботі [3] два кульові шарніри використовуються як точки введення одноосового навантаження на стендах для випробування конструкцій, де необхідно допускати обертальні ступені свободи. Окрім можливості введення осово-циклічних сил розтягування та стискування, кульові шарніри створюють згинальні моменти, коли навантаження вводиться ексцентрично у зразок. Оскільки момент тертя безпосередньо впливає на структурну реакцію зразка, його кількісне дослідження представляє інтерес. Розроблено модель кульового шарніра *методом скінченних елементів (СЕ)* з використанням технології нелінійного контакту. Модель була перевірена за допомогою детальної твердотільної моделі СЕ та аналітичної моделі. Було запропоновано експериментальну установку, в якій кульовий шарнір на обох кінцях зразка вводив навантаження. Модель скінченних елементів випробувального стенду була перевірена за допомогою експериментів.

Метою роботи [4] є оцінка поведінки та міцності композитних плит з урахуванням впливу тертя на опорах. Для цього були використані результати програми лабораторних випробувань сталевих настилу, який складається з трапецієподібного профілю з виступами у формі літери «V». Під час випробувань вимірювалися прогини, торцеві зсуви та деформації сталевих настилів, що дозволило проаналізувати поведінку композитної плитної системи та визначити режим її руйнування. Вплив тертя на опорах у поздовжньому зсувному зв'язку оцінювався методом часткового зсувного з'єднання з використанням коефіцієнта тертя.

У дослідницькій роботі [5] пропонується нова методологія прогнозування оптимального розташування опор тертя для ефективного пом'якшення енергії коливань у трубопровідних системах. Врахування сил тертя в динамічних характеристиках системи вносить невід'ємну нелінійність, що ускладнює її аналіз. Як правило, числові розв'язання використовуються для обходу складнощів, пов'язаних з пошуком аналітичних розв'язків для нелінійних систем. Однак аналіз у часі може вимагати значних обчислювальних ресурсів через складні розрахунки, що виникають з нелінійності. Тому, у [5] представлено ефективний підхід, заснований на лінійному аналізі, для прогнозування ідеального положення для встановлення опор тертя як заміни нерухомих опор. Крім того, було досліджено зв'язок між положеннями встановлення опор тертя та їх ефективністю в поглинанні коливань за допомогою методу гармонійного збалансування. Обидві методології перевіряються шляхом порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими за допомогою аналізу за часом з використанням методу скінченних елементів (FEM).

Запропоноване дослідження з ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка при нестационарному навантаженні базується на моделі тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях, наведеної в роботі [6] та є її логічним продовженням.

Більш детальний аналіз робіт присвячений дослідженню нестационарного деформування балок Тимошенка а також їх коливань приведено в роботах [6 – 9], причому в роботах [7, 8] досліджуються проміжні в'язкопружні опори балки Тимошенка при нестационарних коливаннях, а в [9] додатково враховано вплив масово-інерційних характеристик додаткової в'язко-пружної опори.

Роботи [10 – 12] присвячено дослідженню вільних коливань багатопрогонових балок Тимошенка, а в [13] виконано аналіз характеристик як вільних, так і вимушених коливань багатопрогової балки Тимошенка на основі методу Рунґа.

В класичній монографії [14] розглядаються коливання деформівних систем при імпульсних та рухомих навантаженнях, велика частина якої присвячена саме балкам.

В наступних роботах ускладнення досліджуваних моделей викликано урахуванням більш складної геометрії балок або властивостями сучасних складних композитних матеріалів [15 – 17]. Числові та експериментальні дослідження характеристик багатопротітних (багатопротітних / багатопрогонових) балок з "метаматеріалів" описано в [15]. А в [16] досліджується затухання хвиль багатопротітної балки зі змінними поперечними перерізами. В роботі [17] описані геометрично нелінійні вимушені коливання повністю закріплених функціонально-градієнтних балок з кількома тріщинами, що спираються на проміжні прості опори.

Геометрично нелінійні вимушені коливання повністю затиснутих багатопротітних балок, що несуть кілька мас і спираються на скінченну кількість простих опор, описано в [18].

В роботах [19 – 21] розглядаються балки та пластини. Стаття [19] стосується визначення навантажень у багатопрогонових балках та плитах. В роботі [20] досліджуються шаруваті (ламіновані) смуги (полоси) та пластини, а в [21] описана теорія та експеримент для ламінованої пластини при ударному навантаженні.

В статті [22] описано розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спиранням.

Далі наведено цикл робіт, в яких розглянуто деформування або коливання багатопрогонових балок під час дії рухомих навантажень або мас [23 – 31]. Вплив на балку кінцевої довжини рухомої маси описано в [23]. В роботі [24] динамічна реакція одно- та багатопрогонових балок під рухомих навантаженням досліджується з використанням формул динамічної жорсткості та методу Гальоркіна. Застосування інтегральних рівнянь Вольтерра в динаміці багатопрогової балки Релея під дією рухомого навантаження описано в [25]. Динамічний аналіз багатопротітної балки під дією рухомої сили виконується з використанням методу спектральних елементів частотної області в роботі [26]. В статті [27] для багатопротітних балок Тимошенка розглядається дія різних силових навантажень – від стаціонарного навантаження до мас, що рухаються з прискоренням. В роботі [28] досліджується динамічна реакція двоколіїних багатопрогонових залізничних мостів при затримці в'їзду другого поїзда. Аналіз динамічної реакції багатопрогової системи мосто-коліїної конструкції під дією рухомих навантажень наведено в [29]. В статті [30] виконується ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок. Задача управління вібрацією балок під рухомих навантаженнями за допомогою налаштованих систем масового інерціювання описана в [31].

Постановка задачі. Механічна система складається з пружної ізотропної балки середньої товщини Тимошенка, шарнірно-обпертої по краях (рис. 1). На балку посередині діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання балки. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладання навантаження не змінюються протягом коливального процесу.

Вважається, що в шарнірних опорах відбувається *дисипація енергії*, яка викликана безпосередньо тертям у шарнірах, а момент опору (тертя) лінійно пропорційний кутовій швидкості повороту балки в шарнірі:

$$M_j(t) = \kappa_j \frac{d\psi_j(t)}{dt}, \quad (1)$$

де κ_j – коефіцієнти тертя в шарнірних опорах; $d\psi_j(t)/dt$ – кутова швидкість повороту перерізу балки в шарнірах.

Кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz можна знайти як:

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\kappa_j} \int M_j(t) dt. \quad (2)$$

Таким чином, вплив тертя в шарнірах моделюється за допомогою додавання двох додаткових зосереджених моментів $M_1(t)$ і $M_2(t)$, які прикладені в лівій і правій опорах відповідно. Зазначимо, що моменти $M_1(t)$ і $M_2(t)$ додаються у *рівняння деформування* як зовнішні, але згідно з *третім законом Ньютона* їх значення треба брати з протилежним знаком.

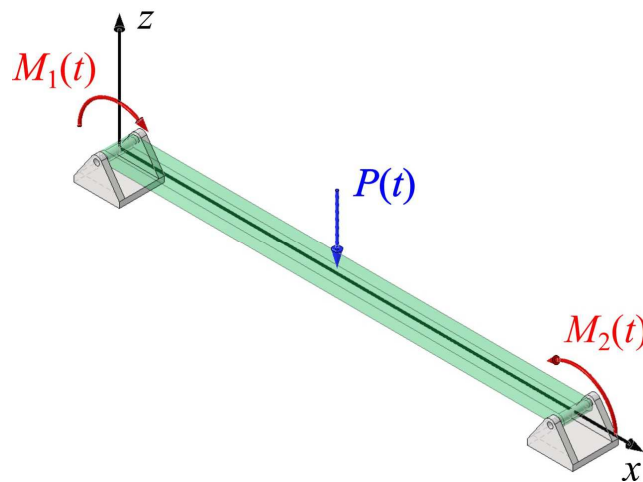


Рис. 3 – Схема навантаження балки.

Математична модель. Відповідно до [6 – 9, 14] *система диференціальних рівнянь у частинних похідних* для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G' F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_\Sigma(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G' F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - M_\Sigma(x, t), \end{cases} \quad (4)$$

де t – час; h – товщина балки; b – ширина балки; $G' = k' \cdot G$; k' – коефіцієнт зсуву; $F = bh$ – площа поперечного перерізу балки; $I = bh^3/12$; w – прогин серединної площини балки; ψ – кут повороту; ρ – густина матеріалу балки; пружні постійні: E – модуль пружності, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Вкажемо, що $P_\Sigma(x, t)$ та $M_\Sigma(x, t)$ – силове та моментне зосереджене навантаження:

$$P_\Sigma(x, t) = \delta(x - x_0) \cdot P(t); \quad (5)$$

$$M_\Sigma(x, t) = \sum_{j=1}^2 \delta(x - x_j) \cdot M_j(t). \quad (6)$$

Система рівнянь розв'язується за допомогою розкладання невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні *ряди Фур'є*. Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, *інтегрального перетворення Лапласа* [32]. У цьому випадку при виконанні обернених перетворень розв'язки можуть бути представлені у вигляді *інтегралів Дюамеля (типу згортки)*, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь. Докладніше розв'язання подібних систем рівнянь описано в [6 – 9, 33].

Пряма задача. Детальний розв'язок прямої задачі наведено в [6], де в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (4) за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки отримано наступний аналі-

тичний вираз для функції прогинів та кутів повороту:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (7)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^\Psi(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^\Psi(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (8)$$

де $K_i(x, t)$ – відповідні ядра *інтегралів Дюамеля* (згорток):

$$\begin{aligned} K_{Pj}^W(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin(\omega_{2k} t) \right]; \\ K_{Mj}^W(x, t) &= c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Pj}^\Psi(x, t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Mj}^\Psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^\Psi \sin(\omega_{2k} t) \right]. \end{aligned}$$

У випадку зосередженого навантаження (силового або моментного) балки в точці з координатою x_j коефіцієнти для навантажень матимуть вигляд:

$$C_{kj}^P = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot b \cdot h} \sin(\lambda_k \cdot x_j); \quad C_{kj}^M = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot I} \cos(\lambda_k \cdot x_j).$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$\begin{aligned} c_T^2 &= \frac{G'}{\rho}, \quad c_b^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \lambda_k = \pi \frac{k}{l}, \quad \Delta_k = \sqrt{\left(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot \lambda_k^4 \cdot c_T^2 \cdot c_b^2}; \\ \Omega_{1k}^W &= \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^W = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2k}}; \quad \Omega_{1k}^\Psi = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^\Psi = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{2k}}. \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_k)}.$$

Обернена задача – знаходження невідомих зосереджених моментів тертя в опорах.

Розглянемо конкретний випадок з однією збурювальною силою $P(t)$ (яка відома) і двома додатковими зосередженими моментами (тертя) $M_1(t)$ і $M_2(t)$ (які невідомі, але в цьому окремому випадку $M_1(t) = -M_2(t) = M(t)$).

$$w(x_0, t) = \int_0^t K_{Pj}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{Mj}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Після дискретизації виразу для прогину можна записати наступну систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{w}; \\ \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2. \end{cases} \quad (10)$$

Оскільки розглядається випадок симетричного розташування опор відносно зовнішнього навантаження, то з урахуванням $M_1(t) = -M_2(t) = M(t)$ систему (10) можна записати таким чином:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}. \end{cases} \quad (11)$$

При цьому кількість невідомих в системі матричних рівнянь (11) зменшиться до одного і її вигляд спроститься до одного матричного рівняння (що еквівалентно розв'язанню одного *інтегрального рівняння Вольтерра I роду*):

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (12)$$

Якщо позначити $\mathbf{A}_M = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ та $\mathbf{w}^* = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$, то матричне рівняння (12) можна записати у наступному вигляді:

$$\mathbf{A}_M \mathbf{M} = \mathbf{w}^*. \quad (13)$$

Таким чином, розв'язання оберненої задачі зводиться до розв'язання одного інтегрального рівняння Воль-

тертя І роду, яке після дискретизації зводиться до одного матричного рівняння (13) відносно невідомого моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$. Вказана задача є *некоректною за Адамаром*, тому що не має єдиного стійкого розв'язку. Для отримання наближеного розв'язку оберненої задачі відносно моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$ був використаний *метод регуляризації Тихонова*. Відповідно до нього матричне рівняння (13) зводиться до наступного вигляду:

$$(\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{A}_M^T \mathbf{w}^*, \quad (14)$$

де $\mathbf{C}$ – симетрична трьохдіагональна матриця; α – параметр регуляризації.

Після відповідних перетворень рівняння (14) дозволяє отримати формулу для визначення моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{A}_M^T \mathbf{w}^*. \quad (15)$$

Таким чином, в результаті розв'язання матричного рівняння (15) розроблена методика дозволяє при відомому зовнішньому навантаженні $P(t)$ та прогину в одній точці балки $w(x, t)$ визначити зосереджені реактивні моменти в опорах $M_i(t)$ з урахуванням тертя.

Обчислювальний експеримент. У роботі виконується математичний розрахунок, який моделює визначення моменту опору (тертя) в шарнірних опорах для балки Тимошенка (рис. 3) під час нестационарного навантаження.

При обчислювальному експерименті прогини не вимірювались на реальній балці, а визначались з розв'язання прямої (тестової) задачі, у якій збурювальне навантаження $\bar{P}(t)$ задавалось. Як вихідні дані (рис. 4) вибиралися значення прогину в певній точці, які були взяті з розв'язку прямої задачі.

При проведенні обчислювального експерименту була досліджена шарнірно обперта балка (рис. 3), що знаходиться під дією зовнішнього нестационарного навантаження та має наступні геометричні та фізичні параметри: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значення відповідають легованій сталі); довжина балки $l = 0.8 \text{ м}$, ширина $b = 0.05 \text{ м}$, товщина $h = 0.025 \text{ м}$; координата точки прикладення зовнішнього навантаження $x_0 = 0.4 \text{ м}$ (розглянуто випадок симетричного прикладення зовнішнього навантаження відносно опор); значення коефіцієнту лінійно-в'язкого демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Розрахунки виконувалися з урахуванням 100 членів у відповідних рядах Фур'є.

Зовнішнє нестационарне навантаження $\bar{P}(t)$ прикладалося до балки в точці з координатою x_0 та моделювалося у вигляді імпульсу, що показаний на рис. 4.

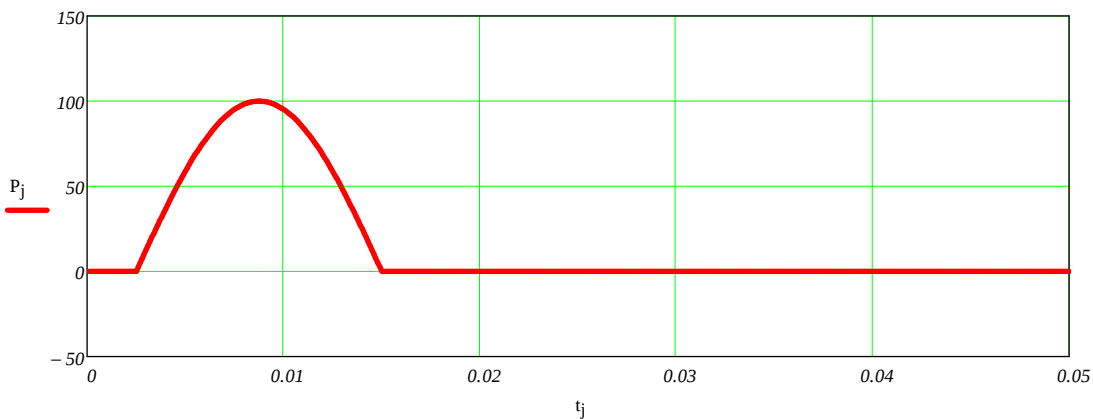


Рис. 4 – Збурююча сила $P(t)$.

Значення прогину $\bar{w}(t)$ в точці з координатою x_0 (під навантаженням) було взято з розв'язку відповідної прямої задачі (рис. 5 – червона крива). Для моделювання похибок у вихідних даних, які виникають при проведенні натурального експерименту, на цю залежність був накладений «шум», який для випадкових процесів добре моделюється *законом нормального розподілення Гауса* (рис. 5 – чорна крива). Ця залежність була розрахована в додатку MathCAD з використанням вбудованої функції для нормального розподілу Гауса *rnorm* відповідно до формули:

$$w_{\delta}(t) = \bar{w}(t) + \text{rnorm}(t, 0, \delta \cdot w_{\max}), \quad (16)$$

де δ – рівень шуму або відносна похибка, що складала 5%; $w_{\max}$ – величина максимального прогину балки в досліджуваній точці

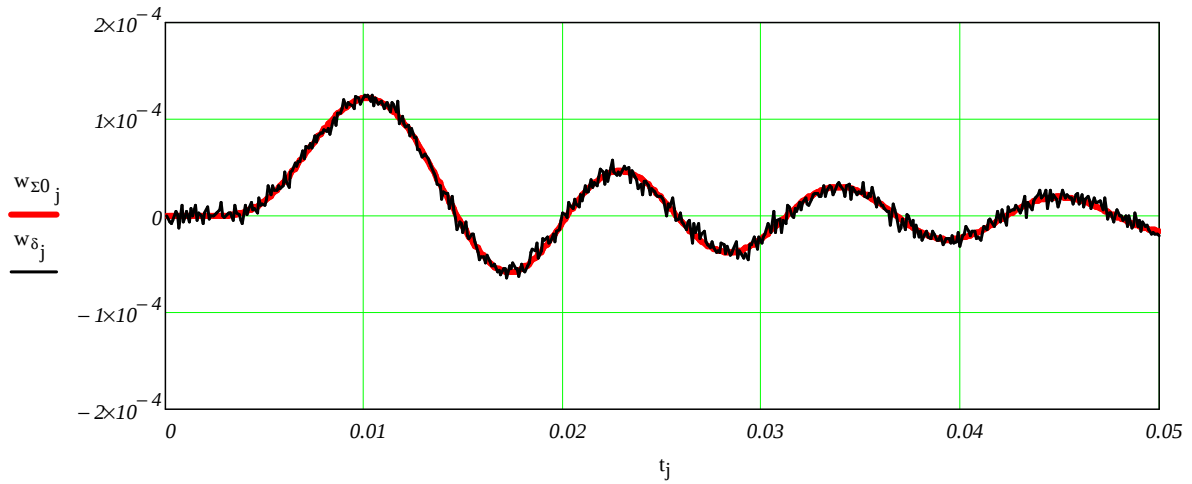
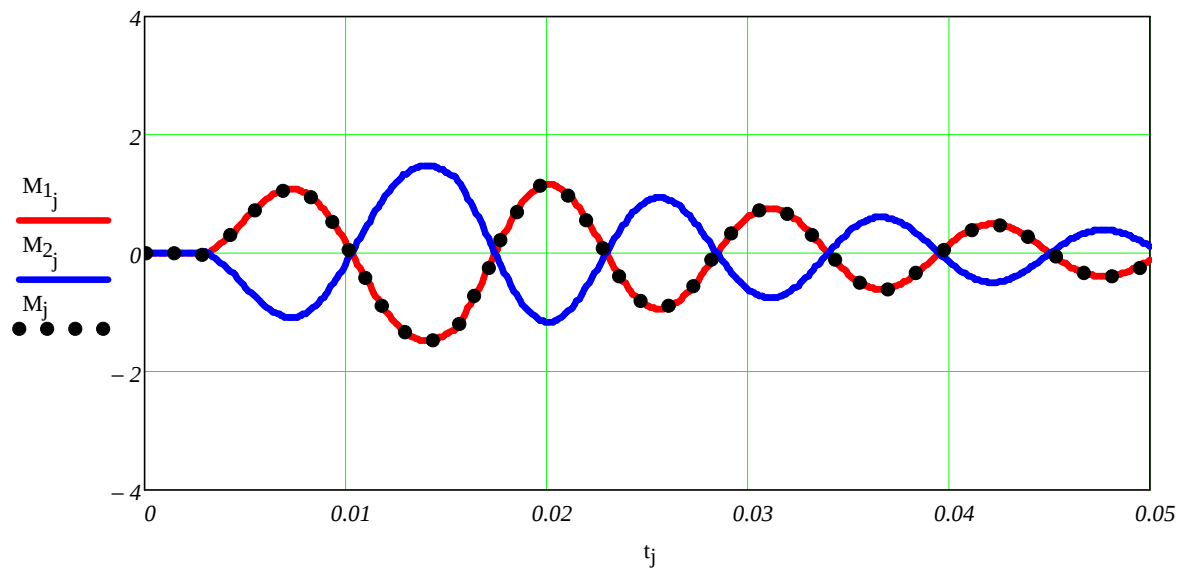
Рис. 5 – Прогин балки в точці x_0 .

Рис. 6 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки.

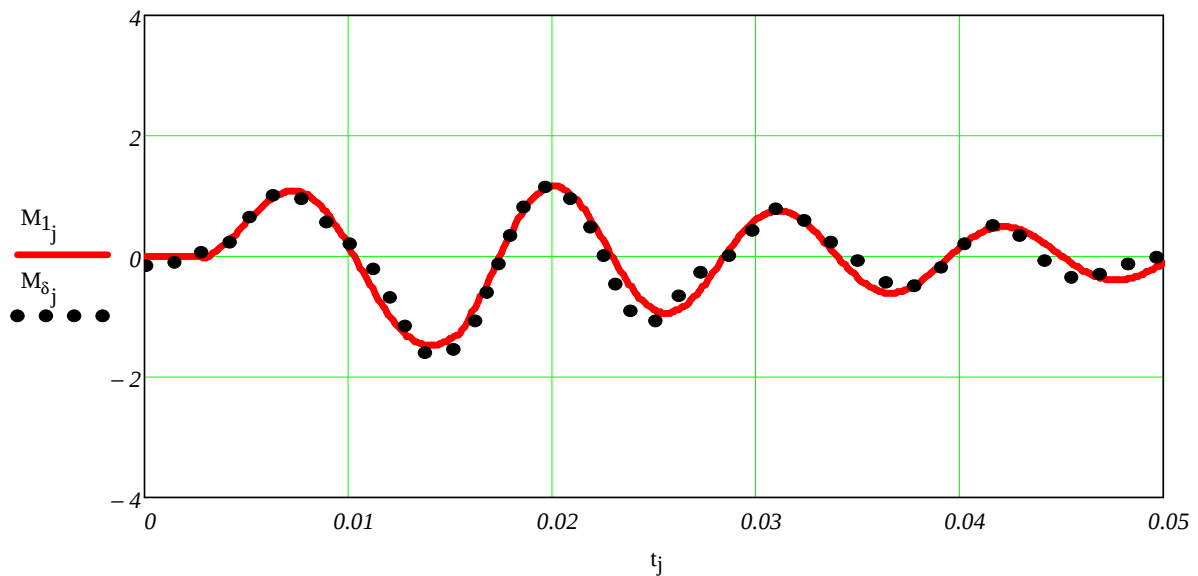


Рис. 7 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки.

Результати чисельних розрахунків – ідентифіковані зосереджені моменти тертя в шарнірних опорах балки – наведені на рис. 6 – 7.

На рис. 6 показані моменти тертя $M_1(t)$ (червона крива) та $M_2(t)$ (синя крива) знайдені в результаті розв'язання прямої задачі, а також момент тертя $M(t)$ (чорні точки), який був ідентифікований за відомими значеннями прогину $\bar{w}(t)$ (рис. 4 червона крива), взятими з розв'язку прямої задачі. Можна спостерігати, що криві $M_1(t)$ та $M_2(t)$ є дзеркально симетричними відносно горизонтальної осі, що є наслідком симетричної постановки задачі.

Зазначимо, що ідентифікований момент тертя $M(t)$ практично співпадає з моментом тертя $M_1(t)$, що свідчить про ефективність розробленого методу ідентифікації. При застосуванні до рівняння (13) процедури регуляризації за допомогою *методу нев'язки* було обрано параметр регуляризації $\alpha = 10^{-28}$, що для даної постановки задачі є близьким до оптимального. Слід зазначити, що при розв'язанні коректної задачі розрахунковий алгоритм видає нульове значення параметра регуляризації ($\alpha = 0$).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним проведення натурних експериментальних досліджень з визначення моментів тертя в шарнірних опорах балки.

Викликає інтерес визначення моментів тертя в шарнірах з різною величиною опору в лівій і правій опорах.

Розроблений метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах може набути подальшого розвитку для більш складних схем навантаження шарнірно обпертих балок, а також для інших видів елементів конструкцій.

Також у подальших дослідженнях можливо по аналогії з [34] виконати розв'язання задачі гасіння коливань балки Тимошенка за допомогою моментів тертя у шарнірних опорах. Після цього з'явиться перспектива розв'язання задачі управління нестационарними коливаннями за допомогою динамічно керованих моментів тертя у шарнірах.

Висновки. В роботі розроблено метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка. Розглядалася схема навантаження балки при симетричному розташуванні опор відносно точки прикладання нестационарної зосередженої сили. Ідентифікація проводилась за прогином певної точки балки як функцією часу.

Проведений чисельний експеримент та співставлення результатів розв'язання прямої та оберненої задачі показав ефективність розробленого методу при відновленні моментів тертя в шарнірних опорах при нестационарному навантаженні. Проведено дослідження впливу похибок випадкового характеру на рівні 5 % у вихідних даних (для прогину як функції часу) на результати ідентифікації. Результати розрахунків показали, що розроблений метод ідентифікації, заснований на використанні методу регуляризації Тихонова, дозволяє ефективно отримати стійкий розв'язок відповідної оберненої задачі навіть без попередньої обробки вихідних даних.

Список літератури

1. Brodny Jarosław. Determining the working characteristic of a friction joint in a yielding support // Archives of Mining Sciences. – 2010. – № 55. – P. 733 – 746.
2. Kuzio Igor, Gurskyi Volodymyr, Krot Pavlo, Zimroz Radoslaw, Sorokina Tatyana. Experimental Study of the Rolling Friction Coefficient in Highly Loaded Supports of Rotary Kilns. – 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-91847-7_25.
3. Rosemeier Malo, Gebauer Thomas, Lester Catherine, Bätge Moritz. Friction moments of ball joint supports used in structural test rigs subjected to cyclic loading. – 2019. DOI: 10.5281/zenodo.3386135.
4. Lavall A. C. C., Costa R. S., Rodrigues F. C. Influence of the friction at the support in the longitudinal shear strenght of composite slab // SDSS'Rio 2010 Stability And Ductility Of Steel Structures E. Batista, P. Vellasco, L. de Lima (Eds.). – Rio de Janeiro, Brazil, September 8 – 10, 2010. – P. 871 – 878.
5. Minseok Lee, Yong Hoon Jang, Seunghun Baek. Methodology for predicting optimal friction support location to attenuate vibrational energy in piping systems // Nuclear Engineering and Technology. – 2024. – Volume 56. – Issue 5. – P. 1627 – 1637. DOI: 10.1016/j.net.2023.12.017.
6. Воронай О. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шапарата А. С. Моделювання тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (5). – С. 33 – 45. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).04.
7. Воронай О. В., Поваляєв С. І., Єгоров П. А. Моделювання проміжної в'язко-пружної опори при нестационарних коливаннях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1'2022. – С. 36 – 44. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.05.
8. Воронай О. В., Поваляєв С. І., Єгоров П. А. Обернена задача для балки Тимошенка з додатковою в'язко-пружною опорою при нестационарному деформуванні // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1'2023. – С. 52 – 58. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.08.

9. Voropay Alexey, Menshykov Oleksandr, Povaliaiev Sergiy, Sharapata Andriy, Yehorov Pavlo. Modeling a Viscoelastic Support Considering Its Mass-Inertial Characteristics During Non-Stationary Vibrations of the Beam // *Journal of Engineering Sciences*. – 2023. – № 10. – D8-D14. DOI: 10.21272/jes.2023.10(1).d2.
10. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam // *Journal of Vibration and Control*. – 2022. – Vol. 28. – No. 7 – 8. – P. 799 – 811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
11. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // *Archive of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 88. – No. 7. – P. 1213 – 1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
12. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 87. – P. 152 – 170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
13. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method // *Shock and Vibration*. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1 – 18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
14. Кохманюк С. С., Янютин Є. Г., Романенко Л. Г. Коливання деформівних систем при імпульсних та рухомих навантаженнях. – Київ : Наукова думка, 1980. – 232 с.
15. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams // *Physics Letters A*. – 2019. – Vol. 383. – No. 36. – P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
16. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections // *Acta Mechanica*. – 2023. – Vol. 234. – No. 4. – P. 1451 – 1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
17. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
18. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
19. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates // *European Journal of Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 30. – No. 1. – P. 176 – 195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
20. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – No. 48 – 49. – P. 8673 – 8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
21. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – No. 5. – P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
22. Янютин Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
23. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines*. – 2022. – No. 1. – P. 15 – 20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
24. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method // *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020)* 23 – 26 November 2020. – Athens, Greece, 2020. – P. 2621 – 2630.
25. Szytko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2019. – Vol. 121. – P. 777 – 90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
26. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method // *Computers & Structures*. – 2017. – Vol. 192. – P. 181 – 195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
27. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses // *Archive of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 92. – No. 4. – P. 1247 – 1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
28. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. – 2023. – P. 1 – 16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
29. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. – 2021. – P. 1 – 19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
30. Янютин Є. Г., Гришакін В. Т. Ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Зб. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
31. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems // *Engineering Structures*. – 2023. – Vol. 275. – P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
32. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. – Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. – 1130 p.
33. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2022. – Vol. 5. – No. 7 (119). – P. 21 – 34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
34. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – № 41. – P. 4919 – 4926.

References (transliterated)

1. Brodny Jarosław. Determining the working characteristic of a friction joint in a yielding support. *Archives of Mining Sciences*. 2010, no. 55, pp. 733–746.
2. Kuzio Igor, Gurskyi Volodymyr, Krot Pavlo, Zimroz Radoslaw, Sorokina Tatyana. Experimental Study of the Rolling Friction Coefficient in Highly Loaded Supports of Rotary Kilns. 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-91847-7_25.
3. Rosemeier Malo, Gebauer Thomas, Bätge Moritz. Friction moments of ball joint supports used in structural test rigs subjected to cyclic loading. 2019. DOI: 10.5281/zenodo.3386135.
4. Lavall A. C. C., Costa R. S., Rodrigues F. C. Influence of the friction at the support in the longitudinal shear strenght of composite slab. *SDSS'Rio 2010 Stability And Ductility Of Steel Structures E. Batista, P. Vellasco, L. de Lima (Eds.)*. Rio de Janeiro, Brazil, September 8 – 10, 2010. pp. 871–878.
5. Minseok Lee, Yong Hoon Jang, Seunghun Baek. Methodology for predicting optimal friction support location to attenuate vibrational energy in piping systems. *Nuclear Engineering and Technology*. 2024, Volume 56, Issue 5, pp. 1627–1637. DOI: 10.1016/j.net.2023.12.017.

6. Voropay A. V., Yegorov P. A., Povalyayev S. I., Sharapata A. S. Modelyuvannya tertya v sharmirnykh oporakh pry nestatsionarnykh kolyvannyakh balky Tymoshenko [Simulation of friction in hinged supports during non-stationary vibrations of a Timoshenko beam]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 2 (5), pp. 33–45. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).04.
7. Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yegorov P. A. Modelyuvannya promizhnoyi v'yazko-pruzhnoyi opory pry nestatsionarnykh kolyvannyakh balky Tymoshenko [Simulation of intermediate viscoelastic support under non-stationary vibrations of Timoshenko beams]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2022, no. 1'2022, pp. 36–44. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.05.
8. Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yegorov P. A. Obermena zadacha dlya balky Tymoshenko z dodatkovoyu v'yazko-pruzhnoyu oporoyu pry nestatsionarnomu deformuvanni [Inverse problem for a Timoshenko beam with an additional viscoelastic support under nonstationary deformation]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1'2023, pp. 52–58. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.08.
9. Voropay Alexey, Menshykov Oleksandr, Povaliaiev Sergiy, Sharapata Andriy, Yehorov Pavlo. Modeling a Viscoelastic Support Considering Its Mass-Inertial Characteristics During Non-Stationary Vibrations of the Beam. *Journal of Engineering Sciences*. 2023, no. 10, D8-D14. DOI: 10.21272/jes.2023.10(1).d2.
10. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*. 2022, Vol. 28, No. 7–8, pp. 799–811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
11. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method. *Archive of Applied Mechanics*. 2018, Vol. 88, No. 7, pp. 1213–1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
12. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs. *Applied Mathematical Modelling*. 2020, Vol. 87, pp. 152–170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
13. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method. *Shock and Vibration*. 2021, Vol. 2021, pp. 1–18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
14. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
15. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. *Physics Letters A*. 2019, Vol. 383, No. 36, P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
16. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections. *Acta Mechanica*. 2023, Vol. 234, No. 4, pp. 1451–1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
17. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, pp. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
18. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
19. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates. *European Journal of Applied Mathematics*. 2019, Vol. 30, No. 1, pp. 176–195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
20. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001, Vol. 38, No. 48–49, pp. 8673–8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
21. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment. *Journal of Applied Mechanics*. 2008, Vol. 75, No. 5, P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
22. Yanyutin E. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernenykh zadach dlya balok z pruzhnyim dodatkovym spyrannyam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
23. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines. 2022, No. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
24. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method. *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020*. Athens, Greece, 2020, pp. 2621–2630.
25. Szyłko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019, Vol. 121, pp. 777–90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
26. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. *Computers & Structures*. 2017, Vol. 192, pp. 181–195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
27. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, Vol. 92, No. 4, pp. 1247–1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
28. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
29. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021, pp. 1–19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
30. Yanyutin E. G., Gryshakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya v'yazkoupругikh balok [Identification of moving load for viscoelastic beams]. *Visnyk Nacional'nogo tekhnichnogo universytetu "Kharkivs'kyi politekhnichnyi instytut". Zb. naukovykh prats'* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Scientific Digest]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
31. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems. *Engineering Structures*. 2023, Vol. 275, P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
32. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p.
33. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, Vol. 5, No. 7 (119), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

34. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, no. 41, pp. 4919–4926.

Надійшла (received) 30.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3396-8803>; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valeriiovych – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3396-8803>; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6616-9966>; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Yegorov Pavlo Anatoliiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6616-9966>; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9027-0132>; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9027-0132>; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарапата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0823-9262>; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergiiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0823-9262>; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

**V. A. VOSKOBOINICK, O. A. VOSKOBOINYK, A. V. VOSKOBIINYK, A. G. KHARCHENKO,
D. V. TRUDENKO**

FEATURES OF WAVE TRANSFORMATION BY A PERMEABLE BREAKWATER

The influence of the permeability of a breakwater on the wave transformation is studied. It is assumed that the vertical breakwater, in contrast to an absolutely rigid one, is characterized by a finite permeability and can absorb the energy of incoming incident waves. In this regard, the propagation of surface gravity waves in a rectangular coordinate system is investigated. Traditional realized examples of wave energy selection and their mathematical analysis are given. From the law of conservation of energy upon reflection from vertical walls follows the dependence for the reflection coefficient as a function of the transmission coefficient. The results of experimental studies of the propagation of surface gravity waves and their interaction with absorbing walls are presented. The dependences of the coefficients of reflection and transmission of the wave, as well as the coefficients of dissipation of wave energy depending on the permeability of the vertical wall, the depth of the flow, and the length of the incident wave are obtained. The integral and spectral characteristics of the wave field and pressure fluctuations on the streamlined surface of a permeable breakwater are presented.

Key words: wave transformation, permeable breakwater, numerical and physical simulation, wave reflection and transmission, wave energy dissipation.

**В. А. ВОСКОБІЙНИК, О. А. ВОСКОБОЙНИК, А. В. ВОСКОБІЙНИК, А. Г. ХАРЧЕНКО,
Д. В. ТРУДЕНКО**

ОСОБЛИВОСТІ ТРАНСФОРМАЦІЇ ХВИЛЬ ПРОНИКНИМ ХВИЛЕЛОМОМ

Досліджено вплив проникності хвилелому на трансформацію хвилі. Передбачається, що вертикальний хвилелом, на відміну від абсолютно жорсткого, характеризується кінцевою проникністю і може поглинати енергію набігаючих хвиль. У зв'язку з цим досліджено поширення поверхневих гравітаційних хвиль у прямокутній системі координат. Наведено традиційні реалізовані приклади відбору енергії хвилі та їх математичний аналіз. Із закону збереження енергії при відбиванні від вертикальних стінок випливає залежність для коефіцієнта відбиття як функції коефіцієнта проникнення. Наведено результати експериментальних досліджень поширення поверхневих гравітаційних хвиль та їх взаємодії з поглинаючими стінками. Отримано залежності коефіцієнтів відбиття і проникнення хвилі, а також коефіцієнтів дисипації енергії хвилі в залежності від проникності вертикальної стінки, глибини потоку і довжини початкової хвилі. Наведено інтегральні та спектральні характеристики поля хвиль і коливань тиску на обтічній поверхні водопроникного хвилелому.

Ключові слова: трансформація хвиль, проникний хвилелом, чисельне та фізичне моделювання, відбиття та проникнення хвиль, дисипація хвильової енергії.

Introduction. Coastal regions play an important role in the economic development of many countries of the world. In these regions, construction and operation of a large number of hydraulic structures, berths, zones and recreation centers is carried out. The main problem for the development of these regions and coastal waters is the protection of coasts, harbors and maritime infrastructure. Means of protection should be highly effective, increased environmental safety and should be the most reliable and, if possible, cheap. There are many types of coastal defense structures. These are dams, groins, berms, breakwaters and artificial beaches, bays, harbors and others. Protective structures of active, passive or complex type of action fully or partially protect coastal structures and the coastal zone [1 – 3]. These structures are built in the form of solid, discontinuous and permeable walls, inclined dams and breakwaters, submersible, floating and structures protruding above the sea surface. Depending on the type of structure, its location in the sea area, the principle and mechanism of action, the wave field is partially or completely reflected from the structure, transforms and penetrates through it, reducing wave loads on the protected objects. Coastal protection structures affect the movement of bottom sediments, change the circulation of the coastal current and the ecological situation in the protected water area. Breakwaters and dams are the most widely used coastal protection structures. Breakwaters are installed parallel or perpendicular to the shore to ensure safe navigation in the harbor and protect the coastline from erosion. Dams are built along the coastline to protect the coastline, reduce coastline erosion and the impact of surges and waves on coastal infrastructure.

The effect of hydrodynamic pressure on the wall of the breakwater and oscillations of hydrostatic pressure lead to significant loads on the structure. These structures are made massive and strong with large capital investments to withstand such loads [4]. Environmental restrictions and the increasing cost of building of protection structures, such as vertical or inclined breakwaters, require consideration of alternative solutions to traditional full protection structures. To overcome the above problems, permeable breakwaters are used [5, 6]. Such breakwaters reduce the reflection of incoming waves relative to a solid vertical wall, provide partial passage of waves of an acceptable level into the protected area, and also allow the exchange of liquid between the open sea and the protected area. In addition, permeable walls allow marine fauna to move freely and form currents between piles that affect the movement of bottom sediments and pollution on the surface of the protected area. This significantly improves the ecology in the vicinity of permeable walls.

There are several points of view on the assessment of the interaction of waves with vertical solid and permeable breakwaters. One of them is the potential flow method, which is based on the calculation of the potential function for the corresponding boundary conditions [4, 7]. This method is based on the equations of conservation of energy, momentum and mass. In this theory, the wave load on the structure is determined by the maximum horizontal velocity of the fluid

flow through the slots and pores of the structure with the high pressure gradient. Another method is based on the principle of head loss as fluid flows through the structure [8, 9]. Wave propagation and diffraction studies are presented in [10, 11]. The work [12] considers the selection of wave energy. The finiteness of the perturbation propagation velocity is studied in [10]. General methods for studying wave propagation and diffraction are given in [10]. The hydrodynamic characteristics of fully and semi-submerged vertical slotted breakwaters or walls have been theoretically and experimentally researched in works [13 – 15]. Horizontal permeable breakwaters have been studied in works [16, 17].

Wave reflection and transmission also dissipation of wave energy are the main hydrodynamic parameters of the efficiency of any breakwaters, including permeable breakwaters, which are used to protect sea coasts and coastal infrastructure. It should be noted that the breakwater works well when its ability to reflect waves and dissipate wave energy is high [18, 19]. In this case, the transfer of wave energy to the protected water area becomes minimal. Therefore, the study of the characteristics of reflection and transmission of waves, as well as the dissipation of wave energy in theoretical and experimental researches, are important and extremely relevant for understanding the effectiveness of breakwater structures [4, 10].

The purpose of the work is to study the features of the interaction of gravity waves with permeable breakwaters and to evaluate the effect of vertical slotted walls on the transformation of wave energy.

Formulation of the problem. The presence of a free surface ensures the application of an incompressible fluid model with good accuracy. Disturbances on the surface of the water propagate mainly due to the extrusion of the liquid, and not due to its dilatation (expansion-compression). Therefore, the vast majority of researches are based on potential theory.

Let us assume that the liquid, bounded by the free surface and the bottom, is oriented in a rectangular Cartesian coordinate system x, y, z , as shown in Fig. 1 for a section by a plane $y = 0$. It is assumed that the liquid is subject to the action of the mass forces of the gravitational field $\vec{F} = \rho g \vec{e}_z$, where ρ is the density of the liquid; g is the acceleration of gravity; $\vec{e}_z$ is the unit vector.

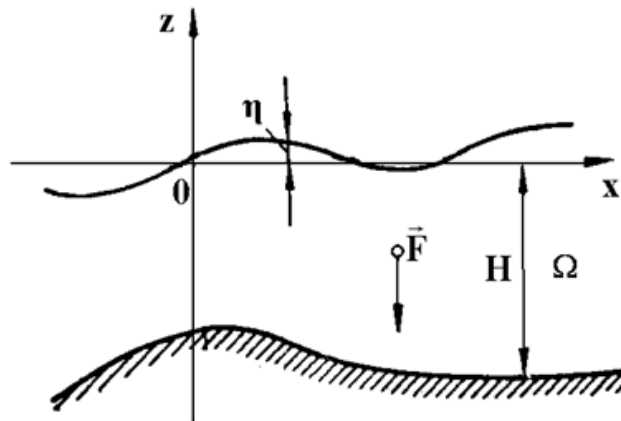


Fig. 1 – Geometry of the problem.

The free surface of a fluid at rest in an unperturbed equilibrium state occupies position $z = 0$, and the bottom surface is described by the equation $z = -H(x, y)$. The fluid can be unlimited, partially or completely limited in the direction of coordinates x, y . We will assume that the fluid is inviscid, incompressible, its motion is irrotational, and surface tension forces are not taken into account on the free surface. If waves arise on the surface of an initially at rest liquid, then they can be considered irrotational, neglecting the forces of viscosity, with a sufficient degree of accuracy. This follows from the Helmholtz theorem: the circulation along a closed curve is constant in time.

Under these assumptions, the wave motions of the fluid are described by the velocity potential $\varphi(x, y, z, t)$, which satisfies the Laplace equation

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1)$$

in the area Ω

$$x^s(y, t) \leq x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -H(x, y) \leq z \leq \eta(x, y, t).$$

The velocity potential must satisfy the following boundary conditions on the free surface:
– kinematic condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

– dynamic condition

$$g\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = F(x, y, t), \quad (3)$$

– bottom condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

– initial conditions

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) \Big|_{t=0} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= f_2(x, y, z). \end{aligned} \quad (5)$$

Here t is the time, $\eta(x, y, t)$ is deviation of the free surface, $\vec{v}$ is velocity vector, $\vec{\nabla}$ is gradient operator, $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, $x^s(y, t)$ is line of intersection of the free surface of the liquid with the shore, $F(x, y, t)$, $f_1(x, y, z)$ and $f_2(x, y, z)$ are given functions, $F(x, y, z) = 0$ everywhere, except for the region Ω where surface perturbations are given.

The above statement (1) – (5) refers to the case when at the moment of time $t = 0$ a disturbance is created on the surface of the liquid in the area D and it is required to determine the subsequent movement of the liquid, in particular, the shape of the free surface $z = \eta(x, y, t)$ and the components of the velocity vector must be determined.

Let us now assume that the components of the velocity vector $\vec{v}$, the deviation of the free surface η and the corresponding derivatives are small quantities, the squares and products which can be neglected compared to the linear terms. In this case, equations (2) and (3) are simplified and take the form

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; \quad g\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (6)$$

If we exclude from these equations η , then we can obtain the condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (7)$$

Solution of the specific problems within the framework of the above model (1) – (5) presents great difficulties. The above statement of the problem can only pretend to approximate correspondence to real wave processes.

Wave propagation in the shallow part is not considered, but approximations are applied that are based on the smallness of the ratio of the vertical scale, namely the depth $H = H_{\max}$ to the horizontal scale l (in the case of regular waves, this is the wavelength $l = \lambda$) [20].

The average energy flux per unit length of the wave crest that passes through a fixed vertical surface parallel to the crest is [21]

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^{\eta} \left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) u \, dz \, dt, \quad (8)$$

or taking into account the Bernoulli equation, in which it is assumed that the function $f(t)$ is included in $\partial \varphi / \partial t$, then from (8) we obtain

$$F_{\text{cp}} = -\rho \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-d}^{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dz \, dt. \quad (9)$$

This formula is suitable for any irrotational wave motion, which is either linear or non-linear. In the case of a linear periodic progressive wave, we have

$$\varphi = -a \frac{\omega \operatorname{ch} k(d+z)}{k \operatorname{sh} kd} \cos(\omega t - kx). \quad (10)$$

Substituting (10) into (9) and neglecting some terms of higher orders, we obtain in the case of infinitely deep water

$$F_{\text{cp}}|_{d \rightarrow \infty} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{gT}{2\pi},$$

and in the case of shallow water

$$F_{cp} |_{d \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \sqrt{gd}.$$

From the above expressions and the expression for the wave energy, one can obtain the propagation velocity of the wave energy [22]

$$U_E = \frac{F_{cp}}{E_{cp}} = \frac{1}{2} c_p \left[1 + \frac{2kd}{\operatorname{sh} 2kd} \right], \quad (11)$$

where c_p is the phase velocity. From (11) it follows that $U_E = \frac{c_p}{2}$ for infinitely deep water and $U_E = \sqrt{gd}$ for shallow water. This means that in deep water the energy propagates twice as slowly as the wave itself, and in shallow water at the velocity of the wave itself.

The energy of the incident wave field is equal to the sum of the energy of reflected waves and the energy of transmitted waves in accordance with the law of conservation of energy in the absence of absorption of wave energy by a vertical permeable wall. This is characterized by the reflection k_r and transmission k_t coefficients of the wave. The coefficient k_r is the ratio of the energy of the reflected wave to the energy of the incident wave, and the transmission coefficient k_t is the ratio of the energy of the transmitted wave to the energy of the incident wave. In this case, the wave transmission coefficient characterizes the resistance of the absorbent material. It follows from the law of conservation of energy that $\sqrt{k_r^2 + k_t^2} = 1$ under appropriate normalization.

Methods of experimental research. Experimental researches were carried out in a wave channel with a length of about 50 m, a width and a depth of 1 m. The water level in the channel varied from 0.5 m to 0.7 m. The channel was equipped with a shield generator of waves and an inclined wave absorber (at the end of the channel). Inside the channel, at a distance of about 40 m from the wave generator, permeable breakwaters were installed in the form of vertical slotted walls on a flat sandy base 0.2 m thick (Fig. 2, *a*). Thus, the water level at the location of the investigated breakwater varied from 0.3 m to 0.5 m. The side walls of the channel were made of glass for visual studies.

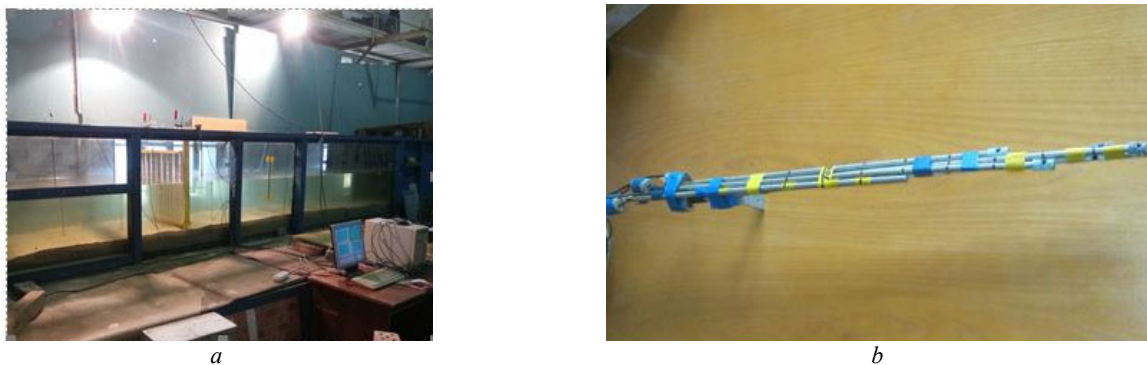


Fig. 2 – Experimental stand (a) and piezoresistive wave height sensors (b).

The experimental stand was equipped with control and measuring equipment, a system for processing and analyzing experimental data. Piezoresistive wave height sensors were installed along the longitudinal axis of the channel in front of the slotted wall and behind the wall (Fig. 2, *b*), and miniature piezoceramic pressure fluctuation sensors were located on the streamlined surface of the slotted wall. The pressure fluctuation sensors were installed flush with the streamlined surface of the slotted wall and recorded the wave pressure that acts on the breakwater as a result of the wave load. In addition, during the experiments, vibrations of the experimental setup and slotted walls were recorded using piezoceramic accelerometers.

Simultaneously 8 wave height sensors, among which traditional capacitive sensors were used, as well as specially designed and manufactured piezoresistive sensors [23, 24] were used in the experiments. Highly sensitive differential piezoresistive pressure sensors were vibrothermo compensated. In these sensors, sensitive elements based on microelectronic technology were applied to a thin quartz membrane, which bent under pressure, and the piezoresistive elements changed their resistance. Amplified electrical signals were fed to multichannel analog-to-digital converters. These sensors were installed in thin-walled tubes (Fig. 2, *b*), the lower ends of which were placed in water. Under the influence of wave motion, the water column in the tubes changed and caused pressure oscillations inside the tubes, which were recorded by piezoresistive sensors. The sensors had a resolution of up to 0.2 Pa or 0.02 mm of water column. These sensors recorded both static and dynamic pressure. Piezoresistive wave height sensors were calibrated by both absolute and relative methods.

The electrical signals of the wave height and pressure fluctuation sensors were amplified, filtered by appropriate equipment, and fed to 16-channel analog-to-digital converters, which were connected to computers or recorded on 4-

channel tape recorders. Processing and analysis of the experimental data were carried out on specialized one- and two-channel spectrum analyzers and personal computers. Universal and special algorithms and programs of probability theory and mathematical statistics [25] were used in the process of data processing and analysis.

The experiments were carried out with single-row slotted walls of different permeability, which were located inside the wave channel parallel to the front of regular waves (Fig. 3). Vertical cylinders with a diameter of 0.05 m, between which gaps were made, formed slotted walls. The permeability of such walls (the ratio of the area of the slots to the area of the wall) varied from 0 % (solid wall) to 60 %.

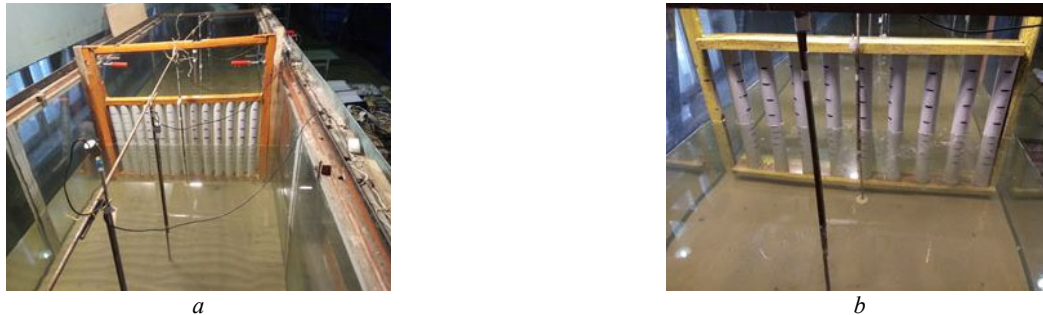


Fig. 3 – Single-row cylindrical models of breakwaters with the permeability of 20 % (a) and 50 % (b) inside the wave channel.

The visualization of the wave motion and the features of the formation of jet and vortex flows between the cylinders of the slotted wall and in the vicinity of the wall itself was carried out using colored dyes and inks. The ink was introduced into the flow by means of miniature tubes and the ink movement trajectories were recorded by digital cameras and video cameras. Video and photographic material was sent to a specially created computer graphics station, where it was processed and analyzed using special programs [26 – 28].

Research results. The results of visual studies made it possible to evaluate the features of the wave motion, its interaction with permeable breakwaters, and to determine the spatio-temporal characteristics of the reciprocating motion of the fluid between cylinders of the slotted wall. So, Fig. 4 shows photographs of wave formation in the vicinity of slotted walls with a permeability of 20 % and 50 %.

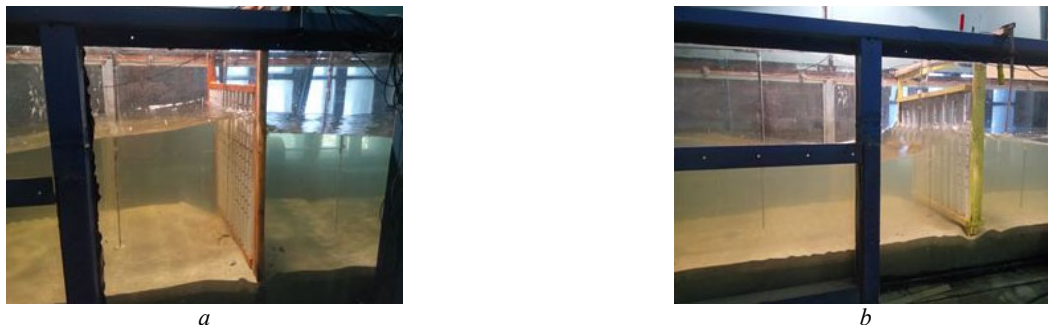


Fig. 4 – Wave heights in front of single-row slotted breakwaters and behind them with the permeability of 20 % (a) and the permeability of 50 % (b).

Studies have shown that an intense wave motion is formed in front of the slotted walls, depending on the modes of wave motion, the design and permeability of the breakwaters. It was found that behind the walls the height of the waves is much less than in front of them. The initial, reflected, standing and transmitted waves are observed on the wave surface in different time intervals. These waves interact with the permeable wall, generate wave pressures on the streamlined surface and alternating loads on the wall.

It is known that the efficiency of breakwaters or vertical walls, which are operated as coastal protection structures, is determined by the features of the formation of waves reflected and passing through the breakwater, as well as the ability to absorb or dissipate wave energy by the breakwater. The efficiency of such structures is determined by the coefficients of wave reflection (k_r), wave transmission (k_t) and wave energy dissipation (k_e). The determination of these coefficients in the research was carried out by measuring the wave heights in front of and behind the permeable breakwater.

The height of the reflected wave was determined by two methods. The first method is to determine the height of the reflected wave using two wave height sensors, one of which was at a wavelength distance (λ) from the breakwater, and the other at a distance of 1.25λ from the breakwater. The first sensor measured the wave height (h_{an}) at the antinode of the standing wave, which is formed as a result of the interference of the incident wave and the reflected wave. The

second sensor measured the wave height (h_n) at the node of the standing wave (Fig. 5, a).

The height of the incident wave was determined as

$$h_i = \frac{h_{an} + h_n}{2}, \quad (16)$$

and the height of the reflected wave was determined as

$$h_r = \frac{h_{an} - h_n}{2}. \quad (17)$$

Hence, the wave reflection coefficient was determined as

$$k_r = \frac{h_r}{h_i} = \frac{h_{an} - h_n}{h_{an} + h_n}. \quad (18)$$

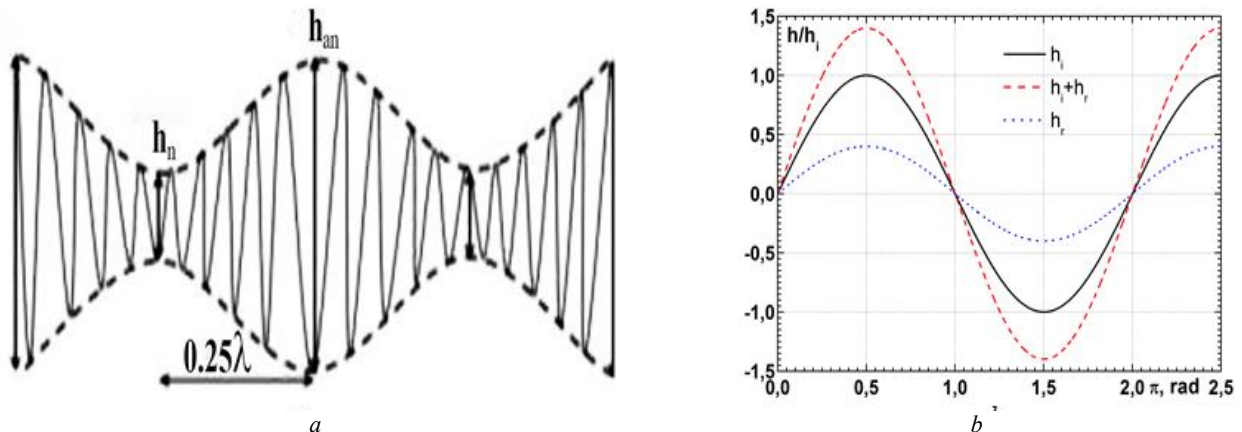


Fig. 5 – Schemes for determining wave heights by the two-point method (a) and the one-point method (b).

Along with the two-point method, a one-point method was used to determine the height of the reflected wave from measuring the height of a standing wave by a wave height sensor, which was located along the axis of the wave channel in front of the breakwater at a distance of more than one length of the incident wave. At the same time, the height of the incident wave was measured in test studies of the operation of the wave generator in the absence of a breakwater inside the wave channel and the presence of wave absorption by wave absorbers. The height of the reflected wave was determined by subtracting the height of the incident wave from the height of the standing wave, as shown schematically in Fig. 5, b. Such a representation is possible when a standing wave is a superposition of the incident and reflection waves, which have the same period and transfer velocity (velocities are oppositely directed). As a result, the velocity of the standing wave in the longitudinal direction is zero and the standing wave performs only vertical oscillations. For this method of determining the reflected wave height, the wave reflection coefficient was determined as

$$k_r = \frac{h_r}{h_i}. \quad (19)$$

The wave reflection coefficients depending on the permeability of the slotted walls and relative depth are shown in Fig. 6.

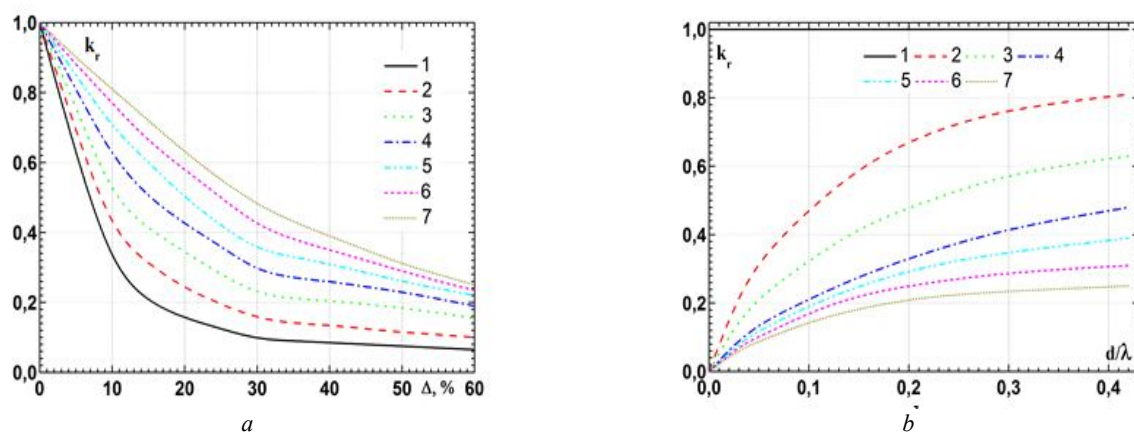


Fig. 6 – Wave reflection coefficients depending on the permeability of the breakwater (a) and the depth (b).

Fig. 6, *a* shows the measurement results of the wave reflection coefficients depending on the permeability of the slotted wall for various depths, which are normalized by the wavelength (H/λ). Curve 1 was measured for relative depth $H/\lambda = 0.03$; curve 2 was measured for $H/\lambda = 0.06$; curve 3 – $H/\lambda = 0.11$; curve 4 – $H/\lambda = 0.16$; curve 5 – $H/\lambda = 0.22$; curve 6 – $H/\lambda = 0.30$ and curve 7 – $H/\lambda = 0.42$. The research results show that with an increase in the permeability of the slotted wall, the wave reflection coefficients is monotonically decreased. In this case, the rate of decrease in the coefficients is higher for walls of low permeability. A solid breakwater completely reflects the original wave and the wave reflection coefficient for such a breakwater $k_r = 1$. As the dimensionless depth (H/λ) increases, the wave reflection coefficients increase, as shown in Fig. 7, *a*. At the same time, the rate of increase in the coefficient k_r is much higher for a slotted breakwater of low permeability than for a breakwater of high permeability.

The measurement results of the wave reflection coefficients by the vertical slotted wall depending on the relative depth for different breakwater permeability are shown in Fig. 6, *b*. Here, curve 1 was obtained for the solid wall with permeability $\Delta = 0\%$; curve 2 was measured for the wall with permeability $\Delta = 10\%$; curve 3 – for $\Delta = 20\%$; curve 4 – for $\Delta = 30\%$; curve 5 – for $\Delta = 40\%$; curve 6 – for $\Delta = 50\%$ and curve 7 – for $\Delta = 60\%$. The research results show that the changes in the wave reflection coefficients have the opposite trend to those observed in Fig. 7, *a*. So, for shallow water conditions or very long waves, the wave reflection coefficient tends to zero. With increasing depth or decreasing wavelength, the coefficient k_r increases. The rate of increase of this coefficient is higher for the slotted walls of low permeability than for the walls with higher permeability. In deep water $H/\lambda > 0.3$, the heights of the reflected waves relative to the incident wave are higher than for the conditions of wave motion in shallow water. The waves are completely reflected from the breakwater for the solid wall $\Delta = 0\%$ and the reflection coefficient takes the value $k_r = 1$ regardless of the depth or wavelength.

The transmitted wave height (h_t) was measured by wave height sensors behind the permeable breakwater at a distance greater than the incident wave length, and the wave transmission coefficient was determined as

$$k_t = \frac{h_t}{h_i}. \quad (20)$$

The wave transmission coefficients are shown in Fig. 7 depending on the permeability of slotted walls and relative depth. Fig. 7, *a* shows the results of measuring the wave transmission coefficients depending on the permeability of the slotted wall for various depths, which are normalized by the wavelength (H/λ). Curve 1 was measured for relative depth $H/\lambda = 0.03$; curve 2 was measured for $H/\lambda = 0.06$; curve 3 – $H/\lambda = 0.11$; curve 4 – $H/\lambda = 0.16$; curve 5 – $H/\lambda = 0.22$; curve 6 – $H/\lambda = 0.30$ and curve 7 – $H/\lambda = 0.42$. As the results of the study showed, the nature of the change in the wave transmission coefficient has the opposite trend with respect to the change in the wave reflection coefficient. It has been established that the wave transmission coefficient is increased with an increase in permeability and a decrease in depth or an increase in wavelength.

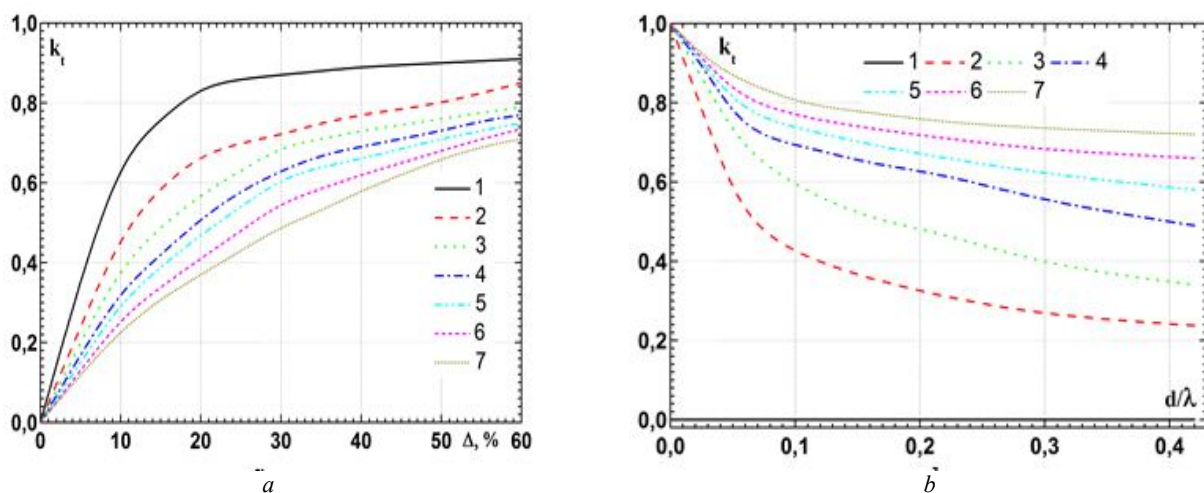


Fig. 7 – The wave propagation coefficients depending on the permeability of the breakwater (*a*) and the relative depth (*b*).

Changes of the wave transmission coefficient are shown in Fig. 7, *b* depending on the relative depth for different permeability of the slotted wall. Curve 1 was obtained for the solid wall with permeability $\Delta = 0\%$; curve 2 was measured for the wall with permeability $\Delta = 10\%$; curve 3 – $\Delta = 20\%$; curve 4 – $\Delta = 30\%$; curve 5 – $\Delta = 40\%$; curve 6 – $\Delta = 50\%$ and curve 7 – $\Delta = 60\%$. The wave propagation coefficient is decreased with increasing relative depth and with increasing breakwater permeability. When the breakwater is a continuous vertical wall ($\Delta = 0\%$), then the wave

does not transmit into the protected water area ($k_t = 0$).

The physical processes that occur during the interaction of waves with permeable protection structures have a big influence on the values of the reflection and propagation coefficients of the wave, as well as on the relationship between them. When a breakwater is installed in the marine environment, significant changes in the wave field occur. Interference, diffraction and transformation of waves are observed, reflected and transmitted waves are appeared, and wave breaking is occurred [17, 29]. The orbital velocities of wave motion are changed, turbulence is increased and horseshoe and wake vortices are generated in front of the breakwater and supporting piles, as well as jet streams are occurred between piles. This leads to an increase in friction between the surface of the breakwater and the moving liquid, as well as dissipation of wave energy.

The law of conservation of energy of the incident gravity wave, which interacts with a permeable breakwater, is expressed as follows:

$$E_i = E_r + E_t + E_d, \quad (21)$$

where E_i is the energy of the incident wave ($E_i = \rho g h_i^2 / 8$), E_r is the energy of the reflected wave ($E_r = \rho g h_r^2 / 8$), E_t is the energy of the transmitted wave through the breakwater ($E_t = \rho g h_t^2 / 8$), and E_d is the energy of the wave dissipation. Substituting into equation (21) the values E_r , E_t and E_d , as well as dividing the components of this equation by E_i , we obtain:

$$1 = (h_r / h_i)^2 + (h_t / h_i)^2 + E_d / E_i \quad (22)$$

or

$$k_e = 1 - (k_r^2 + k_t^2). \quad (23)$$

The values of the wave dissipation coefficients depending on the permeability of the breakwater and the relative depth are shown in Fig. 8. Here, the numbers of the curves correspond to those shown in Fig. 6 and in Fig. 7.

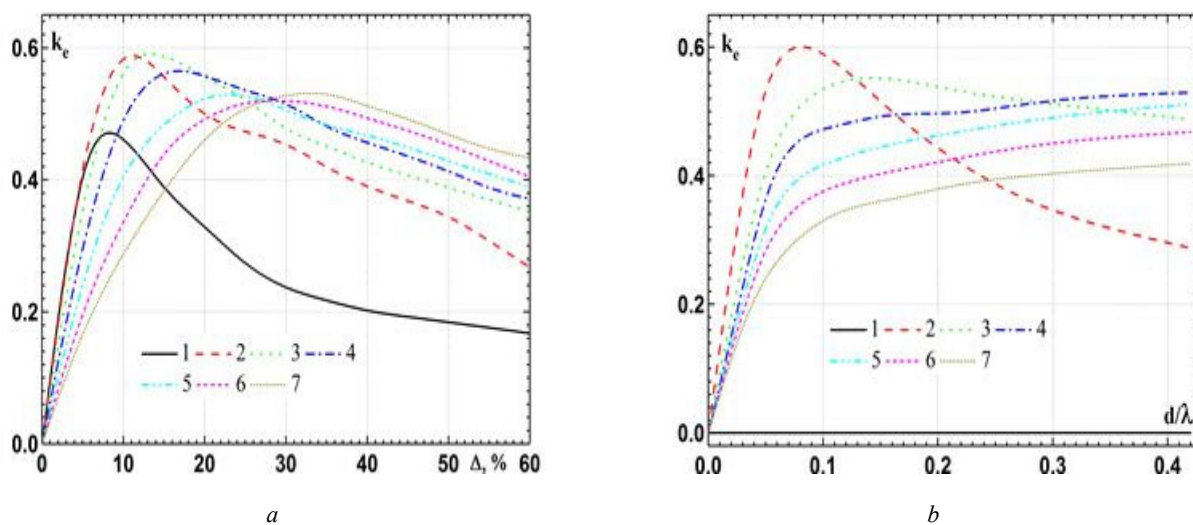


Fig. 8 – The wave energy dissipation coefficients depending on the permeability of the breakwater (a) and the relative depth (b).

As the results of the study showed, the maximum wave energy dissipation was observed with the larger breakwater permeability when the relative depth was increased or when the wavelength was becoming shorter.

Conclusions. It has been established that vertical slotted walls, depending on the permeability, significantly affect the wave field, generate reflection waves and transmission waves, and also lead to significant wave energy dissipation. The dependences of the reflection and transmission coefficients of the wave, as well as the wave energy dissipation coefficient, depending on the permeability of the slotted breakwater and the relative depth of the water area are presented.

It was shown that the wave reflection coefficient was decreased with an increase in the breakwater permeability, and the wave transmission coefficient, on the contrary, was increased. The wave energy dissipation coefficient had a maximum value that was observed for greater permeability when the relative depth was increased compared to the

wavelength. It was found that the wave reflection coefficient was increased with increasing relative depth, while the wave transmission coefficient, on the contrary, was decreased.

It has been established that the tonal components, which correspond to the fundamental frequency of the wave motion and its higher harmonics, prevail in the spectral power densities of the wave pressure fluctuations. In this case, these components were observed in front of the breakwater and behind it, as well as in the spectra of near-wall pressure fluctuations on the streamlined surface of the permeable breakwater.

Bibliography

1. Sorensen R. M. Basic coastal engineering. – NY : Springer Science, 2006. – 356 p.
2. Khomytsky V. V., Voskoboinick V. A., Kharchenko A. G., Voskoboinyck O. A., Tereshchenko L. M., Voskoboinyck A. V., Nikitin I. A. Beach protection by active shore protection structures // Ecological safety and nature management. – 2019. Vol. 32. – P. 60 – 77. DOI: 10.32347/2411-4049.2019.4.60-77.
3. Voskoboinick V., Khomytsky V., Tereshchenko L., Voskoboinick A. Wave loads on protective dam of the Marine channel of the Danube-Black sea // Hydro-environment Research. – 2021. – Vol. 35. – P. 1 – 12. DOI: 10.1016/j.jher.2021.01.003.
4. Choopanizade M. J., Bakhtiari M., Rostami M. Wave transmission through the perforated half-depth block-made wall breakwater: An experimental study // Ocean Engineering. – 2020. – Vol. 215. – P. 107895. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107895.
5. Alkhalidi M., Alanjari N., Neelamani S. Wave interaction with single and twin vertical and sloped slotted walls // J. Mar. Sci. Eng. – 2020. – Vol. 8. – P. 589-1-23. DOI: 10.3390/jmse8080589.
6. Koley S., Panduranga K. Energy balance relations for flow through thick porous structures // Int. J. Comp. Meth. Exp. Meas. – 2021. – Vol. 9. – P. 28 – 37. DOI: 10.2495/CMEM-V9-N1-28-37.
7. Venkateswarlu V., Karmakar D. Numerical investigation on the wave dissipating performance due to multiple porous structures // ISH J. Hydraul. Eng. – 2019. – Vol. 3. – P. 314 – 324. DOI: 10.1080/09715010.2019.1615393.
8. Lopez I., Rosa-Santos P., Moreira C., Taveira-Pinto F. RANS-VOF modelling of the hydraulic performance of the LOWREB caisson // J. Coastal Engineering. – 2018. – Vol. 140. – P. 161 – 174. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2018.07.006.
9. Qiao W., Keh-Han W., Wenqi D., Yuqing S. Analytical model of wave loads and motion responses for a floating breakwater system with attached dual porous side walls // J. Math. Prob. Eng. – 2018. – Vol. 14. – P. 1 – 14. DOI: 10.1155/2018/1295986.
10. Selezov I. T., Kryvonos Yu. G., Gandzha I. S. Wave propagation and diffraction. Mathematical methods and applications – Singapore: Springer, 2018. – 241 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4923-1>.
11. Andersen T. L., Eldrup M. R. Estimation of incident and reflected components in nonlinear regular waves over sloping foreshores // Coastal Engineering. – 2021. – Vol. 169. – P. 103974. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2021.103974>.
12. Selezov I. T., Savchenko S. A. Propagation of surface gravitational waves and interaction with obstacles in the extraction of wave energy. – Kyiv: AVERS, 2014. – 214 p.
13. Kriebel D. L. Vertical wave barriers: wave transmission and wave forces // Proc. 23rd Coast. Engrg. Conf., ASCE. – 1992. – Vol. 2. – P. 1313 – 1326.
14. Isaacson M., Premasiri S., Yang G. Wave interactions with vertical slotted barrier // J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. – 1998. – Vol. 124. – P. 118 – 126. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(1998)124:3(118).
15. Zhu D. Hydrodynamic characteristics of a single-row pile breakwater // Coastal Engineering. – 2011. – Vol. 58. – P. 446 – 451. DOI: 10.1016/J.COASTALENG.2011.01.003.
16. Krishnakumar C., Sundar V., Sannasiraj S. A. Hydrodynamic performance of single- and double-wave screens // J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. – 2010. – Vol. 136. – P. 59 – 65. DOI: 10.1061/(ASCE)WW.1943-5460.0000025.
17. Koraim A. S. Hydraulic characteristics of pile-supported L-shaped bars used as a screen breakwater // Ocean Engineering. – 2014. – Vol. 83. – P. 36 – 51. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2014.03.016.
18. Poguluri S. K., Cho I. H. Analytical and numerical study of wave interaction with a vertical slotted barrier // Ships and Offshore Structures. – 2021. – Vol. 16. – P. 1012 – 1024. DOI: 10.1080/17445302.2020.1790299.
19. Zhang C., Li Y., Zheng J., Xie M., Shi J., Wang G. Parametric modelling of nearshore wave reflection // Coastal Engineering. – 2021. – Vol. 169. – P. 103978. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2021.103978.
20. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves. – NY : John Wiley & Sons, 1999. – 638 p. DOI: 10.1002/9781118032954.
21. Le Mehaute B. An introduction to hydrodynamics and water waves. – NY: Springer-Verlag, 1976. – 323 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85567-2.
22. Stoker J. J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. – NY : John Wiley & Sons, 1992. – 567 p. DOI: 10.1002/9781118033159.
23. Voskoboinick V., Kornev N., Turnow J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements // Flow Turbulence Combust. – 2013. – Vol. 90. – P. 709 – 722. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
24. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. A., Turick V. N., Voskoboinick A. V. Space and time characteristics of the velocity and pressure fields of the fluid flow inside a hemispherical dimple generator of vortices // J. Engineering Physics and Thermophysics. – 2020. – Vol. 93. – P. 1205 – 1220. DOI: 10.1007/s10891-020-02223-3.
25. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 4th Edition. – N.Y. : Wiley, 2010. – 613 p. DOI: 10.1002/9781118032428.
26. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. V., Areshkovych O. O., Voskoboinyck O. A. Pressure fluctuations on the scour surface before prismatic pier // Proc. 8th International Conference on Scour and Erosion (ICSE 2016) 12 – 15 September 2016 Oxford, UK. – 2016. – P. 905 – 910. DOI: 10.1201/9781315375045-115.
27. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyck O., Cherny D., Tereshchenko L. Interaction of group of bridge piers on scour / Z. Hu, S. Petoukhov, I. Dychka, M. He (Eds.). Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEE 2020. // Advances in Intelligent Systems and Computing. – Springer, Cham, 2021. – Vol. 1247. – P. 3 – 17. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1.
28. Voskoboinick V. A., Gorban I. M., Voskoboinick A. A., Tereshchenko L. N., Voskoboinick A. V. Junction flow around cylinder group on flat plate / V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky (Eds.). // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. – Understanding Complex Systems, Springer, Cham, 2021. – P. 35 – 50. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_3.
29. Reddy M. S., Neelamani S. Wave transmission and reflection characteristics of a partially immersed rigid vertical barrier // Ocean Engineering. – 1992. – Vol. 19. – P. 313 – 325. DOI: 10.1016/0029-8018(92)90032-Y.

References (transliterated)

1. Sorensen R. M. *Basic coastal engineering*. NY, Springer Science, 2006. 356 p.
2. Khomytsky V. V., Voskoboinick V. A., Kharchenko A. G., Voskoboinyk O. A., Tereshchenko L. M., Voskobiinyk A. V., Nikitin I. A. Beach protection by active shore protection structures. *Ecological safety and nature management*. 2019, Vol. 32, pp. 60–77. DOI: 10.32347/2411-4049.2019.4.60-77.
3. Voskoboinick V., Khomytsky V., Tereshchenko L., Voskoboinick A. Wave loads on protective dam of the Marine channel of the Danube-Black sea. *Hydro-environment Research*. 2021, Vol. 35, pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.jher.2021.01.003.
4. Choopanizade M. J., Bakhtiari M., Rostami M. Wave transmission through the perforated half-depth block-made wall breakwater: An experimental study. *Ocean Engineering*. 2020., Vol. 215, P. 107895. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107895.
5. Alkhalidi M., Alanjari N., Neelamani S. Wave interaction with single and twin vertical and sloped slotted walls. *J. Mar. Sci. Eng.* 2020, Vol. 8, P. 589-1-23. DOI: 10.3390/jmse8080589.
6. Koley S., Panduranga K. Energy balance relations for flow through thick porous structures. *Int. J. Comp. Meth. Exp. Meas.* 2021, Vol. 9, pp. 28–37. DOI: 10.2495/CMEM-V9-N1-28-37.
7. Venkateswarlu V., Karmakar D. Numerical investigation on the wave dissipating performance due to multiple porous structures. *ISH J. Hydraul. Eng.* 2019, Vol. 3, pp. 314–324. DOI: 10.1080/09715010.2019.1615393.
8. Lopez I., Rosa-Santos P., Moreira C., Taveira-Pinto F. RANS-VOF modelling of the hydraulic performance of the LOWREB caisson. *J. Coastal Engineering*. 2018, Vol. 140, pp. 161–174. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.coastaleng.2018.07.006>.
9. Qiao W., Keh-Han W., Wenqi D., Yuqing S. Analytical model of wave loads and motion responses for a floating breakwater system with attached dual porous side walls. *J. Math. Prob. Eng.* 2018, Vol. 14, pp. 1–14. DOI: 10.1155/2018/1295986.
10. Selezov I. T., Kryvonos Yu. G., Gandzha I. S. *Wave propagation and diffraction. Mathematical methods and applications*. Singapore, Springer, 2018. 241 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4923-1>.
11. Andersen T. L., Eldrup M. R. Estimation of incident and reflected components in nonlinear regular waves over sloping foreshores. *Coastal Engineering*. 2021, Vol. 169, pp. 103974. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2021.103974>.
12. Selezov I. T., Savchenko S. A. *Propagation of surface gravitational waves and interaction with obstacles in the extraction of wave energy*. Kyiv, AVERS, 2014. 214 p.
13. Kriebel D. L. Vertical wave barriers: wave transmission and wave forces. *Proc. 23rd Coast. Engrg. Conf., ASCE*. 1992, Vol. 2, pp. 1313–1326.
14. Isaacson M., Premasiri S., Yang G. Wave interactions with vertical slotted barrier. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.* 1998, Vol. 124, pp. 118–126. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(1998)124:3(118).
15. Zhu D. Hydrodynamic characteristics of a single-row pile breakwater. *Coastal Engineering*. 2011, Vol. 58, pp. 446–451. DOI: 10.1016/J.COASTALENG.2011.01.003.
16. Krishnakumar C., Sundar V., Sannasiraj S. A. Hydrodynamic performance of single- and double-wave screens. *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.* 2010, Vol. 136, pp. 59–65. DOI: 10.1061/(ASCE)WW.1943-5460.0000025.
17. Koraim A. S. Hydraulic characteristics of pile-supported L-shaped bars used as a screen breakwater. *Ocean Engineering*. 2014, Vol. 83, pp. 36–51. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2014.03.016.
18. Poguluri S. K., Cho I. H. Analytical and numerical study of wave interaction with a vertical slotted barrier. *Ships and Offshore Structures*. 2021, Vol. 16, pp. 1012–1024. DOI: 10.1080/17445302.2020.1790299.
19. Zhang C., Li Y., Zheng J., Xie M., Shi J., Wang G. Parametric modelling of nearshore wave reflection. *Coastal Engineering*. 2021, Vol. 169, pp. 103978. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2021.103978.
20. Whitham G. B. *Linear and nonlinear waves*. NY, John Wiley & Sons, 1999. 638 p. DOI: 10.1002/9781118032954.
21. Le Mehaute B. *An introduction to hydrodynamics and water waves*. NY, Springer-Verlag, 1976. 323 p. DOI: 10.1007/978-3-642-85567-2.
22. Stoker J. J. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. NY, John Wiley & Sons, 1992. 567 p. DOI: 10.1002/9781118033159.
23. Voskoboinick V., Kornev N., Turnow J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements. *Flow Turbulence Combust.* 2013, Vol. 90, pp. 709–722. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
24. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. A., Turick V. N., Voskoboinick A. V. Space and time characteristics of the velocity and pressure fields of the fluid flow inside a hemispherical dimple generator of vortices. *J. Engineering Physics and Thermophysics*. 2020, Vol. 93, pp. 1205–1220. DOI: 10.1007/s10891-020-02223-3.
25. Bendat J. S., Piersol A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 4th Edition*. N.Y., Wiley, 2010. 613 p. DOI: 10.1002/9781118032428.
26. Voskoboinick V. A., Voskoboinick A. V., Areshkovych O. O., Voskoboinyk O. A. Pressure fluctuations on the scour surface before prismatic pier. *Proc. 8th International Conference on Scour and Erosion (ICSE 2016) 12 – 15 September 2016*. Oxford, UK, 2016. pp. 905–910. DOI: 10.1201/9781315375045-115.
27. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyk O., Cherny D., Tereshchenko L. Interaction of group of bridge piers on scour. (Z. Hu, S. Petoukhov, I. Dychka, M. He (Eds.). *Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer, Cham, 2021, Vol. 1247, pp. 3–17. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1.
28. Voskoboinick V. A., Gorban I. M., Voskoboinick A. A., Tereshchenko L. N., Voskoboinick A. V. Junction flow around cylinder group on flat plate. (V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky (Eds.)). *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*. Understanding Complex Systems, Springer, Cham, 2021. pp. 35–50. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_3.
29. Reddy M. S., Neelamani S. Wave transmission and reflection characteristics of a partially immersed rigid vertical barrier. *Ocean Engineering*. 1992., Vol. 19, pp. 313–325. DOI: 10.1016/0029-8018(92)90032-Y.

Received (надійшла) 10.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воскобійник Володимир Анатолійович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2161-6923>; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Voskoboinick Volodymyr Anatoliyovych – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flow, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2161-6923>; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, №1 (8) 2025.

ences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2161-6923>; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Воскобойник Олександр Анатолійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8114-4433>; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Voskoboinyk Oleksandr Anatoliyovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow at the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flow, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8114-4433>; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Воскобийник Андрій Володимирович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідробіоніки та керування примежовим шаром, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8045-8625>; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

Voskobiinyk Andriy Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department of Hydrobionics and Boundary Layer Control, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8045-8625>; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

Харченко Анатолій Григорович – головний інженер-електромеханік відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5832-7714>; e-mail: Anatoliy.kharchenko62@gmail.com.

Kharchenko Anatolii Grygorovych – chief electromechanical engineer of the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flow, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5832-7714>; e-mail: Anatoliy.kharchenko62@gmail.com.

Труденко Денис Володимирович – аспірант кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд, Національний транспортний університет, м. Київ; тел.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3720-1952>; e-mail: tdv.83@ukr.net.

Trudenko Denys Volodymyrovych – PhD Student of the Department of Bridges, Tunnels and Hydrotechnical Structures, National Transport University, Kyiv; tel.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3720-1952>; e-mail: tdv.83@ukr.net.

**V. A. VOSKOBOINICK, A. M. ONYSHCHENKO, O. A. VOSKOBOINYK, A. V. VOSKOBIINYK,
D. V. TRUDENKO**

INTERACTION OF SURFACE GRAVITY WAVES WITH PERFORATED SCREEN

The paper examines the interaction of surface gravity waves with cylindrical marine structures within the framework of a finite depth fluid model. The problem is considered in a potential formulation. The impact of a perforated screen as a protective element around a cylindrical structure on reducing force loads on it and changing the deflection of the free surface of the water was investigated. The dependence of wave diffraction on screen perforation and its position relative to the cylinder was established. Wave diffraction research methods and their application to solving problems are discussed. Analytical solutions were built and calculations were made on this basis, which allow investigating the influence of the geometric proportions of the structure on the lateral force, in order to establish the minimum and maximum wave loads. The dependence of the total scattering power and the scattering diagram on the physical and geometric parameters of the model was established. It is shown that the perforated screen has the properties of a wave absorber, that is, it can be used as a protective element.

Key words: surface gravity wave, cylindrical marine structure, perforated screen, analytical solution, diffraction theory.

**В. А. ВОСКОБІЙНИК, А. М. ОНИЩЕНКО, О. А. ВОСКОБОЙНИК, А. В. ВОСКОБІЙНИК,
Д. В. ТРУДЕНКО**

ВЗАЄМОДІЯ ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ З ПЕРФОРОВАНИМ ЕКРАНОМ

У статті розглядається взаємодія поверхневих гравітаційних хвиль з циліндричними морськими структурами в рамках моделі рідини скінченної глибини. Проблема розглядається в потенційній постановці. Досліджено вплив перфорованого екрана як захисного елемента навколо циліндричної конструкції на зменшення силових навантажень на неї та зміну прогину вільної поверхні води. Встановлено залежність дифракції хвилі від перфорації екрана та його положення відносно циліндра. Обговорюються методи дослідження дифракції хвиль та їх застосування до розв'язування задач. На їх основі побудовано аналітичні рішення та проведено розрахунки, які дозволяють дослідити вплив геометричних пропорцій конструкції на поперечну силу, щоб встановити мінімальне та максимальне хвильове навантаження. Встановлено залежність повної потужності розсіювання та діаграми розсіювання від фізико-геометричних параметрів моделі. Показано, що перфорований екран має властивості поглинач хвиль, тобто його можна використовувати як захисний елемент.

Ключові слова: поверхнева гравітаційна хвиля, циліндрична морська структура, перфорований екран, аналітичне рішення, теорія дифракції.

Introduction. Various types and forms of coastal protective and wave-absorbing structures are widely used during the construction of coastal hydrotechnical structures to improve the environmental protection and ecological conditions of the coastal infrastructure. These structures protect the beaches from scour, and the shores from soil erosion. They absorb and reduce wave heights and their load on coastal hydrotechnical structures, improve shipping conditions and the operation of port and wharf facilities [1 – 5].

In many scientific centers, laboratories and design organizations, considerable efforts are focused on determining the optimal shapes, sizes, structural elements and locations of wave energy absorbers. For this, dams, breakwaters, single- and multi-layer porous plates, screens, pile structures and other permeable marine facilities are used [6 – 9].

In this research, the problem of the interaction of surface gravity waves with vertical cylindrical obstacles of large transverse dimensions is considered. In reality, marine structures are subjected to various loads: buoyancy forces, gravity, wind forces, thermal internal forces, some functional loads, flow forces. However, in mathematical modeling it should be taken into account that the most significant dynamic effect is caused by the interaction of waves with structures [10]. Mathematical methods of investigating wave diffraction problems are discussed in monograph [11].

Exact solutions of the problem of diffraction of surface gravity waves on a circular column, located on a cylindrical base of variable and constant depth, were obtained and analyzed in paper [12] within the framework of the theory of shallow water. A correction for a liquid of finite depth is made with calculating the lateral force and the moment of forces. Research [13] shows the correspondence between the theoretical calculations of loads on a circular cylinder according to [14] and the data obtained experimentally.

The interaction of monochromatic waves with a horizontal porous elastic membrane placed horizontally in water was investigated in the paper [15] within the framework of the two-dimensional theory of hydroelasticity. Due to the fact that the wave number in the region above the membrane is complex, energy dissipation occurs. On the basis of the considered model, the coefficients of transmission, reflection and dissipation of waves were calculated. The theoretical model and numerical calculations were confirmed by a number of conducted experiments, which showed a close correspondence between theory and practice.

The linear potential theory of wave diffraction on a vertical circular cylinder with a perforated horizontal annular plane in a liquid of finite depth was considered in research [16]. The mechanism of reducing the loads on the cylinder with the help of a porous ring plate compared to an impermeable ring was investigated.

The work [17] is devoted to the study of the perforation parameter of a thin permeable wall. Using an experimental physical model, the horizontal force component, wave transmission and reflection coefficients were calculated. Recommendations for using the formula for finding resistance coefficients and inertial effect have been introduced. A complete estimate of the porosity parameter was presented.

In work [18] was considered the theory of a porous wave generator. An analysis of small-amplitude surface gravity waves in a liquid of finite depth, generated by horizontal oscillation from a porous vertical plate, was carried out. The influence of parameters of the wave effect and porosity effect on the wave surface and hydrodynamic pressure was discussed in detail.

The design optimization of the multilayer porous wave absorber in research [19] was achieved using a controlled artificial neural network (ANM) and an analytical model, confirmed by CFD and experiments. The analytical model was established using a matched eigenfunction expansion method (MEEM) by applying a boundary condition with a quadratic relationship between the pressure drop and the velocity of fluid movement at the porous screens. Input key features of the multi-layer porous wave absorber were selected through the parametric study along with the reflection coefficient as a target feature.

The interaction of regular waves with a concentric system consisting of an inner solid and an outer perforated cylinder was experimentally studied in research [20]. The effect of perforation on wave loads on the inner cylinder was determined by varying the value of the screen permeability coefficient.

In the work [21] theoretically investigated the interaction of waves with a system of permeable circular cylinders protruding above the water. The side of each of them was permeable and thin. It is shown that the perforation of the structures leads to a significant change, namely the reduction of the hydrodynamic loads acting on the cylinders, as well as the rolling of the waves.

The interaction of short-crest waves with a system of two concentric cylinders, the inner one of which is impenetrable, and the outer one is perforated, is theoretically considered in the article [22]. The effects of force loads, deflection of the free surface and diffraction from the wave number, design parameters and porosity of the outer cylinder were analyzed.

Setting of the task. In a linear formulation within the framework of a fluid model of finite depth, using the Darcy equation for a perforated screen, the problem of wave diffraction is formulated.

Fluid in the task is considered ideal, incompressible, and its motion is irrotational. The liquid occupies areas

$$\Omega_0 = \{r, \theta, z \mid r \geq l_0; 0 \leq \theta < 2\pi; -H_0 \leq z \leq 0\},$$

$$\Omega_1 = \{r, \theta, z \mid a \leq r < l_0; 0 \leq \theta < 2\pi; -H_0 \leq z \leq 0\}$$

in accordance with the diagram in Fig. 1.

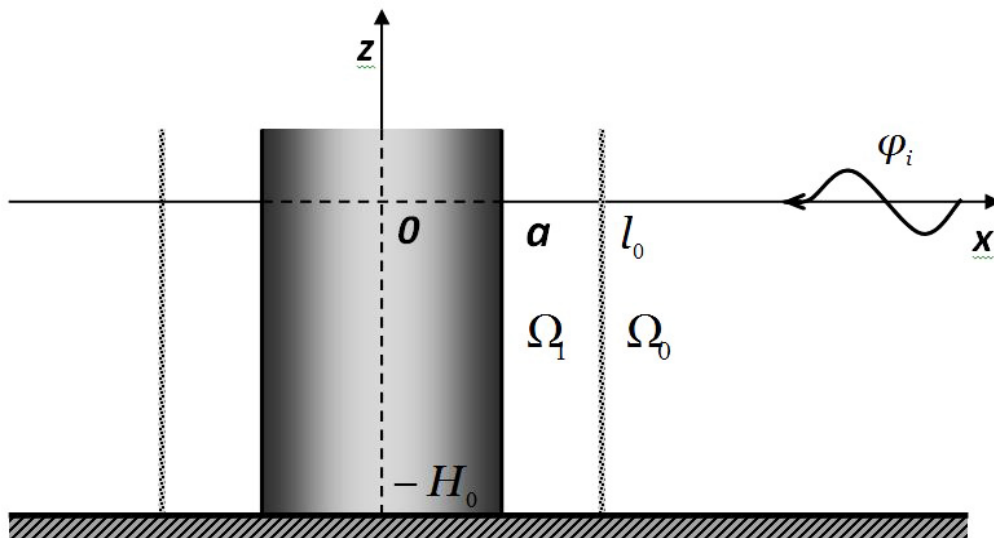


Fig. 1 – Geometry of the task.

Let us introduce velocity potentials $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ in each considered region of the problem under consideration in accordance with the above assumptions.

Let a perforated absolutely thin hollow cylinder of radius l_0 surround a rigid cylindrical body of radius a . Both cylinders are installed on an impenetrable bottom and a plane sinusoidal wave with velocity potential is streamed to them.

$$\Phi_i = \frac{iAg}{\omega} \frac{chk_0(z + H_0)}{chk_0H_0} e^{i(k_0r \cos\theta + \omega t)},$$

where k_0 is the wave number, A is the amplitude of the incident wave, ω is the cyclic frequency. Due to the stationarity of the process, the multiplier $e^{i\omega t}$ is dropped in the future: $\Phi_j = \phi_j(r, \theta, z)e^{i\omega t}$, $j = 0, 1$.

The unknown functions of the velocity potentials must satisfy the Laplace equation (1) in each of the regions under consideration. The boundary conditions at the bottom and on the free surface of the water are expressed by dependencies (2) and (3), respectively. The boundary condition of impermeability on the cylinder is expressed by dependence (5). The conjugation condition when passing through a perforated screen corresponds to (4) and expresses the equality of velocities and Darcy's filtration law. It is believed that the permeable cylinder is made of material with very small pores. This allows us to make the assumption that the normal component of the velocity through the perforated screen is linearly proportional to the variable pressure on both sides of it (correctly at low Reynolds numbers).

The task in the internal Ω_1 and external Ω_0 areas has the form:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_j = 0, \quad \gamma = \frac{H_0}{a}, \quad j = 0, 1. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = -H_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} - \omega^2 \gamma^2 \phi_j = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = ik_0 G_0 (\phi_0 - \phi_1), \quad G_0 = \frac{b\omega}{\mu k_0} \quad \text{at} \quad r = l_0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = a, \quad (5)$$

where G_0 is Chwang parameter, perforation coefficient.

The Sommerfeld condition of wave attenuation at infinity must also be fulfilled

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} + ik_0 \phi_s \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_s = 0.$$

The statement of the problem is given in dimensionless values, which are entered as follows:

$$r^* = \frac{r}{a}, \quad k_0^* = k_0 \cdot a, \quad \omega^* = \frac{\omega a}{\sqrt{gH_0}}, \quad t^* = \frac{t \sqrt{gH_0}}{a}, \quad \phi_j^* = \frac{\phi_j}{a \sqrt{gH_0}}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}. \quad (6)$$

The values of H_0 and a are saved as trace parameters. The drop-down field will be written as follows

$$\phi_i = \frac{iA}{\omega} \frac{ch \gamma k_0 (z + H_0)}{ch \gamma k_0 H_0} e^{ik_0 r \cos \theta}. \quad (7)$$

The potential in the outer region is the sum of the potentials of the incident and scattered fields: $\phi_0 = \phi_i + \phi_s$.

Solving of the problem. Solutions in regions are sought by the method of separation of variables and have the form:

$$\phi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \left[\varepsilon_m i^{m+1} \frac{A}{\omega} \frac{ch \gamma k_0 (z + H_0)}{ch \gamma k_0 H_0} J_m(k_0 r) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} H_m^{(2)}(i \mu_n r) \right],$$

$$\phi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} [B_{mn} J_m(i \mu_n r) + C_{mn} N_m(i \mu_n r)],$$

where $J_m(x)$, $N_m(x)$, $H_m^{(2)}(x)$ are cylindrical Bessel, Neumann, and Hankel functions of the second order, respectively.

The dispersion relation is sought from the conditions on the free surface and has the form:

$$1 - c \gamma k_0 H_0 th \gamma k_0 H_0 = 0, \quad c = \frac{1}{\gamma^2 \omega^2 H_0}, \quad \omega^2 = \frac{k_0}{\gamma} th \gamma k_0 H_0,$$

$$1 + c \gamma \mu_n H_0 tg \gamma \mu_n H_0 = 0.$$

where μ_n are the real positive roots of the last equation at $n > 0$, $\mu_0 = -ik_0$.

The ratio between the roots is as follows:

$$\frac{\mu_n}{\mu_l} = \frac{tg \gamma \mu_l H_0}{tg \gamma \mu_n H_0}.$$

Substituting the solutions into the conjugation conditions and the boundary condition leads to an infinite system of equations.

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_m i^{m+1} k_0 \frac{A}{\omega} \frac{\operatorname{ch} \gamma k_0 (z + H_0)}{\operatorname{ch} \gamma k_0 H_0} J'_m(k_0 l_0) + \sum_{n=0}^{\infty} i \mu_n A_{mn} \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} H_m^{(2)}(i \mu_n l_0) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} i \mu_n \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} [B_{mn} J'_m(i \mu_n l_0) + C_{mn} N'_m(i \mu_n l_0)], \\
& \sum_{n=0}^{\infty} i \mu_n \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} [B_{mn} J'_m(i \mu_n l_0) + C_{mn} N'_m(i \mu_n l_0)] = \\
& = i k_0 G_0 \left\{ \varepsilon_m i^{m+1} \frac{A}{\omega} \frac{\operatorname{ch} \gamma k_0 (z + H_0)}{\operatorname{ch} \gamma k_0 H_0} J'_m(k_0 l_0) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} H_m^{(2)}(i \mu_n l_0) - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} [B_{mn} J'_m(i \mu_n l_0) + C_{mn} N'_m(i \mu_n l_0)] \right\}, \\
& \sum_{n=0}^{\infty} i \mu_n \frac{\cos \gamma \mu_n (z + H_0)}{\cos \gamma \mu_n H_0} [B_{mn} J'_m(i \mu_n a) + C_{mn} N'_m(i \mu_n a)] = 0.
\end{aligned}$$

The operation of finding unknown coefficients can be simplified by using the orthogonality of the functions $\cos \gamma \mu_l (z + H_0)$ and $\cos \gamma \mu_n (z + H_0)$ on the interval $(-H_0; 0)$, due to which we will obtain new dependencies, from which it follows that $A_{mn} = B_{mn} = C_{mn} = 0$ at $n > 0$. Thus, the solutions of the problem have the form:

$$\phi_0 = \frac{\operatorname{ch} \gamma k_0 (z + H_0)}{\operatorname{ch} \gamma k_0 H_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\varepsilon_m i^{m+1} \frac{A}{\omega} J'_m(k_0 r) + A_{m0} H_m^{(2)}(k_0 r) \right] \cos m\theta, \quad (8)$$

$$\phi_1 = \frac{\operatorname{ch} \gamma k_0 (z + H_0)}{\operatorname{ch} \gamma k_0 H_0} \sum_{m=0}^{\infty} [B_{m0} J'_m(k_0 r) + C_{m0} N'_m(k_0 r)] \cos m\theta, \quad (9)$$

where the unknown coefficients are:

$$A_{m0} = -\frac{A}{\omega} \varepsilon_m i^{m+1} \frac{J'_m(k_0 l_0) \Delta 1 + i G_0 J'_m(k_0 l_0) \Delta 2}{H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 1 + i G_0 H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 2}, \quad (10)$$

$$B_{m0} = \frac{A}{\omega} G_0 \varepsilon_m i^{m+2} N'_m(k_0 a) \frac{J'_m(k_0 l_0) H_m^{(2)}(k_0 l_0) - J'_m(k_0 l_0) H_m^{(2)}(k_0 l_0)}{H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 1 + i G_0 H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 2}, \quad (11)$$

$$C_{m0} = -\frac{A}{\omega} G_0 \varepsilon_m i^{m+2} J'_m(k_0 a) \frac{J'_m(k_0 l_0) H_m^{(2)}(k_0 l_0) - J'_m(k_0 l_0) H_m^{(2)}(k_0 l_0)}{H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 1 + i G_0 H_m^{(2)}(k_0 l_0) \Delta 2}, \quad (12)$$

$$\Delta 1 = N'_m(k_0 a) [J'_m(k_0 l_0) + i G_0 J'_m(k_0 l_0)] - J'_m(k_0 a) [N'_m(k_0 l_0) + i G_0 N'_m(k_0 l_0)],$$

$$\Delta 2 = J'_m(k_0 a) N'_m(k_0 l_0) - J'_m(k_0 l_0) N'_m(k_0 a).$$

Numerical calculations. The important for the applied nature is the theoretical study of loads on structures created by a wave field on the basis of the considered task. The question of how far from the column to install protective screens in order to minimize the force effect of the wave field becomes especially acute. The behavior of the field itself, both near the cylinder and in the far zone, should also be of interest. It should be taken into account that diffraction phenomena are strongly manifested on complex obstacles. In this case the field emitted from some elements of the structure affects the diffraction of waves on other parts of it. This relationship leads to a very complex picture of the wave process.

The deviation of the free surface relative to the undisturbed state η , the value of the maximum horizontal component of the force F on the cylinder, the total scattered power (the energy flow of the scattered field) Q , as well as the scattering diagram (the energy flow depending on the angle) Q_θ in the far zone are determined from the formulas:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vec{F} = \iint_s P \vec{n} ds \lim_{x \rightarrow \infty}, \quad Q = \frac{dE}{dt} = -\iint_s \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} ds, \quad (13)$$

where $\vec{n}$ is the radius vector of the unit normal to the surface, $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ is derivative along the normal to the surface. In this problem, the considered surface is the side surface of an imaginary cylinder, the elementary surface of which is $ds = r dz d\theta$ (r is fixed), the pressure is determined from the linearized Bernoulli equation: $P = -\rho \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}$.

Dimensionless quantities are entered as follows:

$$\eta^* = \frac{\eta}{A}, \quad F^* = \frac{F}{\rho g a H_0}, \quad ds^* = \frac{ds}{H_0 a}, \quad P^* = \frac{P}{\rho g H_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{\rho g H_0 \sqrt{g H_0} A^2}. \quad (14)$$

Due to the symmetry of the wave field pattern relative to the OX axis, and taking into account the values of the velocity potentials in the regions under consideration, we obtain the following formulas for the quantities under consideration in a dimensionless form:

$$\eta = \tilde{\eta} e^{i\omega t}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{1}{A} i \omega \phi_j, \quad j = 0, 1, \quad (15)$$

$$F_x = \tilde{F}_x e^{i\omega t}, \quad \tilde{F}_x = -\frac{1}{A} \omega i a \int_0^{2\pi} \int_{-H_0}^0 \phi_1 \cos \theta dz d\theta,$$

$$\tilde{F}_x = -\frac{i a \omega \pi}{\gamma k_0 A} t h \gamma k_0 H_0 [B_{10} J_1(k_0 a) + C_{10} N_1(k_0 a)]. \quad (16)$$

The total scattered power in the far zone, taking into account the asymptotic expansions of the Hankel function of the second order and its derivative, takes the form:

$$\tilde{Q} = C_g \tilde{Q}^\circ e^{-2ik_0 r},$$

where $C_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t h \gamma k_0 H_0}{\gamma k_0}} \left(1 + \frac{2 \gamma k_0 H_0}{s h 2 \gamma k_0 H_0} \right)$ - group velocity.

$$\tilde{Q}^\circ = \frac{2i}{\gamma k_0} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tau_m a_m^2. \quad (17)$$

The scattering diagram in the far zone is calculated by the formula:

$$\tilde{Q}_\theta = -\frac{1}{\gamma A^2} \int_{-H_0}^0 i \omega \phi_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial r} r dz, \quad \tilde{Q}_\theta = C_g e^{-2ik_0 r} \tilde{Q}_\theta^\circ,$$

where

$$\tilde{Q}_\theta^\circ = \frac{2i}{\pi k_0 \gamma} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{i \frac{m\pi}{2}} \cos m\theta \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i \frac{n\pi}{2}} \cos n\theta. \quad (18)$$

Analysis of results. On the basis of analytical and numerical calculations of the problem, it was established that the presence of a perforated screen affects the behavior of the wave process and the interaction of waves with the structure.

The deflection of the free water surface was calculated in the direction of wave propagation (Fig. 2). Dotted lines indicate the deviation of the free surface in the absence of a screen. Moreover, its value in the presence of a perforated screen decreases in the inner region and has a significant decrease behind the structure.

Thus, it is possible to talk about the selection of the distance between the cylinder and the screen, when waves of a certain length will be captured by the structure, which will lead to their attenuation in a certain direction during their further propagation.

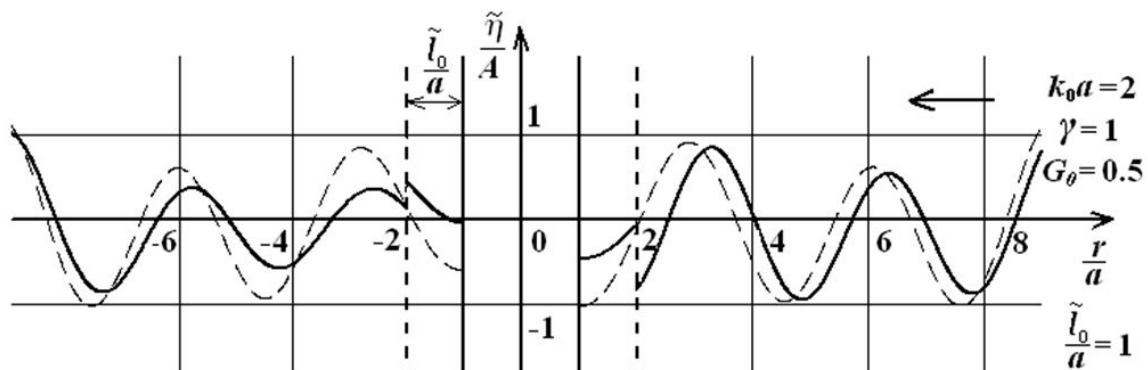


Fig. 2 – Deflection of the free water surface in the direction of wave propagation.

The analysis of the maximum value of the horizontal component of the force on the "column-screen" structure shows the following. The load curve on a single column is the upper contour curve of the horizontal component of the force that acts on the column when there is a screen (Fig. 3). With an increase in the perforation coefficient, the force load graphs follow an enveloping pattern (Fig. 3, b) and have an extreme character.

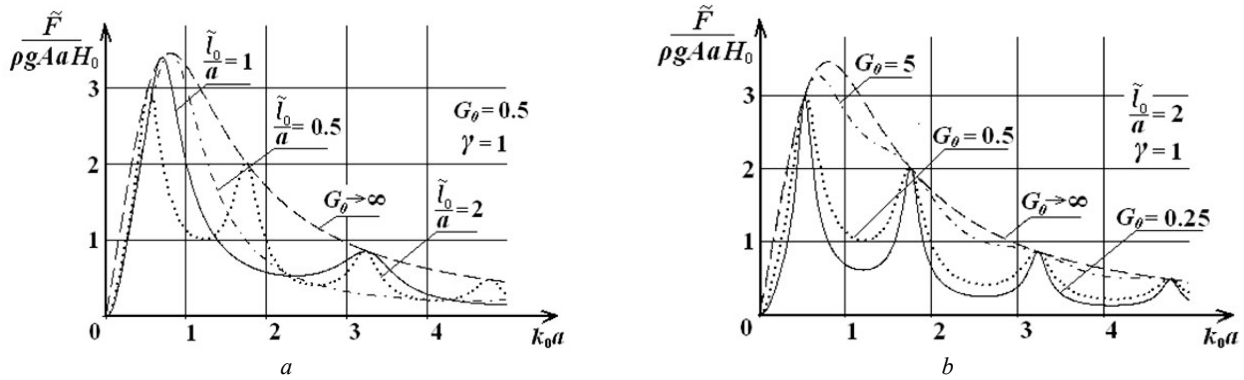


Fig. 3 – The maximum value of the horizontal component of the force, which acts on the column.

The number of such extremes per segment value of the wave number has a direct dependence on $\tilde{l}_0$ and does not depend on G_0 . As the distance $\tilde{l}_0$ increases, the density of extrema increases. At $\tilde{l}_0 \rightarrow 0$ the first extremum follows to the maximum value of the loads on a single column, and the rest follows to infinity (Fig. 3, a). The sharp peaks of power loads are the greater when the coefficient is the smaller (Fig. 3, b).

The dependence of the maximum value of the total scattered power in the far zone from the wave number is shown in Fig. 4. Maxima are varied from the distance from the screen to the cylinder (Fig. 4, a) and the Chwang parameter (Fig. 4, b). As can be seen from the graphs, peaks appear at small wave numbers, which are explained by the geometric complexity of the structure. Moreover, they are increased with increasing distance (Fig. 4, a) and decreasing perforation (Fig. 4, b). With a further increase in the wave number, the total scattered power decreases in comparison with the unit cylinder, to which the thick solid line corresponds here and in the following.

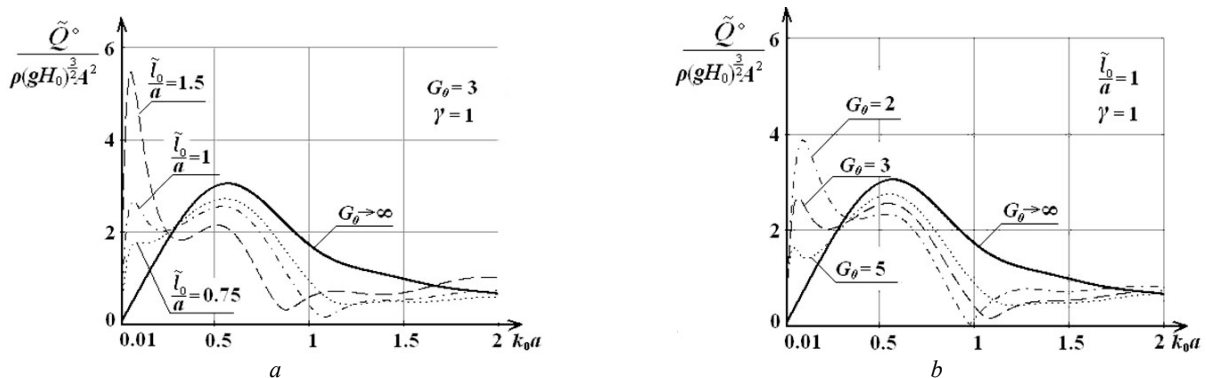


Fig. 4 – Dependence on the wave number of the maximum value full scattered power in the far zone.

At small wave numbers (Fig. 5, a), the presence of a perforated screen increases the scattering diagram both in the rear zone and in the front zone of the wave, and it also increases with increasing distance. As the wave number is increased, the scattering diagram lengthens in the direction of wave propagation. The number of petals is increased (Fig. 6, a). The scattering diagram also is lengthened due to the reduction of perforation (Fig. 5, b).

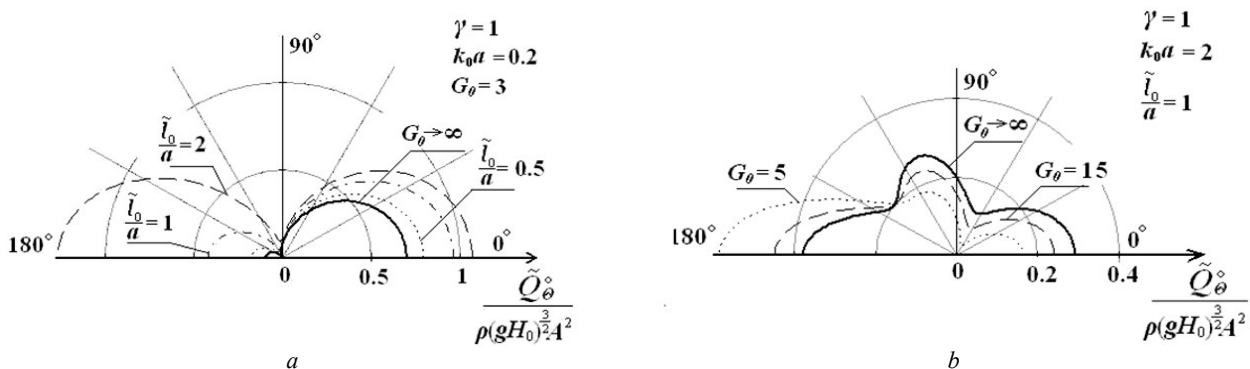


Fig. 5 – Scatter diagram in the far zone during variation distances from the screen to the cylinder (a) and the Chwang parameter (b).

Calculations show that with some parameters of the system, it is possible to observe the strengthening or weakening of the wave process in the front zone. Thus, at constant values, the energy flow decreases if the screen is located at a distance that is a multiple of half the radius of the cylinder, and increases when the distance is a multiple of the radius (Fig. 6, b).

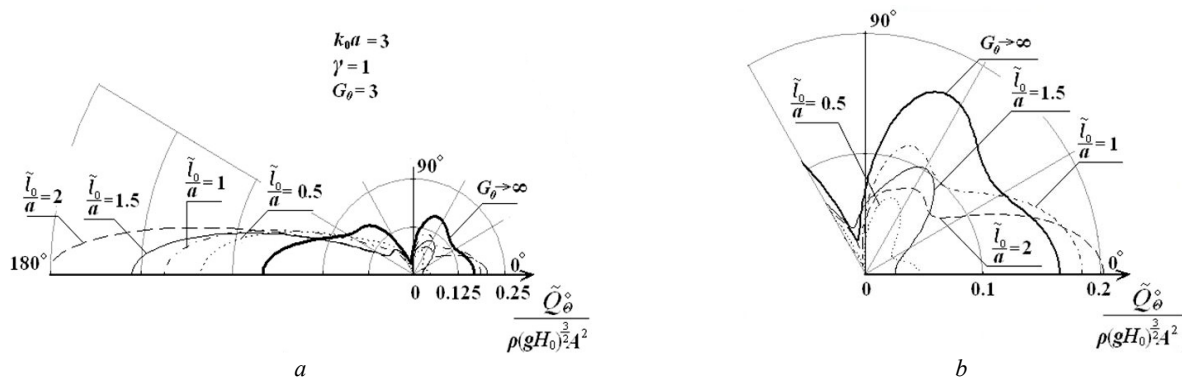


Fig. 6 – Scatter diagram in the far zone when the distance from the screen to the cylinder changes.

Forward $\theta = 0$ (a) and reverse $\theta = \pi$ (b) scattering are constructed in Fig. 7 and Fig. 8. As can be seen from the graphs, the presence of a perforated screen increases the stream of energy in the direction of wave propagation at all k_0 . The reverse scattering has such a property for long waves. Its value decreases in comparison with a single cylinder.

Research of the behavior of forward and reverse scattering from the position of the screen relative to the cylinder are presented in Fig. 9 for values of wave numbers $k_0a = 1$ (a) and $k_0a = 3$ (b). As can be seen from the graphs, with an increase in the distance $\tilde{l}_0$ from 0 to 3 radii, forward scattering increases in both cases in comparison with a single cylinder, and also increases with an increase of perforation. Perforation has the opposite effect on reverse scattering and reduces its value in almost all positions of the screen (Fig. 9, b).

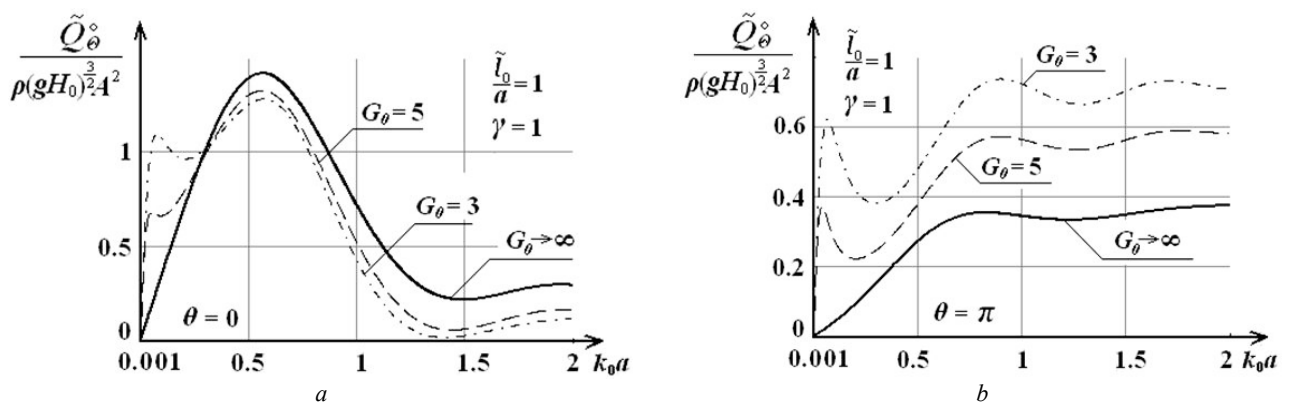


Fig. 7 – Dependence of forward and reverse scattering on the wave number with variation of the perforation coefficient.

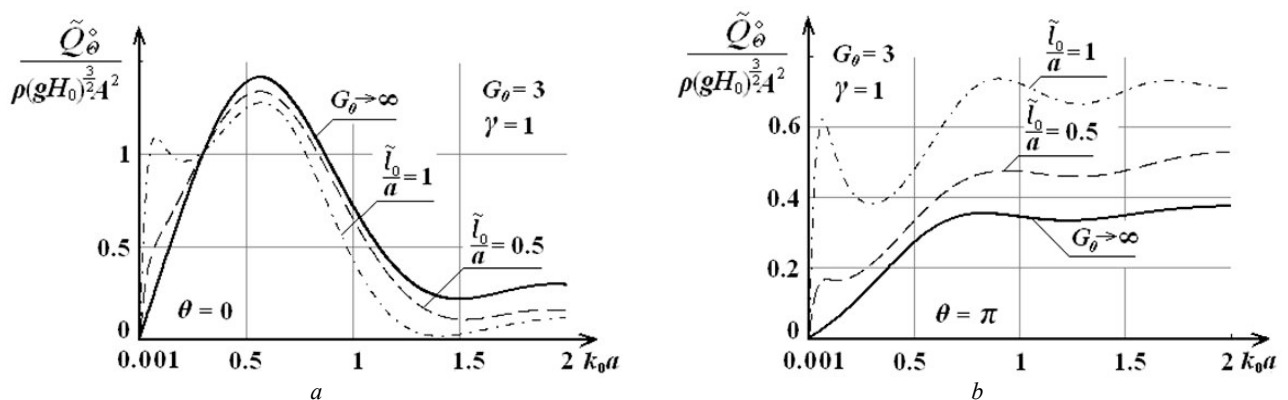


Fig. 8 – Dependence of forward and reverse scattering on the wave number depending on the position of the screen relative to the cylinder.

An analysis of the diffraction of surface gravity waves on a cylindrical structure surrounded by a perforated screen was carried out. The analysis of the total dissipated power, scattering diagrams, forward and reverse scattering was carried out. It is shown that the perforated screen has the properties of a wave absorber, that is, it can be used as a protective element.

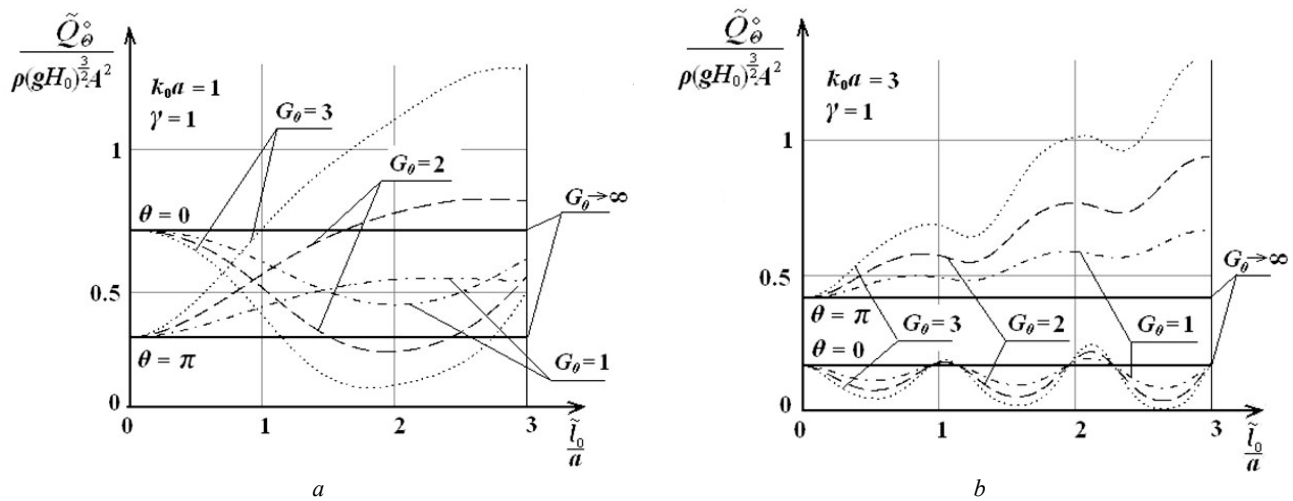


Fig. 9 – Dependence of forward and reverse scattering on the distance between the screen and the cylinder with variation of the perforation coefficient.

Conclusions. The problem of the theory of diffraction of surface gravity waves on a vertical column, which is surrounded by a cylindrical perforated screen, is solved. Analytical solutions were built and calculations were made on this basis, which allow investigating the influence of the geometric proportions of the structure on the lateral force, in order to establish the minimum and maximum wave loads. The analysis of the total dissipated power, scattering diagrams, forward and reverse scattering was carried out. The dependence of the total scattering power and the scattering diagram on the physical and geometric parameters of the model was established. It is shown that the perforated screen has the properties of a wave absorber, that is, it can be used as a protective element.

Bibliography

1. Koley S., Panduranga K. Energy balance relations for flow through thick porous structures // Int. J. Comp. Meth. Exp. Meas. – 2021. – Vol. 9. – no. 1. – P. 28 – 37. DOI: 10.2495/CMEM-V9-N1-28-37.
2. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyck O., Cherny D., Tereshchenko L. Interaction of group of bridge piers on scour / in: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (Eds.). Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA 2020. // Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. – 2021. – Vol. 1247. – P. 3 – 17. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1.
3. Voskoboinick V. A., Gorban I. M., Voskoboinick A. A., Tereshchenko L. N., Voskoboinick A. V. Junction flow around cylinder group on flat plate / in: Sadovnichiy V. A., Zgurovsky M. Z. (Eds.). Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. // Understanding Complex Systems. Springer, Cham. – 2021. – P. 35 – 50. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_3.
4. Diaz-Carrasco P., Molines J., Gomez-Martin M. E., Medina J. R. Neural Network calibration method for VARANS models to simulate wave-coastal structures interaction // Coastal Eng. – 2024. – Vol. 187. – P. 104424–1–13. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2023.104443.
5. Zhai H., Jeng D.-S. Impacts of wave-induced seabed response on local scour around a pipeline: PORO-FSSI-SCOUR-FOAM // Coastal Eng. – 2024. – Vol. 187. – P. 104424–1–27. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2023.104424.
6. Voskoboinick V., Onyshchenko A., Voskoboinyck O., Makarenkova A., Voskoboinyck A. Junction flow about cylindrical group on rigid flat surface // Heliyon. – 2022. – P. e12595–1–12. DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e12595.
7. Vijay K. G., Neelamani S., AlYousif A. Hydrodynamic analyses of multiple porous plates attached to the front of a vertical composite breakwater // J. Coastal Eng. – 2022. – Vol. 266. – P. 112964–1–19. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.112964.
8. Voskoboinick V., Khomitsky V., Voskoboinyck O., Tereshchenko L., Voskoboinick A. Wave loads on protective dam of the Marine channel of the Danube-Black sea // Hydro-environ. Res. – 2021. – Vol. 35. – no3. – P. 1 – 12. DOI: 10.1016/j.jher.2021.01.003.
9. Onyshchenko A., Kovalchuk V., Voskoboinick V., Voskoboinyck A., Aksonov S., Trudenko D., Hrevtsov S. Establishing patterns of change in the coefficients of reflection, transmission and dissipation of wave energy depending on parameters of a permeable vertical wall // Eastern-European J. Enterprise Technologies. – 2024. – Vol. 4/5(130). – P. 46 – 56. DOI: 10.15587/1729-4061-2024.309969.
10. Brebbia C. A., Walker S. Dynamic analysis of offshore structures. – London : Newnes-Butterworths, 1979. – 334 p.
11. Selezov I. T., Krivosos Yu. G. Mathematical methods in the problems of propagation and diffraction of waves. – Kyiv : Naukova Dumka, 2012. – 242 p.
12. Selezov I. T., Sydorchuk V. N., Yakovlev V. V. Transformation of waves in the coastal zone of the shelf. – Kyiv : Naukova Dumka, 1983. – 283 p.
13. Chakrabarti S. K., Tam W. A. Interaction of waves with large vertical cylinder // J. Ship Res. – 1975. – Vol. 19, no. 1. – P. 23 – 33. DOI: 10.5957/jsr.1975.19.1.23.
14. MacCamy M. C., Fuchs R. A. Wave forces on piles: A diffraction theory // Techn. Memorandum. – 1954. – Vol. 69. – P. 1 – 17.
15. Cho I. H., Kim M. H. Interactions of horizontal porous flexible membrane with waves // J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng. – 2000. – Vol. 126. – no. 5. – P. 245 – 253. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(2000)126:5(245).

16. Wu J., Chwang A. T. Wave diffraction by a vertical cylinder with a porous ring plate // *J. Eng. Mech.* – 2002. – Vol. 128. – no. 2. – P. 164 – 171. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:2(164).
17. Li Y., Liu Y., Teng B. Porous effect parameter of thin permeable plates // *Coastal Eng. J.* – 2006. – Vol. 48. – no. 4. – P. 309 – 336. DOI: 10.1142/S0578563406001441.
18. Chwang A. T. A porous wavemaker theory // *J. Fluid Mech.* – 1983. – Vol. 132. – P. 395 – 406. DOI: 10.1017/S0022112083001676.
19. George A., Poguluri S. C., Kim J., Cho I. H. Design optimization of a multi-layer porous wave absorber using an artificial neural network model // *J. Coastal Eng.* – 2022. – Vol. 265. – P. 112666–1–16. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.112666.
20. Vijayalakshmi K., Neelamani S., Sundaravadivelu R., Murali K. An experimental study of regular wave loads on a perforated circular cassette and suction pipe configuration // *J. Ocean Technol.* – 2007. – Vol. 2. – no. 2. – P. 50 – 63.
21. Williams A. N., Li W. Wave interaction with a semi-porous cylindrical breakwater mounted on a storage tank // *Ocean Eng.* – 1998. – Vol. 25. – P. 195 – 219. DOI: 10.1016/S0029-8018(97)00006-1.
22. Song H., Tao L. The effect of short-crested wave phase on a concentric porous cylinder system in the wind blowing open sea // *Proc. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference.* – Crown Plaza, Gold Coast, Australia, 2007. – P. 1276 – 1282. <http://hdl.handle.net/10072/18044>.

References (transliterated)

1. Koley S., Panduranga K. Energy balance relations for flow through thick porous structures. *Int. J. Comp. Meth. Exp. Meas.* 2021, Vol. 9, no. 1, pp. 28–37. DOI: 10.2495/CMEM-V9-N1-28-37.
2. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyk O., Cherny D., Tereshchenko L. Interaction of group of bridge piers on scour. (in: Hu Z., Petoukhov S., Dychka I., He M. (Eds.). *Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEE 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham.* – 2021, Vol. 1247, pp. 3–17. DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1.
3. Voskoboinick V. A., Gorbun I. M., Voskoboinick A. A., Tereshchenko L. N., Voskoboinick A. V. Junction flow around cylinder group on flat plate. (in: Sadovnichiy V. A., Zgurovsky M. Z. (Eds.), *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems. Springer, Cham.* 2021, pp. 35–50. DOI: 10.1007/978-3-030-50302-4_3.
4. Diaz-Carrasco P., Molines J., Gomez-Martin M. E., Medina J. R. Neural Network calibration method for VARANS models to simulate wave-coastal structures interaction. *Coastal Eng.* 2024, Vol. 187, P. 104424–1–13. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2023.104443.
5. Zhai H., Jeng D.-S. Impacts of wave-induced seabed response on local scour around a pipeline: PORO-FSSI-SCOUR-FOAM. *Coastal Eng.* 2024, Vol. 187, P. 104424–1–27. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2023.104424.
6. Voskoboinick V., Onyshchenko A., Voskoboinyk O., Makarenkova A., Voskoboinyk A. Junction flow about cylindrical group on rigid flat surface. *Heliyon.* 2022, P. e12595–1–12. DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e12595.
7. Vijay K. G., Neelamani S., AliYousif A. Hydrodynamic analyses of multiple porous plates attached to the front of a vertical composite breakwater. *J. Coastal Eng.* 2022, Vol. 266, P. 112964–1–19. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.112964.
8. Voskoboinick V., Khomitsky V., Voskoboinyk O., Tereshchenko L., Voskoboinick A. Wave loads on protective dam of the Marine channel of the Danube-Black sea. *Hydro-environ. Res.* 2021, Vol. 35, no.3, pp. 1–12. DOI: 10.1016/j.jher.2021.01.003.
9. Onyshchenko A., Kovalchuk V., Voskoboinick V., Voskoboinyk A., Aksonov S., Trudenko D., Hrevtsov S. Establishing patterns of change in the coefficients of reflection, transmission and dissipation of wave energy depending on parameters of a permeable vertical wall. *Eastern-European J. Enterprise Technologies.* 2024, Vol. 4/5(130), pp. 46–56. DOI: 10.15587/1729-4061-2024.309969.
10. Brebbia C. A., Walker S. *Dynamic analysis of offshore structures.* London, Newnes-Butterworths, 1979. 334 p.
11. Selezov I. T., Krivonos Yu. G. *Mathematical methods in the problems of propagation and diffraction of waves.* Kyiv, Naukova Dumka, 2012. 242 p.
12. Selezov I. T., Sydorchuk V. N., Yakovlev V. V. Transformation of waves in the coastal zone of the shelf. Kyiv, Naukova Dumka, 1983. 283 p.
13. Chakrabarti S. K., Tam W. A. Interaction of waves with large vertical cylinder. *J. Ship Res.* 1975, Vol. 19, no.1, pp. 23–33. DOI: 10.5957/jsr.1975.19.1.23.
14. MacCamy M. C., Fuchs R. A. Wave forces on piles: A diffraction theory. *Techn. Memorandum.* 1954, Vol. 69, pp. 1–17.
15. Cho I. H., Kim M. H. Interactions of horizontal porous flexible membrane with waves. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* 2000, Vol. 126, no. 5, pp. 245–253. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-950X(2000)126:5(245).
16. Wu J., Chwang A. T. Wave diffraction by a vertical cylinder with a porous ring plate. *J. Eng. Mech.* 2002, Vol. 128, no. 2, pp. 164–171. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:2(164).
17. Li Y., Liu Y., Teng B. Porous effect parameter of thin permeable plates. *Coastal Eng. J.* 2006, Vol. 48, no. 4, pp. 309–336. DOI: 10.1142/S0578563406001441.
18. Chwang A. T. A porous wavemaker theory. *J. Fluid Mech.* 1983, Vol. 132, pp. 395–406. DOI: 10.1017/S0022112083001676.
19. George A., Poguluri S. C., Kim J., Cho I. H. Design optimization of a multi-layer porous wave absorber using an artificial neural network model. *J. Coastal Eng.* 2022, Vol. 265, P. 112666–1–16. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.112666.
20. Vijayalakshmi K., Neelamani S., Sundaravadivelu R., Murali K. An experimental study of regular wave loads on a perforated circular cassette and suction pipe configuration. *J. Ocean Technol.* 2007, Vol. 2, no. 2, pp. 50–63.
21. Williams A. N., Li W. Wave interaction with a semi-porous cylindrical breakwater mounted on a storage tank. *Ocean Eng.* 1998, Vol. 25, pp. 195–219. DOI: 10.1016/S0029-8018(97)00006-1.
22. Song H., Tao L. The effect of short-crested wave phase on a concentric porous cylinder system in the wind blowing open sea. *Proc. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference.* Crown Plaza, Gold Coast, Australia, 2007. P. 1276–1282. <http://hdl.handle.net/10072/18044>.

Надійшло (received) 08.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воскобійник Володимир Анатолійович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2161-6923>; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Voskoboinick Volodymyr Anatoliyovych – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flow, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sci-

ences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2161-6923>; e-mail: vlad.vsk@gmail.com.

Онищенко Артур Миколайович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд, Національний транспортний університет, м. Київ; тел.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1040-4530>; e-mail: onyshchenko.a.m.ntu@gmail.com.

Onyshchenko Artur Mykolayovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Bridges, Tunnels and Hydrotechnical Structures, National Transport University, Kyiv; tel.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1040-4530>; e-mail: onyshchenko.a.m.ntu@gmail.com.

Воскобойник Олександр Анатолійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8114-4433>; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Voskoboynik Oleksandr Anatoliyovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow at the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flow, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8114-4433>; e-mail: alexandr.vsk@gmail.com.

Воскобийник Андрій Володимирович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідробіоніки та керування примежовим шаром, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8045-8625>; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

Voskobiinyk Andriy Volodymyrovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department of Hydrobionics and Boundary Layer Control, Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (+38044) 371-65-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8045-8625>; e-mail: andrew.vsk@gmail.com.

Труденко Денис Володимирович – аспірант кафедри мостів, тунелів та гідротехнічних споруд, Національний транспортний університет, м. Київ; тел.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3720-1952>; e-mail: tdv.83@ukr.net.

Trudenko Denys Volodymyrovych – PhD Student of the Department of Bridges, Tunnels and Hydrotechnical Structures, National Transport University, Kyiv; tel.: (+38044) 280-79-78; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3720-1952>; e-mail: tdv.83@ukr.net.

Н. С. ГОРОДЕЦЬКА, І. В. СТАРОВОЙТ, В. Н. ОЛІЙНИК

ГЕНЕРАЦІЯ АНТИСИМЕТРИЧНИХ ХВИЛЬ В ПРУЖНОМУ ХВИЛЕВОДІ РІЗНИМИ ВИДАМИ НАВАНТАЖЕННЯ

Стаття присвячена аналізу ефективності збудження хвильового поля при вимушених коливаннях пружного напівшару з вільними бічними поверхнями при різних видах навантаження. Розглядалися антисиметричні коливання. Розв'язок поставленої граничної задачі було побудовано методом однорідних розв'язків. Відповідно до цього методу, хвильове поле представляється рядом по системі нормальних хвиль (з дійсними, чисто уявними і комплексними хвильовими числами), кожна з яких задовольняє граничним умовам на бічних поверхнях. При виконанні обчислень враховувалися всі нормальні хвилі з дійсними, чисто уявними і до 20 пар з комплексними хвильовими числами. Критерієм якості отриманого розв'язку був контроль точності виконання граничних умов на торці напівшару. Основна увага в роботі була зосереджена на оцінці ефективності збудження хвильового поля в напівшарі при різних видах навантаження на його торці та на розподілі енергії між біжучими хвилями різних порядків в залежності від частоти. В роботі було встановлено, що навіть в частотному діапазоні, в якому поширюється тільки одна біжуча хвиля, енергія, яка «закачується» в напівшар, залежить від частоти. Така залежність обумовлена дисперсійним характером нормальних хвиль в шарі. При фіксованій амплітуді навантаження за рахунок зміни розподілу переміщення точок по торцю напівшару із зміною частоти погіршується ступінь узгодженості типу навантаження і форми коливань. При збільшенні частоти, коли в хвильовому полі з'являються біжучі хвилі вищих порядків, хвильове поле стає ще складнішим. В роботі показано, що існують частотні діапазони, в яких тільки одна біжуча хвиля переносить основну частину енергії, яка надходить в напівшар. Розглядалися вимушені коливання при навантаженні згинальним моментом і перерізуючою силою. Показано, що ефективність збудження хвильового поля суттєво залежить від виду навантаження. Зокрема, встановлено, що сприйнятливості напівшару в області низьких частот при навантаженні перерізальною силою значно вище, ніж при навантаженні згинальним моментом.

Ключові слова: неруйнівний контроль, хвилі Лемба, дисперсія, вимушені коливання, енергетичний аналіз, пружний хвильовід, метод однорідних розв'язків, нормальні хвилі, енергетично домінуюча мода, власна частота.

N. S. GORODETSKA, I. V. STAROVOIT, V. N. OLIYNIK

GENERATION OF ANTI-SYMMETRICAL WAVES IN AN ELASTIC WAVEGUIDE BY DIFFERENT TYPES OF LOAD

The article is devoted to the analysis of the efficiency of excitation of the wave field during forced oscillations of an elastic half-layer with free lateral surfaces under different types of loading. Antisymmetric oscillations were considered. The solution of the boundary value task was constructed by the method of homogeneous solutions. According to this method, the wave field is represented by a series in a system of normal waves (with real, purely imaginary and complex wave numbers), each of which satisfies the boundary conditions on the lateral surfaces. When performing calculations, all normal waves with real, purely imaginary and up to 20 pairs with complex wave numbers were considered. The quality criteria of the obtained solution was the control of the accuracy of the boundary conditions at the end of the half-layer. The main attention in the research was focused on the assessment of the efficiency of excitation of the wave field in the half-layer under different types of loading at its end and on its distribution between moving waves of different orders depending on the frequency. It was found in the research that even in the frequency range in which only one moving wave propagates, the energy that is “pumped” into the half-layer depends on the frequency. This dependence is due to the dispersion nature of normal waves in the layer. At a fixed load amplitude the degree of consistency of the load type and the shape of the oscillations deteriorates with a change in frequency due to a change in the distribution of point displacements along the end of the half-layer. With increasing frequency, when higher-order moving waves appear in the wave field, the wave field becomes even more complex. The research shows that there are frequency ranges in which only one moving wave carries the main part of the energy entering the half-layer. Forced oscillations under bending moment and shear force loading were considered. It is shown that the efficiency of excitation of the wave field significantly depends on the type of loading. In particular, it was found that the susceptibility of the half-layer in the low-frequency region under shear force loading is much higher than under bending moment loading.

Key words: non-destructing testing, Lamb waves, dispersion, forced oscillations, energy analysis, elastic waveguide, method of homogeneous solution, normal mode, energy dominant mode, own frequency.

Вступ. Традиційний *ультразвуковий контроль* проводиться шляхом послідовного прозвучування конструкції безпосередньо під або поряд з датчиком. При тестуванні великих структур датчик сканує всю поверхню, що вимагає значних затрат. Альтернативним *методом є ультразвуковий контроль з використанням хвиль*. Це ефективний метод дистанційного обстеження конструкцій, при якому генерується хвиля по всій поверхні без сканування «точка в точку», що значно підвищує ефективність контролю.

Для конструкцій типу *пластин* найбільш широко використовуються *хвилі Лемба* для виявлення пошкоджень, оскільки вони дуже чутливі до перешкод на шляху поширення. Ці хвилі існують в *пластинчатих структурах* і, в залежності від *матеріалу і геометрії конструкції*, можуть поширюватись на значні відстані. Навіть в матеріалах з високим *коефіцієнтом затухання*, наприклад, композитах армованих вуглецевим волокном, хвилі Лемба поширюються на значні відстані, що дозволяє обстежувати великі області [1]. Ще однією перевагою хвиль Лемба є можливість виявляти внутрішні дефекти за рахунок зміни *просторової структури поля*. Напевно, робота [2] є однією з перших, в якій було запропоновано використовувати хвилі Лемба для неруйнівного контролю. Наявність дефекту оцінювалась на основі аналізу амплітуди переміщення, частоти, хвильового числа, часу отримання розсіяного від дефекту сигналу та інших характеристик хвиль Лемба.

В подальшому було опубліковано значну кількість робіт, в яких аналізувались різні дефекти, виявлені на основі аналізу поширення хвиль Лемба. Методи знаходження дефектів за допомогою хвиль Лемба стали загальноприйнятими для моніторингу як металевих конструкцій [1], так і композитів [3]. Незважаючи на високу ефективність і чутливість хвиль Лемба до дефектів, тестування з їх допомогою ускладнено, оскільки відбиті від де-

фекту сигнали важко інтерпретувати. Це обумовлено, перш за все, *дисперсійною* природою поля і *багатомодовою структурою*. Групова швидкість хвилі (швидкість переносу енергії) залежить від частоти, і якщо поле збуджується *широкосмуговим імпульсом*, то різні частотні складові будуть поширюватись з різною швидкістю, а форма імпульсу буде змінюватись при поширенні вздовж пластини, що значно ускладнює контроль. Крім того, необхідно враховувати, що для будь-якої частоти існує два режими коливань (*симетричні* і *антисиметричні хвилі*). Тому, навіть при гармонічних коливаннях на низьких частотах, в дальньому полі будуть поширюватись дві хвилі – симетрична і антисиметрична. При збільшенні частоти в хвильовому полі з'являються *моди вищих порядків*, що ще більше ускладнює інтерпретацію зареєстрованих сигналів.

Основні проблеми, які виникають при застосуванні неруйнівних методів контролю на основі хвиль, полягають в необхідності спочатку згенерувати контрольну хвилю, прийняти розсіяний на дефекті сигнал і розробити методи аналізу отриманого сигналу. Здебільшого увага приділялась аналізу розсіяного на дефекті поля, питання впливу навантаження, яке генерує контрольну хвилю, і ефективність збудження хвильового поля практично не досліджувались. При цьому слід зауважити, що дисперсійні властивості хвиль проявляються не тільки при поширенні, але і в тому, що енергія, яку можливо «закачати» в хвилевід, також залежить від частоти. Проте лише в кількох роботах на основі розв'язання модельних задач розглядаються особливості збудження хвильового поля заданими навантаженнями. В [4] аналізувалось хвильове поле при симетричних коливаннях пружного напівшару, збуджене нормальним навантаженням на торці при відсутності дотичного напруження. Аналогічна задача, також для симетричних коливань, була розв'язана в [5] при збудженні напівшару рівномірним осьовим переміщенням (*змішана задача*). В [6] вимушені коливання збуджувались нерівномірним навантаженням і нерівномірним переміщенням. В цих роботах було проведено аналіз розподілу енергії, що «закачується» в напівшар, між різними модами, які поширюються, і встановлено частотні діапазони, в яких енергетично домінує тільки одна мода. Оцінка енергії, що «закачується» в напівшар, не розглядалася.

Аналіз останніх досліджень. Вибір частоти і способу генерації контрольної хвилі є визначальним для ефективного збудження хвильового поля і «закачування» максимальної енергії в конструкцію. Для інтерпретації розсіяного на дефекті сигналу важливо розділити *біжучі хвилі* різних порядків, особливо в області відносно високих частот, і встановити *енергетично домінуючу хвилю* на даній частоті. Особливості збудження біжучих хвиль в області відносно високих частот і виділення найбільш енергетично значущої хвилі вивчалось на модельних задачах про вимушені коливання напівшару для симетричних коливань при динамічних [4] і змішаних граничних умовах на торці [5], [6]. Антисиметричні коливання не розглядались.

В даній роботі на основі розв'язку модельної задачі при вимушених антисиметричних коливаннях напівшару встановлені частотні діапазони, в яких перша і друга біжучі хвилі будуть найбільш енергетично виражені.

Постановка задачі. Розглядається *модельна задача* про вимушені гармонічні коливання пружного ізотропного напівшару ($|y| \leq 1$, $0 \leq z < \infty$), бічні поверхні якого вільні від напружень, а на торці прикладене динамічне навантаження. Фізичні властивості середовища задаються *коефіцієнтом Пуассона* ν і модулем зсуву μ . В подальшому всі величини нормовані на половину ширини напівшару H .

Необхідно знайти хвильове поле $\vec{u}(y, z)$, яке задовольняє *векторному рівнянню Ламе*:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

граничним умовам:

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \quad \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0, \quad z \geq 0 \quad (2)$$

і збуджується навантаженням на торці, яке розкладається у *ряд Фур'є*:

$$\sigma_{zz}(y, 0) = 2\mu f(y) = 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \sin \beta_k y, \quad \tau_{zy}(y, 0) = 2\mu \phi(y) = 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \beta_k y. \quad (3)$$

Розглядається антисиметричне хвильове поле відносно площини $y = 0$.

Метод розв'язання. В даній роботі для розв'язання поставленої граничної задачі використовувався *метод однорідних розв'язків*, у відповідності до якого хвильове поле представляється рядом по системі нормальних хвиль (з дійсними, чисто уявними і комплексними хвильовими числами), кожна з яких задовольняє граничним умовам на бічних поверхнях. Таке представлення містить нескінченне число комплексних коефіцієнтів, значення яких знаходяться при виконанні граничних умов на торці напівшару.

Вектор переміщення, який відповідає нормальній хвилі з хвильовим числом ξ , має вигляд:

$$u_z = i\xi \left[p_2 \frac{shp_2 y}{chp_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{shp_1 y}{chp_1} \right] e^{i\xi z}, \quad u_y = \left[\xi^2 \frac{chp_2 y}{chp_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} \frac{chp_1 y}{chp_1} \right] e^{i\xi z}. \quad (4)$$

Напруження, що відповідають цим переміщенням, знаходяться із закону Гука. Загальний розв'язок граничної задачі (2) – (3) запишемо у вигляді:

$$2\mu f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sigma_{zz}(\xi_j, y) \cdot \ell^{i\xi_j z}, \quad 2\mu \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \tau_{zy}(\xi_j, y) \cdot \ell^{i\xi_j z}, \quad (5)$$

де C_j – комплексні амплітуди нормальних хвиль, а ξ_j – корені дисперсійного рівняння:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 p_2 \text{th} p_2 - (2\xi^2 - \Omega_2^2) \frac{\text{th} p_1}{4p_1} = 0, \\ p_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| \leq \Omega_j, \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Розв'язок системи функціональних рівнянь (5) побудований методом колокацій, у відповідності до якого граничні умови (3) виконувались в N точках. Загальна кількість точок визначалась точністю виконання граничних умов (3) і дорівнювала загальній кількості нормальних хвиль, які враховували для опису поля. При цьому враховувались всі дійсні і чисто уявні корені дисперсійного рівняння (6), а також обмежена кількість пар комплексних коренів. Точки колокацій розташовувались по поверхні $z = 0$ рівномірно, водночас точки колокацій для нормальних і дотичних напружень не співпадали. При врахуванні 20 пар комплексних коренів для виконання граничних умов (3) похибка на перевищувала 0.5% заданого напруження. В роботі розглядаються два види навантаження.

Нормальне напруження (згинальний момент)

$$\sigma_{zz}(y, 0) = 2\mu \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad \tau_{zy}(y, 0) = 0 \quad (7)$$

і навантаження за рахунок дотичних напруг (перерізальна сила)

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{zy} = 2\mu \cos\frac{\pi y}{2}. \quad (8)$$

Середній за період потік потужності, який «закачується» в напівшар

$$W = \frac{i\omega}{2} \mu \int_{-1}^1 (\sigma_{zz} \text{Im}(u_z) + \tau_{zy} \text{Im}(u_y)) dy. \quad (9)$$

Середній за період потік потужності, який переноситься біжучими хвилями, визначається виразом:

$$W_z = \sum_{k=1}^K E_z^{(k)}; \quad E_z^{(k)} = \frac{i\omega}{2} |C_k|^2 \cdot \int_{-h}^h [\sigma_{zz}(\xi_k, y) u_z(\xi_k, y) - \tau_{zy}(\xi_k, y) u_y(\xi_k, y)] dy, \\ E_z^{(k)} = \mu\omega |C_k|^2 \Omega_2^2 (\xi_k^2 - \Omega_1^2) \frac{\Delta'(\xi_k)}{2}. \quad (10)$$

Порівняння енергії, яка «закачується» у напівшар, і енергії, яка поширюється від торця (закон збереження енергії), є додатковим критерієм достовірності отриманих результатів. Для даної граничної задачі закон збереження енергії виконувався з точністю 99.91% відносно енергії, що надходить у напівшар.

Аналіз результатів. Насамперед розглянемо нормальне навантаження (7).

Рис. 1 відображає частотну залежність нормованої величини енергії, яка «закачується» в напівшар $E = W / (2\omega\mu)$. На рис. 1 видно значну залежність споживаної напівшаром енергії від частоти. При фіксованій амплітуді навантаження частотна залежність енергії обумовлена зміною швидкостей точок по торцю напівшару. На рис. 1 виділимо два інтервали. Перший – до критичної частоти для другої хвилі ($\Omega_2 = \pi/2$), коли в напівшарі може поширюватись тільки одна біжуча хвиля, що переносить енергію в дальнє поле. В цьому діапазоні залежність споживаної енергії може бути обумовлена зміною ступеня узгодженості навантаження та форми коливань. Така ситуація цілком можлива, оскільки розподіл переміщення (швидкостей) в нормальних хвилях істотно залежить від частоти. Другий частотний діапазон – коли в напівшарі з'являються біжучі хвилі вищих порядків. На цьому інтервалі частот можна виділити два локальні максимуми. Перший – на частоті $\Omega_2 = \pi/2$, яка є критичною частотою для другої хвилі, що поширюється, другий – на частоті $\Omega_2 = 4.3$.

На перший погляд локальні максимуми, які представлені на рис. 1, можуть вказувати на наявність резонансних ситуацій в заданому частотному діапазоні. Проте зростання енергії, яка «закачується» у систему з розподіленими параметрами, може бути обумовлене двома чинниками. Збільшення «закачуваної» енергії може бути пов'язане як із близькістю частоти зовнішнього навантаження до власної частоти системи, так і з підвищенням ступеня узгодженості навантаження та форми коливань, як вже було зазначено. Ілюстрацію впливу біжучих хвиль різних порядків на розподіл споживаної енергії між хвилями дають дані, представлені на рис. 2.

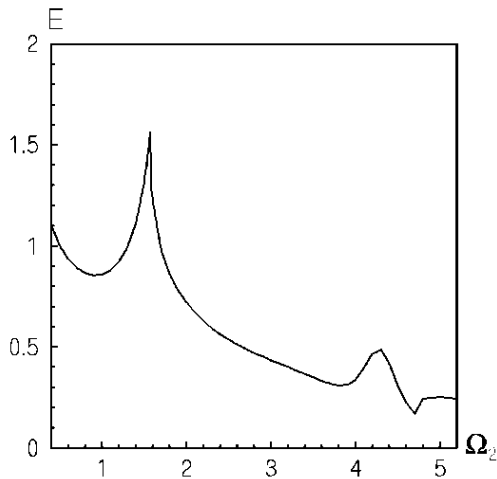


Рис. 1 – Частотна залежність середнього за період потоку потужності, який «закачується» в напівшар при збудженні поля згинальним моментом.

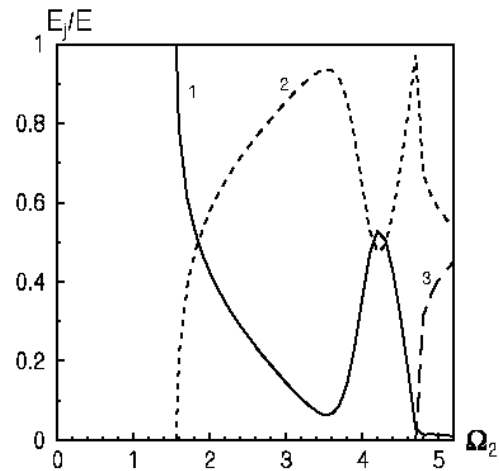


Рис. 2 – Процентний розподіл середнього за період потоку потужності між біжучими хвилями різних порядків в залежності від частоти. Номер кривої відповідає номеру біжучої хвилі.

Номер кривої відповідає номеру хвилі, що поширюється. Починаючи зі своєї критичної частоти, друга нормальна хвиля збільшує свою енергоємність і на рис. 2 чітко виділяються частотні діапазони, де ця хвиля переносить максимум енергії. Явище домінуючого характеру однієї біжучої хвилі в певних частотних діапазонах добре відоме і відмічалось в багатьох роботах для різних типів навантажень [4], [5], [6], проте на сьогодні загального пояснення такого розподілу енергії між різними біжучими хвилями немає. Енергія, яку переносить кожна біжуча хвиля, є добутком двох множників (10). Перший – квадрат амплітуди хвилі. Амплітуда залежить від граничних умов на торці і знаходиться з розв'язку граничної задачі. Другий визначається дисперсійними властивостями для кожної біжучої моди і не залежить від виду навантаження. При цьому залежність потоку потужності від частоти досить складна і визначається як повздовжніми і поперечними складовими нормальної хвилі, так і взаємодією цих складових (відповідно до $\Delta'(\xi)$)

Повертаючись до розподілу енергії між біжучими модами, відзначимо, що друга мода найбільш енергетично виражена в діапазоні $1.8 \leq \Omega_2 \leq 5.2$. Лише в околі частоти $\Omega_2 = 4.2$ енергія другої моди зменшується і досягає свого мінімуму на цій частоті (рис. 2). Хоча друга мода залишається енергетично домінуючою в зазначеному частотному діапазоні, але її інтенсивність змінюється, що обумовлено як залежністю її амплітуди від частоти, так і зміною ступеню узгодженості навантаження та форми коливань.

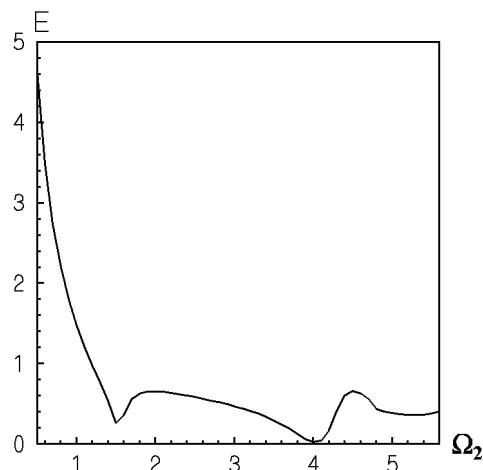


Рис. 3 – Частотна залежність середнього за період потоку потужності, який «закачується» в напівшар при збудженні поля перерізальною силою.

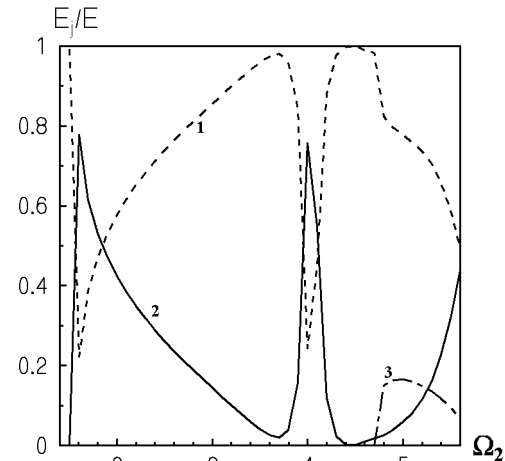


Рис. 4 – Процентний розподіл середнього за період потоку потужності між біжучими хвилями різних порядків в залежності від частоти. Номер кривої відповідає номеру біжучої хвилі.

Подальше поглиблення уявлень про особливості згинального деформування напівшару можна отримати при розгляді навантаження типу сили, що перерізує. В даному випадку це реалізується заданням розподілу дотичних напружень на торці (8).

На рис. 3 відображена залежність середнього за період потоку потужності від частоти $E = W / (2\mu\omega)$.

При порівнянні даних на рис. 1 і рис. 3 перш за все слід звернути увагу на те, що енергетична сприйнятливість напівшару в області низьких частот при навантаженні перерізальною силою значно вище, ніж при навантаженні згинальним моментом. Наступним принципово важливим моментом є те, що при зміні типу навантаження локальний максимум енергоспоживання, який спостерігається на рис. 1 на критичній частоті другої моди ($\Omega_2 = \pi/2$), зник. Це підтверджує припущення, що цей максимум був обумовлений високим ступенем узгодженості характеру нормального навантаження та розподілу напруження у другій хвилі. У той же час другий локальний максимум на частоті $\Omega_2 = 4.5$ зберігся, хоча частота цього максимуму підвищилась. Оскільки другий максимум зростання енергоспоживання коливальної системи близький для різних видів навантажень при незначній зміні інтенсивності, то, очевидно, він обумовлений близькістю частоти зовнішнього навантаження до певної характерної (власної) частоти напівшару. Відмінність в характері навантаження проявляється і при розгляді енергетичної ефективності різних біжучих хвиль. На рис. 4 наведено частотну залежність енергетичної ефективності біжучих хвиль різних порядків. Номер кривої відповідає номеру біжучої хвилі. Особливістю даного графіка є дуже різке збільшення енергії, яка переноситься другою біжучою хвилею, в околі критичної частоти для цієї моди. При подальшому зростанні частоти енергоємність другої моди падає, і домінуючою виявляється перша мода. Для другого випадку прикладене навантаження є дотичним, а, відповідно до рис. 3, енергія першої нормальної хвилі визначається дотичними напруженнями, тому, ймовірно, саме перша біжуча хвиля в діапазоні частот $1.8 \leq \Omega_2 \leq 5.2$ буде енергетично домінуючою. Проте в околі частоти $\Omega_2 = 4.2$ перша біжуча хвиля стрімко втрачає свою енергію, і друга біжуча хвиля стає домінуючою. Як вже зазначалось, такий характер зміни порядку енергетично домінуючої хвилі, найімовірніше, обумовлений близькістю частоти зовнішнього навантаження до власної частоти напівшару. Зауважимо, що частота $\Omega_2 = 4.2$ не є критичною частотою для хвиль, що поширюються, тому в околі цієї частоти, імовірно, відбувається значне збудження хвиль з комплексним хвильовим числом. Хоча ці моди енергію не переносять, проте їх збудження значно перебудовує хвильове поле в околі торця, що призводить до змін в розподілі енергії, яка закачується в напівшар, між біжучими хвилями.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають, що подальший напрямок досліджень ефективно-сті збудження пружних хвилеводів пов'язаний із встановленням впливу коефіцієнта Пуассона на енергію, яка «закачується». Відомо, що при антисиметричних коливаннях напівшару в області частот, де поширюються дві нормальні моди, існує крайовий резонанс. Цей резонанс обумовлений значним збудженням неоднорідних хвиль, що призводить до суттєвої перебудови хвильового поля. Частота крайового резонансу і його добротність змінюються з коефіцієнтом Пуассона. При цьому резонанс має місце тільки для $\nu > 0.32$. Частота крайового резонансу є власною частотою системи, тому на цій частоті можливе значне зростання енергії, яка «закачується» в систему.

Висновки. Представлена робота є науковим підґрунтям для створення методик активних методів неруйнівного контролю, які ґрунтуються на випромінюванні та прийманні акустичних сигналів. Генерація зондувального сигналу з заданими характеристиками і розуміння особливостей поширення хвиль в пружних тілах є ключовими моментами при застосування активних методів контролю.

В роботі показана значна частотна залежність енергії, яка «закачується» в пружний напівшар при вимушених антисиметричних коливаннях. Такий ефект, перш за все, обумовлений залежністю форми нормальної моди від частоти. В області високих частот, коли в напівшарі поширюється декілька нормальних хвиль, відбувається обмін енергії між модами різних порядків, що в свою чергу ускладнює частотну залежність. Дані щодо обміну енергією між модами і встановлення енергетично домінуючої моди, необхідно враховувати при реєстрації хвиль при використанні високочастотних збудрень. Показано, що локальні екстремуми, в залежності енергії від частоти, мають місце на високочастотних системах. Крім того, в роботі, на основі порівняння вимушених антисиметричних коливань в пружному напівшарі, встановлено суттєві відмінності ефективності збудження хвильового поля при різних видах зовнішнього навантаження. Зокрема знайдено, що при навантаженні пружного хвилеводу перерізальною силою в області низьких частот, ефективність передачі енергії в дальнє поле значно вище, ніж при навантаженні згинальним моментом. Такий ефект обумовлений ступенем узгодженості навантаження та форми коливань. Але ряд питань, які виникають при розгляді наведених кількісних даних, недостатньо зрозумілі і вимагають подальшого аналізу, особливо в околі частоти $\Omega_2 = 4.2$.

Список літератури

1. Samuel Chukwumeka Olisa, Muhammad A. Khan, Andrew Starr. Review of Current Guided Wave Ultrasonic Testing (GWUT) Limitations and Future Directions // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21. – Issue 3. – p. 811. DOI : 10.3390/s21030811.
2. Worlton D. C. Experimental Confirmation of Lamb Waves at Megacycle Frequencies // *Journal of Applied Physics*. – 1961. – Vol. 32. – Issue 6. P. 967 – 971. DOI : 10.1063/1.1736196.
3. S. Naresh Kumar, K. Srikanth, B. Subbaratnam, Shakti P. Jena. Damage Detection in Composite Materials Using Lamb Wavemethod // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 3rd International Congress on Advances in Mechanical Sciences, 27 – 28 August 2020. – Hyderabad, India. – 2020. – Vol. 998 012066. DOI : 10.1088/1757-899X/998/1/012066.

4. Peter J. Torvik, Jay J. McClatchey. Response of an Elastic Plate to a Cyclic Longitudinal Force // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1968. – Vol. 44. – Issue 1. – P. 59 – 64. DOI : 10.1121/1.1911086.
5. Gregory R. D., Gladwell I. The Generation of Waves in a Semi-Infinite Plate by a Smooth Oscillating Piston // Journal of Applied Mechanics. – 1984. – Vol. 51. – Issue 4. – P. 787 – 791. DOI : 10.1115/1.3167725.
6. Baruch Karp. Generation of symmetric Lamb waves by non-uniform excitations // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 312. – Issues 1 – 2. – P. 195 – 209. DOI : 10.1016/j.jsv.2007.10.041.

References (transliterated)

1. Samuel Chukwuemeka Olisa, Muhammad A. Khan, Andrew Starr. Review of Current Guided Wave Ultrasonic Testing (GWUT) Limitations and Future Directions. *Sensors*. 2021, Vol. 21, Issue 3, p. 811. DOI : 10.3390/s21030811.
2. Worlton D. C. Experimental Confirmation of Lamb Waves at Megacycle Frequencies. *Journal of Applied Physics*. 1961, Vol. 32, Issue 6, pp. 967–971. DOI : 10.1063/1.1736196.
3. S. Naresh Kumar, K. Srikanth, B. Subbaratnam, Shakti P. Jena. Damage Detection in Composite Materials Using Lamb Wave method. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. 3rd International Congress on Advances in Mechanical Sciences*, 27 – 28 August 2020. Hyderabad, India. 2020, Vol. 998 012066. DOI : 10.1088/1757-899X/998/1/012066998.
4. Peter J. Torvik, Jay J. McClatchey. Response of an Elastic Plate to a Cyclic Longitudinal Force. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1968, Vol. 44, Issue 1, pp. 59–64. DOI : 10.1121/1.1911086.
5. Gregory R. D., Gladwell I. The Generation of Waves in a Semi-Infinite Plate by a Smooth Oscillating Piston. *Journal of Applied Mechanics*. 1984, Vol. 51, Issue 4, pp. 787–791. DOI : 10.1115/1.3167725.
6. Baruch Karp. Generation of symmetric Lamb waves by non-uniform excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 2008, Vol. 312, Issues 1 – 2, pp. 195–209. DOI : 10.1016/j.jsv.2007.10.041.

Надійшла (received) 30.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Городецька Наталія Сергіївна – доктор фізико-математичних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (093) 504-43-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3305-522X>; e-mail: nsgihm@gmail.com.

Gorodetska Nataliia Serhiivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Deputy director for scientific work of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (093) 504-43-59; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3305-522X>; e-mail: nsgihm@gmail.com.

Старовойт Інна Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу Гідродинамічної акустики Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (067) 749-52-66; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0956-7153>; e-mail: inna-mail@ukr.net.

Starovoit Inna Valeriivna – PhD of Physical and Mathematical sciences, Research Fellow at the Department of Hydrodynamic acoustics of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (067) 749-52-66; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0956-7153>; e-mail: inna-mail@ukr.net.

Олійник Валерій Никифорович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу Гідродинамічної акустики Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (098) 225-25-11; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6366-650X>; e-mail: v_oliynik@yahoo.com.

Oliynik Valery Nykyforovych – PhD of Physical and Mathematical sciences, Senior Research Fellow at the Department of Hydrodynamic acoustics of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (098) 225-25-11; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6366-650X>; e-mail: v_oliynik@yahoo.com.

В. Т. ГРІНЧЕНКО, В. Т. МАЦИПУРА**ДИСКРЕТНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

Обговорюються можливості специфічного підходу до розв'язання задач математичної фізики, які описуються лінійними диференціальними рівняннями. Для такого типу рівнянь накопичено значний об'єм розв'язків конкретних задач для так званих канонічних областей. Загальною характерною особливістю таких областей є те, що їх границя є координатною поверхнею в декартових, циліндричних, сферичних координатах. Саме в таких координатних системах для лінійних рівнянь накопичено значний досвід в побудові частинних розв'язків. Стаття присвячена дослідженню можливостей використання таких відомих частинних розв'язків при вирішенні задач пошуку кількісних характеристик фізичних полів в областях довільної форми. Аналіз наявних аналітичних розв'язків для канонічних областей дозволяє сформулювати нове поняття загального розв'язку граничної задачі для певного класу уже неканонічних областей. Специфічною рисою таких областей є те, що їх граничні поверхні формуються як частини координатних поверхонь в указаних координатних системах. При цьому принципово важливою є та обставина, що для лінійних рівнянь є справедливим принцип суперпозиції, коли будь-яка сума частинних розв'язків є також розв'язком граничної задачі. Дослідження загальних розв'язків граничних задач для неканонічних областей вказує на можливості побудови таких розв'язків різної форми для кожної конкретної задачі. Використання таких загальних розв'язків відкриває певні можливості для зменшення об'ємів обчислювальних процедур при виконанні обчислень у випадку задач для загальних неканонічних областей. При цьому використовується ідея поділу заданої області на частинні складові. В одній із них для представлення поля використовується аналітичний загальний розв'язок, а в решті областей використовуються традиційні підходи до дискретизації, наприклад, метод скінчених елементів. Приведено твердження про можливість використання різних форм загального розв'язку та представлені конкретні приклади обчислень. Обговорюється питання про різні алгоритми для обчислювальних процедур при виконанні граничних умов і умов спряження на додаткових поверхнях.

Ключові слова: граничні задачі, лінійні рівняння, загальний розв'язок граничної задачі, умови спряження, середньоквадратична апроксимація, поточкова апроксимація, канонічна область, рівняння Лапласа.

V. T. GRINCHENKO, V. T. MATSYUPURA**DISCRETE-ANALYTICAL METHOD OF SOLVING PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS**

This paper discusses a specific approach to solving problems in mathematical physics as described by linear differential equations. For this class of equations, a substantial body of solutions has been developed for particular problems within so-called canonical domains. A common feature of these domains is that their boundaries coincide with coordinate surfaces in Cartesian, cylindrical, or spherical coordinate systems. Significant experience has been accumulated in constructing partial solutions for linear equations in these coordinate systems. The focus of the article is on exploring the potential of using these known partial solutions to solve problems involving the determination of quantitative characteristics of physical fields in domains of arbitrary shape. An analysis of existing analytical solutions for canonical domains enables the formulation of a new concept: a general solution for boundary value problems defined on a class of non-canonical domains. A distinctive feature of these domains is that their boundary surfaces are made up of segments of coordinate surfaces from different coordinate systems. A key aspect of this approach is the superposition principle, which holds for linear equations: any linear combination of partial solutions is also a valid solution to the boundary value problem. The study of general solutions in non-canonical domains reveals the possibility of constructing multiple solution forms tailored to specific problems. Employing such general solutions presents opportunities to reduce the computational effort required for problems in general non-canonical domains. This is achieved through the concept of domain decomposition: one part of the domain employs an analytical general solution to represent the field, while the remainder is treated using traditional discretization methods such as the finite element method. The article also addresses the use of various forms of the general solution and presents specific calculation examples. Additionally, it discusses different algorithms for handling boundary and interface conditions on auxiliary surfaces.

Key words: boundary value problems, linear equations, general solution of a boundary value problem, conjugation conditions, mean-square approximation, pointwise approximation, canonical domain, Laplace equation.

Вступ. При вирішенні багатьох проблем *математичного моделювання фізичних процесів* початок дослідження пов'язано з формулюванням *граничних задач* для рівнянь в частинних похідних. Подальша робота спрямована на пошук *методу* розв'язання задачі, часто пов'язаного з використанням додаткових гіпотез, що базувалися на попередніх знаннях відносно *структури шуканого поля*. Можливість *прямого аналітичного розв'язку* була великою удачею [1]. Використання *чисельних методів*, пов'язаних з відмовою від використання поняття похідної і інтеграла, вимагало величезних затрат.

З появою комп'ютера ситуація принципово змінилася. Зі зростанням потужності обчислювальних засобів все більше задач математичної фізики могли бути розв'язані з практично потрібною точністю. Можливо, перші кроки в формуванні нових комп'ютерних розділів в природничих науках були зроблені в *обчислювальній гідродинаміці* [2]. Складалося враження, що недоступні для кількісного аналізу задачі, сформульовані з використанням фундаментальних досягнень математичного аналізу, стають простими при заміні *неперервних моделей моделями дискретними*. Проблеми, що виникають при такій заміні, окреслені в цитованому довіднику. Ці проблеми не зникають при використанні запропонованого *чисельно-аналітичного підходу*. Основною його перевагою є зменшення об'єму обчислень.

Основна ідея розширення можливостей аналітичних методів. Добре відомо, що питання про пошук загального розв'язку рівняння в частинних похідних не має сенсу. Однак такий загальний висновок не є справедливим, якщо мова йде про постановку граничних задач, коли необхідно розглядати всі три компоненти – рівняння, граничні умови та форму області існування шуканого фізичного поля. В цьому випадку ситуація змінюється. Розглянемо, наприклад, найпростішу двовимірну внутрішню граничну задачу для *рівняння Лапласа* в кру-

зі відносно потенціалу $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta)$. Цієї вихідної інформації достатньо для того, щоб можна було сформулювати таке твердження: вираз

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta \quad (1)$$

має властивості, які дозволяють назвати його *загальним розв'язком граничної задачі теорії потенціалу для круга*.

Таке твердження можна обґрунтувати тим, що саме цей вираз має бути застосовано при пошуку потенціалу за будь-яких граничних умов на поверхні. При цьому вибір додатних степенів радіальної координати в частинних розв'язках відповідає саме внутрішній задачі. Принципово важливо те, що можливість задовольнити граничні умови випливає із того, що система функцій

$$\cos n\theta, (n = 0, 1, \dots, \infty)$$

є повною і ортогональною на границі кола [3].

Процедура визначення коефіцієнтів нескінченного ряду (1) буде простою для першої та другої граничної задачі. У випадку змішаних умов коефіцієнти ряду мають визначатися з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Узагальнюючи цей простий приклад, визначимо як загальний розв'язок будь-якої граничної задачі, такий набір частинних розв'язків в області існування поля, який дає можливість виконати довільні граничні умови на границі.

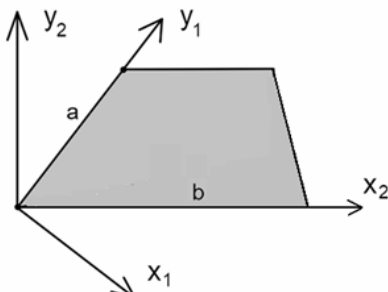


Рис. 1 – Складна область.

Побудова розв'язку конкретної задачі. Для ілюстрації того, наскільки такий підхід розширює можливості побудови аналітичних розв'язків лінійних граничних задач, розглянемо знову граничну задачу теорії потенціалу, але вже для більш складної області, показаної на рис. 1. Область існування поля – виділений чотирикутник. Згідно з основною ідеєю побудови загального розв'язку граничної задачі для даного конкретного випадку, перша вимога пов'язана з побудовою систем частинних розв'язків, що забезпечують можливість виконання довільних граничних умов на сторонах чотирикутника. Оскільки побудова єдиного розв'язку для виконання цих умов неможлива, то природно представити шуканий розв'язок у вигляді суми чотирьох складових, кожна з яких відповідальна за виконання граничних умов на одній із сторін чотирикутника. Щоб здійснити відповідну побудову слід ввести відповідні чотири *декартові координатні системи* у відповідності до числа сторін. На рис. 1 показано дві із таких систем. Цього достатньо, щоб проілюструвати сутність методу. Таким чином, маємо:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2, y_2) + \varphi_3(x_3, y_3) + \varphi_4(x_4, y_4). \quad (2)$$

Оскільки мова йде про якісний аналіз проблеми, обмежимося явним виразом лише для перших двох складових:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} y_1\right) \exp\left(-\frac{n\pi}{a} x_1\right), \\ \varphi_2(x_2, y_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} x_2\right) \exp\left(-\frac{m\pi}{b} y_2\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут необхідно надати певні коментарі відносно властивостей і фізичного змісту цих виразів. Перш за все слід зазначити, що кожна складова в цих рядах зберігає властивість бути частинним розв'язком рівняння Лапласа і при додатному значенні показників степені в експонентах. Однак фізичні міркування, подібні до вказаних відносно загального розв'язку (1), говорять про необхідність саме такого вибору знаків. Справедливість принципу максимуму для розв'язків граничних задач для рівняння Лапласа також вказує на необхідність такого вибору знаків в показниках експонент [4]. Решта складових в загальному розв'язку (2) визначається аналогічно з використанням частинних розв'язків у відповідних координатних системах.

Слід звернути увагу на ще одну важливу характеристику, яку необхідно враховувати при побудові загальних розв'язків. Важливо, щоб частинні розв'язки були присутні в представленні загального виразу в усіх точках існування поля вихідної задачі. Наприклад, перша із представлених функцій в (2) є по суті розв'язком *періодичної задачі теорії потенціалу для півплощини* ($x_1 \geq 0, -\infty < y_1 < \infty$), а отже є розв'язком і для тих точок $y_1 > a$, які належать області існування поля. Виглядає достатньо очевидно, що процедура побудови розв'язків (3) забезпечує виконання цієї вимоги для всіх складових в виразі (2).

Організація процедури виконання граничних умов виглядає досить просто. Розглянемо граничну умову на стороні $x_1 = 0, 0 < y_1 < a$. Якщо на цій стороні задано значення потенціалу певною функцією $\varphi(0, y_1) = F(y_1)$,

то цією рівністю породжується функціональне рівняння такого вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y_1}{a} = F(y_1) - \varphi_2(x_2, y_2) - \varphi_3(x_3, y_3) - \varphi_4(x_4, y_4). \quad (4)$$

Звичайно, для подальшого розгляду цього рівняння координати в виразах в правій частині мають бути перераховані до координати y_1 за відомими формулами [5]. Такий вигляд функціонального рівняння вказує на два можливих шляхи його перетворення на алгебраїчні рівняння (в даному випадку у вигляді нескінченних систем). Перш за все для формування такого рівняння можна скористатись властивостями тригонометричних функцій в лівій частині і здійснити звичайне обчислення коефіцієнтів *ряду Фур'є*. Очевидно, що така процедура пов'язана з обчисленням великої кількості інтегралів. З іншого боку, накопичений досвід використання дискретних рядів Фур'є дає можливість обчислити коефіцієнти алгебраїчної системи просто вибравши відповідну кількість точок, в яких це рівняння має виконуватись. Така поточкова процедура формування алгебраїчної системи виглядає особливо привабливою у випадку, коли планується використовувати аналітичні розв'язки як частину загального розв'язку в задачі з дискретною апроксимацією внутрішнього поля у внутрішніх точках області, як про це піде мова в подальшому викладі.

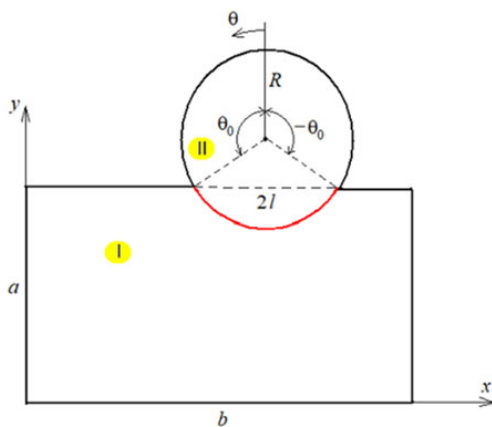


Рис. 2 – Форма області існування поля.

Важливість цієї вимоги проілюструємо при розгляді наступної задачі. Форма області існування поля показана на рис. 2. Сама постановка цієї задачі пов'язана з пошуком можливості розширення класу задач при аналітичному опису шуканого поля. Таке розширення пов'язане з використанням *методу часткових областей* і в подальшому у побудові загального розв'язку для складної області. При цьому можуть виникнути деякі ускладнення при практичній реалізації цієї ідеї. В даному випадку (рис. 2) форма області визначена суцільною кривою, котра складається з частини кола та частин сторін прямокутника. Особливість даної області полягає у тому, що ті її частини, для яких легко застосувати описану вище техніку формування загального розв'язку граничної задачі, перетинаються, що є проблемою.

На перший погляд це не є проблемою, оскільки в даному випадку на границі, показаній штриховим відрізком, слід виконувати не граничні умови, а умови спряження полів. Як вказувалось раніше, необхідною умовою при формуванні загального розв'язку є наявність присутності відповідних виразів частинних розв'язків рівняння в усій області існування шуканого поля. При побудові розв'язків в круговій області для виконання граничних умов на частині кола $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ досить легко вказати повну і ортогональну систему функцій

$$\cos \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}.$$

Однак побудовані з використанням таких кутових обмежень частинні розв'язки не є частинними розв'язками для трикутної області зі штриховими сторонами. Єдиний спосіб досягти того, щоб вся область II була покрита незалежними частинними розв'язками, полягає в тому, щоб використовувати розв'язки типу частинних розв'язків в (1), тобто розв'язків для повного круга:

$$\varphi_1^{(II)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \cdot r^n. \quad (5)$$

Другою складовою загального розв'язку в області II є вираз:

$$\varphi_2^{(II)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_m \cos \frac{m\pi x_2}{l} + D_m \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right) \exp \left(-\frac{m\pi y_2}{l} \right). \quad (6)$$

Процедури дискретизації загальних розв'язків. Розглянутий приклад наглядно вказує на ще один важливий аспект проблеми пошуку аналітичних розв'язків для неканонічних областей. Розглянемо спочатку розв'язок (1) для канонічної області. Якщо повною мірою використати властивості повноти та ортогональності системи тригонометричних функцій в цьому виразі, то пошук значень коефіцієнтів ряду A_n приводить до розв'язання нескінченної послідовності систем, одного рівняння з однією невідомою, що є типовим при апроксимації, заданої граничними умовами функції, рядом Фур'є. При цьому апроксимація здійснюється шляхом *мінімізації середньоквадратичного відхилення* між рядом Фур'є і заданою функцією. При реалізації цього процесу отримання

розв'язку слід виконати досить значний об'єм попередніх обчислень інтегралів. В той же час, в процесі використання *поточної апроксимації* заданої функції скінченним набором тригонометричних функцій необхідно розв'язувати лінійні системи рівнянь з числом рівнянь, коефіцієнти при невідомих в яких обчислюються значно простіше. Число рівнянь визначається вибраним кроком дискретизації. З розвитком комп'ютерної техніки таке дискретне перетворення Фур'є все ширше використовується при розв'язанні наукових і інженерних проблем [6], даючи можливість зменшення об'єму обчислень.

Повертаючись до граничної задачі, геометрія області існування якої показана на рис. 2, слід звернути увагу на наступну проблему. Фізичні граничні умови в задачі визначені лише на частині круга. В той же час складова загального розв'язку (5) містить частинні розв'язки рівняння в полярних координатах, визначені для всієї площі круга. В цьому випадку при дискретизації перетворення Фур'є слід вказати значення для функції $\phi_1^{(II)}(r, \theta)$ в частині кола, позначеній на рис. 2 жирними точками. На перший погляд така вимога здається такою, що не може бути виконана і, відповідно, загальний розв'язок задачі для частини круга не можна побудувати. Традиційно це обмеження не стосується частинного випадку півкола. Логічний аналіз ситуації, що виникла в загальному випадку, дає можливість запропонувати наступний підхід. При оцінці кількісних характеристик поля в області ми проводимо розрахунки лише в точках зрізаного круга.

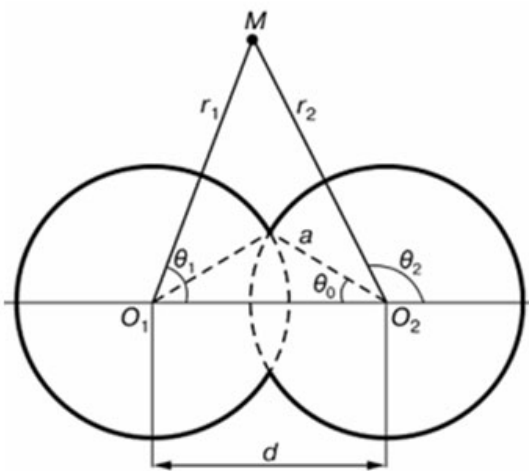


Рис. 3 – Циліндри, що перетинаються.

При цьому обидві складові загального виразу для шуканого потенціалу $\phi_{II} = \phi_1^{(II)} + \phi_2^{(II)}$ містять частинні розв'язки рівняння Лапласа в усіх точках зрізаного кола. Крім того, цей загальний розв'язок задовольняє граничні умови на круговій частині границі і умови спряження полів на стороні прямокутника $y_1 = a$. Звідси теорема про єдиність розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа дозволяє зробити висновок про можливість довільного вибору значень для функції $\phi_1^{(II)}$ на нефізичній частині границі при формуванні рівнянь для визначення коефіцієнтів A_n і B_n . Твердження виглядає парадоксальним. Але, практично реалізуючи обчислення, слід мати на увазі, що звичайно мова йде про довільність для інтегрованих функцій. Крім того, слід брати до уваги, що повна тотожність розв'язків можлива лише при врахуванні нескінченних рядів. При практичному використанні скінченних відрізків рядів певна залеж-

ність від довільних значень буде проявлятися і пошук оптимального продовження може вимагати певних обчислювальних експериментів.

Конкретні обчислення було проведено для задачі випромінювання звуку циліндрами, що перетинаються (рис. 3). Обчислення виконано для двох випадків продовження граничних умов на штрихових ділянках кіл – граничні умови для нормальної похідної приймалися рівними нулю або одиниці. При редукції системи з двадцятьма коефіцієнтами для кожного циліндра одержані кількісні оцінки шуканої функції на фізичних ділянках границі практично не відрізнялися. Детальний аналіз цієї конкретної задачі та ряду інших, при розв'язанні яких виникає подібна проблема, проведено в [7, 8]. В даному конкретному випадку використання загального розв'язку задачі у вигляді:

$$p = p_1 + p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(kr_1) \cos(n\theta_1) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} H_l^{(1)}(kr_2) \cos(l\theta_2) \quad (7)$$

з діапазоном зміни кутів θ_1 і θ_2 від 0 до 2π зумовлено необхідністю виконати умову періодичності шуканого розв'язку в області навколо циліндрів. В приведеному виразі (7) функції $H_m^{(1)}(kr)$ є функціями Ханкеля першого роду.

Використання загальних розв'язків при аналізі задач для областей загального виду. Приведені вище міркування розкривають сутність процедур, що забезпечують побудову аналітичних методів розв'язання граничних задач для неканонічних областей спеціальної форми. Наступне питання виглядає досить логічним. Як використати такі загальні розв'язки для вирішення проблеми зменшення обсягу обчислень при використанні методів типу *методу скінченних елементів для областей практично довільної форми*. Для цього розглянемо граничні задачі для областей довільної геометрії, представлених на рис. 4 і рис. 5.

На рис. 4 представлено геометрію області накресленої, як колись говорив *Л. Ейлер*, довільним рухом руки. До речі, в дискусії з *Д. Бернуллі* він заперечував можливість розкласти в ряд Фур'є саме такого типу функції [9]. Розглянемо внутрішню задачу для рівняння Лапласа для цієї області. Традиційний підхід до вирішення такої задачі передбачає використання одного із методів дискретизації. При цьому вся область існування поля покривається сіткою з вибраним масштабом. Це призводить до формування системи рівнянь з великим числом невідомих. В той же час, можна використати відносну простоту побудови загального розв'язку граничної задачі, наприклад, для виділеної області S^* . В ній побудувати загальний розв'язок і провести його узгодження з точками розбиття в залишку області. Такий підхід може значно скоротити об'єм обчислень.

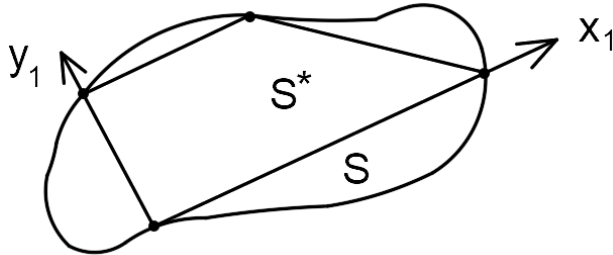
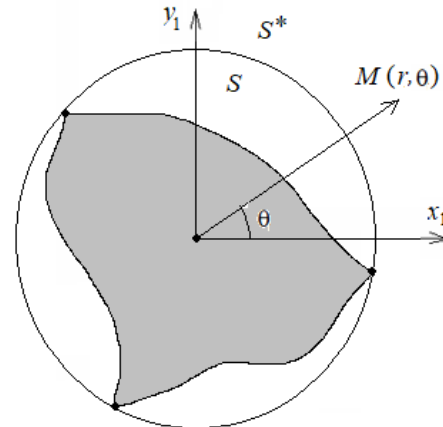


Рис. 4 – Область, накреслена довільним рухом руки.

Рис. 5 – Виділення частини існування поля S^* .

Зовнішні граничні задачі, тобто задачі в областях, що включають точки на нескінченності, мають певну специфіку. Так, для зовнішньої граничної задачі для багатокутника не вдається так легко побудувати загальний розв'язок, як це було показано раніше. І це якраз пов'язано з тим, що не вдається підібрати частинні розв'язки так, щоб мати можливість забезпечити повноту розв'язку на границі і забезпечити виконання рівняння в усій області існування поля. Але загальна ідея використання загального розв'язку для зовнішніх задач може бути реалізована. На рис. 5 показано, як відбувається виділення частини області існування поля S^* , для якої можливо побудувати загальний розв'язок – це зовнішність кола, котре оточує задану границю. Саме в цій області легко будуватиметься загальний розв'язок, що для рівняння Лапласа має вигляд:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^{-n}. \quad (8)$$

Висновки. Викладені міркування стимулюються загальною ідеєю – як набуті знання при розв'язанні відносно простих задач можна використати при розв'язанні задач більш складних. Звичайно, при подальшому суттєвому зростанні потужності обчислювальних систем такого типу економія може бути неактуальною. Однак, алгоритмічність і простота побудови загальних розв'язків можуть сприяти використанню такого підходу. Слід також зазначити досить загальний характер методу. Для ілюстрації його сутності було використано граничні задачі для рівняння Лапласа. Однак викладені ідеї можуть бути досить ефективно використані при розгляді інших рівнянь, включно з рівняннями *Гельмгольца*, рівняннями електродинаміки та теорії пружності.

Список літератури

1. Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. P.1: Types of fields. – McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. – 1061 p.
2. Peyret R. Handbook of Computational Fluid Mechanics. – Academic Press, 1996. – 467 p.
3. Titchmarsh E. C. Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part 1. – Oxford University Press, 1962. – 214 p.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – Лань, 2002. – 749 с.
5. Соколенко Л. О. Аналітична геометрія. Частина 1. Аналітична геометрія на площині. – Чернігів, НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. – 80 с.
6. Eleanor Chu. Fourier Transforms. Analysis, Application, and Fast Algorithms. – CRS Press, 2008. – 398 p.
7. Грінченко В. Т. Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – Т. 51. – № 2. – С. 53 – 60.

8. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. – New York : Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
9. Katz V. J. *History of mathematics. An introduction*, Third edition. – Pearson Addison-Wesley, 2009. – 996 p.

References (transliterated)

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics. P. 1: Types of fields*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. 1061 p.
2. Peyret R. *Handbook of Computational Fluid Mechanics*. Academic Press, 1996. 467 p.
3. Titchmarsh E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part 1*. Oxford University Press, 1962. 214 p.
4. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Lan, 2002. 749 p.
5. Socolenko L. O. *Analitichna geometriya. Chastyna 1. Analitichna geometriya na ploshchyni* [Analytical Geometry. Part 1. Analytical Geometry on the Plane]. Chernihiv, NUChK imeni T. G. Shevchenka Publ., 2021. 80 p.
6. Eleanor Chu. *Fourier Transforms. Analysis, Application, and Fast Algorithms*. CRS Press, 2008. 398 p.
7. Grinchenko V. T. Zadachi matematychnoyi fizyky z nepovnistyu vyznachenymy granychnymy umovamy [Mathematical physics problems with incompletely defined boundary conditions]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya* [Mathematical Methods and Physical and Mechanical Fields]. 2008, vol. 51, no. 2, pp. 53–60.
8. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. New York, Begell House, Inc., 2018. 439 p.
9. Katz V. J. *History of mathematics. An introduction*, Third edition. Pearson Addison-Wesley, 2009. 996 p.

Надійшла (received) 23.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Грінченко Віктор Тимофійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік Національної академії наук України, радник дирекції Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (095) 531-66-27; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3229-1810>; e-mail: grinchenko@nas.gov.ua.

Grinchenko Viktor Tymofiiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Advisor to the Directorate of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (095) 531-66-27; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3229-1810>; e-mail: grinchenko@nas.gov.ua.

Маціпура Володимир Тимофійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету КНУ України, м. Київ; тел.: (068) 894-60-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0136-6659>; e-mail: mnivtt@gmail.com.

Matsypura Volodymyr Tymofiiovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department of Mechanical Engineering, Berdyansk State Pedagogical University, Berdyansk; tel.: (050) 999-99-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0136-6659>; e-mail: mnivtt@gmail.com.

І. А. ДЖАЛЛАДОВА, О. Є. КАМІНСЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ КЕРОВАНOSTІ СИНГУЛЯРНИХ ГІБРИДНИХ СИСТЕМ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

У статті досліджено сингулярні гібридні системи (СГС), які характеризуються поєднанням диференціально-алгебраїчної структури та гібридної динаміки з перемиканням між різними режимами. Наведено математичну модель, обґрунтовано підходи до аналізу стійкості та керованості та проведено чисельне моделювання. Такі системи природним чином виникають у складних технічних застосуваннях – від енергетики до біомедичних пристроїв – де поведінка об'єкта змінюється внаслідок аварій, перемикань або внутрішніх структурних змін. Запропоновано математичну модель СГС на основі матриць, що залежать від дискретного режиму, де матриця може бути виродженою, що зумовлює сингулярність системи. Проведено аналіз керованості та стабільності таких систем із врахуванням специфіки – наявності алгебраїчних обмежень, імпульсних реакцій і неунікальності розв'язків. Розглянуто приклад системи з двома режимами: регулярним (з повною динамікою) та сингулярним (із замороженими змінними), продемонстровано зміну поведінки системи під час перемикання. Запропоновано підходи до аналізу стійкості із застосуванням гібридних функцій Ляпунова, методів Вейерштрасса та алгебраїчних критеріїв керованості, що враховують структурну виродженість. Проведено чисельне моделювання з використанням Python, реалізовано алгоритм керування у вигляді зворотного зв'язку по стану. Отримані результати підтверджують ефективність моделі у відображенні динаміки СГС, дозволяють дослідити вплив сингулярності на еволюцію стану та підкреслюють необхідність точного аналізу при розробці стратегій керування. Графіки ілюструють типову поведінку системи при перемиканні, зокрема адаптацію до алгебраїчних обмежень та вплив на керованість. Представлена модель і результати моделювання можуть бути використані для розробки безпечних та адаптивних систем керування у сферах, де сингулярні гібридні структури є невід'ємною частиною об'єкта управління.

Ключові слова: сингулярні системи, гібридна динаміка, системи керування, стійкість, керованість.

I. A. DZHALLADOVA, O. YE. KAMINSKY

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF CONTROLLABILITY OF SINGULAR HYBRID SYSTEMS IN APPLIED PROBLEMS

The article investigates singular hybrid systems (SHS), which combine differential-algebraic structures with hybrid dynamics involving mode switching. A mathematical model is presented, approaches to stability and controllability analysis are substantiated, and numerical simulation is performed. Such systems naturally arise in complex engineering applications – from energy systems to biomedical devices – where the system behavior changes due to faults, mode transitions, or internal structural variations. A mathematical model of SHS is proposed based on matrices, which depend on the discrete mode), with potentially being singular, leading to a differential-algebraic formulation. The controllability and stability of such systems are analyzed with a focus on the specific challenges of differential-algebraic formulation – including algebraic constraints, impulsive responses, and non-uniqueness of solutions. A case study of a two-mode system is presented: one regular mode with full dynamics, and one singular mode where certain state variables become constrained. The transition between modes demonstrates the shift from dynamic to algebraic behavior. Approaches to stability analysis are proposed, including hybrid Lyapunov functions, Weierstrass decomposition, and algebraic controllability criteria that account for matrix singularity. Numerical simulation is performed in Python using a state-feedback control law. The results confirm the model's capability to accurately capture SHS behavior, explore the effects of singularity on state evolution, and highlight the need for careful control design under mode transitions. Plots illustrate the characteristic response of the system, particularly adaptation to algebraic constraints and loss of controllability. The proposed model and simulation outcomes offer a basis for developing robust and adaptive control strategies in systems where singular hybrid dynamics are intrinsic to the control process.

Key words: singular systems, hybrid dynamics, control systems, stability, controllability.

Вступ. У сучасних задачах моделювання та керування все частіше зустрічаються *сингулярні гібридні системи (СГС)* – системи, які поєднують у собі неособливі та сингулярні динаміки, перемикання між режимами, а також дискретні події. Такі моделі природно виникають у мехатроніці, електроенергетиці, біомедичних системах, транспорті та робототехніці. Їхні ключові особливості – неуніформність динаміки, структурна неоднорідність та наявність сингулярностей (наприклад, деградація матриці при керуванні або спостереженні).

Початок вивчення таких систем припадає на 1950 – 1960-ті роки, коли в межах аналізу електричних кіл з ідеальними компонентами (індуктивності, ємності, ідеальні джерела струму) було виявлено, що класичний підхід до опису динаміки звичайними *диференціальними рівняннями* не завжди застосовний. Це призвело до виникнення поняття *диференціально-алгебраїчних рівнянь*, у яких не всі змінні мають похідні, а деякі підпорядковуються лише алгебраїчним співвідношенням. У 1980-х роках цей підхід був формалізований у рамках *теорії сингулярних систем* (або систем з описом у просторі станів через *матрицю E* , що може бути виродженою). Одним із провідних дослідників цього періоду став *Lunwen Dai*, який заклав фундамент для аналізу стабільності, керованості та спостережуваності таких систем [1].

У подальші десятиліття, з розвитком автоматизованих та вбудованих систем, особливу увагу почали привертати *гібридні динамічні системи*, які поєднують безперервну динаміку з дискретними подіями – перемиканнями між режимами, логікою контролю або реакцією на порогові значення. У 1990-х і 2000-х роках роботи таких науковців, як *Daniel Liberzon* і *João Hespanha*, сприяли становленню гібридного керування як окремого напрямку. Синтез цих двох галузей – теорії сингулярних систем і гібридної динаміки – відбувся у 2000-х і особливо активно розвивався після 2010 року. Сьогодні сингулярні гібридні системи є актуальними для опису складних технічних об'єктів, таких як мікромережі з динамічною топологією, автономні мобільні платформи з перемиканням режимів роботи, а також у хімічній технології та біомедичних пристроях, де система може переходити з одного функціонального стану в інший зі зміною внутрішньої структури.

Аналіз останніх досліджень. У дослідженні [2] автори розглядають проблеми стійкості та стабілізації для класу неперервних сингулярних гібридних систем. Вони пропонують нові необхідні та достатні умови для регулярності, відсутності імпульсів та стохастичної стійкості таких систем, виражені через *систему строгих лінійних матричних нерівностей (LMIs)*. Крім того, представлено умови існування зворотного зв'язку по стану для стабілізації системи. Результати підкріплені чисельним прикладом, що демонструє ефективність запропонованого підходу.

У роботі [3] було досліджено взаємозв'язок між *біфуркацією Гопфа* в сингулярно збурених нелінійних системах електропостачання та біфуркаціями, *індукованими сингулярністю (SIB)*, у відповідних диференціально-алгебраїчних рівняннях. Автори показують, що явище SIB у системі диференціально-алгебраїчних рівнянь може сигналізувати про наявність біфуркації Гопфа в сингулярно збуреній системі звичайних диференціальних рівнянь. Аналіз базується на теорії лінійних матричних олівців та поліномів з параметрично залежними коефіцієнтами. Представлено кілька чисельних прикладів для ілюстрації результатів.

У дослідженні [4] розглянуто проблему аналізу стійкості для класу сингулярних гібридних систем з перемиканнями та імпульсами. Для кожної підсистеми розроблено відповідний контролер, після чого обговорюється *експоненціальна стійкість* запропонованої системи як для лінійних, так і для нелінійних випадків. Результати застосовуються до організації контролю сингулярних систем, а запропоновані теореми надають вказівки щодо проектування керування. Два чисельні приклади демонструють ефективність запропонованих підходів.

Сингулярні гібридні системи з безперервною динамікою часто виникають у практичних застосуваннях, тому надійний аналіз стійкості таких систем є критично важливим для забезпечення безпеки і прогнозованої поведінки у складних сценаріях з перемиканням режимів. У контексті енергетичних систем, які все частіше характеризуються складною гібридною структурою та високою чутливістю до параметричних змін, дослідження *біфуркаційних явищ* у диференціально-алгебраїчних структурах дозволяє прогнозувати нестабільність і запобігати катастрофічним відмовам у режимі реального часу.

Постановка задачі. Сингулярні гібридні системи (СГС) – це складний клас динамічних систем [5], які поєднують у собі:

- диференціально-алгебраїчну структуру, де матриця при похідній E є виродженою (тобто $\det(E) = 0$);
- гібридну динаміку, що включає перемикання між дискретними режимами або підсистемами;
- керованість, яка може бути частково або повністю втрачена в деяких режимах [6].

Математична модель. Розглянемо сингулярну гібридну систему у формі:

$$E_{\sigma} \dot{x}(t) = A_{\sigma} x(t) + B_{\sigma} u(t), \quad y(t) = C_{\sigma} x(t), \quad \sigma \in S,$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи; $u(t) \in R^m$ – вхідний сигнал; $y(t) \in R^p$ – вихідний сигнал; $\sigma(t)$ – дискретна змінна стану (режим роботи системи); $E_{\sigma} \in R^{n+n}$ – сингулярна (можливо вироджена) матриця; $A_{\sigma}, B_{\sigma}, C_{\sigma}$ – матриці, що відповідають поточному режиму $\sigma \in S$.

Якщо $\det(E) = 0$, то система є сингулярною (диференціально-алгебраїчною).

Розглянемо, як працює дана модель. У штатному режимі (регулярному), система поводить себе як звичайна лінійна система з повною динамікою – всі стани змінюються відповідно до зовнішніх впливів та керування.

Під час перемикання режиму (наприклад, у випадку аварії, втрати компонента або активації захисту) система переходить у сингулярний режим, де частина змінних більше не має похідної (тобто не може змінюватись довільно). У такому режимі зберігаються алгебраїчні залежності між змінними, і стан може "заморожуватись" або змінюватись дискретно.

Керування може продовжувати діяти, якщо воно враховує структуру сингулярності (наприклад, обирає допустимі напрями впливу на систему).

Класичні підходи до аналізу стійкості (*підхід Ляпунова, спектральні методи*) неможливо застосувати на пряму [7] через:

- наявність неунікальних розв'язків (внаслідок виродженості E_{σ});
- можливість миттєвих імпульсних реакцій (зумовлених структурою диференціально-алгебраїчного рівняння);
- перемикання між режимами, які призводять до дискретної динаміки.

Для аналізу необхідно враховувати інваріантні підпростори, регуляризацию системи [8], а також застосування гібридних моделей у просторі подій. Тому є необхідним розглядати нові підходи до синтезу керування:

- *методи розкладання Вейєрштрасса* для декомпозиції системи на регулярну та сингулярну складову;
- *гібридну Ляпуновську функцію* – об'єднання класичних та дискретних умов стійкості;

- методи оптимального перемикавання (Switching Logic Design), що забезпечують бажані характеристики під час зміни режимів;
- алгебраїчні критерії керованості (на основі рангів керованої пари (E_σ, B_σ) з урахуванням сингулярності.

Нехай система має два режими $\sigma \in \{1, 2\}$:

– Режим 1 – регулярний:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

– Режим 2 – сингулярний:

$$E_2 \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t), \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ця система демонструє складну поведінку: в режимі 2 один з рівнів є алгебраїчним. Аналіз вимагає побудови індексу диференціально-алгебраїчного рівняння, дослідження консистентності початкових умов та вибору закону перемикавання, що забезпечує стійкість. На рис. 1. бачимо графік, який ілюструє поведінку сингулярної гібридної системи зі зміною режиму на $t = 5$ секунд. До перемикавання (режим 1) система поводить як класична динамічна система другого порядку. Після перемикавання (режим 2) відбувається сингулярна динаміка – одна з координат (x_2) одразу адаптується до алгебраїчного зв'язку, а x_1 змінюється поступово.

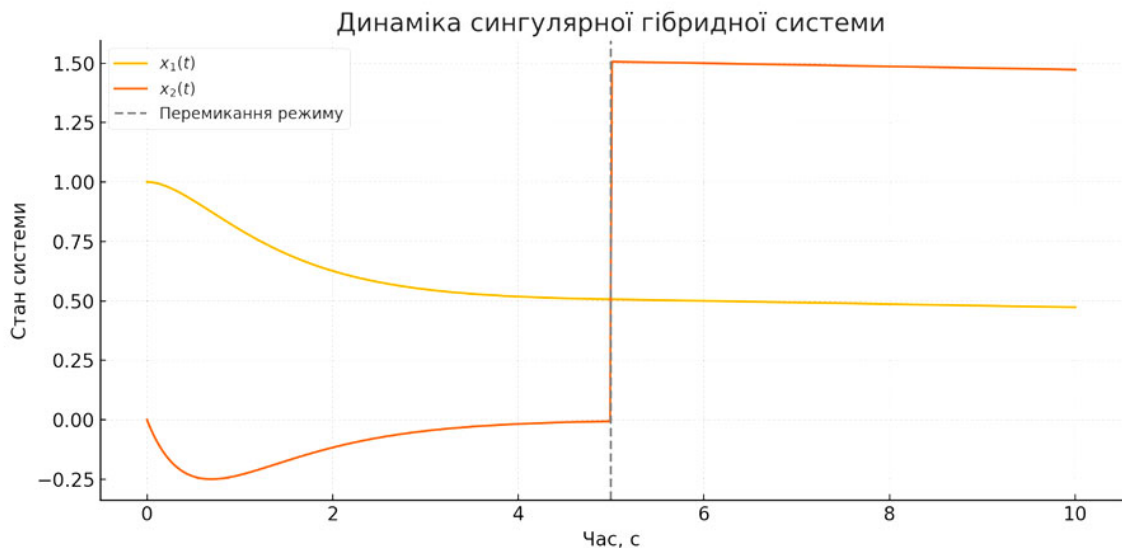


Рис. 1 – Графік поведінки сингулярної гібридної системи зі зміною режиму на $t = 5$ секунд.

Графік демонструє вплив сингулярної структури (миттєве пристосування до алгебраїчного обмеження), важливість правильного моделювання при переході між режимами та складність у забезпеченні стабільності при неконтрольованих перемикаваннях.

Пропонується програмний код для моделювання простої сингулярної гібридної системи з двома режимами, що перемикаються через заданий час. Один режим має регулярну матрицю E , інший – сингулярну (невироджену і вироджену відповідно).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# --- Закони керування для кожного режиму ---
K1 = np.array([[3, 4]]) # Регулярний режим
K2 = np.array([[0, 0]]) # Сингулярний режим — без активного керування

# --- Гібридна система з керуванням ---
def hybrid_system(t, x, mode):
    if mode == 1:
        # Регулярна система
        E = np.eye(2)
        A = np.array([[0, 1],
```

```

        [-2, -3]])
    B = np.array([[0],
                  [1]])
    K = K1
else:
    # Сингулярна система
    E = np.array([[1, 0],
                  [0, 0]]) # вироджена
    A = np.array([[0, 1],
                  [0, -1]])
    B = np.array([[0],
                  [0]]) # не реагує на вхід
    K = K2

u = -K @ x # Простий лінійний зворотній зв'язок
try:
    dxdt = np.linalg.solve(E, A @ x + B @ u)
except np.linalg.LinAlgError:
    dxdt = np.zeros_like(x)

return dxdt

# --- Симуляція з перемиканням ---
def simulate_hybrid_system(t_final=10, t_switch=5):
    x0 = np.array([1.0, 0.0])
    t_points = np.linspace(0, t_final, 500)
    sol = np.zeros((len(t_points), 2))

    for i, t in enumerate(t_points):
        mode = 1 if t < t_switch else 2
        if i == 0:
            sol[i, :] = x0
        else:
            dt = t_points[i] - t_points[i - 1]
            x_prev = sol[i - 1, :]
            dx = hybrid_system(t, x_prev, mode)
            sol[i, :] = x_prev + dx * dt

    return t_points, sol

# --- Побудова графіка ---
t_vals, x_vals = simulate_hybrid_system()

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t_vals, x_vals[:, 0], label='x1 (стан)')
plt.plot(t_vals, x_vals[:, 1], label='x2 (стан)')
plt.axvline(x=5, color='r', linestyle='--', label='Перемикання режиму')
plt.title('СГС з керуванням: поведінка станів x1, x2')
plt.xlabel('Час')
plt.ylabel('Станові змінні')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Результат роботи програми. На рис. 2 для візуального порівняння наведено результат, отриманий в ході роботи програми.

Алгоритм роботи програми полягає в наступному:

1. Моделюємо систему $E \, dx/dt = Ax + Bu$ в двох режимах.
2. До $t = 5$ система поводить себе як класична (регулярна).
3. Після $t = 5$ система переходить у сингулярний режим, де змінні "заморожуються", оскільки E є виродженою.

4. Графік відображає поведінку змінних x_1 , x_2 .
5. Вхід $u(t)$ залежатиме від стану системи – $u(t) = -K_\sigma x(t)$.
6. Додано закон керування: $u(t) = -K_x(t)$.
7. У регулярному режимі керування стабілізує систему ($x \rightarrow 0$).
8. У сингулярному режимі керування – вхід не впливає, система "заморожується".

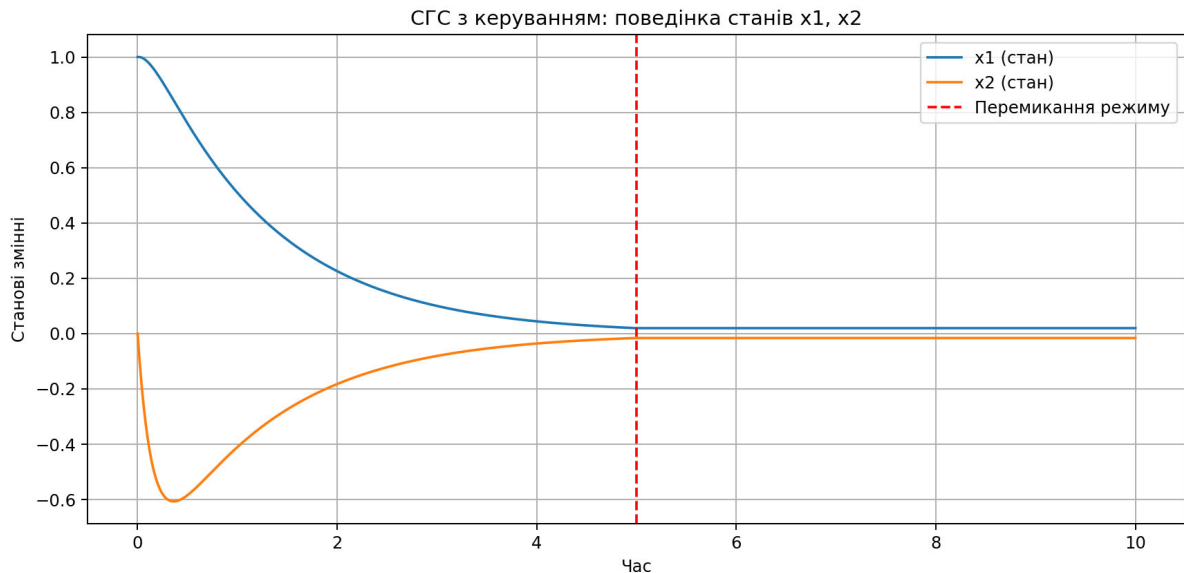


Рис. 2 – Графік поведінки простої сингулярної гібридної системи з двома режимами, що перемикаються через заданий час.

Як працює дана модель: матриця E описує здатність змінювати стан (накопичення енергії, ємність, індуктивність), у режимі 1 керування стабілізує систему: регулює напругу, усуває осциляції, а після перемикавання у режим 2, наприклад, при спрацюванні захисту, частина керування блокується, а динаміка стає виродженою. Модель показує, що навіть після втрати керування у другому режимі, система зберігає стабільність у попередньо стабілізованому стані.

Практичне застосування даної моделі є можливим для керування аварійними режимами роботи енергосистеми. В енергетичній системі (наприклад, підстанція або автономна мікромережа) існують два режими роботи:

Режим 1 – штатна робота з активним регулятором напруги й динамікою передачі енергії;

Режим 2 – аварійна ситуація (наприклад, коротке замикання або втрата живлення), при якій частина системи "випадає", а стан змінюється лише за алгебраїчними співвідношеннями (сингулярність).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані із адаптивним контролем СГС, включенням стохастичних факторів [9] (наприклад, $u(t)$ – вхідний сигнал, або характеристика стану $\sigma(t)$ залежить від *марковського процесу* зі скінченною кількістю станів) у гібридні моделі та з реалізацією даних методів в прикладних задачах економіки, соціальної сфери, кібербезпеки критичної інфраструктури. СГС дозволяють враховувати як плавні зміни в економічних показниках (наприклад, інфляція, ВВП, зайнятість), так і випадкові події або зміни режиму функціонування системи, такі як економічні кризи, зміни урядової політики, запровадження санкцій чи збоїв в ланцюгах постачання (маркетингові логістичні проблеми).

У соціальній сфері СГС можуть бути використані для моделювання процесів поширення інформації чи поведінкових змін у суспільстві, де є постійна динаміка (наприклад, зростання впливу), що може випадково змінюватися внаслідок зовнішніх факторів: новин, соціальних протестів або змін у законодавстві. У таких моделях диференціально-алгебраїчні рівняння дозволяють описувати внутрішні обмеження системи (наприклад, бюджетні чи ресурсні обмеження), тоді як гібридна структура забезпечує відображення перемикань між різними сценаріями чи політичними режимами.

Отже, СГС створюють потужний інструмент для аналізу керованості соціально-економічних процесів, прогнозування кризових ситуацій, тестування політичних стратегій та оцінки наслідків управлінських рішень. Це особливо важливо у посткризових та трансформаційних умовах, коли системи не є повністю лінійними та передбачуваними.

Висновки. Запропонована у даній роботі модель дозволяє тестувати надійність керування у разі аварії, моделювати перемикання між режимами реального обладнання (наприклад, вмикання/вимикання секцій трансформатора) та може використовуватися в енергетиці, авіоніці, робототехніці, де керування має забезпечити стійкість у неповних або вироджених системах.

Розробки авторів [10] в сфері соціально-економічних досліджень, а також забезпечення безпеки та оборони країни (аналітики інцидентів кібербезпеки) дозволяють розширити клас систем, до яких можуть бути застосовані методи синтезу керування; гарантувати стійкість систем із перемиканнями між сингулярними та регулярними режимами; формалізувати поняття гібридної керованості та запропонувати алгоритми її перевірки.

Список літератури

1. Dai L. Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer Verlag, Berlin, 1989.
2. Xia Y., Boukas E.-K., Shi P., Zhang J. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems // *Automatica*. – 2009. – № 45(6). – P. 1504 – 1509. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.02.008.
3. Marszalek W., Trzaska Z. Singular Hopf Bifurcations in DAE Models of Power Systems // *Energy and Power Engineering*. – 2011. – № 3(1). – P. 1 – 8. DOI: 10.4236/epe.2011.31001.
4. Zamani I., Shafiee M., Ibeas A. On singular hybrid switched and impulsive systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. – 2018. – № 28(16). – P. 5036 – 5052. DOI: 10.1002/rnc.3876.
5. Rabier P. J., Rheinboldt W. C. Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Handbook of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. VIII, Elsevier.
6. Liberzon D. Switching in systems and control. – Birkhäuser, 2003.
7. Zhang H., Wang Z., Ho D. W. C. Stability analysis and control synthesis for singular hybrid systems // *Automatica*. – 2010. – № 46(5). – P. 903 – 910.
8. Xu S., Lam J. Robust control for uncertain singular systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2001. – № 46(12). – 1997 – 2003.
9. Dzhalladova Irada, Ruzickova Miroslava. Dynamical system with random structure and their applications, Monograph. – Cambridge Scientific Publishers, 2020. – 264 p.
10. Dzhalladova I., Kaminsky O., Lutyj O. The impact of the consequences of the Covid-19 pandemic on the social security of Ukraine // *Access to science, business, innovation in digital economy*. – ACCESS Press, 2021. – № 2(3). – P. 252 – 260. DOI: 10.46656/access.2021.2.3(4).

References (transliterated)

1. Dai L. *Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
2. Xia Y., Boukas E.-K., Shi P., Zhang J. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems. *Automatica*. 2009, no. 45(6), pp. 1504–1509. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.02.008.
3. Marszalek W., Trzaska Z. Singular Hopf Bifurcations in DAE Models of Power Systems. *Energy and Power Engineering*. 2011, no. 3(1), pp. 1–8. DOI: 10.4236/epe.2011.31001.
4. Zamani I., Shafiee M., Ibeas A. On singular hybrid switched and impulsive systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2018, no. 28(16), pp. 5036–5052. DOI: 10.1002/rnc.3876.
5. Rabier P. J., Rheinboldt W. C. *Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Handbook of Numerical Analysis*. 2000, Vol. VIII, Elsevier.
6. Liberzon D. *Switching in systems and control*. Birkhäuser, 2003.
7. Zhang H., Wang Z., Ho D. W. C. Stability analysis and control synthesis for singular hybrid systems. *Automatica*. 2010, no. 46(5), pp. 903–910.
8. Xu S., Lam J. Robust control for uncertain singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2001, no. 46(12), 1997–2003.
9. Dzhalladova Irada, Ruzickova Miroslava. *Dynamical system with random structure and their applications : Monograph*. Cambridge Scientific Publishers, 2020. 264 p.
10. Dzhalladova I., Kaminsky O., Lutyj O. The impact of the consequences of the Covid-19 pandemic on the social security of Ukraine. *Access to science, business, innovation in digital economy*. ACCESS Press, 2021, no. 2(3), pp. 252–260. DOI: 10.46656/access.2021.2.3(4).

Надійшла (received) 23.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Джалладова Ірада Агаєвна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувачка кафедри системного аналізу та кібербезпеки, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ; тел.: (067) 503-87-45; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3158-6844>; e-mail: idzhalladova@gmail.com.

Dzhalladova Irada Agayevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Systems Analysis and Cybersecurity, Vadym Hetman Kyiv National Economic University, Kyiv; tel.: (067) 503-87-45; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3158-6844>; e-mail: idzhalladova@gmail.com.

Камінський Олег Євгенович – доктор економічних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та кібербезпеки, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ; тел.: (067) 477-82-94; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0607-8944>; e-mail: olkam@kneu.edu.ua.

Kaminsky Oleg Yevhenovych – Doctor of Economics, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Cybersecurity, Vadym Hetman Kyiv National Economic University, Kyiv; tel.: (067) 477-82-94; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0607-8944>; e-mail: olkam@kneu.edu.ua.

С. О. ДОВГИЙ, Г. Г. БУЛАНЧУК, О. М. БУЛАНЧУК

GPU-РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКУ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ СЛАР У МЕТОДІ ДИСКРЕТНИХ ВИХРОВИХ РАМОК ДЛЯ ЗАДАЧ ОБТІКАННЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

У роботі розглядається можливість використання графічного процесора (GPU) для розрахунку правої частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) у методі дискретних вихрових рамок при моделюванні обтікання тонких пластин ідеальною рідиною. При цьому швидкість руху вузлів вихрової пелени також розраховувалась на графічному процесорі. Для реалізації алгоритму розрахунку на GPU було використано мову програмування GLSL для обчислювальних шейдерів, що реалізується в межах стандарту OpenGL, починаючи із версії 4.3. Для обчислень на центральному процесорі (CPU) використовувалась мова програмування C# та фреймворк OpenTK. При реалізації алгоритмів на CPU розпаралелювання обчислень здійснювалося з використанням статичного методу Parallel.For. CPU-реалізація використовує числа подвійної точності, тоді як GPU-реалізація – числа одинарної точності і виключає умовні оператори для підвищення продуктивності. Проведено порівняльний аналіз точності та швидкості розрахунку задач обтікання пластинок різного розміру під різними кутами атаки. Результати чисельних експериментів показали, що при зниженні точності менш ніж на 1 % (за критеріями розподілу тиску та повної сили) вдається досягти значного прискорення розрахунків – до 75 разів всієї задачі залежно від кількості вихрових елементів. Істотне збільшення похибки спостерігається при збільшенні розрахункового часу до $t_{max} = 6$, але на той момент застосування методу може бути некоректним, оскільки відбувається самоперетин вихрової пелени. При цьому саме перенесення обчислень правої частини СЛАР на GPU прискорює розрахунок всієї задачі приблизно в десять разів. Отримані результати підтверджують доцільність та ефективність перенесення розрахунків правої частини СЛАР на графічний процесор у задачах моделювання просторового обтікання пластин з використанням методу дискретних вихрових рамок.

Ключові слова: ідеальна рідина, обтікання пластин, метод дискретних вихрових рамок, C#, GLSL, OpenGL, OpenTK, GPU, формула Біо – Савара, ядро Ренкіна.

S. O. DOVGYI, G. G. BULANCHUK, O. M. BULANCHUK

GPU IMPLEMENTATION OF THE RIGHT-HAND SIDE COMPUTATION IN THE DISCRETE VORTEX METHOD FOR THIN PLATE FLOW SIMULATION

This work explores the use of a graphics processing unit (GPU) to compute the right-hand side of a system of linear algebraic equations (SLAE) within the discrete vortex method when modeling the flow around thin flat plates in an ideal fluid. In addition, the velocity of the vortex sheet nodes was also computed on the GPU. The algorithm for GPU-based computation was implemented using the GLSL programming language for compute shaders, supported in the OpenGL standard starting from version 4.3. For CPU-based calculations, the C# programming language and the OpenTK framework were used. Parallelization on the CPU was achieved using the static method Parallel.For. The CPU implementation operates with double-precision numbers, while the GPU implementation uses single-precision arithmetic and avoids conditional operators to improve performance. A comparative analysis of the accuracy and performance was carried out for flow simulations around plates of different sizes and angles of attack. The results of numerical experiments demonstrate that, with a loss in accuracy of less than 1 % (in terms of pressure distribution and total force), a significant speedup of up to 75 times can be achieved, depending on the number of vortex elements. A noticeable increase in error is observed as the simulation time increases $t_{max} = 6$; however, at that point, the method may become physically invalid due to self-intersection of the vortex sheet. It was found that transferring only the right-hand side SLAE computation to the GPU yields a 10× speedup of the overall calculation. The obtained results confirm the feasibility and effectiveness of offloading the right-hand side computation to the GPU for simulating three-dimensional plate flows using the discrete vortex method.

Key words: ideal fluid, flat plate flow, discrete vortex method, C#, GLSL, OpenGL, OpenTK, GPU, Biot–Savart formula, Rankine core–OpenGL, vortex segments, GPU, computer shaders, ideal fluid, vortex sheet.

Вступ. У роботі [1] було досліджено можливості моделювання тривимірного обтікання тонких пластин методом дискретних вихрових рамок [2] із використанням графічного процесору GPU. Було проведено порівняння координат пелени, обчислених за класичною схемою на центральному процесорі CPU, та розрахунками координат із обчисленням швидкості на GPU. Було досліджено відносну похибку при визначенні координат вузлів пелени для квадратної пластинки, яка розміщена перпендикулярно до набігаючого потоку. При цьому ядро Ренкіна у формулі Біо – Савара не використовувалося. У роботі [3] було досліджено точність розрахунку розподілу тиску на видовженій пластині, де рух пелени обчислювався на GPU. При цьому використовувався той самий алгоритм, але було застосовано ядро Ренкіна. Дослідження показали, що втрата точності порівняно з центральним процесором є досить малою.

Описаний у роботі [1] алгоритм моделювання включав наступні етапи:

1. Задання початкових умов та параметрів дискретизації.
2. Формування структур даних для збереження вузлових і контрольних точок на пластині, точок пелени.
3. Формування матриці методу дискретних вихрових рамок.
4. Розрахунок правої частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).
5. Розв'язання СЛАР і визначення густини подвійного шару на поверхні пластини.
6. Формування вихрової пелени в початковий момент часу та задання густини подвійного шару на наступних кроках.
7. Обчислення швидкості в контрольних точках пелени.
8. Переміщення вихрових пелен за локальними швидкостями.

9. Повернення до кроку 4 в наступний момент часу.

У попередній реалізації було перенесено на GPU лише етап обчислення швидкостей у вузлах вихрових пелен (крок 7) з використанням обчислювальних шейдерів на мові GLSL. Усі обчислення на GPU виконувались з одинарною точністю (float), тоді як розрахунок правої частини СЛАР (крок 4) здійснювався на CPU на мові C# з використанням змінних подвійної точності (double). Результати порівняльних розрахунків показали, що при відносно малій кількості часових кроків відхилення у координатах вихрової пелени є незначними і візуально малопомітними.

У багатьох *практичних задачах*, зокрема при моделюванні *вітрової ситуації* в зонах міських забудов, кількість геометричних об'єктів (будинків) може бути досить великою. Хоча при тривалому моделюванні та зростанні кількості вихрових відрізків похибки поступово накопичуються, оптимізація обчислювальних витрат все ж залишається актуальною.

У зв'язку з цим постає питання про доцільність перенесення обчислення правої частини СЛАР (крок 4) також на графічний процесор (GPU). Однак такий перехід потребує детального аналізу впливу одинарної точності та GPU-специфічних обмежень (зокрема, уникнення умовних операторів) на точність і фізичну коректність обчислень гідродинамічних характеристик, таких як поле швидкостей та тиску.

Метою даної роботи була розробка та тестування GPU-реалізації обчислення правої частини СЛАР у методі дискретних вихрових рамок та визначення її впливу на точність та ефективність моделювання.

Розглядалося обтікання пластинок різного розміру під різними кутами атаки. Аналізувалися траєкторії вузлів вихрової пелени, розподіл тиску на поверхні пластинки та відповідні аеродинамічні сили. Для кожного випадку виконувалися два розрахунки за однакових початкових умов: перший – на центральному процесорі (CPU) з використанням подвійної точності, другий – із перенесенням розрахунку швидкостей у правій частині системи лінійних алгебраїчних рівнянь на графічний процесор (GPU). Окрім точності, оцінювалася також швидкість обчислень.

Постановка задачі. Розглядається *тривимірна задача* обтікання тонкої пластинки потоком *ідеальної нестисливої рідини*. Розв'язок задачі знаходиться у вигляді суми потенціалу зовнішнього потоку і потенціалу збурених пластиною швидкостей. Потенціал збурених швидкостей повинен задовольняти *рівняння Лапласа* всюди, окрім поверхні пластинки та вихрових пелен, які сходять з пластинки [2]. При цьому на поверхні пластини в усі моменти часу повинна виконуватись *умова непротікання*.

Після *дискретизації* (розбиття пластинки на рамки) умова непротікання зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно циркуляцій рамок. У кожен момент часу рамки сходять у потік, формуючи вихрові пелени, які переміщуються за місцевою швидкістю рідини. Швидкість в будь-якій точці обчислюється за формулою Біо – Савара.

Особливості реалізації формули Біо – Савара на GPU. Для точок, розташованих на великій відстані від осі вихрового відрізка, швидкість обчислювалась за формулою:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[\Delta\vec{l} \times \vec{a}]}{[\Delta\vec{l} \times \vec{a}]^2} \Delta\vec{l} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{b}}{b} \right), \quad (1)$$

де $\Delta\vec{l}$ – вектор, напрямлений від початку відрізка до його кінця (рис. 1); $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор з початку вихрового відрізка $\vec{r}_0$ до точки спостереження $\vec{r}$, де визначається швидкість; $\vec{b} = \vec{a} - \Delta\vec{l}$ – вектор, проведений з кінця вихрового відрізка до точки спостереження.

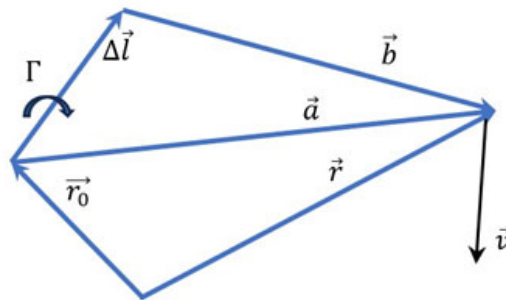


Рис. 1 – Швидкість від вихрового відрізка з використанням формули Біо – Савара.

Формула (1) дає значення швидкості, що прямує до нескінченності у випадку, коли точка спостереження

прямує до осі вихрового відрізка а її проекція потрапляє всередину цього відрізка (включаючи його кінці). Така особливість призводить до нефізичних результатів розрахунку течії рідини через *сингулярність* швидкості. Тому формулу (1) застосовують тоді, коли відстань до прямої, що проходить через відрізок, перевищує певне порогове значення R (радіус ядра Ренкіна):

$$\frac{\left[\left[\Delta \vec{l} \times \vec{a} \right] \right]^2}{\Delta l^2} > R^2. \quad (2)$$

Якщо ж точка спостереження розташована ближче до осі відрізка (умова (2) не виконується), застосовується регуляризована формула:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\left[\Delta \vec{l} \times \vec{a} \right]}{\Delta l^2 R^2} \Delta \vec{l} \cdot \left(\frac{\vec{a}}{a} - \frac{\vec{b}}{b} \right). \quad (3)$$

Формула (3) дозволяє уникнути сингулярностей (рис. 2, а).

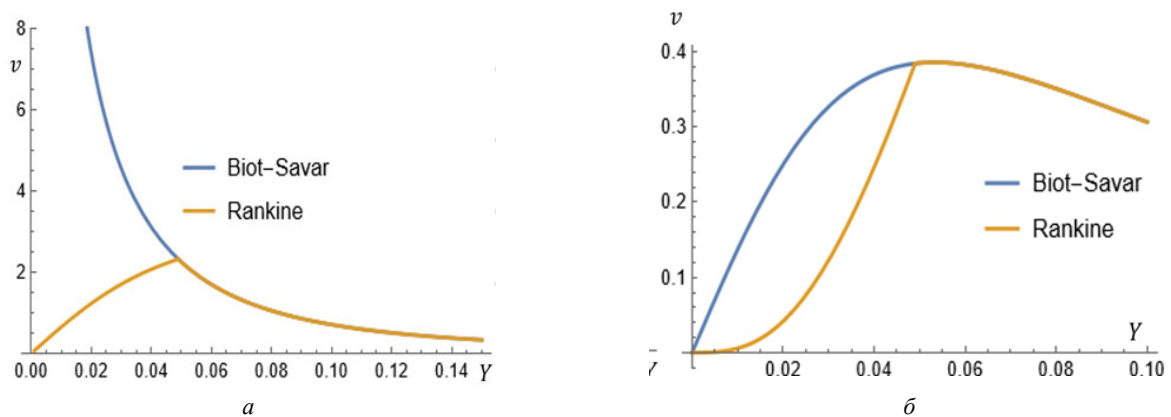


Рис. 2 – Залежність швидкості v вихрового відрізка довжини $\Delta l = 0.1$ від відстані до відрізка y .

Радіус Ренкіна $R = 0.49\Delta l$. a – вздовж перпендикуляра, що проходить через центр відрізка;

b – вздовж перпендикуляра, що проходить на відстані Δl від центра відрізка.

Слід зазначити, що існують також інші підходи для регуляризації розрахунків з використанням формули Біо – Савара, короткий огляд яких дано в роботі [4]. Варто звернути увагу, що для методу дискретних вихрових рамок регуляризація (3) дає занижені значення швидкостей на осі вихрового відрізка, що позитивно впливає на стабільність методу (рис. 2, б).

Нижче наведено фрагмент коду по реалізації формул (1) – (3) відповідно до геометричної конфігурації, представленої на рис. 1, на мові програмування C# з використанням подвійної точності.

```
public static Vector3D Velocity(Vector3D r, Vector3D start, Vector3D dl, double gamma, double
rankine)
{
    1    double koef = 1.0 / (4 * Math.PI);
    2    Vector3D a = r - start;
    3    Vector3D b = a - dl;
    4    Vector3D cross = dl.Cross(a);
    5    double d = cross * cross;
    6    if (d == 0.0)
    7        return new Vector3D();
    8    double ro = rankine * rankine;
    9    double s = dl * (a / a.Abs() - b / b.Abs());
    10   double bl = dl * dl;
    11   if (d / bl > ro)
    12       return gamma * cross * koef / d * s;
    13   else
    14       return gamma * cross * koef / (bl * ro) * s;
}
```

Фрагмент коду 1. Розрахунок швидкості від вихрового відрізка за формулами (1) – (3) з урахуванням моделі ядра Ренкіна (мова C#).

Функція Velocity обчислює швидкість потоку в точці спостереження r ($\vec{r}$), що індукується вихровим відрізком з початком у точці start ($\vec{r}_0$) та вектором довжини dl ($\Delta \vec{l}$) з урахуванням згладжування за допомогою ядра Ренкіна, де gamma – циркуляція, що визначає інтенсивність вихрового відрізка, rankine – радіус ядра Ренкіна,

який використовується для згладжування швидкостей поблизу вихрового відрізка.

У рядку 6 перевіряється, чи знаходиться точка спостереження r на осі вихрового відрізка. У такому випадку векторний добуток $[\vec{\Delta l} \times \vec{a}]$ дорівнює нулю і повертається нульова швидкість (рядок 7). Це також запобігає діленню на нуль у рядку 9, оскільки за умови $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$ код далі не виконується.

У рядку 11 здійснюється перевірка, чи знаходиться точка спостереження r на відстані, більшій ніж радіус Ренкіна, і якщо це так, то розрахунок проводиться за формулою Біо – Савара (1) у рядку 12. Якщо ж точка потрапляє у внутрішню область, де швидкість згладжується ядром Ренкіна, тоді застосовується формула (2), представлена у рядку 14.

Слід зазначити, що для обчислень на графічному процесорі аналогічна реалізація має бути адаптована до мови GLSL. У цьому випадку необхідно використовувати типи даних float та уникати умовних операторів if, оскільки їх використання суттєво знижує продуктивність на GPU, що підтверджується як експериментальними результатами, так і документацією NVIDIA.

Нижче наведено фрагмент коду по реалізації формул (1) та (2), відповідно до геометричної конфігурації, представленої на рис. 1, на мові програмування GLSL з використанням чисел одинарної точності.

```
#define PI 3.14159265
const float koef = 1.0/4.0/PI;
const float eps = 1.0e-14;

vec3 Velocity(vec3 r, vec3 start, vec3 dl, float gamma, float rankine)
{
1   vec3 a = r - start;          // Вектор від початку відрізка до точки спостереження
2   vec3 b = a - dl;             // Вектор до кінця відрізка
3   vec3 cross_dl_a = cross(dl, a); // Векторний добуток  $[\vec{\Delta l} \times \vec{a}]$ 

4   float d = dot(cross_dl_a, cross_dl_a); //  $[\vec{\Delta l} \times \vec{a}]^2$ 

5   float ro = rankine * rankine; //  $R^2$ 
6   float cross_selector = step(d, eps); // Захист від ділення на нуль при малих d
7   float bl = dot(dl, dl); //  $\Delta l^2$ 
8   float selector = step(ro, d / bl); // Перемикач: чи використовувати ядро Ренкіна
9   float dist = selector * d + (1.0 - selector) * bl * ro; // Згладжена відстань
10  float la = length(a) + cross_selector; // Довжина вектора a (із захистом)
11  float lb = length(b) + cross_selector; // Довжина вектора b (із захистом)
12  float s = dot(dl, a)/la - dot(dl, b)/lb; // Скалярна частина формули Біо-Савара
13  return (1.0 - cross_selector) * gamma * koef * cross_dl_a * s / dist;
}
```

Фрагмент коду 2. Розрахунок швидкості від вихрового відрізка по формулі (1) – (3) з урахуванням моделі ядра Ренкіна (мова GLSL).

Для обчислення векторного добутку використовується вбудована функція **cross** (рядок 3), для скалярного добутку функція **dot** (рядок 4). У рядку 6 вводиться змінна **cross_selector** для заміни **if** у рядку 6 для коду на C#. Функція **step(d, eps)** поверне нуль, якщо **d** більше **eps** і одиницю, якщо менше. Таким чином, **cross_selector** дорівнює одиниці, якщо векторний добуток майже нуль і тоді рядок 13 поверне нуль. У рядках 10 та 11 **cross_selector** додається, щоб уникнути можливого ділення на нуль у рядку 12 (випадок коли точка спостереження лежить на кінці відрізка).

У рядку 8 обчислюється змінна, яка дозволяє уникнути використання оператора **if** у рядку 11 коду на C#. Змінна **selector** дорівнює одиниці, якщо відстань від осі відрізка більша за радіус Ренкіна. Тоді у рядку 9 перший доданок дорівнює **d**, а другий – нулю. Інакше перший доданок буде нуль, а другий **bl*ro**. Тоді рядок 13 буде повертати швидкість із врахуванням радіуса Ренкіна.

Розрахунок обтікання пластинки при малих кутах атаки та відривах пелени із трьох сторін. Було розглянуто обтікання пластини при малих кутах атаки α . Відрив відбувався з трьох сторін. Обчислення проводилися до моменту часу $t_{max} = 4$, крок по часу $\Delta t = 0.1$, просторова дискретизація $\Delta s = 0.1$ (розмір сторони приєднаної рамки). Пластина має розмір 2×4 (перше значення – це ребро вздовж осі X , друге – по напрямку вітру, що напрямлений протилежно осі Z). Відносна похибка при розрахунку координат пелени розраховувалась за формулою:

$$\varepsilon_r = \frac{|\vec{r}_{GPU} - \vec{r}_{CPU}|}{|\vec{r}_{CPU}|} \cdot 100\%$$

Відносна похибка при розподілі тиску по поверхні обчислювалась за формулою:

$$\varepsilon_p = \frac{|P_{GPU} - P_{CPU}|}{|P_{CPU}|} \cdot 100\%$$

Відносна похибка при обчисленні нормальної сили, що діє на пластинку – за формулою:

$$\varepsilon_F = \frac{|F_{GPU} - F_{CPU}|}{|F_{CPU}|} \cdot 100\%$$

У табл. 1 наведені результати розрахунку відносних похибок порівняно з центральним процесором. На рис. 3 представлена форма вихрової пелени за пластиною.

Таблиця 1 – Максимальні відносні похибки обчислень пластинки з трьома відривами від кута атаки

Кут атаки, градуси	Максимальна відносна похибка координат пелени: ε_r , %	Максимальна відносна похибка розподілу тиску: ε_p , %	Відносна похибка нормальної сили: ε_F , %
10	0.0003	0.00004	0.00004
20	0.008	0.017	0.0001
30	0.6	0.059	0.0041
40	4.1	1	0.12

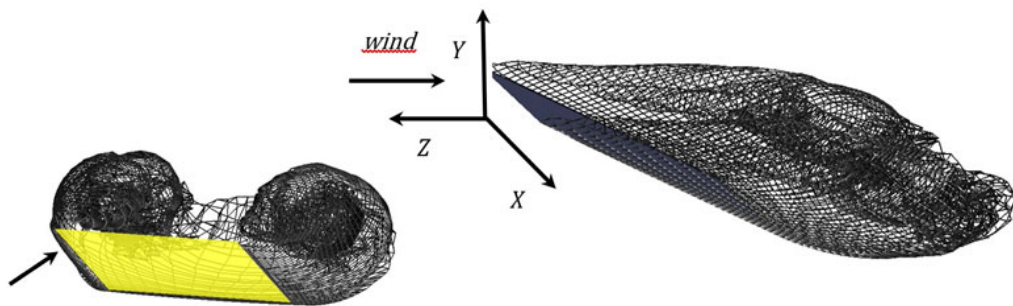


Рис. 3 – Форма пелени за пластинкою розміром 2×4 при куті атаки 40 градусів у момент часу $t_{max} = 4$ при розрахунку на графічному процесорі.

Із табл. 1 видно, що зі збільшенням кута атаки похибки обчислень усіх величин монотонно зростають. По координаті відносна похибка досягає 4.1 %, по розподілу тиску – 1 %, для нормальної сили – 0.12 %. Слід зазначити, що коли права частина не розраховувалась на GPU, а швидкості вузлів пелени при цьому рахувались на GPU, то відносна похибка по координатах пелени становила 2.8 %, по розподілу тиску – 0.73 %, для нормальної сили – 0.083 %.

Перевірявся також результат розрахунків до $t_{max} = 6$, коли кут атаки дорівнював 40° . У цьому випадку максимальна відносна похибка в положенні вузлів пелени досягала $\varepsilon_r = 19\%$, але максимальна похибка у розподілі тиску була досить незначною: $\varepsilon_p = 0.25\%$, а похибка у визначенні нормальної сили дорівнювала 0.0035 %.

Слід зазначити, що при розрахунку на такий великий проміжок часу застосування методу дискретних вихрових рамок може приводити до некоректних результатів, бо пелена руйнується і вихрові відрізки витягуються, що призводить до виникнення нефізичних швидкостей. У даному випадку безрозмірна швидкість перевищувала 3. Для уникнення такого ефекту у свій час було запропоновано і реалізовано *метод вставки проміжних точок* [5]. Але цей підхід призводив до значного збільшення кількості вихрових відрізків та часу розрахунку. В перспективі планується вирішити цю проблему із застосуванням графічних процесорів.

Розрахунок обтікання пластинки при великих кутах атаки та відривах пелени із чотирьох сторін. Розглядалася пластинка при великих кутах атаки (рис. 4). Відрив відбувався із чотирьох сторін. Обчислення проводилися до моменту часу $t_{max} = 1.6$, крок по часу дорівнював $\Delta t = 0.1$, крок просторової дискретизації – $\Delta s = 0.1$. Пластина мала розмір 8×2 . У цьому випадку має місце значне наближення вихрової пелени до поверхні пластинки і зі збільшенням часу відбувається перетин пеленою поверхні пластинки, якщо не вживати спеціальних заходів.

На рис. 4 представлена форма пелени за пластинкою при кутах атаки $75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$ для моменту часу $t_{max} = 1.6$ при розрахунку на графічному процесорі.

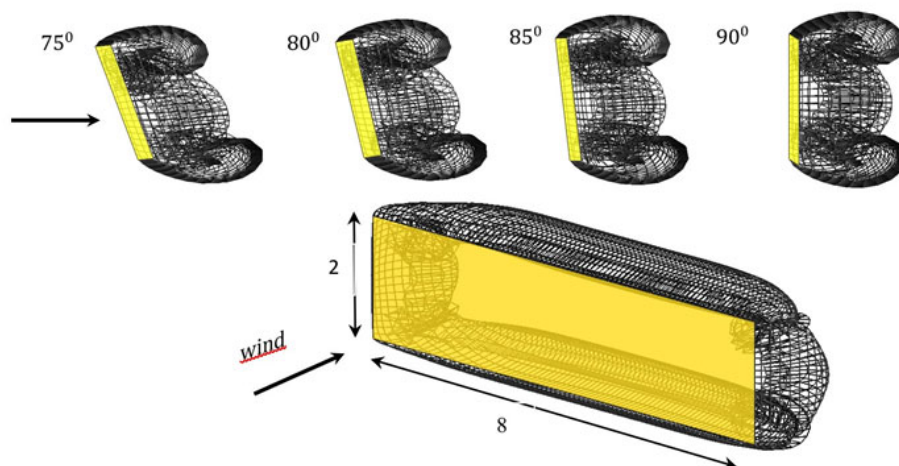


Рис. 4 – Форма пелени за пластинкою розміром 8×2 при кутах атаки $75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$ для моменту часу $t_{max} = 1.6$ при розрахунку на графічному процесорі.

Таблиця 2 – Залежність похибок обчислень для пластинки з чотирма відривами при різних кутах атаки

Кут атаки, градуси	Максимальна відносна похибка координат пелени: $\varepsilon_r, \%$	Максимальна відносна похибка розподілу тиску: $\varepsilon_p, \%$	Відносна похибка нормальної сили: $\varepsilon_F, \%$
75	0.051	0.068	0.00024
80	0.043	0.029	0.00028
85	0.054	0.023	0.00033
90	0.063	0.010	0.00036

У табл. 2 представлені похибки обчислень із використанням GPU порівняно з центральним процесором при різних кутах атаки. Із табл. 2 видно, що максимальне значення відносної похибки координат вузлів пелени досягає 0.063% при куті атаки 90° , максимальна відносна похибка тиску – 0.068% при $\alpha = 75^\circ$, максимальна відносна похибка нормальної сили – 0.00036% при $\alpha = 90^\circ$. Похибки настільки малі, що фактично їх можна не брати до уваги.

Із рис. 4 видно, що для всіх розглянутих кутів атаки пелени залишаються досить гладкими.

Швидкість розрахунків для пластинок різних розмірів. Порівняння швидкості обчислень здійснювалося із використанням графічного процесора nVIDIA GeForce RTX 2060 (архітектура Turing, 6 ГБ відеопам'яті, 30 потокових мультипроцесорів, 1920 ядер CUDA, тактова частота 1680 МГц) та центрального процесора AMD Ryzen 5 3600 (тактова частота 3925 МГц, 6 фізичних ядер, 12 логічних потоків). Об'єм оперативної пам'яті системи становив 32 ГБ.

Зазначимо, що обчислення правої частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та швидкостей у вузлах пелени також були розпаралелені на центральному процесорі за допомогою конструкції Parallel.For. Відповідно до даних, отриманих із диспетчера завдань (Resource Manager), при цьому використовувалися всі 12 логічних потоків процесора.

Таблиця 3 – Швидкість обчислень пластинок різних розмірів

Розмір пластинки	Час обчислення правої частини, ms (CPU/GPU)	Прискорення (для правої частини СЛАР)	Загальний час обчислень, ms (CPU/GPU)	Загальне прискорення	Загальне прискорення без правої частини на GPU
1×4	153/10	15	28179/403	70	7.6
2×4	337/19	18	44230/818	54	5.7
2×6	689/25	28	89512/1359	66	5.8
2×8	1105/33	33	151321/2013	75	5.7

Обчислення виконувалися до моменту часу $t_{max} = 4$ із кроком по часу $\Delta t = 0.1$ та просторовою дискретизацією $\Delta s = 0.1$. Кут атаки становив 40° , моделювалися три відриви. Час, необхідний для обчислення правої частини СЛАР, наведено для останнього кроку по часу.

У табл. 3 представлена швидкість обчислень для пластинок різних розмірів, на рис. 5 – форма вихрової пелени.

Із табл. 3 видно, що прискорення обчислень правої частини СЛАР на графічному процесорі порівняно із центральним процесором зростає від 15 до 33 разів зі збільшенням розміру пластинки (кількості приєднаних рамок). Це свідчить про те, що при невеликій кількості рамок накладні витрати на передачу та копіювання даних між CPU та GPU становлять значну частину загального часу. Загальне прискорення моделювання коливається від 54 до 75 разів і досягає максимуму для найбільшої пластинки, де кількість елементів є максимальною. Завищене значення прискорення для найменшої пластинки пов'язане із особливостями розпаралелювання на CPU при розрахунку швидкостей: коли вихрових відрізків мало, а витрати на створення нових потоків такі самі. Починаючи із другого набору даних, спостерігається монотонне зростання прискорення. Також видно, що використання GPU для розрахунку правої частини СЛАР прискорює обчислення більш ніж у 10 разів при великих розмірах пластинки.

Із рис. 5 видно, що навіть при максимальній похибці розрахунків форма пелени залишається досить гладкою.

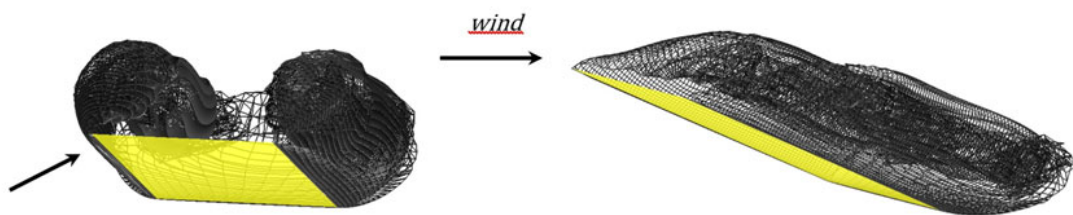


Рис. 5 – Форма пелени за пластинкою розміром 2×8 при куті атаки 40° у момент часу $t_{max} = 4$, отримана у результаті розрахунків на графічному процесорі.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають, що дані дослідження можуть бути використані для вдосконалення методу дискретних вихрових рамок з використанням методики вставки проміжних точок. Ця методика дозволяє уникати надмірного подовження вихрових відрізків та зменшує пульсації швидкості та тиску, але за рахунок ускладнення алгоритму та значного збільшення часу розрахунку. Перенесення розрахунків швидкості та правої частини на GPU дозволить значно прискорити швидкість обчислень та одержувати покращені результати за розумний час.

Висновки. На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

1. При малих кутах атаки похибка обчислень із використанням графічного процесора є незначною (менше 0.1 %) і монотонно зростає зі збільшенням часу розрахунку через накопичення похибок округлення. Найбільшу похибку можна спостерігати для координат вузлів пелени при великих кутах атаки. Водночас похибки при розрахунку тиску та нормальної сили залишаються меншими за 1 %. Це пояснюється тим, що пелена зноситься набігаючим потоком, і найбільш впливові рамки з великою циркуляцією розташовуються далеко від пластинки, що зменшує їхній вплив на тиск. Але навіть за умов найбільшої похибки форма пелени залишається візуально гладкою та фізично коректною.
2. При великих кутах атаки, але для відносно короткого часу моделювання (довший час спричиняє перетин пеленою пластинки), відносна похибка становить менше 0.1 %. Форма пелени залишається гладкою для всіх розглянутих кутів атаки.
3. Прискорення обчислень на графічному процесорі порівняно із центральним процесором досягає максимуму (75 разів) для найбільшої пластинки, де кількість елементів є максимальною. При максимальній похибці при розрахунку координат пелени її форма залишається гладкою.

Таким чином, перенесення обчислень правої частини системи лінійних алгебраїчних рівнянь на графічний процесор хоча й призводить до незначної втрати точності, проте забезпечує суттєве прискорення розрахунків, що робить запропонований підхід ефективним для практичного застосування при обчисленні задач тривимірного обтікання великої кількості об'єктів методом дискретних вихрових рамок.

Список літератури

1. Довгий С. О., Буланчук Г. Г., Буланчук О. М., Листопадава В. В. Точність розрахунків поля швидкостей від системи вихрових відрізків при використанні графічних процесорів // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – №1. – С. 105 – 109. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.15.

2. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. – К. : Наукова думка, 2002. – 343 с.
3. Довгий С. О., Буланчук Г. Г., Буланчук О. М. Дослідження динамічних характеристик при моделюванні обтікання пластини з використанням графічних процесорів // IX Міжнар. конф. «Комп'ютерна гідромеханіка» 1 – 2 жовтня. – Київ : Інститут гідромеханіки НАН України, 2024. – С. 37 – 38.
4. Abedi H. Development of Vortex Filament Method for Wind Power Aerodynamics. PhD thesis, Div. of Fluid Dynamics. // Dept. of Applied Mechanics. – Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2016. – 58 p.
5. Буланчук Г. Г., Буланчук О. М., Довгий С. А. Метод дискретных вихревых рамок со вставкой промежуточных точек на вихревой пелене // Вісник Харківського національного університету. Серія : «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – Вип. 12. – № 863. – С. 36 – 46.

References (transliterated)

1. Dovgiy S. O., Bulanchuk G. G., Bulanchuk O. M., Lystopadova V. V. Tochnist' rozrakhunkiv polya shvydkostey vid systemy vykhrobykh vidrizkiv pry vtkorystanni grafichnykh protsesoriv [Accuracy of calculations of the velocity field from the system of vortex segments using graphic processors]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2023, no. 1, pp. 105–109. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.15.
2. Dovgiy S. A., Lyfanov I. K. *Metody resheniya integral'nykh uravneniy* [Methods of solving integral equations]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 343 p.
3. Dovgiy S. O., Bulanchuk G. G., Bulanchuk O. M. Doslidzhennya dynamichnykh kharakterystyk pry modelyuvanni obtikannya plastyny z vykorystannyam grafichnykh protsesoriv [Study of Dynamic Characteristics in Plate Flow Simulation Using GPUs]. *IX Mignar. Konf. "Komp'yuterna gidromekhanika" 1 – 2 zhovtnya* [IX Intern. Conf. "Computer Hydromechanics", October 1 – 2]. Kyiv, Instytut gidromekhaniky NAN Ukrayiny Publ., 2024. pp. 37–38.
4. Abedi H. Development of Vortex Filament Method for Wind Power Aerodynamics. PhD thesis, Div. of Fluid Dynamics. *Dept. of Applied Mechanics*. Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2016. 58 p.
5. Bulanchuk G. G., Bulanchuk O. M., Dovgiy S. O. Metod diskretnykh vikhrevykh ramok so vstavkoy promezhutochnykh tochek na vikhrevoi pe-lene [Discrete Vortex Frame Method with Intermediate Point Insertion on the Vortex Sheet]. *Visnyk Kharkivs'kogo universytetu. Seriya : Matematychnе modelyuvannya. Informatsiyini tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series : "Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems"]. 2009, Vol. 12, no. 863, pp. 36–46.

Надійшла (received) 15.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Довгий Станіслав Олексійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України, президент Малої академії наук України, м. Київ; тел.: (044) 489-55-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Dovgyi Stanislav Oleksiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, president of the Junior Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (044) 489-55-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Буланчук Галина Григорівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Дніпро; тел.: (098) 201-83-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9871-2748>; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

Bulanchuk Galyna Hryhorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Pryazovskyi State Technical University, Dnipro; tel.: (098) 201-83-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9871-2748>; e-mail: ggbulan7@gmail.com.

Буланчук Олег Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, методист лабораторії математичних наук, Науково-методичний центр НЦ «Мала академія наук України», м. Київ; тел.: (096) 347-56-60; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2801-2244>; e-mail: obulan65@gmail.com.

Bulanchuk Oleh Mykolaiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, methodologist at the Laboratory of Mathematical Sciences, Scientific and Metodological Center of the National Center of the Small Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (096) 347-56-60; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2801-2244>; e-mail: obulan65@gmail.com.

*V. R. KULIAN, M. V. KOROBОВА, O. O. YUNKOVA, G. O. DOLENKO***EFFECTIVE DIVERSIFICATION AND STOCK PORTFOLIO DYNAMICS UNDER CONSTRAINTS**

This scientific study considers the mathematical problem of optimal diversification of a portfolio of shares in the presence of market constraints. Mathematical formulation of the constructing trajectory problem of one share the market value is given in the class of ordinary first-order differential equations. The procedure for constructing a general solution of such an equation is given. Of particular practical importance is the mathematical problem of constructing an optimal portfolio structure in the presence of quantitative and qualitative market constraints. Such constraints arise at every moment of portfolio diversification and their consideration significantly complicates the problem. The procedure for building a dynamic model of the formation of the market value of one share is based on the application of the market model of W. Sharpe and the fundamental theory by H. Markowitz. The principles of H. Markowitz theory make it possible to determine the optimal values of the portfolio's expected profitability and riskiness when applying the procedure for building an optimal portfolio of risky securities. The application of optimal management theory methods in the optimization of the stock portfolio involves an iterative procedure for determining the optimal structure. The work also considers an important applied problem of applying the theory of H. Markowitz to solve the problem of optimal diversification of a portfolio of risky investments in the presence of restrictions that are formed by the stock market at each moment of time. The presence of market restrictions significantly affects the decision-making procedure regarding optimal portfolio diversification. This scientific study presents an algorithm for optimal diversification of a portfolio of risky securities in the presence of market restrictions.

Key words: portfolio optimization, fundamental analysis, portfolio diversification, effective set.

*B. P. КУЛЯН, М. В. КОРОБОВА, О. О. ЮНЬКОВА, Г. О. ДОЛЕНКО***ЕФЕКТИВНА ДИВЕРСИФІКАЦІЯ ТА ДИНАМІКА ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ ЗА УМОВ ОБМЕЖЕНЬ**

У даному науковому дослідженні розглядається математична задача оптимальної диверсифікації портфеля акцій за наявності ринкових обмежень. Така прикладна задача є актуальною проблемою інвестування у ризиковані активи і до її розв'язання прикута увага провідних математиків та економістів у всьому світі. Серед найбільш відомих можна назвати Г. Марковиця, Д. Тобіна, К. Іто, Ф. Блек, М. Шоулз, Р. Мертон. Математичну постановку задачі побудови траєкторії руху однієї акції за ринковою вартістю наведено в класі звичайних диференціальних рівнянь і побудовано, спираючись на ринкову модель В. Шарпа. Особливе практичне значення має математична задача побудови оптимальної структури портфеля за наявності кількісних та якісних ринкових обмежень. Такі обмеження виникають при диверсифікації портфеля і необхідність їх врахування суттєво ускладнює задачу. Процедура побудови динамічної моделі формування ринкової вартості однієї акції базується на застосуванні ринкової моделі В. Шарпа та фундаментальної теорії Г. Марковиця. У роботі також розглядається важлива прикладна проблема застосування теорії Г. Марковиця для розв'язання задачі оптимальної диверсифікації портфеля ризикованих інвестицій за наявності обмежень, що формуються фондовим ринком. Такий підхід враховує побудову та застосування допустимої та ефективної множин портфель цінних паперів. Ці множини, згідно Г. Марковицю, формуються на основі наявних на ринку активів. Наявність ринкових обмежень суттєво впливає на процедуру прийняття рішень щодо оптимальної диверсифікації портфеля. У цьому науковому дослідженні наведено алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля ризикованих цінних паперів за наявності обмежень.

Ключові слова: оптимізація, фундаментальний аналіз, диверсифікація портфеля, ефективна множина.

Introduction. The problem of mathematical description of the dynamics of market value formation of one share and a portfolio of shares has long been relevant and attracts the attention of scientists and practitioners. According to H. Markowitz, mathematically, such a problem is formulated as a two-criterion problem of nonlinear optimization. The criteria are mutually contradictory and it does not have a single solution. Despite this, its practical importance is extremely great. Taking into account the complexity of mathematical statements and their practical implementation, researchers have identified important principled approaches to decision-making on optimizing the structure of the investment portfolio. Among such approaches, the most famous can be distinguished:

- H. Markowitz approach, using a valid and effective set, investor indifference curves. The theory of H. Markowitz is classic and its principles are the basis of many decision-making strategies in the stock market.

- Splitting two-criterion investment portfolio optimization problem into two one-criterion. The mathematical two-criterion problem of optimizing a portfolio of risky securities involves maximizing the expected return and minimizing the risk of the investment portfolio.

- Methods of technical analysis. The most common technology for making practical decisions involves the use of known statistical information about the dynamics of the market value of one share.

- Methods of fundamental analysis. The theory of fundamental analysis is actively developing and includes new mathematical models and methods for describing the dynamics and procedures for making decisions about the optimal structure of an investment portfolio. In the researches of K. Ito, F. Black, M. Scholes, and R. Merton, new fundamental results are formulated. The results are actively developed and implemented in the practice of decision-making on the stock market.

In this study an algorithm for identifying of mathematical model parameters of market value dynamics of one share and a portfolio of shares is proposed. The principle of operation of the algorithm is based on the application of an iterative procedure, at each step of which model parameters are calculated that improve the value of the selected quality criterion. It is worth noting that the choice of model parameter optimization procedure may depend on the selected quality criterion.

Development of Portfolio Investment Theory. The portfolio model was originally proposed in [1, 2]. Based on

the relationship between income and risk, H. Markowitz constructs the mean-variance model. He put forward the risk measurement and the modern principles of portfolio investment. This has laid a theoretical foundation for the researches of securities investment portfolio. Sharpe's capital asset pricing model have been known and are used by many investors when solving the problems of investing in shares [3, 4].

Among other important approaches to solving applied portfolio theory problems, the following can be noted:

- qualitative and quantitative analysis of investment management models [5, 6];
- evolutionary and memetic computing for project portfolio selection [7, 8];
- an exploration of meta-heuristic approaches for the project portfolio selection [9];
- a simheuristic methods for project portfolio selection under uncertainty [10, 11];

Construction of a mathematical model of a stock portfolio. Let's consider a mathematical model of the market-value of the investment portfolio and build appropriate analytical trajectory. At the time interval $t \in [t_0, T]$ equation describing the profitability of the portfolio shares r_p , has the form

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t), \quad (1)$$

where x_i – proportion of shares and type of portfolio; r_i – expected return on equity. Having differentiated both parts of (1), we get

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i \left(r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt} \right). \quad (2)$$

Given that there is a property for $i \neq j$ and $\sum_j b_j = 1$, $\sum_i a_i b_i = \sum_i a_i + \sum_i \sum_j a_i b_j$.

In this way occurring ratio

$$\begin{aligned} \sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{x_j(t)}, \\ \sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \end{aligned}$$

The dynamic model of the market value of the stock portfolio will have the following form

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right). \quad (3)$$

This is a first order linear differential equation. Applying the method of variation of arbitrary constants and getting its general solution

$$r_p(t) = -e^{2t} \int e^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right) dt, \quad (4)$$

where

$$f_j(t) = (\alpha_1 S M_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} r_j(t).$$

In latter ratio the assumptions made phenomenon that describes the dynamics of the formation of the market value of the portfolio of risky securities. A more detailed analysis indicates two important properties that characterize the market value of the portfolio: dynamics depends on the dynamics of both the expected profitability of shares and changes in the structure of the portfolio. In relation (3) f_j is the right-hand side of the differential equation that describes the dynamics of the formation of the market value of the shares [5]. Its structure and content corresponds to a market model of W. Sharpe [3].

We were able to construct a sequence paths at selected time intervals, allowing you to create the initial structure of the investment portfolio. However, this approach can not effectively influence the structure of investment and not fully using the mathematical description of the properties listed in mathematical models (4).

Among other, it contains a factor

$$\frac{dx_j(t)}{dt} * \frac{1}{x_j(t)},$$

that describes the possible changes in the structure of investment. To simplify further calculations mathematical model (4) is presented in more general terms

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i), \quad i = \overline{1, l}. \quad (5)$$

Optimal portfolio diversification. In this study, attention is focused on the possibility of applying the theory of ef-

effective and admissible sets by H. Markowitz for the diversification of the portfolio of risky investments. The real market involves a dynamic change in the market values of shares, which prompts the investor to actively diversify the portfolio. According to the algorithm for constructing the admissible set, the portfolio that is more effective in terms of expected profitability and riskiness for the investor will be located higher and to the left on the "expected profitability – riskiness" plane. According to H. Markowitz, portfolios that are elements of the effective set will be optimal. Such portfolios are Pareto-optimal. The classic problem of portfolio optimization is formulated without taking into account restrictions on changing the portfolio structure. Such a feature significantly affects the possibilities of real investment. The algorithms proposed in this study make it possible to take into account such limitations and form a portfolio that is closest to the optimal one that is potentially possible at the moment on the market. The developed method can be effectively applied to computer programs that perform automated selection of the optimal portfolio structure.

We consider the problem of optimal portfolio diversification under constraints. Let's move on to the second problem in the general formulation of H. Markowitz about optimizing the risk of the portfolio of shares that is optimal in terms of expected profitability. For this, we will use sets of admissible and efficient portfolios corresponding to the selected set of shares. The risk optimization procedure for the optimal expected return portfolio consists in choosing at each step admissible portfolios that lie on the *EF* line. This line connects point *E*, which corresponds to the optimal market value of the portfolio, and point *F*, which belongs to the efficient set. This line is parallel to the portfolio's riskiness axis. The peculiarity of this selection of the optimal portfolio is that on this straight line, according to the definition, each of the portfolios corresponds to the same expected return, but the riskiness decreases in the direction of the axis. This property of the admissible set of investment portfolios allows, on the one hand take into account the restrictions

$$x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}$$

and on the other hand – to determine the portfolio of "optimal" expected return with less risk.

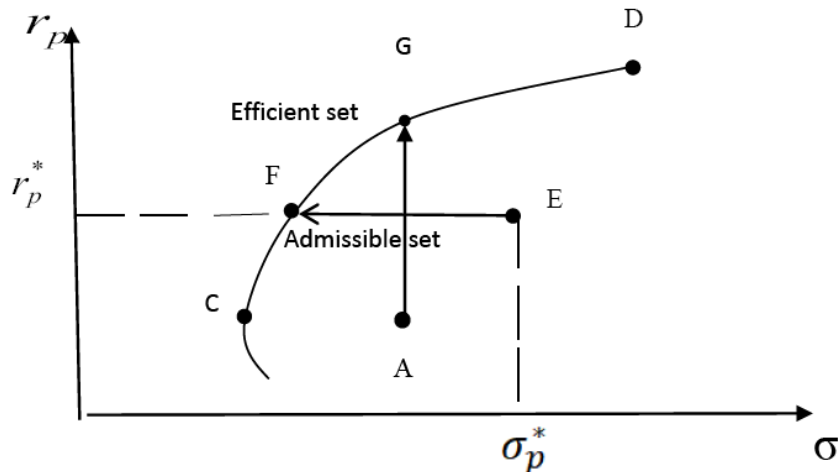


Fig. 1 – Admissible and efficient sets of portfolios of risky securities.

If the specified portfolio is located at point *E*, that is, it is one for which it is not possible to reduce the riskiness according to the rule proposed above, then the "optimal portfolio" is determined by moving it from *E*, to *F*, which is an element of the effective set of portfolios. In effect, this means identifying a portfolio of stocks with higher expected returns. At the same time, this procedure allows you to constructively take into account existing limitations when diversifying the portfolio. Another mathematical formulation of the problem of optimization of the expected profitability $r_p(T)$ of the investment portfolio at a certain time *T* level of its risk τ is as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T(T)x(T) \rightarrow \max_x \\ x^T(T)Vx(T) = \tau \\ I^T x(T) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{array} \right\}.$$

The procedure for optimizing the portfolio's expected return r_p for a certain level of its risk consists in choosing at each step admissible portfolios that lie on the line *AG* connecting point *A*, which corresponds to the optimal portfolio calculated by expected return, and point *G*, which belongs to the efficient set. This line is parallel to the axis of market value r_p . The peculiarity of this selection of the optimal portfolio is that on this straight line, according to the definition,

each of the portfolios corresponds to the same riskiness, but the market value r_p increases. This property of the admissible set of investment portfolios, as in the previous case, allows, on the one hand, to take into account restrictions $x_i(t) \in X(t)$, $i = \overline{1, n}$ and on the other hand, to determine the portfolio with the "optimal" risk and higher expected profitability.

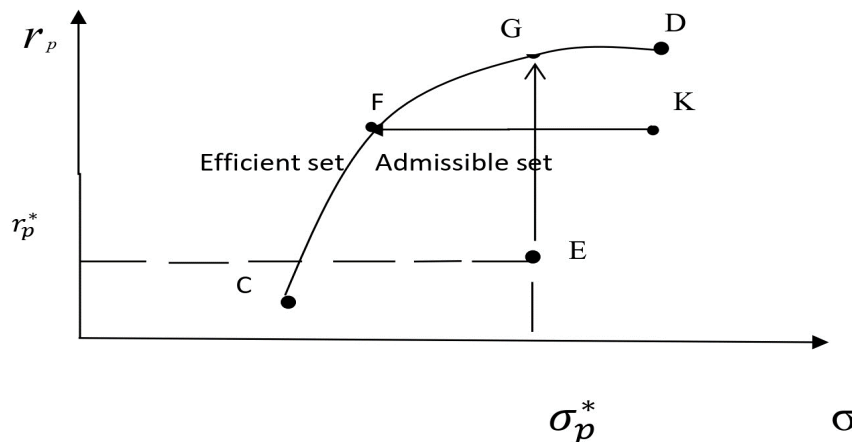


Fig. 2 – Optimizing the market value of the stock portfolio.

If the defined portfolio is located at point K , that is, one for which there is no possibility to increase the expected return, according to the rule proposed above, then the "optimal portfolio" is determined by moving it from K to F , which is an element of the effective set of portfolios. In fact, this means reducing the riskiness of the stock portfolio. The effective set or the set of effective portfolios in figures 1, 2 is on the arc. It is a Pareto set [5] for a set of shares existing on the market.

Prospects for further research. The effectiveness of the application of the above methods may be associated with the construction of an adequate mathematical model of the dynamics of the market value of the portfolio. The paper presents one of the possible procedures for constructing such a model. Further research should focus on the development of approaches to clarifying the structure and parameters of the mathematical model (4).

Prospects for research in this applied field can also be linked to the combination of technical and fundamental analysis methods together with artificial intelligence approaches. Such attempts have been made in the works [7, 8], as well as in the studies of other authors. This study is one of the attempts to effectively combine these approaches to decision-making when investing in securities.

Conclusion. In this study new mathematical formulations of the optimization problems of the stock portfolio structure are given and methods of their solution are developed. Mathematical problems formulated on the basis of models of the dynamics of the market value of one share and a portfolio of shares make it possible to solve the problem of optimal diversification of the investment portfolio, taking into account quantitative and qualitative market restrictions on the portfolio structure.

The formulation of the problem and built algorithm greatly expand the possibilities of investing, as in every moment of diversification it is possible to construct a set of alternatives that are equivalent in terms of selected quality criteria. The investor, as in the classical approach, Mr. Markowitz has the ability to take into account when deciding additional factors that arise in the course of practical investment and are associated with the peculiarities of the system dynamics modeling. Mathematical portfolio diversification procedure makes it possible for the above-mentioned models of the dynamics of the market value of a one share and stock portfolio to solve the problem of portfolio diversification.

Bibliography

1. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – vol. 7. – no. 1. – pp. 77 – 91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. Markowitz H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. – John Wiley & Sons, New York, 1959.
3. Sharpe W. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. – 1964. – vol. 19. – issue 3. – pp. 425 – 442. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.
4. Sharpe W., Alexander G., Bailey J. Investments. – Prentice Hall, New Jersey, 1998. – 962 p.
5. Kulian V., Yunkova O., Korobova M. Mathematical problem of banking assets diversification // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2021. – no.1. – pp. 85 – 88. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/1.11.
6. Kulian V., Yunkova O., Korobova M. Solutions sensitivity when modeling of investment dynamics // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2022. – no. 4. – pp. 51 – 54. DOI: 10.17721/1812-5409.2022/4.6.
7. Kolisch R., Flidner T. Evolutionary and Memetic Computing for Project Portfolio Selection and Scheduling. – Springer, Berlin, 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-88315-7.
8. Mohagheghi V., Mousavi S., Mojtahedi M. Project portfolio selection problems: Two decades review from 1999 to 2019 // Journal of Intelligent

- and Fuzzy Systems. – 2020. – vol. 38(4): 1 – 15. DOI: 10.3233/JIFS-182847.
9. Harrison K. R., Elsayed S., Weir T., Garanovich I. L., Taylor R., Sarker R. An exploration of meta-heuristic approaches for the project portfolio selection and scheduling problem in a defence context // in: Proceedings of the 2020 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). – IEEE, Canberra, 2020. – pp. 1395 – 1402. DOI: 10.1109/ssci47803.2020.9308608.
 10. Panadero J., Doering J., Kizys R., Juan A. A., Fito A. A variable neighborhood search simheuristic for project portfolio selection under uncertainty // Journal of Heuristics. – 2020. – vol. 26. – pp. 1 – 23. DOI: 10.1007/s10732-018-9367-z.
 11. Kar M. B., Kar S., Guo S., Li X., Majumder S. A new bi-objective fuzzy portfolio selection model and its solution through evolutionary algorithms, // Soft Computing. – 2019. – vol. 23. – pp. 4367 – 4381. DOI: 10.1007/s00500-018-3094-0.

References (transliterated)

1. Markowitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. Markowitz H. *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons, New York, 1959.
3. Sharpe W. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*. 1964, vol. 19, issue 3, pp. 425–442. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.
4. Sharpe W., Alexander G., Bailey J. *Investments*. – Prentice Hall, New Jersey, 1998. – 962 p.
5. Kulian V., Yunkova O., Korobova M. Mathematical problem of banking assets diversification. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. 2021, no. 1, pp. 85–88. DOI: 10.17721/1812-5409.2021/1.11.
6. Kulian V., Yunkova O., Korobova M. Solutions sensitivity when modeling of investment dynamics. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. 2022, no. 4, pp. 51–54. DOI: 10.17721/1812-5409.2022/4.6.
7. Kolisch R., Fliedner T. *Evolutionary and Memetic Computing for Project Portfolio Selection and Scheduling*. Springer, Berlin, 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-88315-7.
8. Mohagheghi V., Mousavi S., Mojtahedi M. Project portfolio selection problems. Two decades review from 1999 to 2019. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. 2020, vol. 38(4): 1 – 15. DOI: 10.3233/JIFS-182847.
9. Harrison K. R., Elsayed S., Weir T., Garanovich I. L., Taylor R., Sarker R. An exploration of meta-heuristic approaches for the project portfolio selection and scheduling problem in a defence context. in: *Proceedings of the 2020 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. IEEE, Canberra, 2020. pp. 1395–1402. DOI: 10.1109/ssci47803.2020.9308608.
10. Panadero J., Doering J., Kizys R., Juan A. A., Fito A. A variable neighborhood search simheuristic for project portfolio selection under uncertainty. *Journal of Heuristics*. 2020, vol. 26, pp. 1–23. DOI: 10.1007/s10732-018-9367-z.
11. Kar M. B., Kar S., Guo S., Li X., Majumder S. A new bi-objective fuzzy portfolio selection model and its solution through evolutionary algorithms. *Soft Computing*. 2019, vol. 23, pp. 4367–4381. DOI: 10.1007/s00500-018-3094-0.

Надійшла (received) 23.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Кулян Віктор Романович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 352-27-22; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6320-4719>; e-mail: vkulian@knu.ua.

Kulian Victor Romanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Complex Systems Modeling Department, Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv; tel.: (050) 352-27-22; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6320-4719>; e-mail: vkulian@knu.ua.

Коробова Марина Віталіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 969-64-04; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4286-7828>; e-mail: maryna.korobova@knu.ua.

Korobova Maryna Vitaliivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Complex Systems Modeling Department, Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv; tel.: (050) 969-64-04; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4286-7828>; e-mail: maryna.korobova@knu.ua.

Юнькова Олена Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного моделювання та статистики, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ; тел.: (095) 704-17-04; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8326-5383>; e-mail: yunkova.olena@kneu.edu.ua.

Yunkova Olena Oleksandrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Mathematical Modeling and Statistics Department, National Economic University named after Vadym Getman, Kyiv; tel.: (095) 704-17-04; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8326-5383>; e-mail: yunkova.olena@kneu.edu.ua.

Доленко Галина Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 357-15-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5708-4880>; e-mail: dolenkogalya@gmail.com.

Dolenko Galyna Oleksandrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of System Analysis and Decision Making Theory Department, Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv; tel.: (050) 357-15-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5708-4880>; e-mail: dolenkogalya@gmail.com.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

КОМП'ЮТЕРНЕ КОНФІГУРУВАННЯ МІКРО- ТА НАНОЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ

У статті запроваджені вдосконалені методи математичного моделювання з метою автоматизованого відтворення дискретних функцій мажоритарної та булевої логіки з використанням мультиплексорних систем. В цій роботі під структурним конфігуруванням розуміється не розробка спеціалізованого програмного забезпечення, що реалізується із застосуванням мікропроцесорів, а, навпаки, – перетворення технологічних операцій для налаштувань та змін конфігурацій великих мікро- та наносхем таким чином, щоб синтезувати функціонально повну логічну базу на структурно-логічній основі. Новітня технологія нанорозмірних коміркового автоматів (КА або QCA-quantum-dots cellular automata) є найперспективнішим напрямком одноелектроніки, який також підтверджує закон Мура. На відміну від традиційних мікротехнологій, наприклад, на базі комплементарних МОН-транзисторів, в КА бінарна інформація кодується поляризаціями двох електронів, а не через логічні рівні напруг. Отримані в статті результати комп'ютерного програмування нанопристроїв підтвердили їх переваги перед мікроелектронними еквівалентами щодо підвищеної швидкодії та мінімального споживання енергії. Використана сучасна САПР QCA Designer для аналізу і синтезу булевих, мажоритарних та гібридних логічних функцій із використанням мікро- та наносхем в умовах космічного застосування при криогенних температурах для прогнозування їх безвідмовного функціонування. Отримані результати та їх аналіз підтверджують можливість вдосконалення методології конфігурування сучасних мікро- та одноелектронних нанопристроїв.

Ключові слова: математичне моделювання, конфігуровані логічні блоки, мікро- та наномультиплексори, квантові автомати, криогенні температури.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH

COMPUTER CONFIGURATION OF MICRO- AND NANOELECTRONIC DEVICES

The article introduces advanced mathematical modeling methods for the automated reproduction of discrete functions of majority and Boolean logic using multiplexer systems. In this work, structural configuration is not understood as the development of specialized software implemented using microprocessors, but, on the contrary, as the transformation of technological operations for setting up and changing the configurations of large micro- and nanocircuits in such a way as to synthesize a functionally complete logical base on a structural-logical basis. The latest technology of nanoscale cellular automata (QCA or QCA-quantum-dots cellular automata) is the most promising direction of single-electron electronics, which also confirms Moore's law. Unlike traditional microtechnologies, for example, based on complementary MOS transistors, in QCA binary information is encoded by polarizations of two electrons, and not through logical voltage levels. The results of computer programming of nanodevices obtained in the article confirmed their advantages over microelectronic equivalents in terms of increased speed and minimal energy consumption. The modern CAD QCA Designer was used for the analysis and synthesis of Boolean, majority and hybrid logic functions using micro- and nanocircuits in space applications at cryogenic temperatures to predict their trouble-free operation. The results obtained and their analysis confirm the possibility of improving the methodology for configuring modern micro- and single-electron nanodevices.

Key words: mathematical modeling, configurable logic blocks, micro- and nanomultiplexers, quantum automata, cryogenic temperatures.

Вступ. Комп'ютерне конфігурування мікро- та нанопристроїв із програмованою логікою не передбачає можливості створення алгоритмів для обробки багатоаргументних вхідних функцій через зміну робочих програм, як це зазвичай реалізується в мікропроцесорах. Це стосується внесення технологічних змін до внутрішньої структури наелектронних схем для забезпечення синтезу потрібних функцій на структурно-логічному рівні.

Аналіз останніх досліджень. Розвиток досліджень у сфері конфігурованих мікро- та нанопристроїв набирає обертів, а значна увага дослідників спрямована на *автоматизоване ієрархічне математичне моделювання таких систем*. Перші значущі досягнення в цій галузі стали можливими завдяки створенню *мультиструктурних пристроїв*, заснованих на *універсальних функціонально завершених модулях*, які є перспективною тенденцією у розвитку сучасної *наноелектроніки* [1, 2]. У цих роботах продемонстровано можливості комп'ютерного проектування мікро- та наносхем, здатних реалізовувати 16 двоаргументних і 256 триаргументних функцій із використанням мікро- та одноелектронних наномультиплексорів. Однак, існують серйозні труднощі в оптимізації цих схем, що спричиняє їхню значну складність і обмежує універсальність застосування. Важливим аспектом досліджень стало вдосконалення методів програмування мікро- та наносхем для реалізації різноманітних функцій логічної алгебри [3, 4]. Учені запропонували ефективні алгоритми автоматизованого програмування мікро-схем із високим рівнем інтеграції, які стали основою для подальшого розвитку нанопристроїв із конфігурованими структурами [5]. Незважаючи на значний прогрес у цій сфері, питання досягнення ефективного автоматизованого проектування все ще залишається актуальним, і проблема спрощення алгоритмів та їх точного відтворення є предметом активних дискусій.

Особливої уваги потребує вплив температурних умов на продуктивність одноелектронних наносхем, зокрема робота в космічних умовах за криогенних температур. Дослідження вказують, що такі умови можуть істотно позначитися на роботі нанопристроїв, що стимулює пошук нових підходів для підвищення їхньої якості та надійності функціонування [6]. Залишається актуальною проблема синхронізації цих схем, що створює додаткові виклики для їх впровадження. Таким чином, питання покращення якості мікро- та одноелектронних наносхем із конфігурованою логікою залишаються важливими і вимагають подальших досліджень та вдосконалення.

Проектування комбінаційних мікросхем на мультиплексорах. Для використання мультиплексорів при проектуванні комбінаційних мікро- та нанопристроїв сигнали деяких аргументів функції, що відтворюються, по-

даються на адресні входи, а інформаційні входи виконують роль програмованих наноструктур.

На рис. 1, а показане умовне позначення мультиплексора ($8 \rightarrow 1$).

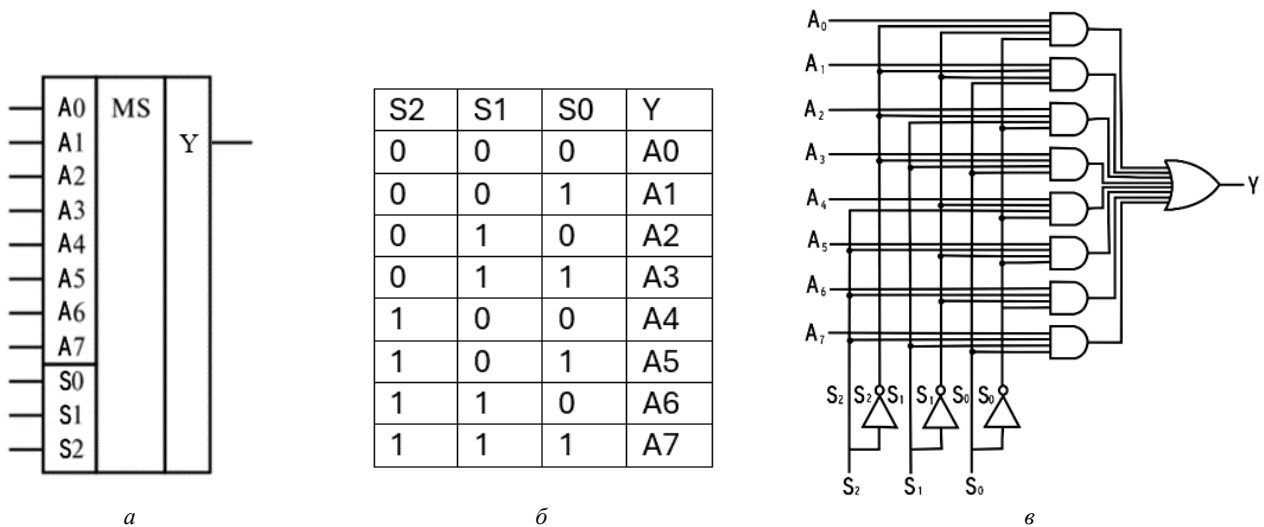


Рис. 1 – а – Мультиплексор ($8 \rightarrow 1$); б – таблиця істинності мультиплексора; в – еквівалентна мікросхема мультиплексора.

Після математичних перетворень з таблиці істинності функція алгебри логіки мультиплексора ($8 \rightarrow 1$) набуває вигляду:

$$Y = \bar{S}_0 \bar{S}_1 \bar{S}_2 A_0 \vee \bar{S}_0 \bar{S}_1 S_2 A_1 \vee \bar{S}_0 S_1 \bar{S}_2 A_2 \vee \bar{S}_0 S_1 S_2 A_3 \vee S_0 \bar{S}_1 \bar{S}_2 A_4 \vee S_0 \bar{S}_1 S_2 A_5 \vee S_0 S_1 \bar{S}_2 A_6 \vee S_0 S_1 S_2 A_7. \quad (1)$$

Для реалізації чотириаргументних функцій необхідно здійснити перетворення, щоб отримати диз'юнктивно нормальну форму (ДНФ). За допомогою закону подвійності де Моргана (інверсії) та карти Карно, наприклад, для функції:

$$f = \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_3 x_2 x_1 x_0 \quad (2)$$

отримаємо наступну карту:

$X_3 X_2 \setminus X_1 X_0$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	0	1	1	1

Отже, за допомогою карти Карно маємо мінімізовану ДНФ:

$$f = x_1 x_0 \vee x_2 x_1 x_0 \vee x_0 x_2 x_1 \vee x_3 x_2 x_1. \quad (3)$$

Отримані результати та їх обговорення. Для удосконаленої вище математичної моделі отримана остаточна таблиця програмування восьмивходового програмованого мікронаномультиплексора (ПМНМ) ($8 \rightarrow 1$) для реалізації чотириаргументної функції (табл. 1). Відповідно до рис. 1, в, ПМНМ був побудований на основі системи автоматизованого проєктування (САПР) *Quartus* [5] (рис. 2) з логічних елементів (рис. 2, а) та з окремого елемента в одному корпусі у вигляді макросхеми (рис. 2, б). На рис. 3 показана схема комп'ютерної реалізації функції (2) на ПМНМ (рис. 2, а), яка конфігурується в диз'юнктивній канонічній формі кон'юнкцій конститuent одиниці за таблицею істинності 1:

$$f = \sum(1, 2, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14).$$

Розкладання попередньо отриманої функції по старшій змінній має вигляд:

$$f = \bar{x}_3 * [(1, 2, 7)] \vee x_3 * [(1, 2, 3, 4, 5, 6)]. \quad (4)$$

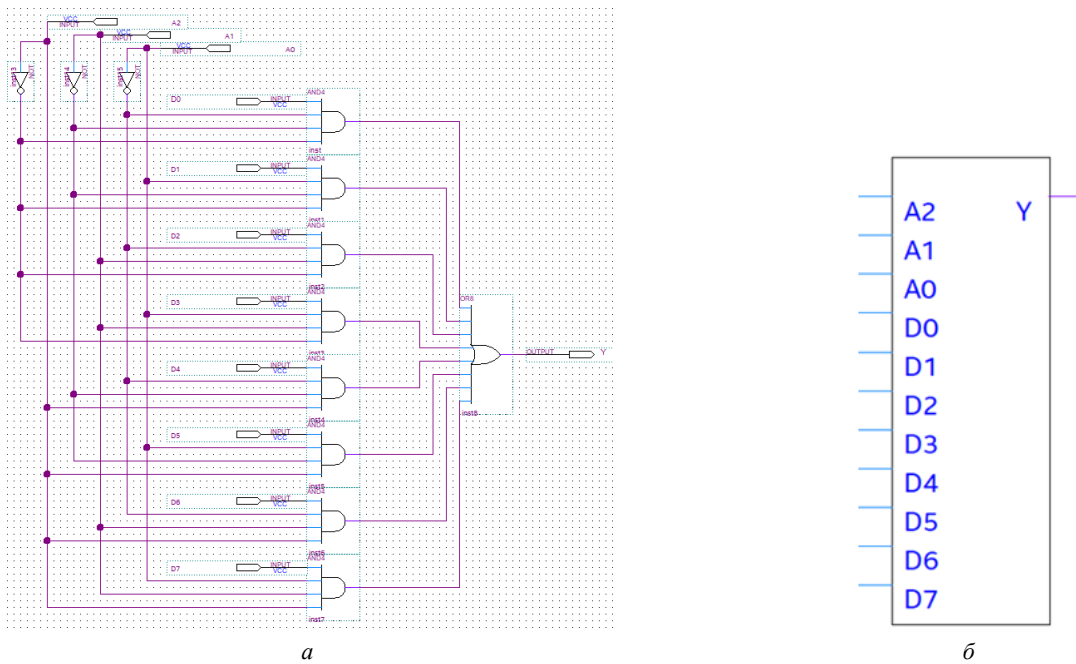


Рис. 2 – Модель восьмивходового ПМНМ: а – на мікроелементах; б – в макрокорпусі.

Звідси отримують алгоритм моделювання ПМНМ:

На вхід 7 подати $\overline{x_1}$;

На входи 3, 4, 5, 6 подати x_1 ;

На входи 1, 2 подати 1;

На вхід 0 подати 0.

На рис. 3, б наведені результати моделювання функції (4).

Квантові коміркові автомати (КА) є парадигмою обчислень, згідно з якою інформація представляється певною конфігурацією поляризацій електронів у клітині КА, яка формується з однієї або двох окремих молекул [7]. Пристрої на основі цієї технології складаються з нанорозмірних діелектричних клітин, що мають чотири квантові напівпровідникові точки, розташовані на кутах, і двох рухомих електронів.

Таблиця 1 – Підсумкова таблиця істинності для функції (4)

X_1	X_2	X_3	X_4	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

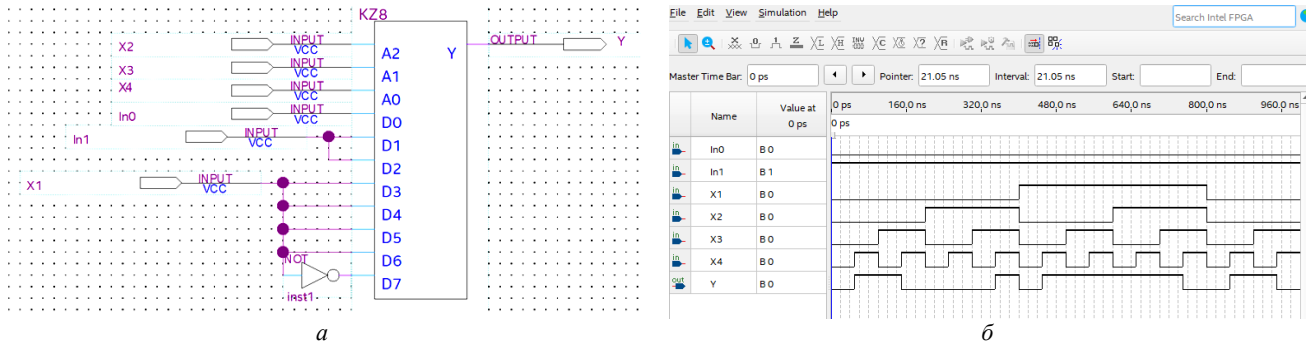


Рис. 3 – а – комп'ютерна конфігурація ПМНМ та б – часові діаграми запрограмованої функції.

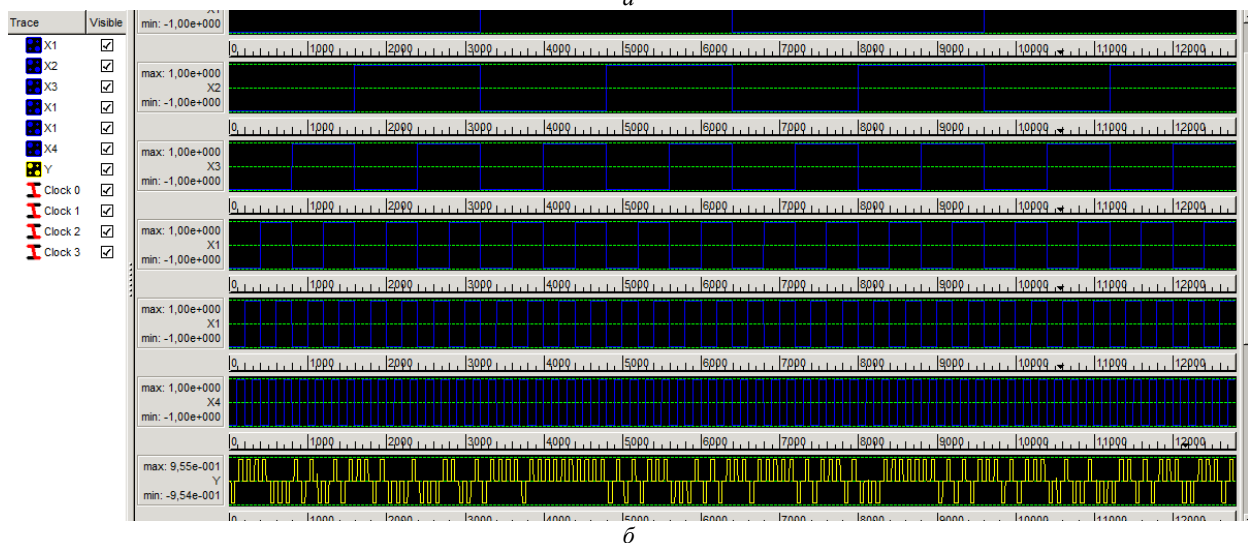
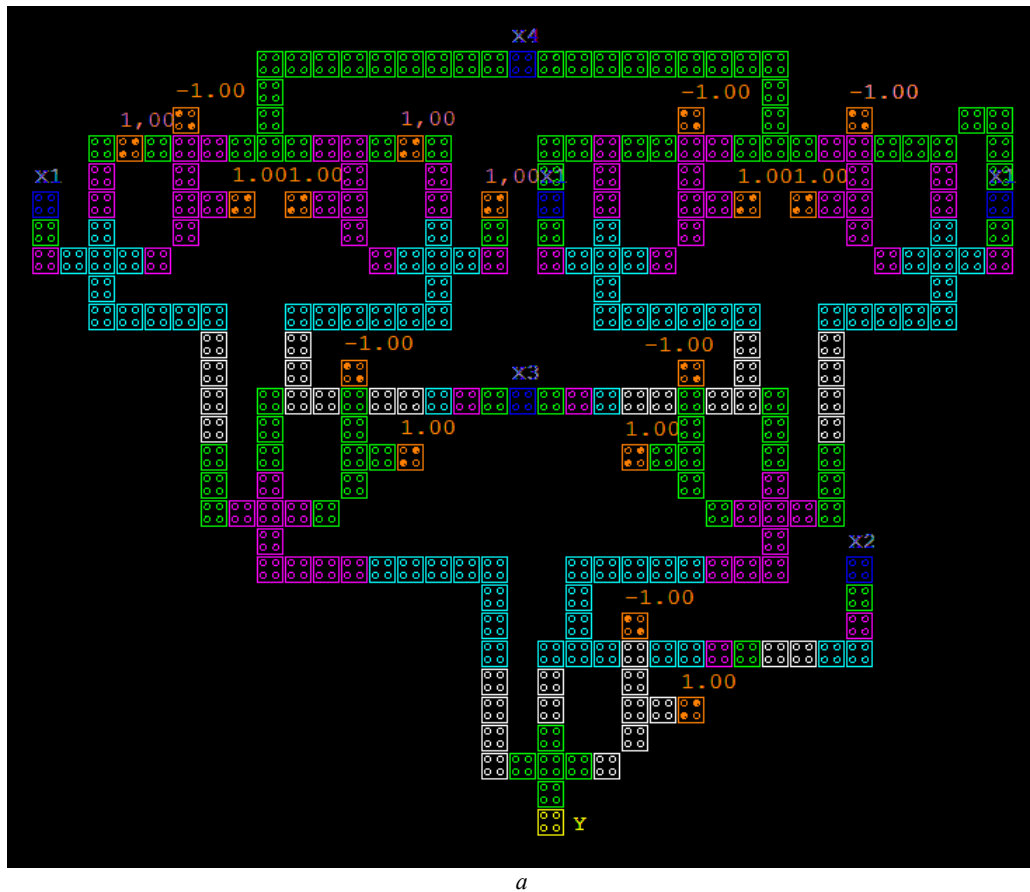


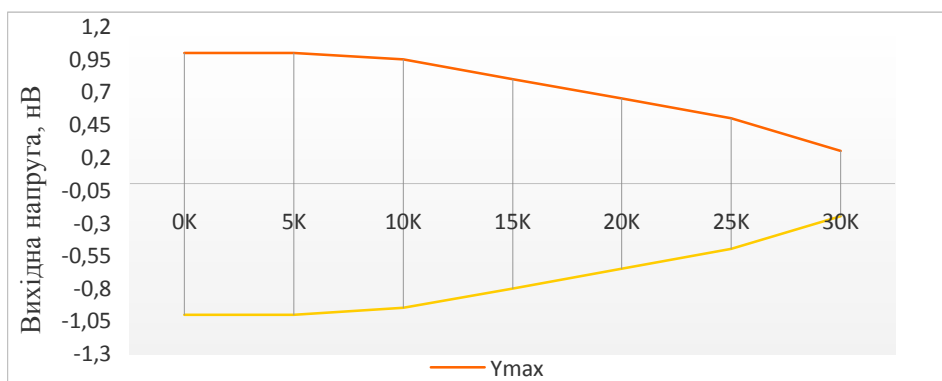
Рис. 4 – а – моделювання ПМНМ на коміркових автоматах та б – осцилограми роботи.

Раніше створений ПМНМ, тепер конфігуруємо на основі одноелектронних *мажоритарних нанoeлементів (ME)* на САПР QCADesigner [8] (рис. 4, а). Він спроектований на основі схем з рис. 2, а та рис. 3, а і складається з 24 ME, що виконують функції логічних елементів. Рис. 4, б ілюструє результати моделювання його часових діаграм, які повністю збігаються з таблицею істинності (табл. 1).

На рис. 5 наведені узагальнені результати моделювання впливу *кріогенних температур* на функціонування одноелектронних ПМНМ. Вочевидь, при навіть несуттєвому збільшенні температури від 0 до 25K, не говорячи – до 300K, повністю втрачається працездатність ПМНМ до виконання логічних операцій (рис. 5, а). ME стають неспроможними детектувати одиничні, інформаційно важливі електрони в умовах зростаючої концентрації термогенерованих фонових носіїв зарядів (рис. 5, б). Це, в свою чергу, унеможливило безвідмовність функціонування одноелектронних наносхем на КА навіть при кріогенних та, особливо, при нормальних температурах.



а



б

Рис. 5 – Моделювання імпульсних характеристик одноелектронних ПМНМ при кріогенних температурах: а – виродження часових характеристик при $T = 20\text{ K}$; б – їх графіки температурної залежності.

Висновки. В результаті проведення математичних досліджень були реалізовані моделі мікро- та нанопристроїв на основі мультиплексорних структур, які демонструють високу ефективність у відтворенні складних логічних функцій. Створені алгоритми дозволяють гнучко налаштовувати програмовані структури для реалізації як булевих, так і мажоритарних функцій, що значно розширює функціональні можливості одноелектронних наносхем. Моделювання підтвердило адекватність роботи розроблених мікронаномультимплексорів, а також виявило їхні переваги у частотних характеристиках. Однак низькотемпературний режим залишається критичним для їхньої стабільної роботи, що потребує подальших досліджень для оптимізації теплових характеристик. Таким чином, стаття робить внесок у розвиток технологій автоматизованого проектування, пропонуючи ефективні рішення для створення надійних і гнучких наносистем. Одноелектронні наносхеми на компонентній базі квантових автоматів зберігають працездатність тільки в умовах експлуатації на борту аерокосмічних апаратів [9, 10].

Список літератури

1. Lent C., Snider G., Lieberman M., Porod W. Quantum-dot cellular automata (QCA): The physics of computing with arrays of quantum dot molecules // Proceedings of the IEEE. – 1997. – vol. 85, no. 4, pp. 541 – 557.

2. Nielsen M., Chuang I. Quantum Computation and Quantum Information. – Cambridge University Press, 2010. – 676 p.
3. Uyemura J. Chip Design for Submicron VLSI: CMOS Layout and Simulation. – Cengage Learning, 2001. – 592 p.
4. Jaeger R. C., Blalock T. N. Microelectronic Circuit Design. – McGraw-Hill, 2010. – 1312 p.
5. Wolf W. FPGA-Based System Design. – Prentice Hall, 2004. – 507 p.
6. Walus K., Jullien G. A. Quantum-Dot Cellular Automata: Theory and Application // IEEE Transactions on Nanotechnology. – 2006. – vol. 99. – no. 2. – pp. 143 – 150.
7. Walus K., Jullien G. A. Design and Simulation of Quantum-Dot Cellular Automata Circuits // Journal of Applied Physics. – 2006. – vol. 99. – no. 2. – pp. 123 – 130.
8. Jha N. K., Roy K. Nanoelectronic Circuit Design. – Springer, 2010. – 439 p.
9. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Nanodevices with Programmable Logic // Electronics and Control Systems. – 2019. – vol. 4. – no. 62. – pp. 47–52. DOI: 10.18372/1990-5548.62.14383 DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
10. Tahoori M. B. Nanotechnology for Logic and Memory Applications. – Springer, 2018. – 300 p.

References (transliterated)

1. Lent C., Snider G., Lieberman M., Porod W. Quantum-dot cellular automata (QCA): The physics of computing with arrays of quantum dot molecules. *Proceedings of the IEEE*. 1997, vol. 85, no. 4, pp. 541–557.
2. Nielsen M., Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010. 676 p.
3. Uyemura J. *Chip Design for Submicron VLSI: CMOS Layout and Simulation*. Cengage Learning, 2001. 592 p.
4. Jaeger R. C., Blalock T. N. *Microelectronic Circuit Design*. McGraw-Hill, 2010. 1312 p.
5. Wolf W. *FPGA-Based System Design*. Prentice Hall, 2004. 507 p.
6. Walus K., Jullien G. A. Quantum-Dot Cellular Automata: Theory and Application. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2006, vol. 99, no. 2, pp. 143–150.
7. Walus K., Jullien G. A. Design and Simulation of Quantum-Dot Cellular Automata Circuits. *Journal of Applied Physics*. 2006, vol. 99, no. 2, pp. 123–130.
8. Jha N. K., Roy K. *Nanoelectronic Circuit Design*. Springer, 2010. 439 p.
9. Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Nanodevices with Programmable Logic // Electronics and Control Systems. – 2019. – vol. 4. – no. 62. – pp. 47–52. DOI: 10.18372/1990-5548.62.14383 DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
10. Tahoori M. B. *Nanotechnology for Logic and Memory Applications*. Springer, 2018. 300 p.

Надійшла (received) 13.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1072-5526>; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4380-0927>; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

V. I. NEAGU

SOLVING SOME COMPLETE SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS BY INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND ANALYTIC EXTENSIONS

In this paper, the solution of some singular integral equations is presented. The coefficients of the equations (external and internal) possess pointwise weak singularities on the integration interval, and furthermore, the extension of these coefficients over the entire complex plane yields multivalued functions. To obtain certain analytical branches, cuts are made in the complex plane, so that at the edges of the cuts, the extracted branches take different values. Certain integral (equivalent) transformations are carried out on the operator defined by the given equation, and after a series of mathematical reasonings and calculations, the given equation is reduced to a characteristic singular integral equation, studied in the monographs of academicians N. Muskhvelishvili and F. Gahov. The solutions obtained are in strict accordance with the results presented in the aforementioned monographs.

Key words: singular integral equation, Riemann boundary value problem, multivalued functions, analytic continuation, residue, Cauchy type integral.

B. I. НЯГУ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ПОВНИХ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ТА АНАЛІТИЧНИМИ РОЗШИРЕННЯМИ

У даній роботі представлено рішення деяких сингулярних інтегральних рівнянь. Коефіцієнти рівнянь (зовнішні та внутрішні) мають поточно слабкі особливості на інтервалі інтегрування, крім того, продовження цих коефіцієнтів на всю комплексну площину represents multiform functions. Для отримання певних аналітичних гілок розрізи роблять у комплексній площині, так що на краях розрізів вилучені гілки набувають різних значень. Над оператором, визначеним даним рівнянням, здійснюються певні інтегральні (еквівалентні) перетворення, які після серії математичних міркувань і обчислень зводять дане рівняння до характерного сингулярного інтегрального рівняння, дослідженого в монографіях академіків Н. Мусхвелішвілі та Ф. Гахова. Отримані рішення чітко узгоджуються з результатами, представленими у згаданих монографіях.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, крайова задача Рімана, багатозначні функції, аналітичне продовження, відрахування, інтеграл типу Коші.

Introduction. Integral equations are found in various fields of science and in numerous applications (such as physics, control theory, economics, and medicine). The theory of such equations was founded by *A. Poincaré* and *D. Hilbert* almost immediately after the appearance of the *classical theory of Fredholm integral equations*. Exact solutions of integral equations play a major role in the formation of a correct understanding of the qualitative characteristics of many phenomena and processes in various fields of natural sciences. However, as mentioned in the monographs of *N. Muskhelishvili* and *F. Gahov* and in other works, the solution of singular integral equations can be determined in rare cases, and even in these cases, the determination of an exact solution requires the calculation of singular integrals, which is accompanied by great difficulties both theoretical and computational. The most often applied method for solving singular integral equations on closed contours consists in the equivalent reduction of the given equation to the *Riemann-type boundary value problem*, which is solved effectively. In the case of an open integration contour (bounded or unbounded segment) this method can no longer be applied and consequently various other methods are applied depending on the given equation.

In this paper, the method of analytical extension over the entire complex plane of the unknown function and the coefficients of the equation, of some integral transformations, as well as the theory of residues and the passage to the limit is applied so that the given equation reduces to a characteristic equation. The obtained results are compared with some known results for some equations that represent particular cases of the equations considered in this paper. As a result of these comparisons, we are convinced that the obtained results are correct.

L. Levin [1] proved that in the case when $a(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $b(x) = \lambda^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ and λ is constant, the singular integral equation

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t-x} \varphi(t) dt = f(x) \quad (1)$$

can be reduced to solving two independent *Carleman integral equations* which are solved in the usual way. For a somewhat more general case, when

$$a(x)b(x) = \lambda^2 (1-x^2),$$

equation (1) was solved in [2, 3].

In the fourth paragraph of this work, complete integral equations of the form are solved

$$\frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt - \lambda^2 \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{K_m(t, x)}{t-x} \varphi(t) dt = f(x) \quad (m = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

where λ is a complex parameter, f is a given Hölder function on the interval $[a, b]$:

$$K_1(t, x) = \sqrt{\frac{(b-x)(x-a)}{(b-t)(t-a)}}, \quad K_2(t, x) = \sqrt{\frac{(b-x)(t-a)}{(b-t)(x-a)}},$$

$$K_3(t, x) = K_2^{-1}(t, x) \quad \text{and} \quad K_4(t, x) = K_1^{-1}(t, x).$$

We will consider in detail the cases when $m=1$ in (2).

The solution is carried out by analytical continuation of the coefficients (multivalued) of the equation, identifying single-valued branches and using some integral transformations. As a result of these actions, the solution of the original equation is reduced to the solution of the usual characteristic singular equation with the *Cauchy kernel*, followed by the application of the theory of the Riemann boundary value problem. In this case, the *Poincaré-Bertrand permutation formula* also plays a significant role:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, s)}{s-\tau} ds = \varphi(t, t) + \frac{1}{\pi i} \int_L ds \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, s)}{(s-\tau)(\tau-t)} d\tau.$$

The second and third paragraphs provide the necessary information about the relationship between the solution of the singular equation and the solution of the corresponding Riemann boundary value problem. In the fourth paragraph, the explicit solution of the characteristic singular equation is expressed through the solution of the corresponding Riemann boundary value problem.

Relationship between the solution of a singular equation and the solution of the Riemann boundary value problem. Let's consider the simplest type of special integral equation – the characteristic equation:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = f(t). \quad (3)$$

In this case, the solution to the equation can be reduced to the solution to the Riemann boundary value problem, providing a closed-form expression for the solution.

Let us introduce a piecewise analytic function defined by a *Cauchy type integral*,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} d\tau, \quad (4)$$

where φ is the desired solution to the characteristic equation.

According to the *Sokhotsky's formulas* [4, 5]

$$\begin{cases} \varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-, \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \end{cases} \quad (5)$$

Introducing the values

$$\varphi(t) \quad \text{and} \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

into equation (3) and solving it for $\Phi^+(t)$, we find that the piecewise analytic function $\Phi(z)$ must be a solution to the Riemann boundary value problem

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (6)$$

Where

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}. \quad (7)$$

Since the fact that the desired function $\Phi(z)$ is represented by a Cauchy integral, it must also satisfy the additional condition

$$\Phi^-(\infty) = 0. \quad (8)$$

The index of the coefficient $\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ of the Riemann problem (6) will be called the index of the integral equation (3).

Having solved the boundary value problem (4), we use formula (5) to obtain a solution to equation (3).

Thus, the integral equation (3) has been reduced to the Riemann boundary value problem (6). To establish the equivalence between the equation and the boundary value problem, it is necessary to prove that, conversely, the function

$\varphi(t)$ obtained from the solution of the boundary value problem also satisfies equation (3). To do this, we need to confirm that the second formula in (5) is also valid. Let's prove it. If the solution to problem (6) is represented by a Cauchy-type integral, then both formulas (5) hold, and one can uniquely recover the original equation from the boundary value problem. Now suppose there exists another function $\Phi_1(z)$, that satisfies the same conditions. Then, for the difference

$$\Phi_2(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z),$$

the following equality holds:

$$\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) = 0.$$

By the theorem of analytic continuation theorem and *Liouville's theorem* (taking into account (8)) $\Phi_2(z) \equiv 0$. Consequently, $\Phi_1(z) = \Phi(z)$, which completes the proof.

To simplify further formulas, we first divide the entire equation (3) by $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$, i.e. we assume that the coefficients of this equation satisfy the condition

$$a^2(t) - b^2(t) = 1.$$

Substituting the limit values of the Cauchy type integral into the boundary condition (6), we obtain *the characteristic singular integral equation*

$$\frac{1}{2}[1 + G(t)]\varphi(t) + \frac{1 - G(t)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t). \quad (9)$$

From the solutions of the last equation using formula (4) we obtain a solution to the Riemann problem.

Solution of the characteristic equation. Let us recall (see [5]) the solution to the Riemann boundary value problem (6), assuming $\chi \geq 0$, and compute the limit values of the corresponding functions using the Sokhotsky formulas

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= X^+(t) \left[\frac{1}{2} \frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\chi-1}(t) \right], \\ \Phi^-(t) &= X^-(t) \left[-\frac{1}{2} \frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\chi-1}(t) \right], \end{aligned}$$

where $\Psi(t)$ is the singular integral

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (10)$$

From here, using formula (5) we obtain

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)} \right] g(t) + X^+(t) \left[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)} \right] \left[\Psi(t) - \frac{1}{2} P_{\chi-1}(t) \right].$$

Based on the boundary condition, we replace $\frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{G(t)}$, and the function $\Psi(t)$ with their respective expressions according to formula (10). Then we have

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{G(t)} \right] g(t) + X^+(t) \left[1 - \frac{1}{G(t)} \right] \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2} P_{\chi-1}(t) \right].$$

If $\chi < 0$, then, as is known (see [5]), the Riemann problem (6), generally speaking, is unsolvable. The condition for its solvability

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, -\chi) \quad (11)$$

will simultaneously serve as the conditions for the solvability of equation (3).

Let us summarize the results of the study.

1⁰. If $\chi > 0$, then the homogeneous equation

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0$$

has χ linearly independent solutions.

2⁰. If $\chi \leq 0$, then the homogeneous equation has only then trivial solution.

3⁰. If $\chi > 0$, then the inhomogeneous equation

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t)$$

is solvable for any right-hand side $f(t)$ and its general solution depends linearly on χ arbitrary constants.

4⁰. If $\chi < 0$ then the inhomogeneous equation is solvable if and only if its right-hand side $f(t)$ satisfies the $-\chi$ conditions

$$\int_L h_k(t) f(t) d\tau = 0,$$

where

$$h_k(t) = \frac{1}{Z(t)} t^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, -\chi).$$

Solution of equation (2). The operator defined by the left-hand side of Eq. (2) (for $m = 1$), is acted upon by the operator

$$(A\psi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{\psi(t)}{t-x} dt,$$

where p is some complex number, the choice of which we can control.

In the obtained repeated singular integrals, we change the order of integration, using the *Poincaré-Bertrand formula* [4, 5]. We get

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda^2) \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \varphi(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_a^b \varphi(s) ds \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{dt}{(t-s)(t-x)} dt - \\ & - \frac{\lambda^2}{\pi^2} \int_a^b \frac{\varphi(s)}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} ds \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{(t-s)(t-x)} dt = (Af)(x). \end{aligned} \quad (12)$$

We denote the inner integrals by $I_1(s, x)$ and $I_2(s, x)$, respectively. Let us calculate $I_2(s, x)$. We split the outer integral from a to x ($s < x$) and from x to b ($s > x$) and calculate $I_2(s, x)$, with respect to $s < x$, and then $s > x$. Due to the symmetry of the function $I_2(s, x)$ with respect to s and x , the result will be the same.

We proceed from the multivalued function

$$F_p(z) = \frac{(z-b)^{\frac{1}{2}+p} (z-a)^{\frac{1}{2}-p}}{(z-s)(z-x)}, \quad (13)$$

for which the points $z = a$ and $z = b$ (and only these) are branch points.

Let us make a cut along the segment $[a, b]$ and select an analytic branch of this function. For this, we fix $\arg(t-a) = 0$ and $\arg(b-t) = 0$ on the upper side of the cut. We denote by $F_p^+(t)$ the value of this function at point t on the upper side of the cut. We have

$$F_p^+(t) = ie^{p\pi i} \frac{(b-t)^{\frac{1}{2}+p} (t-a)^{\frac{1}{2}-p}}{(t-s)(t-x)}. \quad (14)$$

Let us find the value of this branch at the same point t on the lower side of the cut, bypassing the point $z = a$, or $z = b$. Let us denote this value as $F_p^-(t)$. We get

$$F_p^-(t) = -ie^{-p\pi i} \frac{(b-t)^{\frac{1}{2}+p} (t-a)^{\frac{1}{2}-p}}{(t-s)(t-x)}. \quad (15)$$

Since the expansion of the function $F_p(z)$ in a Laurent series in the vicinity of the point at infinity starts from $\frac{1}{z}$, then

$$\operatorname{res}_{z=\infty} F_p(z) = -1.$$

We integrate the function $F_p(z)$ along the closed contour L^- shown in the figure below (Fig. 1).

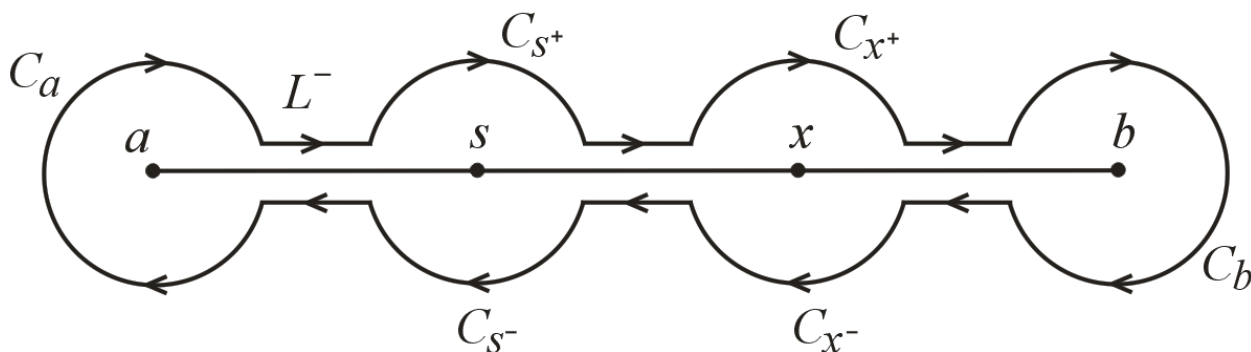


Fig. 1 – Integration contour L^- .

According to the definition of the residue of a function at infinity, we have

$$\int_{L^-} F_p(t) dt = 2\pi i \lim_{z=\infty} F_p(z) = -2\pi i. \quad (16)$$

Let ε denote the radius of the circles C_a , C_b and the semicircles C_{s^+} , C_{s^-} , C_{x^+} , C_{x^-} . In equality (16), we take the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, assuming that $-\frac{3}{2} < p < \frac{3}{2}$. Due to the weak singularity (infinity of order less than one) of the function $F_p(t)$ at the points $z = a$ and $z = b$, we obtain

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_a} F_p(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_b} F_p(t) dt = 0.$$

We proceed to calculate the remaining limits, in this case we will use equalities (14) and (15). We get

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{s^+}} F_p(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 F_p(s + \varepsilon e^{i\varphi}) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{(s + \varepsilon e^{i\varphi} - b)^{\frac{1}{2}+p} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}-p}}{\varepsilon e^{i\varphi} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - x)} i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = i \int_{\pi}^0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(s + \varepsilon e^{i\varphi} - b)^{\frac{1}{2}+p} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}-p}}{s + \varepsilon e^{i\varphi} - x} d\varphi = \\ &= -e^{p\pi i} \frac{(b-s)^{\frac{1}{2}+p} (s-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x} (-\pi) = \pi e^{p\pi i} \frac{(b-s)^{\frac{1}{2}+p} (s-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{s^-}} F_p(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} F_p(s + \varepsilon e^{i\varphi}) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{-\pi} \frac{(s + \varepsilon e^{i\varphi} - b)^{\frac{1}{2}+p} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}-p}}{\varepsilon e^{i\varphi} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - x)} i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{-\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(s + \varepsilon e^{i\varphi} - b)^{\frac{1}{2}+p} (s + \varepsilon e^{i\varphi} - a)^{\frac{1}{2}-p}}{s + \varepsilon e^{i\varphi} - x} d\varphi = \\ &= e^{-p\pi i} \frac{(b-s)^{\frac{1}{2}+p} (s-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x} (-\pi) = -\pi e^{-p\pi i} \frac{(b-s)^{\frac{1}{2}+p} (s-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Likewise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{x^\pm}} F_p(t) dt = \pm \pi e^{\pm p\pi i} \frac{(b-x)^{\frac{1}{2}+p} (x-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x}. \quad (19)$$

Taking into account (17) – (19), after the passage to the limit in equality (7) we obtain:

$$\int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{dt}{(t-s)(t-x)} = -\pi \operatorname{tg} p\pi \frac{(b-s)^{\frac{1}{2}+p} (s-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x} + \pi \operatorname{tg} p\pi \frac{(b-x)^{\frac{1}{2}+p} (x-a)^{\frac{1}{2}-p}}{s-x} - \frac{\pi}{\cos p\pi}. \quad (20)$$

Similarly

$$\int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{\sqrt{(b-t)(t-a)}}{(t-s)(t-x)} dt = -\pi \operatorname{ctgp} \pi \left(\frac{b-s}{s-a} \right)^p \frac{1}{s-x} - \pi \operatorname{ctgp} \pi \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \frac{1}{s-x}. \quad (21)$$

Substituting (20) and (21) into (2) b we arrive at the following equation:

$$\begin{aligned} & (1-\lambda^2) \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \varphi(x) + \left[\frac{\operatorname{ctgp} \pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \right] - \\ & - \frac{\operatorname{ctgp} \pi}{\pi} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \left[\lambda^2 \frac{\operatorname{tg} p \pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \right] - \\ & - \lambda^2 \frac{\operatorname{tg} p \pi}{\pi} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{(b-t)(t-a)} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda^2}{\pi \cos p \pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = (Af)(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Let us choose the parameter " p " such that

$$\operatorname{ctgp} \pi = -\lambda^2 \operatorname{tg} p \pi. \quad (23)$$

As a result, the terms contained in square brackets in equality (22) cancel each other out. Let us find an explicit match for the " p " parameter. From condition (23) we obtain

$$\operatorname{ctgp} \pi = \pm \lambda i, \quad \operatorname{tg} p \pi = \pm \frac{1}{\lambda i}, \quad \cos p \pi = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}, \quad \Rightarrow \quad p_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\pm \lambda + 1}{\pm \lambda - 1}. \quad (24)$$

In what follows, we will assume that $p = p_{\pm}$. Taking into account equalities (15) and after cancellation by $(b-x)^p (x-a)^{-p}$, equation (22) takes the form

$$\begin{aligned} & (1-\lambda^2) \varphi(x) + \frac{\lambda}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt - \\ & - \frac{\lambda}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{(b-t)(t-a)} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p [(Af)(x) + C], \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$C = -\frac{\lambda \sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}.$$

Adding the sought equation to equation (25),

$$\frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt - \lambda^2 \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{(b-t)(t-a)} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x), \quad (26)$$

we obtain a system from which we exclude the integrals containing the expression $\sqrt{(b-x)(x-a)} [(b-t)(t-a)]^{-1}$. As a result, we get the equation

$$-\lambda \varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \frac{1}{1-\lambda^2} f(x) - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p [(Af)(x) + C]. \quad (27)$$

Recall (see [4, 5]) that the solution to the equation

$$\mu \varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = g(x) \quad (28)$$

in the class of functions unbounded at $x = b$ and unbounded at $x = a$ has the form

$$\varphi(x) = \frac{\mu}{\mu^2 - 1} g(x) - \frac{1}{\pi i (\mu^2 - 1)} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^q \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^q \frac{g(t)}{t-x} dt, \quad (29)$$

where

$$q = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \quad \mu \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

In the case of equation (18), we have $\mu = -\lambda \Rightarrow q = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = p$,

$$g(x) = \frac{1}{1-\lambda^2} f(x) - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p \left[\frac{1}{\pi i} \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{f(t)}{t-x} dt + C \right].$$

Substituting these expressions for q and $g(x)$ in (29), we obtain

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{\lambda}{1-\lambda^2} f(x) - \frac{\lambda^2}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^p \frac{f(x)}{t-x} dt - \\ & - \frac{\lambda}{(\pi i)^2 (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{2p} \frac{dt}{t-x} \int_a^b \left(\frac{b-s}{s-a} \right)^p \frac{f(s)}{s-t} ds - \\ & - \frac{\lambda^2 C}{(1-\lambda^2)^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p - \frac{\lambda C}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^p \frac{dt}{t-x}. \end{aligned}$$

In the repeated singular integrals, we change the order of integration, using the Poincaré-Bertrand formulas, and we obtain

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & - \frac{\lambda^2}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{f(x)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^p \frac{f(t)}{t-x} dt - \\ & - \frac{\lambda}{\pi^2 (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{b-s}{s-a} \right)^p f(s) ds \left[\int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{2p} \frac{dt}{(t-s)(t-x)} \right] - \\ & - \frac{\lambda^2 C}{(1-\lambda^2)^2} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p - \frac{\lambda C}{\pi i (1-\lambda^2)^2} \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \left[\int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{2p} \frac{dt}{t-x} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

We calculate the integrals from the square brackets in equality (21), obtaining

$$\int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{2p} \frac{dt}{(t-s)(t-x)} = \pi \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda i} \left(\frac{s-a}{b-s} \right)^{2p} \frac{1}{s-x} - \pi \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda i} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{2p} \frac{1}{s-x}. \quad (31)$$

$$\int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^p \frac{dt}{t-x} = -\pi i \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{2p} + \pi i \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}. \quad (32)$$

Substituting these integrals into equality (30), we finally obtain a solution to equation (2) (for $m=1$).

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{2\pi i (1-\lambda^2)} \left[\left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^p \frac{f(x)}{t-x} dt + \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^p \frac{f(t)}{t-x} dt \right] + \\ & + C_1 \left[\left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p + \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

By substituting $\varphi(x)$ into the desired equation, we make sure that the terms in the first row form a particular solution of the inhomogeneous equation, and the terms of the second row form the solution to the homogeneous equation, where C_1 is an arbitrary constant.

For the convergence of integrals (31) and (32), it is necessary that $\operatorname{Re} 2p = 2\operatorname{Re} p < 1$, i.e. $\operatorname{Re} p < \frac{1}{2}$. Since

$\operatorname{Re} p = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$, then the condition $\operatorname{Re} p < \frac{1}{2}$ is satisfied for $0 < \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \pi$. The last condition is satisfied for all

λ for which $\operatorname{Re} \lambda < 0$. However if we put $p = p_-$ in (24), then we arrive at the condition $0 < \arg \frac{\lambda-1}{\lambda+1} < \pi$. This condition is satisfied for all λ for which $\operatorname{Re} \lambda < 0$, i.e. the imaginary axis must be excluded from the λ -plane.

In the case of kernels K_2 , K_3 and K_4 , by the same method, Eq. (2) is reduced to Eq. (27) with the same difference as $C = 0$, and to the same solution (33) with $C_1 = 0$.

However, in the case of kernel K_4 , in general, formula (33) is not a solution unless the condition

$$\int_a^b \left[\left(\frac{x-a}{b-x} \right)^p + \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p \right] f(t) dt = 0$$

is satisfied. This condition means that $f(t)$ must be orthogonal to the solution of the homogeneous equation. In the case of K_2 and K_3 the solution is unique ($C_1 = 0$) and unconditional.

Due to the behavior of the Cauchy-type integral at the ends of the contour of integration [5, 6], solution (33) belongs to the class of functions that are unbounded at $x = a$ and $x = b$.

Conclusions. The methods used in this work, integral transformations, analytical continuation, after a successful choice of the integration contour, the use of Cauchy theory of residues and limit transition allowed the solution of this integral equation to be reduced to the solution of some characteristic singular equation. These methods can be used in solving other singular equations, as well as in calculating some singular integrals that depend on parameters.

Bibliography

1. Левін Л. Про вирішення класу проблем розриву хвилеводу за допомогою сингулярного інтегрального рівняння // I.R.E. Trans MTT. – 1961. – V. 9. – С. 321–332.
2. Chakabarti., Williams W. Не про сингулярні інтегральні рівняння // J. Maths. – 1980. – Т. 26. – С. 321–323.
3. Петерс А. С. Пари сингулярних інтегральних рівнянь Коші та ядро $\frac{b(z)+a(\xi)}{\xi-z}$ // Comm. Pure Appl. Maths. – 1972. – vol. 25. – С. 369–402.
4. Мусхелішвілі І. Сингулярні інтегральні рівняння. – М., 1968. – 511 с.
5. Гахов Ф. Крайові задачі. – Дувр, Нью-Йорк, 1990. – 561 с.
6. Castro L., Roiaj E. Явні розв'язки сингулярних інтегральних рівнянь Коші зі зваженим зсувом Карлемана // J. Math. Anal. and Appl. – 2010. – V. 371. – № 1. – С. 128–133.

References (transliterated)

1. Lewin L. Pro vyrishennya klasu problem rozryvu khvylevodu za dopomogoyu syngulyarnogo integral'nogo rivnyannya [On the resolution of a classe of waveguide discontinuity problems by the use of singular integral equation]. *I.R.E. Trans MTT*. 1961, v. 9, pp. 321–332.
2. Chakabarti., Williams W. Ne pro syngulyarni integral'ni rivnyannya [A not on a singular integral equations]. *J. Maths*. 1980, v. 26, pp. 321–323.
3. Peters A. S. Pairs of Cauchy singular integral equations and the kernel $\frac{b(z)+a(\xi)}{\xi-z}$. *Comm. Pure Appl. Maths*. 1972, vol. 25, pp. 369–402.
4. Muskhvelishvili I. *Syngulyarni integral'ni rivnyannya* [Singular integral equations]. Moscow, 1968. 511 p.
5. Gakhov F. *Krayovi zadachi* [Boundary value problems]. Dover, New York, 1990. 561 p.
6. Castro L., Roiaj E. Yavni rozv'yazky syngulyarnykh integral'nykh rivnyan' Koshi zi zvazhenym zsuvom Karlemana [Explicit solutions of Cauchy singular integral equations with weighted Carleman shift]. *J. Math. Anal. and Appl*. 2010, Vol. 371, no. 1, pp. 128–133.

Надійшла (received) 24.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Нягу Василе Ігнатійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики та математики педагогічного університету імені Йона Крянге, координатор наукового дослідження Молдавського Держуніверситету, м. Кишинів; тел.: (+373) 680-146-67; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4062-2026>; e-mail: vasileneagu45@gmail.com.

Neagu Vasile Ihnatiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics and Mathematics of the Ion Creanga Pedagogical University, Coordinator of Scientific Research of the Moldovan State University, Kishinev; tel.: (+373) 680-146-67; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4062-2026>; e-mail: vasileneagu45@gmail.com.

O. G. NIKOLAEV, A. S. KRAINYCHENKO

STRICT JUSTIFICATION OF THE FOURIER METHOD IN BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A SYMMETRICALLY LOADED TRANSVERSALLY ISOTROPIC OBLATE SPHEROID AND ITS APPLICATION TO A HOLLOW SPHEROID

For the first time, an exact, well-founded solution by the Fourier method of the second axisymmetric boundary value problems of the theory of elasticity in the general formulation for a transversely isotropic oblate spheroid and a space with a spheroidal cavity has been obtained. The fundamental problem of the justification was the problem of estimating from below the modules of the determinants of the resolving systems for the internal and external problems. The indicated estimates were obtained in this work. The complexity of estimating determinants is due to the fact that they depend on nine parameters that are functionally related to each other, and in addition, two of them are included in the arguments of Legendre functions of the first and second kind. The estimates made it possible to formulate and prove theorems about the solvability conditions of the considered boundary value problems in certain classes of functions. The obtained results are applied to the solution of the second boundary value problem for a transversely isotropic oblate spheroid with a spheroidal cavity, the centers and directions of the axes of which coincide. An arbitrary symmetric balanced load is given on the surfaces of the spheroid, which satisfies a certain condition for the convergence of the series of limit functions developed in terms of Legendre functions. A feature of this problem for a transversely isotropic body is the impossibility of describing spheroidal surfaces with any geometry by a single pair of spheroidal coordinate systems. This means that such a problem can only be solved using the generalized Fourier method. Its application made it possible to reduce the original problem to an infinite system of linear algebraic equations. Thanks to the obtained estimates of the determinants of simply connected problems, the Fredholm property of the system operator in a certain Hilbert space has been proven. The numerical results in the considered problem are obtained in the case of a oblate spheroid with a circular crack. It is assumed that the surface of the spheroid is free of forces, and a constant normal load is applied to the crack. Graphs of normal stresses in the crack plane outside its boundary, as well as the values of stress intensity factor at its boundary, are presented. A parametric analysis of stresses and SIF depending on the geometric parameters of the problem was performed. The practical convergence of the reduction method when solving an infinite system was investigated.

Key words: Fourier method, boundary value problem, transversely isotropic body, oblate spheroid, empty spheroid, justified solution, determinant estimation, Legendre functions, Fredholm operator, circular crack, stress intensity factor, reduction method.

О. Г. НИКОЛАЄВ, А. С. КРАЙНИЧЕНКО

СТРОГЕ ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СИМЕТРИЧНО НАВАНТАЖЕНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО СТИСНУТОГО СФЕРОЇДА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ПОРОЖНЬОГО СФЕРОЇДА

Вперше отримано точний обґрунтований розв'язок методом Фур'є осесиметричних(осе) крайових задач теорії пружності в загальній постановці для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда і простору зі сфероїдальною порожниною. Принциповою проблемою обґрунтування стала проблема оцінки знизу модулів визначників розв'язуваних систем для внутрішньої та зовнішньої задач. У цій роботі отримано вказані оцінки. Складність оцінювання визначників пов'язана з тим, що вони залежать від дев'яти параметрів, які функціонально пов'язані між собою, до того ж, два з них входять в аргументи функцій Лежандра першого і другого роду. Оцінки дали змогу сформулювати і довести теореми про умови розв'язності розглянутих крайових задач у певних класах функцій. Отримані результати застосовано до розв'язання другої крайової задачі для трансверсально-ізотропного стиснутого сфероїда зі сфероїдальною порожниною, центри і напрями осей яких збігаються. На поверхнях сфероїда задано довільне симетричне врівноважене навантаження, яке задовольняє певну умову збіжності рядів граничних функцій, розвинених за функціями Лежандра. Особливістю цієї задачі для трансверсально-ізотропного тіла є неможливість при будь-якій геометрії сфероїдальних поверхонь описати їх однією парою сфероїдальних систем координат. Це означає, що таку задачу можна розв'язати тільки узагальненим методом Фур'є. Його застосування дало змогу звести вихідну задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Завдяки отриманим оцінкам визначників однозв'язних задач доведено фредгольмовість оператора системи в певному гільбертовому просторі. Чисельні результати у розглянутій задачі отримано у випадку стиснутого сфероїда з круговою тріщиною. Вважається, що поверхня сфероїда вільна від зусиль, а до тріщини прикладено статичне нормальне навантаження. Наведено графіки нормальних напружень в площині тріщини поза її межею, а також величини коефіцієнтів інтенсивності напружень на її межі. Проведено параметричний аналіз напружень і КІН в залежності від геометричних параметрів задачі. Досліджено практичну збіжність методу редукції при розв'язанні нескінченної системи.

Ключові слова: метод Фур'є, крайова задача, трансверсально-ізотропне тіло, стиснутий сфероїд, порожній сфероїд, обґрунтований розв'язок, оцінка визначника, функції Лежандра, оператор Фредгольма, кругова тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод редукції.

Introduction. In the modern world, more and more attention is paid to the creation of new materials with specified physical and mechanical properties, which has led to the widespread use of composites and anisotropic materials in various fields of technology – from aviation and space to biomedical. Transversely isotropic materials, whose properties are different in a certain direction and in a plane perpendicular to it, have become particularly popular. Such materials effectively simulate real engineering systems, in particular composite and reinforced structures. At the same time, cracks, inclusions, and other inhomogeneities occur in such materials for technological or operational reasons, which significantly complicates the analysis of their strength and reliability. An urgent need for high-precision mathematical modeling also arises when creating nanostructures. Here, local approximate models do not provide a complete and accurate picture of the strength characteristics of the relevant materials. We emphasize that mathematical models of the stress state of complex bodies are usually based on known solutions of boundary value problems of the theory of elasticity for classical simply connected bodies. At the same time, the mathematical justification of the constructed solutions is of fundamental importance, since this is a key element not only of the theoretical rigor, but also of the practical certainty of the obtained models. Modern computing technologies allow the implementation of numerically complex analytical models

however, only reliable mathematical foundations can ensure the correctness of modeling results.

Review of previous research results. The first solutions to problems of the theory of elasticity for bodies with spheroidal surfaces appeared in the first half of the 20th century in the works of the classics. *H. Neuber* published a monograph [1] in 1937, in which he considered bodies with notches. In it, he formulated a number of concepts and notions for the approximate calculation of stresses in the vicinity of notches on the boundary of an elastic body. The concept of the stress concentration coefficient was introduced as the ratio of the nominal stress to the maximum in the vicinity of the notch, and the law of the stress gradient was postulated, according to which a sharp increase in the stress around the notch leads to their significant decrease at the edges of the highly loaded zone. This made it possible to obtain approximate formulas for stresses in the vicinity of notches of various shapes in flat and spatial bodies, in particular for spheroidal notches. Ten years later, *M. A. Sadovsky* and *E. Sternberg* [2] developed an approach using curvilinear orthogonal coordinates and obtained an exact analytical solution for the stresses around a triaxial ellipsoidal cavity in an infinite elastic body under simple loads at infinity. The paper presents a closed-form solution in terms of elliptic Jacobi functions for an arbitrary triaxial (not only spheroidal) cavity. Then *R. H. Edwards* [3] in 1951 considered the problem of an elastic body containing a spheroidal inclusion under a uniform axial load. He showed that for a spherical inclusion the stresses and strains inside it remain uniform even if the elastic modulus and Poisson's ratio of the inclusion differ from those of the matrix. This unexpected result was later generalized by *J. D. Eshelby*. In his classic work [4] Eshelby developed the method of equivalent eigenstrains and showed that for an ellipsoidal inclusion a constant eigenstrain gives rise to a uniform field of stresses and strains inside the inclusion. *A. I. Lur'e* in his monograph [5] proposed a method for solving the problem for an elastic space with an ellipsoidal cavity based on *Papkovich – Neiber potentials*. However, a later analysis by *Xu, Zhao, and Wang* [6] showed that the harmonic functions chosen by Lur'e lead to an unsolvable algebraic system. These authors used the Eshelby equivalent inclusion method to construct a correct solution to the problem with an ellipsoidal cavity and wrote out new Papkovich – Neiber harmonic functions that satisfy the boundary conditions on the surface of the cavity. *Yu. M. Podilchuk* in his monograph [7] constructed exact analytical solutions of the Lamé equation for the interior and exterior of prolate and oblate spheroids by the Fourier method by choosing harmonic functions in the Papkovich – Neiber representation. In one of Podilchuk's works, the stressed state of a medium with an absolutely rigid ellipsoidal inclusion (the limiting case of given zero deformations in the inclusion) was analyzed. His other work [8] (jointly with *V. S. Kyrlyuk*) investigated the state of an elastic body with an ellipsoidal cavity according to the polynomial law of loading at infinity. Later, the same ideas were used in constructing exact solutions for transversely isotropic spheroids [9]. The construction of exact analytical basic solutions of the *Lamé equation* for spheroids was first made in [10]. For transversely isotropic spheroids, similar solutions were constructed in [11]. The problem of substantiating exact solutions for isotropic and transversely isotropic spheroids was first posed and solved in [12, 13]. In [14], a general three-dimensional analytical solution of the problem of a transversely isotropic space containing a spheroidal cavity with given asymmetric displacements on the surface of the cavity and vanishing stresses and displacements at infinity is presented. The approach is applied to obtain a solution to the problem of a transversely isotropic space containing a perfectly rigid spheroidal inclusion, where the space at infinity is subjected to uniform tension in the direction perpendicular to the axis of elastic symmetry of the material. In the article [15], the problem of stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity in transversely isotropic materials was solved using the Eshelby equivalent inclusion method. The authors of the work [16] *H. Amstutz* and *M. Vormwald* demonstrate a modern engineering approach to the analysis of the stress state in the vicinity of an inclusion in isotropic space. An elastic inclusion in the form of prolate spheroid under axial tension was considered and an analytical solution was constructed, based on the solution for the cavity, in which the displacement in the vicinity of the cavity was obtained by direct integration of the formulas for the connection between deformations and stresses. In the article [17], the stress concentration problem for an elastic transversely isotropic medium containing an arbitrarily oriented spheroidal inclusion (inhomogeneity) is solved. The stress state in elastic space is represented as a superposition of the main state and the perturbed state caused by the inhomogeneity. The problem is solved using the method of equivalent inclusions, the triple Fourier transform in spatial variables, and the Green's function for an infinite anisotropic medium.

We emphasize that all the listed works do not consider the problem of substantiating solutions to the second boundary value problem in the general symmetric formulation for a transversely isotropic compressed spheroid and a space with a spheroidal cavity.

Statement of the external boundary value problem. Consider a three-dimensional space in which an arbitrary point O and a cylindrical coordinate system (ρ, φ, z) with the origin at this point are fixed. Next, we will consider two transversely isotropic elastic bodies, the anisotropy axes of which coincide with the axis Oz . The regions occupied by the bodies are denoted by

$$\Omega^{\pm} = \left\{ (\rho, \varphi, z) : \frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} \gtrless 1 \right\},$$

where $d_1/d_2 < \min\{\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}\}$, v_1, v_2 are the positive roots of the equation

$$c_{11}c_{44}v^2 - (c_{11}c_{33} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2)v + c_{33}c_{44} = 0.$$

Here c_{ij} are the elastic constants of the transversely isotropic material of the bodies under consideration (they are all considered positive). The system of equilibrium equations in the displacements of a transversely isotropic body in the case of axial symmetry has the form

$$\left[c_{11} \left(\Delta_2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_\rho + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho \partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\left[c_{44} \Delta_2 + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V_z + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) = 0. \quad (2)$$

Above (V_ρ, V_z) – are the components of the axisymmetric displacement vector in cylindrical coordinates,

$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ – an axisymmetric variant of the two-dimensional Laplace operator in polar coordinates.

To describe the domains $\Omega^\pm$, it is convenient to use two oblate spheroidal coordinate systems $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$, the coordinates of which are related to the cylindrical coordinates by the formulas

$$\rho = c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s \sin \tilde{\eta}_s, \quad \frac{z}{\sqrt{V_s}} = c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s \cos \tilde{\eta}_s.$$

Here $c_s > 0$ is the parameters of the spheroidal systems, $\tilde{\xi}_s \in [0, \infty)$, $\tilde{\eta}_s \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Then the surface $\partial\Omega^\pm$ is given by the equation $\tilde{\xi}_s = \tilde{\xi}_s^0$, where $c_s \operatorname{ch} \tilde{\xi}_s^0 = d_2$, $\sqrt{V_s} c_s \operatorname{sh} \tilde{\xi}_s^0 = d_1$ and on this surface $\tilde{\eta}_s = \tilde{\eta}$.

Let us consider the second axisymmetric boundary value problem of the theory of elasticity for the system of equations (1), (2) in the domain Ω^+ , when the load is given on the boundary of the domain $\partial\Omega^+$

$$F\vec{V}|_{\tilde{\xi}_s=\tilde{\xi}_s^0} = \frac{c_{44}}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}) \vec{e}_\rho + b_n P_n(\cos \tilde{\eta}) \vec{e}_z \right], \quad (3)$$

where $H = (d_1^2 \sin^2 \tilde{\eta} + d_2^2 \cos^2 \tilde{\eta})^{1/2}$, and at infinity the regularity conditions are satisfied. The conditions for the coefficients of the series (3) will be given later.

Construction of a solution to the external boundary value problem. In the article [11], general basis sets of transversely isotropic displacements of canonical bodies in all curvilinear coordinate systems in which the variables in the Laplace equation are separated are constructed. For oblate spheroidal coordinates, axisymmetric versions of such sets have the form

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = \frac{-ic_j}{2n+1} \vec{\nabla}_s [u_{n-1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) - u_{n+1}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js})], \quad n = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \quad (4)$$

where

$$u_n^{\pm(6)}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} Q_n(\operatorname{ish} \xi) \\ P_n(\operatorname{ish} \xi) \end{Bmatrix} P_n(\cos \eta); \quad \vec{\nabla}_s = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k_s \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad k_s = \frac{c_{11} V_s - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}, \quad s = 1, 2,$$

$P_n(x)$, $Q_n(x)$ – Legendre functions of the first and second kind; $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_z\}$ – unit base vectors of the cylindrical coordinate system. The displacements $\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}$ are solutions of the system (1), (2), regular in the domains $\Omega^\pm$. The displacements (4) in coordinates have the following form:

$$\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) = u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \vec{e}_\rho - \frac{k_s}{\sqrt{V_s}} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js}) \vec{e}_z, \quad s = 1, 2, \quad (5)$$

where

$$u_n^{\pm(6)1}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} Q_n^1(\operatorname{ish} \xi) \\ P_n^1(\operatorname{ish} \xi) \end{Bmatrix} P_n^{-1}(\cos \eta).$$

The stresses on the surface $\partial\Omega^\pm$ with the normal $\vec{n}_{\tilde{\xi}_s}$, which correspond to the displacement vectors $\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_{js}, \tilde{\eta}_{js})$, are calculated by the formula

$$F\vec{V}_{s,n}^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s^{(0)}, \eta_s) = \frac{\sqrt{V_s}}{H} \left\{ c_{44} \frac{k_s + 1}{V_s} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_s} u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_\rho - \sqrt{V_s} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_s} u_n^{\pm(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_z \right] + \right. \\ \left. + (c_{12} - c_{13} \frac{k_s}{V_s}) \operatorname{th} \tilde{\xi}_s^{(0)} u_n^{\pm(6)1}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \vec{e}_\rho \right\}. \quad (6)$$

We will look for the solution to the problem in the form of a series with external basis displacements (4)

$$\vec{V}(\rho, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{s,n} \vec{V}_{s,n}^{(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s), \quad (7)$$

where $\{a_{s,n}\}_{s=1,n=0}^{2,\infty}$ are unknown coefficients. Let us proceed in formula (7) to the surface stresses according to formula (6), after which we satisfy the boundary condition (3). As a result, we obtain an algebraic system with respect to $\{a_{s,n}\}_{s=1,n=0}^{2,\infty}$. After some transformations with the coefficients of the obtained system, we will have

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,0} Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^2 a_{s,0} \frac{c_{11}v_s + c_{13}}{c_{13} + c_{44}} Q_0^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_0; \quad (8)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} \left[\frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_s) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) \right] = n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (9)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} (k_s + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_s) = b_n, \quad n \geq 1. \quad (10)$$

Here and below marked $\text{ch} \tilde{\xi}_s^0 = q_s$, $\text{sh} \tilde{\xi}_s^0 = \bar{q}_s$.

Analysis of the resolving system for the exterior problem. The following theorem provides an analysis of the solvability of system (8) – (10) and the conditions for the existence of a classical solution to the boundary value problem (1) – (3).

Theorem 1. For $v_1 \neq v_2$ system (8) – (10) is uniquely solvable. For its determinant the estimate

$$\left| \Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) \right| \geq \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{c_{11} |v_1 - v_2|}{c_{13} + c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \left| Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right|, \quad n \geq 1 \quad (11)$$

holds. When the condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n | b_n^{(1)} | + | b_n |) < \infty \quad (12)$$

is met, there is a solution to problem (1) – (3) in the domain Ω^+ by the Fourier method in the form (7), which belongs to the space $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$.

Proof of the theorem.

First of all, we note that the first equation (8) guarantees the regularity of the vector function (7). System (8) has a solution

$$a_{1,0} = ib_0 \frac{d_2}{c_1} \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}(v_2 - v_1)}, \quad a_{2,0} = ib_0 \frac{d_2}{c_2} \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{11}(v_1 - v_2)}. \quad (13)$$

To analyze the solvability of system (9), (10), we consider the determinant of this system

$$\begin{aligned} \Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \begin{vmatrix} \frac{k_1 + 1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & (k_1 + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \\ \frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) & (k_2 + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \end{vmatrix} = \\ &= (k_1 + 1)(k_2 + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ n(n+1) \left[\frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{Q_n(i\bar{q}_1)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{Q_n(i\bar{q}_2)}{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \left(\frac{1}{k_2 + 1} - \frac{1}{k_1 + 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Since, as was proved in [18], the function

$$\sigma(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{Q_n(i\bar{q})}{Q_n^{(1)}(i\bar{q})}$$

is monotonically increasing, then both terms in curly brackets (14) have the same sign, therefore the determinant is non-zero and the estimate (11) is satisfied. Then the system (9), (10) is uniquely solvable and its solutions have the form

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= -[\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ b_n \left[\frac{k_2 + 1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - b_n^{(1)} n(n+1)(k_2 + 1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right\}, \quad n \geq 1; \end{aligned} \quad (15)$$

$$a_{2,n} = -[\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ -b_n \left[\frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) Q_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right] + \right. \\ \left. + b_n^{(1)} n(n+1)(k_1+1) Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right\}, \quad n \geq 1; \quad (16)$$

Since for Legendre functions of the second kind the estimates are

$$\frac{d_1}{\sqrt{v}(n+1)d_2} = \frac{\bar{q}}{(n+1)q} < \frac{|Q_n(i\bar{q})|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|} < \frac{q}{(n+1)\bar{q}} = \frac{\sqrt{v}d_2}{(n+1)d_1}, \quad \bar{q} > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

then the following estimates follow from the obtained solutions and formulas (11), (17):

$$|a_{1,n}| \leq \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \frac{1}{|v_1-v_2|} \frac{d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left\{ |b_n| \left[\frac{k_2+1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_2)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_2+1) \right\} < \frac{C_1 n(|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (18)$$

$$|a_{2,n}| \leq \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \frac{1}{|v_1-v_2|} \frac{d_2}{d_1 |Q_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left\{ |b_n| \left[\frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) \frac{|Q_n(i\bar{q}_1)|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_1+1) \right\} < \frac{C_2 n(|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (19)$$

where the constants C_s are positive and depend only on s .

Now we can estimate the terms of the series (7) using estimates (17) – (19) and the uniform estimate

$$\frac{|Q_n^{(1)}(ish\tilde{\xi})|}{|Q_n^{(1)}(i\bar{q})|} \leq \frac{q^{n+1}}{(\operatorname{ch}\tilde{\xi})^{n+1}}, \quad \tilde{\xi} \geq \tilde{\xi}^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

that follows from the integral representation of the Legendre function of the second kind. Therefore, we have

$$\left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \bar{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\bar{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \\ \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[\frac{|Q_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |Q_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos \tilde{\eta}_s)| \right] \leq \sum_{s=1}^2 \tilde{C}_s (n |b_n^{(1)}| + |b_n|) \left(\frac{q_s}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s} \right)^{n+1}, \quad (21)$$

where the constants $\tilde{C}_s$ are positive and depend only on s .

Estimate (21) shows that when condition (12) is satisfied, series (7) converges absolutely and uniformly at $\tilde{\xi}_s \geq \tilde{\xi}_s^{(0)}$ and can be infinitely differentiated by terms in the domain $\tilde{\xi}_s > \tilde{\xi}_s^{(0)}$. The latter means that formula (7) specifies a solution to the boundary value problem (1) – (3) in the domain Ω^+ , which belongs to the class of functions $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$.

The statement of the internal boundary value problem and construction of its solution. Now let us consider the second boundary value problem for the system of equations (1), (2) in a transversely isotropic oblate spheroid

$$\Omega^- = \left\{ (x, y, z) : \frac{\rho^2}{d_2^2} + \frac{z^2}{d_1^2} < 1 \right\}$$

with boundary condition (3). We assume that the conditions formulated in the statement of the external problem are met, and the load (3) is balanced. To describe the domain Ω^- , we will use the two systems of oblate spheroidal coordinates $\{(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s, \varphi)\}_{s=1}^2$ introduced above and the same notations.

We will look for the solution to the problem in the form of a series

$$\bar{V}(\rho, z) = a_{1,0} \bar{V}_{1,0}^{-(6)}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{s,n} \bar{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s), \quad (22)$$

where $\{a_{1,0}, a_{s,n}\}_{s=1, n=1}^{2, \infty}$ are the unknown coefficients. Let us proceed in formula (22) to the surface stresses according to formula (6), after which we satisfy the boundary conditions (3). After transforming the coefficients in the Legendre functions, we obtain an algebraic system with respect to $\{a_{s,n}\}_{s=1, n=1}^{2, \infty}$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} \left[\frac{k_s+1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_s) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_s) \right] = -n(n+1) b_n^{(1)}, \quad n \geq 1; \quad (23)$$

$$\sum_{s=1}^2 a_{s,n} (k_s+1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_s) = -b_n, \quad n \geq 1. \quad (24)$$

The boundary condition at $n=0$ is satisfied automatically for any $a_{1,0}$, since the static conditions lead to the equality $b_0=0$. In turn, this leads to the standard result for the inner problem – the solution of the problem is determined uniquely up to a rigid displacement.

Analysis of the resolving system for the interior problem. The following theorem provides an analysis of the solvability of system (23), (24) and the conditions for the existence of a classical solution to the boundary value problem.

Theorem 2. For $v_1 \neq v_2$, $n \geq 1$, the system (23), (24) is uniquely solvable. For its determinant, the estimate

$$|\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)| \geq |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)| |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)| \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{44}(c_{13}+c_{44})} \sigma \frac{d_1}{d_2} \frac{|v_1-v_2|}{\max(v_1^2, v_2^2)} \quad (25)$$

holds. When the condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) |b_n^{(1)}| + |b_n| < \infty \quad (26)$$

is met and the load (3) is balanced, then there is a solution to problem (1) – (3) in the domain Ω^- by the Fourier method in the form (22), which belongs to the space $C^2(\Omega^-) \cap C^1(\bar{\Omega}^-)$.

Proof of the theorem.

To analyze the solvability of system (25), (26), we consider the determinant of this system

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \begin{vmatrix} \frac{k_1+1}{\sqrt{v_1}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) & (k_1+1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \\ \frac{k_2+1}{\sqrt{v_2}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) & (k_2+1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \end{vmatrix} = \\ &= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \left\{ n(n+1)(k_1+1)(k_2+1) \left[\frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} (k_1-k_2) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

After some transformations, the determinant can be represented in this form

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) &= \\ &= P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{44}(c_{13}+c_{44})} \left\{ n(n+1) \left[\frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{P_n(i\bar{q}_1)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)} - \frac{1}{\sqrt{v_2}} \frac{P_n(i\bar{q}_2)}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)} \right] + (1-\sigma) \frac{d_1}{d_2} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

where σ is Poisson's ratio in the isotropy plane. Note that from the relations between the elastic constants it follows that the constant $c_{11}c_{33}-c_{13}^2 > 0$.

Consider the function

$$\zeta(v) = n(n+1) \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{P_n(i\bar{q})}{P_n^{(1)}(i\bar{q})} - \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\bar{q}}{q}. \quad (29)$$

Let's check it for monotonicity. To do this, we find its derivative

$$\frac{d\zeta(v)}{dv} = -\frac{n(n+1)}{2\sqrt{v^3} [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2} \left\{ q^2 P_n(i\bar{q}) P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \left[\bar{q}q - \frac{2\bar{q}}{qn(n+1)} \right] [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \bar{q}qn(n+1) [P_n(i\bar{q})]^2 \right\}.$$

It can be proved that the expression

$$(-i)^{2n} \left\{ q^2 P_n(i\bar{q}) P_n^{(1)}(i\bar{q}) + \left[\bar{q}q - \frac{2\bar{q}}{qn(n+1)} \right] [P_n^{(1)}(i\bar{q})]^2 - \bar{q}qn(n+1) [P_n(i\bar{q})]^2 \right\}$$

when $n \geq 1$ is positive, i.e. $\frac{d\zeta(v)}{dv} < 0$, and the function $\zeta(v)$ decreases on the semi-axis $\tilde{\xi} \in (0, \infty)$. Because

$$\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0) = P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{44}(c_{13}+c_{44})} \left\{ [\zeta(v_1) - \zeta(v_2)] + \sigma \frac{d_1}{d_2} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \right\} \quad (30)$$

and the function $\frac{1}{\nu}$ also decreases, then both terms in the curly brackets (30) have the same sign, so the estimate (25) is correct. Therefore, the determinant $\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)$ for $n \geq 1$ is nonzero. Then the system (23), (24) is uniquely solvable and its solutions have the form ($n \geq 1$)

$$a_{1,n} = [\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ b_n \left[\frac{k_2+1}{\sqrt{\nu_2}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_2) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right] + b_n^{(1)} n(n+1)(k_2+1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_2) \right\}, \quad (31)$$

$$a_{2,n} = [\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_1^0, \tilde{\xi}_2^0)]^{-1} \left\{ -b_n \left[\frac{k_1+1}{\sqrt{\nu_1}} n(n+1) P_n(i\bar{q}_1) - \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right] + b_n^{(1)} n(n+1)(k_1+1) P_n^{(1)}(i\bar{q}_1) \right\}. \quad (32)$$

Given the estimate for Legendre functions of the first kind

$$\frac{d_1}{\sqrt{\nu_s} n d_2} = \frac{\bar{q}_s}{n q_s} < \frac{|P_n(i\bar{q}_s)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_s)|} < \frac{q_s}{n \bar{q}_s} = \frac{\sqrt{\nu_s} d_2}{n d_1}, \quad (33)$$

from the obtained solutions (31), (32) and formula (25) the following estimates follow:

$$|a_{1,n}| \leq \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \frac{1}{|\nu_1-\nu_2|} \frac{d_2}{d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} \left\{ |b_n| \left[\frac{k_2+1}{\sqrt{\nu_2}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_2)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_2+1) \right\} < \frac{C_1 n (|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (34)$$

$$|a_{2,n}| \leq \frac{c_{13}+c_{44}}{c_{11}} \frac{c_{44}}{c_{11}-c_{12}} \frac{1}{|\nu_1-\nu_2|} \frac{d_2}{d_1 |P_n^{(1)}(i\bar{q}_2)|} \left\{ |b_n| \left[\frac{k_1+1}{\sqrt{\nu_1}} n(n+1) \frac{|P_n(i\bar{q}_1)|}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|} + \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{44}} \frac{d_1}{d_2} \right] + |b_n^{(1)}| n(n+1)(k_1+1) \right\} < \frac{C_2 n (|b_n^{(1)}| (n+1) + |b_n|)}{|P_n^{(1)}(i\bar{q}_1)|}, \quad (35)$$

where the constants C_s are positive and depend only on s .

Now we can estimate the terms of the series (22) using formulas (33) – (35) and the uniform estimate

$$\left| \frac{P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi})}{P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}^{(0)})} \right| \leq \left(\frac{\operatorname{ch}\tilde{\xi}}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}^{(0)}} \right)^n, \quad \tilde{\xi} \leq \tilde{\xi}^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

As a result, we have

$$\left| \sum_{s=1}^2 a_{s,n} \bar{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s) \right| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| |\bar{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s)| \leq \sum_{s=1}^2 |a_{s,n}| \left[\frac{|P_n^{(1)}(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n^{(1)}(\cos\tilde{\eta}_s)|}{n(n+1)} + |P_n(ish\tilde{\xi}_s)| |P_n(\cos\tilde{\eta}_s)| \right] \leq \sum_{s=1}^2 \tilde{C}_s (n |b_n^{(1)}| + |b_n|) \left(\frac{q_s}{\operatorname{ch}\tilde{\xi}_s} \right)^{n+1}, \quad (36)$$

where the constants $\tilde{C}_s$ are positive and depend only on s . Estimate (36) shows that under condition (26) the series (22) converges absolutely and uniformly at $\tilde{\xi}_s \leq \tilde{\xi}_s^{(0)}$ and it can be infinitely differentiated by terms in the domain $\tilde{\xi}_s < \tilde{\xi}_s^{(0)}$. The latter means that formula (22) specifies a solution to the boundary value problem (1) – (3) in the domain Ω^- , which belongs to the class of functions $C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$.

Transversely isotropic oblate spheroid with a spheroidal cavity. We use the results obtained above to solve the second boundary value problem in a transversely isotropic oblate spheroid with a spheroidal cavity, which is under the action of an arbitrary balanced axisymmetric load. We denote the domain occupied by the spheroid by Ω , and the surfaces of the cavity and spheroid by Γ_1 and Γ_2 . We assume that their centers are combined and are located at the point O . We align the cylindrical system (ρ, φ, z) with this point so that the axis Oz coincides with the symmetry axis of the spheroids and the anisotropy axis. The surface has the equation

$$\frac{\rho^2}{d_{j,2}^2} + \frac{z^2}{d_{j,1}^2} = 1, \quad (37)$$

where $d_{j,1}/d_{j,2} < \min\{\sqrt{\nu_1}, \sqrt{\nu_2}\}$, $i=1,2$. We will use the notation introduced above.

A feature of a transversely isotropic body occupying the domain Ω is that its boundary cannot be described by on-

ly one pair of oblate spheroidal coordinates, even when the surfaces (37) have a common focal disk. Therefore, the problem for the doubly connected domain of the considered geometry cannot be solved by the usual Fourier method, and it is possible to do this only by the generalized Fourier method. To describe the domain Ω , it is convenient to use two pairs of oblate spheroidal coordinate systems $\{(\tilde{\xi}_{j,s}, \tilde{\eta}_{j,s}, \varphi)\}_{s,j=1}^2$, related to cylindrical coordinates by the formulas

$$\rho = a_{j,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{j,s} \sin \tilde{\eta}_{j,s}, \quad z = \sqrt{v_s} a_{j,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{j,s} \cos \tilde{\eta}_{j,s}.$$

Then the surface Γ_j is given by the equation $\tilde{\xi}_{j,s} = \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)}$, where $a_{j,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)} = d_{j,2}$, $\sqrt{v_s} a_{j,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{j,s}^{(0)} = d_{j,1}$ (the parameters of oblate spheroidal coordinate systems, unlike the previous one, are denoted by $a_{j,s}$, so as not to confuse them with elastic constants).

Let us consider the problem of determining the stress state of the above transversely isotropic body, in which the cavity is free from stresses, and an arbitrary balanced axisymmetric load

$$F\vec{V}\Big|_{\tilde{\xi}_{2,s}=\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}} = \frac{c_{44}}{H_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_n^{(1)} P_n^{(1)}(\cos \tilde{\eta}_2) \vec{e}_\rho + b_n^{(0)} P_n(\cos \tilde{\eta}_2) \vec{e}_z \right], \quad (38)$$

is applied to the outer surface. Here $H_2 = (d_{2,1}^2 \sin^2 \tilde{\eta}_2 + d_{2,2}^2 \cos^2 \tilde{\eta}_2)^{1/2}$.

The conditions for the coefficients of the series (38) are given in (26). From a mathematical point of view, the problem is reduced to solving the boundary value problem for the system of equations (1), (2) in the domain Ω with the boundary conditions (38) and

$$F\vec{V}\Big|_{\tilde{\xi}_{1,s}=\tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}} = 0. \quad (39)$$

Construction of a general solution to the problem and its reduction to a resolving system. We will search for a general solution to the problem (1), (2), (38), (39) in the domain Ω in the form

$$\vec{V}(\rho, z) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}), \quad (40)$$

where $A_{s,n}^{(j)}$ are the unknown coefficients that need to be found in the process of solving the problem. Here, the equilibrium of the load on the external surface of the body has already been taken into account according to Theorem 2. We will solve the problem using the generalized Fourier method. For this, we will use the theorems of addition of basic solutions (4), which are consequences of the general formulas obtained in [11]

$$\vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) = \sum_{k=0}^n g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}), \quad (41)$$

$$\vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \vec{V}_{s,k}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}), \quad a_{2,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s} > a_{1,s}, \quad (42)$$

where

$$g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) = \sum_{p=k}^n \left(\frac{a_{1,s}}{a_{2,s}} \right)^p \frac{i^{n-p} \varepsilon_{n,p} \varepsilon_{p,k} (k+1/2) \Gamma(n/2 + p/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2 - p/2 + 1) \Gamma(p/2 - k/2 + 1) \Gamma(p/2 + k/2 + 3/2)}, \quad (43)$$

$$g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^{k-p} \varepsilon_{p,n} \varepsilon_{p,k} (k+1/2) \Gamma(p/2 + k/2 + 1/2)}{\Gamma(p/2 - n/2 + 1) \Gamma(p/2 + n/2 + 3/2) \Gamma(k/2 - p/2 + 1)} \left(\frac{a_{1,s}}{a_{2,s}} \right)^{p+1}, \quad (44)$$

$$\varepsilon_{n,k} = \begin{cases} 1, & n-k=2p, p \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n-k=2p+1, p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ is Euler's gamma function.

Let us transform the displacement vector $\vec{V}(\rho, z)$ to each separate coordinate system using formulas (3.5), (3.6). As a result, we have

$$\vec{V}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s}) \sum_{k=n}^{\infty} g_{n,k}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)}, \quad (45)$$

$$\vec{V}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) = \sum_{s=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} \vec{V}_{s,n}^{-(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) + \sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}_{s,n}^{+(6)}(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)}. \quad (46)$$

Let us pass in formulas (45), (46) from displacements to stresses on surfaces Γ_1 and Γ_2 , using formula (6) for this. After satisfying the boundary conditions, we obtain an infinite system of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients

$$\sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{+(m)} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(m)} \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0; 1, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{-(m)} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(m)} (\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s}) \sum_{k=0}^{\infty} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)} = f_n^{(m)}, \quad n \geq 1, \quad m = 0; 1, \quad (48)$$

where

$$t_{j,s,n}^{\pm(1)} = \frac{k_s + 1}{\sqrt{v_s}} n(n+1) \left\{ \frac{Q_n(i\bar{q}_{j,s})}{P_n(i\bar{q}_{j,s})} \right\} - \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}} \frac{d_{j,1}}{d_{j,2}} \left\{ \frac{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})} \right\}, \quad t_{j,s,n}^{\pm(0)} = (k_s + 1) \left\{ \frac{Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})}{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{j,s})} \right\}, \quad (49)$$

$$f_n^{(1)} = -n(n+1)b_n^{(1)}, \quad f_n^{(0)} = -b_n^{(0)}.$$

Analysis of the resolving system. Let's transform the system to normal form

$$\tilde{A}_{1,n}^{(1)} + \frac{t_{1,2,n}^{+(0)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,1})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(2)} - \frac{t_{1,2,n}^{+(1)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,1})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(0)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(2)} = 0, \quad (50)$$

$$A_{2,n}^{(1)} + \frac{t_{1,1,n}^{+(1)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,2})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(0)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} A_{s,k}^{(2)} - \frac{t_{1,1,n}^{+(0)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,2})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(1)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} A_{s,k}^{(2)} = 0, \quad (51)$$

$$A_{1,n}^{(2)} + \frac{t_{2,2,n}^{-(0)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} A_{s,k}^{(1)} - \frac{t_{2,2,n}^{-(1)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} A_{s,k}^{(1)} =$$

$$= \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1}) t_{2,2,n}^{-(0)} f_n^{(1)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} - \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,1}) t_{2,2,n}^{-(1)} f_n^{(0)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)}, \quad (52)$$

$$A_{2,n}^{(2)} + \frac{t_{2,1,n}^{-(1)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(1)} - \frac{t_{2,1,n}^{-(0)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \tilde{A}_{s,k}^{(1)} =$$

$$= \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2}) t_{2,1,n}^{-(1)} f_n^{(0)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} - \frac{P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,2}) t_{2,1,n}^{-(0)} f_n^{(1)}}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)}, \quad (53)$$

where

$$A_{s,n}^{(1)} = \tilde{A}_{s,n}^{(1)} / Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,s}), \quad A_{s,n}^{(2)} = \tilde{A}_{s,n}^{(2)} / P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,s}).$$

Theorem 3. If conditions

$$a_{1,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)} < \begin{cases} a_{2,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, & a_{1,s} < a_{2,s}, \\ a_{2,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, & a_{1,s} > a_{2,s}, \end{cases} \quad a_{2,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} > \begin{cases} a_{1,s} \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, & a_{2,s} < a_{1,s}, \\ a_{1,s} \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}, & a_{2,s} > a_{1,s} \end{cases} \quad (54)$$

are satisfied, the system (50) – (53) has a Fredholm operator in the space l_2^4 .

Proof of the theorem.

To prove the theorem, it is sufficient to show the convergence of the series

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{t_{2,p,n}^{-(j)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,3-p})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \frac{t_{2,s,n}^{+(1-j)} g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\bar{q}_{1,s})} \right|^2 < \infty, \quad (55)$$

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{t_{1,p,n}^{+(j)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,3-p})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \frac{t_{1,s,n}^{-(1-j)} g_{k,n}^{-(66)}(a_{1,s}, a_{2,s})}{P_k^{(1)}(i\bar{q}_{2,s})} \right|^2 < \infty, \quad (56)$$

where $j = 0, 1$; $p, s = 1, 2$.

First, we note that thanks to estimates (11), (17), (25), (33), we can estimate the factors of the common terms of the series (55), (56) as follows:

$$\left| \frac{t_{2,p,n}^{-(j)} P_n^{(1)}(i\bar{q}_{2,3-p})}{\Delta_n^{-(2)6}(\tilde{\xi}_{2,1}^0, \tilde{\xi}_{2,2}^0)} \right| < C^- n^j, \quad \left| \frac{t_{1,p,n}^{+(j)} Q_n^{(1)}(i\bar{q}_{1,3-p})}{\Delta_n^{+(2)6}(\tilde{\xi}_{1,1}^0, \tilde{\xi}_{1,2}^0)} \right| < C^+ n^j, \quad j = 0, 1. \quad (57)$$

From formula (42) follows the Parseval equality

$$\int_0^\pi |Q_n(\operatorname{ish} \tilde{\xi}_{1,s}) P_n(\cos \tilde{\eta}_{1,s})|^2 \sin \tilde{\eta}_{2,s} d\tilde{\eta}_{2,s} = \sum_{k=0}^{\infty} |g_{n,k}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) Q_k(\operatorname{ish} \tilde{\xi}_{2,s})|^2 \frac{2}{2k+1}$$

thanks to which we can record

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| g_{k,n}^{+(66)}(a_{1,s}, a_{2,s}) \frac{Q_n(\operatorname{ish} \tilde{\xi}_{2,s})}{Q_k^{(1)}(i\tilde{q}_{1,s})} \right|^2 \frac{2}{2n+1} = \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{Q_k(\operatorname{ish} \tilde{\xi}_{1,s})}{Q_k^{(1)}(i\tilde{q}_{1,s})} P_k(\cos \tilde{\eta}_{1,s}) \right|^2 \sin \tilde{\eta}_{2,s} d\tilde{\eta}_{2,s}. \quad (58)$$

Let us emphasize that in Parseval's formula $(\tilde{\xi}_{1,s}, \tilde{\eta}_{1,s})$ and $(\tilde{\xi}_{2,s}, \tilde{\eta}_{2,s})$ are the coordinates of the same point. Let us substitute into the formula (58) $\tilde{\xi}_{2,s} = \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}$. In this case, the coordinate $\tilde{\xi}_{1,s}$ on the fixed surface is some function $\tilde{\xi}_{1,s} = \tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s})$. The condition for the convergence of the series under the integral (58) due to the estimates (17), (20) is the inequality

$$\tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s}) > \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)} \quad \forall \tilde{\eta}_{2,s} \in [0, \pi]$$

or, which is the same,

$$\min_{\tilde{\eta}_{2,s} \in [0, \pi]} \tilde{\xi}_{1,s}(\tilde{\xi}_{2,s}^{(0)}, \tilde{\eta}_{2,s}) > \tilde{\xi}_{1,s}^{(0)}. \quad (59)$$

Let us find the minimum value of the coordinate in (59). From the formulas for the connection of cylindrical and spheroidal coordinates it follows that

$$\left(\operatorname{ch} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} \sin \tilde{\eta}_{2,s} / \operatorname{ch} \tilde{\xi}_{1,s} \right)^2 + \left(\operatorname{sh} \tilde{\xi}_{2,s}^{(0)} \cos \tilde{\eta}_{2,s} / \operatorname{sh} \tilde{\xi}_{1,s} \right)^2 = (a_{1,s} / a_{2,s})^2,$$

whence

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s} = (q_{2,s}^2 - \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s} - \alpha^2 + \sqrt{(q_{2,s}^2 - \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s} - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \bar{q}_{2,s}^2 \cos^2 \tilde{\eta}_{2,s}}) / (2\alpha^2), \quad (60)$$

where $\alpha = a_{1,s} / a_{2,s}$. Let us examine the right-hand side of formula (60) at the extremum. It can be shown that for $\alpha < 1$

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s}^{\min} = \bar{q}_{2,s}^2 / \alpha^2. \quad (61)$$

In the same way for $\alpha > 1$

$$\operatorname{sh}^2 \tilde{\xi}_{1,s}^{\min} = q_{2,s}^2 / \alpha^2. \quad (62)$$

Now the consequences of formulas (59), (61), (62) are the first convergence condition (54).

Therefore, by the first condition (54), the series on the left in (58) converges. It is not difficult to show that the convergence remains for any additional factors in this series of the form n^p, k^q ($p, q > 0$). Therefore, taking into account the estimate (57), we obtain (55).

For the series (56), a similar approach leads to the second convergence condition (54). Thus, the theorem is proved.

Remark: The convergence conditions of method (54) can be given the following geometric meaning:

$$d_{1,1} < \begin{cases} d_{2,1}, & a_{1,s} < a_{2,s}, \\ \sqrt{\nu_s} d_{2,2}, & a_{1,s} > a_{2,s}, \end{cases} \quad d_{2,1} > \begin{cases} d_{1,1}, & a_{2,s} < a_{1,s}, \\ \sqrt{\nu_s} d_{1,2}, & a_{2,s} > a_{1,s}. \end{cases}$$

The last formulas show that not only do the surfaces Γ_1 and Γ_2 , as geometric objects, not intersect, but also do not intersect the surfaces after the similarity transformation along the axis Oz with the coefficient $1/\sqrt{\nu_s}$.

The problem of a transversely isotropic oblate spheroid with a circular crack. Let us illustrate the above results by the example of the numerical solution of the axisymmetric problem of the stress state of a transversely isotropic oblate spheroid Γ_2 (37) with a circular crack $\Gamma_1 = \{(\rho, z): z=0, \rho \in [0, a]\}$, which is under the action of a constant normal load. The boundary conditions at the crack edges are set as follows:

$$\sigma_z|_{\Gamma_1} = -\sigma, \quad \tau_{\rho z}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \tau_{\varphi z}|_{\Gamma_1} = 0, \quad (63)$$

where $\sigma_z, \tau_{\rho z}, \tau_{\varphi z}$ are components of the stress tensor in cylindrical coordinates. The outer surface of the spheroid is considered free from forces.

If we look for a solution to this problem in the form (40), then the unknown coefficients must satisfy the system (47), (48) with the other right-hand sides:

$$\sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{+(m)} A_{s,n}^{(1)} + \sum_{s=1}^2 t_{1,s,n}^{-(m)} \sum_{k=n}^{\infty} g_{k,n}^{-(66)}(a, a_{2,s}) A_{s,k}^{(2)} = f_n^{(m)}, \quad n \geq 0, \quad m = 0; 1, \quad (64)$$

$$\sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{-(m)} A_{s,n}^{(2)} + \sum_{s=1}^2 t_{2,s,n}^{+(m)} \sum_{k=0}^n g_{k,n}^{+(66)}(a, a_{2,s}) A_{s,k}^{(1)} = 0, \quad n \geq 1, \quad m = 0; 1, \quad (65)$$

where the coefficients for the unknowns are described by formulas (49), into which we must substitute $\bar{q}_{1,s} = 0$, and the right-hand side is $f_n^{(m)} = \delta_{m,0} \delta_{n,1} \sigma a / c_{44}$.

After numerically solving the system (64), (65) by the reduction method, it is possible to analyze, for example, the

normal stresses that arise in the crack plane outside its boundary and are given by the formula

$$\sigma_z(\rho, 0)_{|\rho>a} = \frac{c_{44}}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{n=0}^{\infty} A_{s,n}^{(1)} Q_n \left(i \sqrt{(\rho/a)^2 - 1} \right) P_n^{(1)}(0) - c_{44} \sum_{s=1}^2 \frac{k_s + 1}{\sqrt{a_{2,s}^2 - \rho^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{s,n}^{(2)} P_n^{(1)}(i0) P_n \left(\sqrt{1 - (\rho/a_{2,s})^2} \right). \quad (66)$$

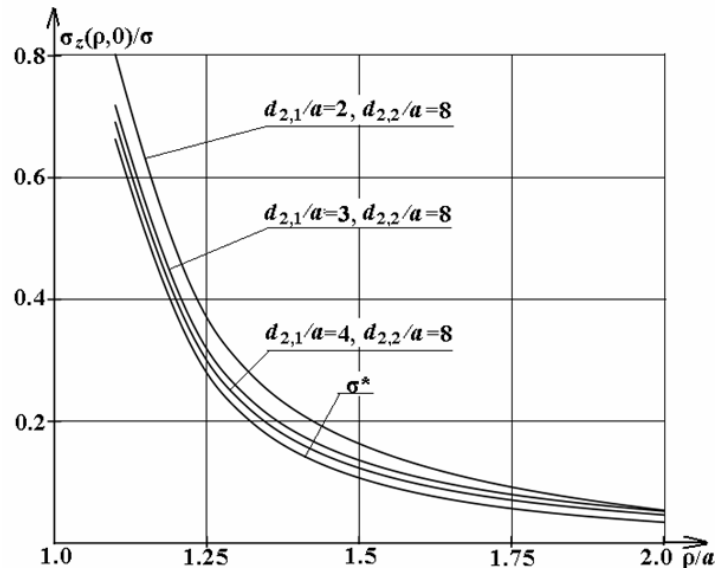


Fig. 1 – Distribution of normal stresses in the plane of the crack beyond its boundary.

Fig. 1 shows graphs of normal stresses $\sigma_z(\rho, 0)_{|\rho>a} / a$ (66) depending on the relative sizes of the semiaxes of the spheroid. Here, the symbol σ^* denotes the stresses that correspond to a crack in transversely isotropic space (the problem has an analytical solution in closed form). The graphs show that for a fixed size of the semi-major axis of the spheroid, the stresses increase as the size of the semi-minor axis decreases. A different situation is observed for a fixed size of the semi-minor axis. Changing the size of the semi-major axis has practically no effect on the magnitude of the stresses.

Let us also write down the formula for calculating the stress intensity factor at the crack boundary:

$$K_{Iz} = \lim_{\rho \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(\rho - a)} \sigma(\rho, 0).$$

Transition in system (64), (65) to dimensionless unknowns by the formula

$$A_{s,n}^{(j)} = \frac{\sigma a}{c_{44}} \tilde{A}_{s,n}^{(j)}$$

leads to the following formula for the SIF:

$$K_{Iz} / (\sqrt{a}\sigma) = \sqrt{\pi} \sum_{s=1}^2 (k_s + 1) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_{s,2k-1}^{(1)}. \quad (67)$$

Table 1 – SIF values depending on the relative sizes of the semiaxes of the spheroid

$d_{2,1}/a \setminus d_{2,2}/a$	6.0	7.0	8.0
2.0	1.2382	1.2356	1.2336
3.0	1.1715	1.1694	1.1681
4.0	1.1506	1.1489	1.1479

Table 1 shows the values of the stress intensity factor depending on the relative sizes of the semiaxes of the spheroid. A decrease in the SIF is observed both at a fixed size of the major semiaxis and an increase in the size of the minor, and at a fixed size of the minor semiaxis and an increase in the size of the major. For comparison, we present the SIF of a crack in transversely isotropic space

$$K_{Iz} / (\sqrt{a}\sigma) = 2 / \sqrt{\pi} \approx 1.1284.$$

Table 2 – Practical convergence of the reduction method

$n_{\max} \setminus \rho / a$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
20	0.8021	0.2879	0.1608	0.1015	0.0665
30	0.8019	0.2873	0.1602	0.1012	0.0665
40	0.8019	0.2873	0.1602	0.1012	0.0665

Table 2 shows the practical convergence of the reduction method using the example of stress values $\sigma_z(\rho, 0) \setminus \sigma$ at $d_{2,1}/a = 2.0$, $d_{2,2}/a = 8.0$. The number $n_{\max}$ specifies the reduction parameter at which the size of the reduced system is equal to $4n_{\max} \times 4n_{\max}$.

Prospects for further research. One of the directions of further research is the substantiation of solutions to the equilibrium equations of transversally isotropic canonical bodies.

Conclusions. For the first time, an exact, substantiated solution by the Fourier method of the second axisymmetric boundary value problems of the theory of elasticity in the general formulation for a transversely isotropic oblate spheroid and a space with a spheroidal cavity has been obtained. Similar problems are relevant in local modeling of the stress state of transversely isotropic bodies with cavities, inclusions, and cracks. The review of previous research on this topic presented in the article showed that the problems of substantiating the basic boundary value problems for the above-mentioned transversally isotropic bodies were not posed and not solved. However, ignoring this problem can lead to incorrect results even in the works of classics, as shown by the authors of the study [6]. A fundamental problem of justification, which could not be solved for many years, was the problem of estimating from below the moduli of determinants of resolving systems for interior and exterior problems. The indicated estimates were obtained in this work. The complexity of estimating determinants is due to the fact that they depend on nine parameters that are functionally related to each other, and in addition, two of them are included in the arguments of Legendre functions of the first and second kind. The estimates found made it possible to formulate and prove theorems about the solvability conditions of the considered boundary value problems in certain classes of functions. The obtained results are applied to the solution of the second boundary value problem for a transversely isotropic oblate spheroid with a spheroidal cavity, the centers and directions of the axes of which coincide. An arbitrary symmetric balanced load is given on the surfaces of the spheroid, which satisfies a certain condition for the convergence of the series of limit functions developed in terms of Legendre functions. A feature of this problem for a transversely isotropic body, is the impossibility of describing spheroidal surfaces with any geometry by a single pair of spheroidal coordinate systems. This means that such a problem can be solved not by the usual, but by the generalized Fourier method. Its application made it possible to reduce the original problem to an infinite system of linear algebraic equations. Thanks to the above estimates of the determinants of simply connected problems, the Fredholm property of the system operator in a certain Hilbert space has been proven. Numerical results in the considered problem were obtained in the case of a oblate spheroid with a circular crack. The surface of the spheroid is assumed to be free of forces, and a constant normal load is applied to the crack. The graphs of normal stresses in the crack plane outside its boundary, as well as the values of the stress intensity factors at its boundary, are presented. A parametric analysis of stresses and SIFs depending on the geometric parameters of the problem is carried out. The practical convergence of the reduction method in solving an infinite system is investigated.

Bibliography

1. Neuber H. Kerbspannungslehre. – Berlin : Springer, 1937. – 347 p.
2. Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity // Journal of Applied Mechanics. – 1949. – Vol. 16. – No. 2. – pp. 149 – 157.
3. Edwards R. H. Stress concentration around spheroidal inclusions and cavities // Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – pp. 19 – 30.
4. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proceedings of the Royal Society A. – 1957. – Vol. 241. – pp. 376 – 396.
5. Lur'e A. I. Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity. – New York : Interscience, 1964. – 520 p.
6. Xu B. X., Zhao Y. T., Wang M. Z. Elastic fields for the ellipsoidal cavity problem // Journal of Elasticity. – 2009. – Vol. 97. – pp. 31 – 45.
7. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости. – Киев : Наукова думка, 1979. – 280 с.
8. Подильчук Ю. Н., Кирилюк В. С. Напряженное состояние упругой среды около эллипсоидальной полости при полиномиальном поле напряжений на бесконечности // Прикладная механика. – 1981. – № 10. – С. 45 – 52.
9. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33. – № 10. – С. 3 – 30.
10. Николаев А. Г. Формулы переразложения векторных решений уравнения Ламе в сферической и сфероидальной системах координат // Математические методы анализа динамических систем. – Харьков : Харьковский авиационный ин-т., 1984. – Вып. 8. – С. 100 – 104.
11. Николаев А. Г. Теоремы сложения перемещений трансверсально-изотропных канонических тел // Харьковский авиационный ин-т. – Харьков, 1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, № 1568-Ук 96.
12. Николаев А. Г. Обоснование метода Фурье в основных крайевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доклады НАН Украины. – 1998. – № 2. – С. 78 – 83.
13. Nikolaev A. G. Circular stamp on a transversely isotropic half space with a spheroidal cavity with the presence of adhesion // International Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 30. – Issue 8. – pp. 48 – 53. DOI: 10.1007/BF00847232.
14. Zureick A. H. Spheroidal Cavity with Prescribed Asymmetric Displacements in Three Dimensional Transverse Isotropy // Journal of Engineering

- Mechanics. – 1989. – Vol. 115. – No. 11. – pp. 1603 – 1612.
15. Chiang C. R. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity in transversely isotropic materials // *Arch Appl Mech.* – 2015. – Vol. 85. – pp. 469 – 479. DOI: 10.1007/s00419-014-0923-1.
 16. Amstutz H., Vormwald M. Elastic prolate spheroidal inclusion in an infinite elastic solid – an exact analysis based on corresponding cavity solutions // *Archive of Applied Mechanics.* – 2024. – Vol. 94. – pp. 1503 – 1529.
 17. Kirilyuk V. S., Levchuk O. I. Stress State of a Transversely Isotropic Medium with an Arbitrarily Oriented Spheroidal Inclusion // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – Vol. 41. – pp. 137 – 143. DOI: 10.1007/s10778-005-0069-5.
 18. Ніколаєв О. Г., Крайниченко А. С. Пружний трансверсально-ізотропний простір з двома одновісними паралельними круговими тріщинами і супутні проблеми базисності // *Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* – 2022. – № 1. – С. 92 – 105. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11.

References (transliterated)

1. Neuber H. *Kerbspannungslehre*. Berlin, Springer, 1937. 347 p.
2. Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. *Journal of Applied Mechanics.* 1949, Vol. 16, No. 2, pp. 149–157.
3. Edwards R. H. Stress concentration around spheroidal inclusions and cavities. *Journal of Applied Mechanics.* 1951, Vol. 18, pp. 19–30.
4. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society A.* 1957, Vol. 241, pp. 376–396.
5. Lur'e A. I. *Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. New York, Interscience, 1964. 520 p.
6. Xu B. X., Zhao Y. T., Wang M. Z. Elastic fields for the ellipsoidal cavity problem. *Journal of Elasticity.* 2009, Vol. 97, pp. 31–45.
7. Podil'chuk Yu. N. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of elasticity theory]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1979. 280 p.
8. Podil'chuk Yu. N., Kirilyuk V. S. *Napryazhennoe sostoyanie uprugoy sredy okolo ellipsoidal'noy polosti pri polinomial'nom pole napryazheniy na beskonechnosti* [Stress state of an elastic medium near an ellipsoidal cavity with a polynomial stress field at infinity]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1981, no. 10, pp. 45–52.
9. Podil'chuk Yu. N. *Tochnye analiticheskie resheniya prostranstvennykh granichnykh zadach statiki transversal'no-izotropnogo tela kanonicheskoy formy (obzor)* [Exact analytical solutions of spatial boundary value problems of statics of a transversely isotropic body of canonical shape (review)]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1997, vol. 33, no. 10, pp. 3–30.
10. Nikolaev A. G. *Formuly pererazlozheniya vektornykh resheniy uravneniya Lamé v sfericheskoy i sferoidal'noy sistemakh koordinat* [Formulas for re-expansion of vector solutions of the Lamé equation in spherical and spheroidal coordinate systems]. *Matematicheskie metody analiza dinamicheskikh sistem* [Mathematical methods of analysis of dynamic systems]. Kharkov, KhAI, 1984, issue 8, pp. 100–104.
11. Nikolaev A. G. *Teoremy slozheniya peremeshheniy transversal'no-izotropnykh kanonicheskikh tel* [Theorems for addition of displacements of transversely isotropic canonical bodies]. Kharkov, Khar'kovskiy aviac. in-t. Publ., 1996, 52 p. Dep. in the National Scientific and Technical Library of Ukraine, 10.07.96, no. 1569 – Uk96.
12. Nikolaev A. G. *Obosnovanie metoda Fur'e v osnovnykh kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya nekotorykh prostranstvennykh kanonicheskikh oblastey* [Justification of the Fourier method in the main boundary value problems of elasticity theory for some spatial canonical domains]. *Doklady NAN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 2, pp. 78–83.
13. Nikolaev A. G. Circular stamp on a transversely isotropic half space with a spheroidal cavity with the presence of adhesion. *International Applied Mechanics.* 1994, Vol. 30, Issue 8, pp. 48–53. DOI: 10.1007/BF00847232.
14. Zureick A. H. Spheroidal Cavity with Prescribed Asymmetric Displacements in Three Dimensional Transverse Isotropy. *Journal of Engineering Mechanics.* 1989, Vol. 115, No. 11, pp. 1603–1612.
15. Chiang C. R. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity in transversely isotropic materials. *Arch Appl Mech.* 2015, Vol. 85, pp. 469–479. DOI: 10.1007/s00419-014-0923-1.
16. Amstutz H., Vormwald M. Elastic prolate spheroidal inclusion in an infinite elastic solid – an exact analysis based on corresponding cavity solutions. *Archive of Applied Mechanics.* 2024, Vol. 94, pp. 1503–1529.
17. Kirilyuk V. S., Levchuk O. I. Stress State of a Transversely Isotropic Medium with an Arbitrarily Oriented Spheroidal Inclusion. *Int. Appl. Mech.* 2005, Vol. 41, pp. 137–143. DOI: 10.1007/s10778-005-0069-5.
18. Nikolaev O. G., Krainychenko A. S. *Pruzhnyy transversal'no-izotropnyy prostir z dvoma odnovisnymi paralelnymi krugovymi trishhynamy i suputni problemy bazysnosti* [Elastic transversal-isotropic space with two uniaxial parallel circular cracks and associated problems of basicity]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 92–105. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.11.

Надійшла (received) 13.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Ніколаєв Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Oleksii Georhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Крайниченко Аліна Сергіївна – аспірантка кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (099) 152-15-69; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5881-4143>; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

Krainychenko Alina Sergiivna – postgraduate student at the Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (099) 152-15-69; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5881-4143>; e-mail: a.krainychenko@khai.edu.

*O. G. NIKOLAEV, M. V. SKITSKA***CLASSICAL PROBLEM ABOUT AN ELASTIC SPHERE WITH A SPHERICAL INCLUSION**

For the first time, an exact analytically justified solution of the second axisymmetric boundary value problem of the theory of elasticity in the general formulation for a sphere with a concentric spherical inclusion has been obtained using the conventional Fourier method. In the scientific works of the classics of natural science of the 19th and 20th centuries, M. G. Lamé, W. Thomson, C. Somigliana, V. Cerruti, B. G. Galerkin, G. Fichera, A. I. Lurie, E. Stenberg, and A. F. Ulitko, elastic problems for a solid sphere, space with a spherical cavity, and a sphere with a concentric spherical cavity were solved in various formulations. But even these problems were not strictly justified. The problem considered in this report is much more complex, since it is associated with the conjugation of displacement and stress fields at the inclusion boundary. That's probably why it wasn't considered before. The justification for solving such a problem and establishing its solvability class using the usual Fourier method is based on the analysis of a solvable algebraic system of the sixth order with coefficients that depend on five independent continuous parameters and one discrete one. The general solution of the problem is given in the form of series in terms of axisymmetric vector basis solutions of the Lamé equation for a sphere, constructed by the authors in one of the previous articles. After transitioning to stresses and satisfying the boundary conditions, a resolving system of the above form is obtained. When analyzing the system, a lower estimate of the modulus of its determinant was first found, from which follows not only the unique solvability of the system, but also estimates of the solutions of the system itself. In estimating the determinant, a new classical inequality was proven for one continuous and one discrete parameter, previously unknown to the authors. The next step was to prove a theorem about the conditions that must be imposed on the vector of the external load applied to the surface of the sphere, which ensure the existence of a solution to the problem in a certain class of functions. In the numerical implementation of the solution to the problem, two types of loads on the outer surface of the sphere were considered, which satisfy the equilibrium condition. A computer experiment was conducted with three types of materials for a ball and an inclusion: steel, brass and aluminum. Graphs of normal and tangential stresses on the surface of the inclusion were obtained, and their parametric analysis was performed depending on the geometric and mechanical parameters. The practical convergence of the method was investigated.

Key words: elastic sphere, spherical inclusion, Fourier method, second axisymmetric boundary value problem, exact analytically justified solution, field conjugation, resolving system, solvability class, external load vector, parametric analysis, practical convergence.

*О. Г. НИКОЛАЕВ, М. В. СКИЦКА***КЛАСИЧНА ЗАДАЧА ПРО ПРУЖНУ КУЛЮ ЗІ СФЕРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ**

Уперше звичайним методом Фур'є отримано точний аналітичний обґрунтований розв'язок другої осесиметричної крайової задачі теорії пружності в загальній постановці для кулі з концентричним сферичним включенням. У наукових працях класиків природознавства 19 і 20 століть М. Г. Ламе, В. Томсон, С. Сомігліана, В. Черруті, Б. Г. Галеркін, Г. Фічера, А. І. Луріє, Е. Стенберг, А. Ф. Улітко розв'язувалися пружні задачі для суцільної кулі, простору зі сферичною порожниною і кулі з концентричною сферичною порожниною в різних постановках. Але навіть ці задачі не було строго обґрунтовано. Задача, яка розглядається в цій статті, значно складніша, оскільки пов'язана зі спряженням полів переміщень і напружень на межі включення. Тому, мабуть, її раніше не розглядали. Обґрунтування розв'язку подібної задачі та встановлення її класу розв'язності звичайним методом Фур'є базується на аналізі розв'язувальної алгебраїчної системи шостого порядку з коефіцієнтами, які залежать від п'яти незалежних неперервних параметрів і одного дискретного. Загальний розв'язок задачі подається у вигляді рядів за осесиметричними векторними базисними розв'язками рівняння Ламе для кулі, побудованими авторами в одній з попередніх статей. Після переходу до напружень і задоволення граничних умов отримано розв'язувальну систему вказаного вище вигляду. При аналізі системи вперше знайдено нижню оцінку модуля її визначника, з якої не тільки випливає умова однозначної розв'язності системи, а ще й оцінки розв'язків самої системи. При оцінці визначника було доведено нову класичну нерівність для одного неперервного і одного дискретного параметрів, невідомою авторам. Наступним кроком було доведено теорему про умови, які треба накласти на вектор зовнішнього навантаження, прикладеного до поверхні кулі, які забезпечують існування розв'язку задачі в певному класі функцій. При чисельній реалізації розв'язку задачі розглядалися два типи навантажень на зовнішню поверхню кулі, які задовольняють умову врівноваженості. Проведено комп'ютерний експеримент з трьома матеріалами кулі і включення: сталь, латунь, алюміній. Отримано графіки нормальних і дотичних напружень на поверхні включення, проведено їх параметричний аналіз в залежності від геометричних і механічних параметрів. Досліджено практичну збіжність методу.

Ключові слова: пружна куля, сферичне включення, метод Фур'є, друга осесиметрична крайова задача, аналітичний обґрунтований розв'язок, спряження полів, розв'язувальна система, клас розв'язності, вектор зовнішнього навантаження, параметричний аналіз, практична збіжність.

Introduction. It can already be said today that new types of materials, among which, first of all, composite and porous materials should be highlighted, have revolutionized industries around the world, offering unprecedented opportunities for innovation. According to expert forecasts, the global market for composite materials alone will grow by an average of 7.2 % each year over the next 5 years. Microelectronics, construction, mechanical and aircraft engineering, renewable energy, chemical industry, rocket and space technology, biology, medicine - this is far from a complete list of areas where various products made of porous and composite materials are used, which, depending on the constituent components, microstructure, size and shape of pores and inclusions, and production technology, have different physical and mechanical properties. Modern technologies place particular emphasis on the creation of nanomaterials with predefined properties. This process is always preceded by mathematical modeling of their possible properties, in particular, strength, which is based on the study of the stress-strain state in the body near inhomogeneities. In this context, the sphere or spherical cavity plays a fundamental role as the most natural and simple heterogeneity in a body. As early as 1933, J. Goodier used spherical inhomogeneity in an elastic body to model the stressed state of a material with small air bubbles and steel with slag balls. It is interesting that while there is a sufficient number of scientific articles from the mid-19th century to the present day devoted to problems about an elastic sphere or a space with a spherical cavity, there are no studies of even axisymmetric problems in the general formulation about a sphere with a spherical inclusion or a space with spherical inclusions and a layer. The latter is due to the serious complexity of such problems, especially when

strictly justifying their solutions. The question of constructing a justified solution (except for problems for a simple stressed state, where this is not necessary at all) for any problems about a sphere has never been considered at all.

In this work, an exact, well-founded analytical solution of an axisymmetric problem in the general formulation about a loaded elastic ball with a spherical inclusion is obtained for the first time. The conditions for the solvability of this problem by the Fourier method in a certain class of functions are established. The results of a computer experiment with different types of ball and inclusion materials are presented. A parametric analysis of the stresses on the inclusion surface is performed.

Review of previous research results. The problem of an elastic hollow sphere was first considered by *G. Lamé* in his lectures [1]. In this treatise, Lamé considered two problems: on the vibration of a solid sphere and on the normal pressure on the concentric boundary surfaces of a hollow sphere. The work presents the system of Lamé equations in spherical coordinates, introduces a potential function, thanks to which the system of Lamé equations is reduced to a wave equation. Then, the method of separation of variables is used. When solving the Legendre differential equation, some analogs of functions were used, which are today called associated Legendre functions. There is no justification for the solutions given. A closed-form solution was found for the empty sphere. Chronologically, the second work on the empty sphere was done by *W. Thomson* [2] more than 10 years after the publication of Lamé's lectures. Here the problem has already been considered in a general formulation. The solution was written as a power series in the radial coordinate, the coefficients of which are combinations of surface spherical harmonics (for some reason expressed in Cartesian coordinates). After substitution into the equation of equilibrium in the displacements, a system of differential equations was obtained with respect to these harmonics on the surfaces of the sphere. The problems of convergence of the obtained series and justification of the solutions are not raised. In the work of *Somigliana C.* [3], problems for a solid sphere, a space with a spherical cavity, and a sphere with a cavity (displacements are given on concentric surfaces) were considered. Displacements were written by combinations of volume and surface potentials. After that, the problems were broken down into a series of simpler problems for which the integrals with potentials can be expressed in terms of one-dimensional integrals. In the empty sphere problem, the solutions are written as series, about which in the paper it is said: «if convergent, all the conditions of the problem are satisfied. The article [4] is devoted to the solution of the problem for an empty sphere with symmetrical loading on its surfaces. The displacement is written in terms of surface potentials expressed by series similar to the series, which sets the generating function for the Legendre polynomials. The issue of convergence of series is not discussed in the paper. In various formulations, the problem of elastic solid and hollow spheres is considered in the article [5] and the monograph [6]. The solutions are constructed in the form of series by spherical functions. There is no study of the convergence of the obtained series in the work. In [7], an elastic sphere subjected to concentrated forces is considered for the first time. The solution was divided into two groups of terms. The first of them specifies solutions that have a singularity, obtained by the limit transition from a uniformly distributed load in the vicinity of the poles of the sphere. The second group is ordinary solutions in the form of series for spherical functions. The issues of substantiation of the obtained solutions were not considered. In the monograph [8], a similar problem was solved by the method of eigen vector functions. The problem for a spherical inclusion in an unbounded elastic body was probably first considered in [9]. Solutions in the form of series in terms of spherical functions were used to analyze the influence of a small spherical inclusion on the perturbation of a homogeneous stress state in the body.

Let us dwell on the current state of the problem of an elastic sphere with various complications or space with spherical heterogeneity. In [10], simple types of loading of an infinite matrix with spherical inhomogeneity are considered – constant uniaxial and omnidirectional loading. An inclusion or a cavity is chosen as the inhomogeneity. The solutions to the problems are obtained by elementary methods. The displacement of the points of the surface of the inhomogeneity is given by the displacement of the points of the poles and the equator, which are directly related to the external load. The relationship between the displacements of the specified points and the stresses on the boundary of the inhomogeneity is carried out by the method of compatibility of deformations for statically indeterminate systems. In [11], the problem of displacement and rotation of a weakly deformed spherical rigid inclusion embedded in an unbounded elastic medium is considered. The surface of the inclusion is described as a perturbed spherical surface using a term that has the first order of a small parameter. The boundary condition for the displacement vector is set on the perturbed surface and includes the translation vector and the rotation vector. Series in tensor spherical functions and asymptotic series in a small parameter are used. The problem is divided into two separate problems for translations and rotations. The work [12] is devoted to the analysis of the influence of interfacial stresses on the elastic field inside a nanoscale inclusion. The problem is considered in a symmetric formulation. Goodier's approach is used to construct solutions to the Lamé equation in terms of two volumetric spherical functions. The displacement field in the matrix and inclusion is constructed explicitly, provided that the auxiliary harmonic functions are chosen in the simplest form – one or two harmonics. A similar approach was used in the article [13] to solve the problem of the stressed state of an elastic medium with a small spherical cavity. In [14], a closed-form solution is given for the stress fields around a rigid spherical nanoparticle under uniaxial tensile loading. The work explicitly takes into account the presence of an interfacial surface around the nanoparticle with a thickness comparable to the particle size and elastic properties different from those of the matrix. Only the principal terms of displacements and stresses in the matrix and the interfacial spherical layer are taken into account. In [15], the stress field in an infinite body with a spherical inclusion surrounded by a spherical ring embedded in an unbounded matrix phase is in-

investigated. The whole body is subjected to a uniform load in the far field. The approach used is to directly solve the Lamé equation, separately for the deviatoric part and the hydrostatic part of the far field deformations. The displacement is assumed to have a form directly proportional to the far-field deformation, with unknown functions that remain to be determined. Differential equations were obtained for the functions, which were solved analytically. The results were obtained in closed form. Studies of the stressed state of elastic space with a multicomponent system of spherical cavities or inclusions were investigated by the generalized Fourier method in articles [16 – 18]. More complete research results are presented in the monograph [19].

The above bibliographic review shows that the problem of symmetric loading of an elastic sphere with spherical inhomogeneity in a general formulation has not been considered, and the questions of justifying the obtained solutions of other problems for a sphere have not been posed at all.

General formulation of the problem. Consider a sphere centered at a point O of radius R_0 , which has a concentric spherical inclusion of radius R_1 ($R_1 < R_0$) made of another material. Let us introduce a spherical coordinate system (r, θ, φ) , the origin of which will be aligned with the point O . Let's mark the domains $\Omega_0 = \{(r, \theta, \varphi) : R_1 < r < R_0\}$, $\Omega_1 = \{(r, \theta, \varphi) : r < R_1\}$. We will assume that the material of the part of the sphere that occupies the domain Ω_j has mechanical characteristics (G_j, ν_j) ($j = 0 \div 1$), where G – shear modulus, ν – Poisson's ratio, the conditions of ideal mechanical contact are met on the inclusion surface.

Let us consider an axisymmetric boundary value problem in stresses for a piecewise homogeneous sphere $\Omega_0 \cup \Omega_1$, which is specified by the conditions:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{U}_j + \frac{1}{1-2\nu_j} \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \bar{U}_j) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_j, \quad j = 0 \div 1; \quad (1)$$

$$(\bar{U}_0)_{|r=R_1} = (\bar{U}_1)_{|r=R_1}, \quad (F\bar{U}_0)_{|r=R_1} = (F\bar{U}_1)_{|r=R_1}; \quad (2)$$

$$(F\bar{U}_0)_{|r=R_0} = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(r)} P_n(\cos \theta) \bar{e}_r + f_n^{(\theta)} P_n^1(\cos \theta) \bar{e}_\theta]. \quad (3)$$

Here $\bar{U}_j$ ($j = 0 \div 1$) denotes the displacement field in the domain Ω_j , $F\bar{U}_j$ is the stress vector on the surface $\Gamma_j = \{(r, \theta, \varphi) : r = R_j\}$ with the normal $\bar{n}_j = \bar{e}_r$, corresponding to the displacement vector $\bar{U}_j$, $\bar{\nabla}$ is the nabla operator, $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta\}$ is the unit vectors of the spherical coordinate system, $\bar{x}$ is a point in three-dimensional space whose Cartesian coordinates are related to the spherical coordinates (r, θ, φ) .

Reducing the problem to a resolving system. Let us solve the boundary value problem (1) – (3) by the usual Fourier method. We will use the results of work [20]. The general solution of equation (1) in the domain Ω_j ($j = 0 \div 1$) can be written as follows:

$$\bar{U}_0(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1,n}^{(0)} R_0^{-n+2} \bar{W}_{1,n}^-(r, \theta) + a_{2,n}^{(0)} R_0^{-n} \bar{W}_{2,n}^-(r, \theta)] + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1,n}^{(1)} R_1^{n+3} \bar{W}_{1,n}^+(r, \theta) + a_{2,n}^{(1)} R_1^{n+1} \bar{W}_{2,n}^+(r, \theta)], \quad \bar{x} \in \Omega_0, \quad (4)$$

$$\bar{U}_1(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_{1,n} R_1^{-n+2} \bar{W}_{1,n}^-(r, \theta) + b_{2,n} R_1^{-n} \bar{W}_{2,n}^-(r, \theta)], \quad \bar{x} \in \Omega_1, \quad (5)$$

where

$$\bar{W}_{1,n}^\pm(r, \theta) = \bar{\nabla} w_n^\pm(r, \theta), \quad \bar{W}_{2,n}^\pm(r, \theta) = \chi_n^\pm \bar{V}_n^\pm(r, \theta) - \zeta_n^\pm r^2 \bar{W}_{1,n}^\pm(r, \theta), \quad \bar{V}_n^\pm(r, \theta) = \bar{\nabla}[r^2 w_n^\pm(r, \theta)], \quad (6)$$

$$w_n^+(r, \theta) = r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad w_n^-(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta),$$

$$\chi_n^+ = n(4\nu - 3) + 2\nu - 2, \quad \chi_n^- = n(4\nu - 3) + 2\nu - 1, \quad \zeta_n^+ = (2n - 1)(2\nu - 2), \quad \zeta_n^- = (2n + 3)(2\nu - 2).$$

Here, the vector functions $\{\bar{W}_{1,0}^-(r, \theta), \bar{W}_{1,n}^-(r, \theta), \bar{W}_{2,n}^-(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{\bar{W}_{2,0}^-(r, \theta), \bar{W}_{1,n}^-(r, \theta), \bar{W}_{2,n}^-(r, \theta)\}_{n=1}^{\infty}$) form axisymmetric basis systems of solutions of the Lamé equation for the exterior (interior) of the sphere [20], $P_n(x)$ are Legendre polynomials, and $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$, $j = 0, 1$; $\{b_{i,n}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$ are unknown coefficients. Let us use the formulas obtained in [20] to represent the vectors $\bar{U}_j(\bar{x})$ and $F\bar{U}_j(\bar{x})$ in the form of an expansion over a spherical basis

$$\bar{U}_0(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(0)} \frac{r^{n-1}}{R_0^{n-2}} [n P_n(\cos \theta) \bar{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \bar{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(0)} \frac{r^{n+1}}{R_0^n} [\beta_{1,n}^{-(0)} P_n(\cos \theta) \bar{e}_r + \beta_{2,n}^{-(0)} P_n^1(\cos \theta) \bar{e}_\theta] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+2}} [-(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+1}}{r^n} [\beta_{1,n}^{+(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \beta_{2,n}^{+(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \quad (7)$$

$$\vec{U}_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n} \frac{r^{n-1}}{R_1^{n-2}} [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} \frac{r^{n+1}}{R_1^n} [\beta_{1,n}^{-(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \beta_{2,n}^{-(1)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \quad (8)$$

$$\frac{F\vec{U}_0}{2G_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(0)} \frac{r^{n-2}}{R_0^{n-2}} (n-1) [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(0)} \frac{r^n}{R_0^n} [\rho_{1,n}^{-(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{-(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+3}}{r^{n+3}} (n+2) [(n+1)P_n(\cos \theta) \vec{e}_r - P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}^{(1)} \frac{R_1^{n+1}}{r^{n+1}} [\rho_{1,n}^{+(0)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{+(0)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \quad (9)$$

$$\frac{F\vec{U}_1}{2G_1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n} \frac{r^{n-2}}{R_1^{n-2}} (n-1) [nP_n(\cos \theta) \vec{e}_r + P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta] + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2,n} \frac{r^n}{R_1^n} [\rho_{1,n}^{-(1)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + \rho_{2,n}^{-(1)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta], \quad (10)$$

where

$$\beta_{1,n}^{+(j)} = -n(n+3-4\nu_j), \quad \beta_{2,n}^{+(j)} = n+4\nu_j-4, \quad \beta_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n+4\nu_j-2), \quad \beta_{2,n}^{-(j)} = n-4\nu_j+5,$$

$$\rho_{1,n}^{+(j)} = n(n^2+3n-2\nu_j), \quad \rho_{2,n}^{+(j)} = -(n^2+2\nu_j-2), \quad \rho_{1,n}^{-(j)} = (n+1)(n^2-n-2\nu_j-2), \quad \rho_{2,n}^{-(j)} = n^2+2n+2\nu_j-1.$$

Let us substitute formulas (7) – (10) into the conjugation conditions (2) and the boundary condition (3). After equating the coefficients in the corresponding Legendre functions, we arrive at the algebraic system with respect to the unknowns $\{a_{i,n}^{(j)}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$, $\{b_{i,n}\}_{n=0,i=1}^{\infty,2}$

$$n \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n+4\nu_0-2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} - (n+1)a_{1,n}^{(1)} - n(n+3-4\nu_0)a_{2,n}^{(1)} = nb_{1,n} + (n+1)(n+4\nu_1-2)b_{2,n}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n-4\nu_0+5) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} + a_{1,n}^{(1)} + (n+4\nu_0-4)a_{2,n}^{(1)} = b_{1,n} + (n-4\nu_1+5)b_{2,n}, \quad (12)$$

$$(n+1)(n+2)a_{1,n}^{(1)} + n(n^2+3n-2\nu_0)a_{2,n}^{(1)} + n(n-1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n^2-n-2\nu_0-2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} =$$

$$= \frac{G_1}{G_0} [n(n-1)b_{1,n} + (n+1)(n^2-n-2\nu_1-2)b_{2,n}], \quad (13)$$

$$-(n+2)a_{1,n}^{(1)} - (n^2+2\nu_0-2)a_{2,n}^{(1)} + (n-1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + (n^2+2n+2\nu_0-1) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)} =$$

$$= \frac{G_1}{G_0} [(n-1)b_{1,n} + (n^2+2n+2\nu_1-1)b_{2,n}], \quad (14)$$

$$n(n-1)a_{1,n}^{(0)} + (n+1)(n^2-n-2\nu_0-2)a_{2,n}^{(0)} + (n+1)(n+2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} + n(n^2+3n-2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)}, \quad (15)$$

$$(n-1)a_{1,n}^{(0)} + (n^2+2n+2\nu_0-1)a_{2,n}^{(0)} - (n+2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} - (n^2+2\nu_0-2) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(\theta)}. \quad (16)$$

From the first two equations of the resulting system, we find $b_{1,n}, b_{2,n}$

$$b_{1,n} = \left[1 - \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] a_{1,n}^{(1)} + \left[\beta_{2,n}^{+(0)} - \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] a_{2,n}^{(1)} + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + \left[\beta_{2,n}^{-(0)} - \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} \beta_{2,n}^{-(1)} \right] \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)}, \quad (17)$$

$$b_{2,n} = \frac{(2n+1)}{\Delta_n^{-(1)}} a_{1,n}^{(1)} + \frac{n(2n-1)}{\Delta_n^{-(1)}} a_{2,n}^{(1)} + \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^n a_{2,n}^{(0)}, \quad (18)$$

where $\Delta_n^{-(j)} = 2[(3-4\nu_j)n+1-2\nu_j] > 0$.

Let us eliminate the unknowns $b_{1,n}, b_{2,n}$ from equations (13) – (16). After some transformations, we write

$$\left\{ 2[n^2 + (1-2\nu_0)n+1-\nu_0] + 2 \frac{G_1}{G_0} (n-1)[(3-4\nu_0)n+2-2\nu_0] \right\} a_{2,n}^{(1)} +$$

$$+ \left(1 - \frac{G_1}{G_0}\right) (n-1)(2n+1) \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n-2} a_{1,n}^{(0)} + \left(1 - \frac{G_1}{G_0}\right) (n-1)(n+1)(2n+3) \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = 0, \quad (19)$$

$$\left[n+2+2\frac{G_1}{G_0} \frac{[n^2+(1+2\nu_1)n+1+\nu_1]}{\Delta_n^{-(1)}} \right] \left[(2n+1)a_{1,n}^{(1)} + n(2n-1)a_{2,n}^{(1)} \right] +$$

$$+ \left[2\frac{G_1}{G_0} [n^2+(1+2\nu_1)n+1+\nu_1] \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} - 2[n^2+(1+2\nu_0)n+1+\nu_0] \right] \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^n a_{2,n}^{(0)} = 0. \quad (20)$$

$$(n-1)(2n+1)a_{1,n}^{(0)} + (n-1)(n+1)(2n+3)a_{2,n}^{(0)} + 2[n^2+(1-2\nu_0)n+1-\nu_0] \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)} + (n+1)f_n^{(\theta)}, \quad (21)$$

$$-2[n^2+(1+2\nu_0)n+1+\nu_0]a_{2,n}^{(0)} + (n+2)(2n+1) \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+3} a_{1,n}^{(1)} + n(n+2)(2n-1) \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^{n+1} a_{2,n}^{(1)} = f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}. \quad (22)$$

Analysis of the resolving system. Let us write the determinant of the resolving linear algebraic system (19) – (22) (the order of the rows of the determinant is given from the last equation to the first)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (n+2)(2n+1)\rho^{n+3} & n(n+2)(2n-1)\rho^{n+1} & 0 & -d_n^{+(0)} \\ 0 & d_n^{-(0)}\rho^{n+1} & \alpha_n & \beta_n \\ (2n+1)\Delta_n^{(3)} & n(2n-1)\Delta_n^{(3)} & 0 & \Delta_n^{(4)}\rho^n \\ 0 & \Delta_n^{(2)} & (1-G_{10})\alpha_n\rho^{n-2} & (1-G_{10})\beta_n\rho^n \end{vmatrix}, \quad (23)$$

where

$$d_n^{\pm(j)} = 2[n^2 + (1 \pm 2\nu_j)n + 1 \pm \nu_j], \quad \rho = \frac{R_1}{R_0}, \quad G_{10} = \frac{G_1}{G_0}, \quad \Delta_n^{(2)} = d_n^{-(0)} + 2G_{10}(n-1)[(3-4\nu_0)n+2-2\nu_0],$$

$$\Delta_n^{(3)} = n+2+G_{10}\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}, \quad \Delta_n^{(4)} = G_{10}\frac{\Delta_n^{-(0)}d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} - d_n^{+(0)}, \quad \alpha_n = (n-1)(2n+1), \quad \beta_n = (n-1)(n+1)(2n+3).$$

Let us expand the determinant (23) and write it as an expansion in powers of the variable G_{10}

$$\Delta_n = I_n^{(0)} + I_n^{(1)}G_{10} + I_n^{(2)}G_{10}^2, \quad (24)$$

where

$$I_n^{(0)} = -\alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n+3} - \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{-(0)}d_n^{+(0)}\rho^{2n+3} +$$

$$+ \alpha_n \beta_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\rho^{2n+1} + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)} +$$

$$+ \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} + \alpha_n n(2n-1)(n+2)^2(2n+1)\beta_n \rho^{2n+1} -$$

$$- \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n-1} - \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{2n-1}, \quad (25)$$

$$I_n^{(1)} = \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n+3} - \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+3} +$$

$$+ \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{-(0)}\frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}}d_n^{+(1)}\rho^{2n+3} - \alpha_n(n+2)(2n+1)(n-1)(\Delta_n^{-(0)}+2)d_n^{+(0)}\rho^{2n+3} -$$

$$- \alpha_n \beta_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\rho^{2n+1} + \alpha_n \beta_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+1} +$$

$$+ \alpha_n(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} + \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}(n-1)(\Delta_n^{-(0)}+2) -$$

$$- \alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} - \alpha_n(n+2)(2n+1)\frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}}d_n^{+(1)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} -$$

$$- \alpha_n n(2n-1)(n+2)^2(2n+1)\beta_n \rho^{2n+1} + \alpha_n n(2n-1)(n+2)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+1} -$$

$$+ \alpha_n n(n+2)^2(2n-1)(2n+1)\beta_n \rho^{2n-1} - \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n-1} +$$

$$+\alpha_n(n+2)(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\rho^{2n-1}-\alpha_n(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n-1}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} = & \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+3} + \alpha_n(n-1)(n+2)(2n+1)(\Delta_n^{-(0)}+2)\frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}}d_n^{+(1)}\rho^{2n+3} - \\ & -\alpha_n\beta_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+1} + \alpha_n(n-1)(2n+1)d_n^{+(0)}(\Delta_n^{-(0)}+2)\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} + \\ & +\alpha_n(n+2)(2n+1)\frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}}d_n^{+(1)}d_n^{-(0)}\rho^{4n+2} - \alpha_n n(2n-1)(n+2)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n+1} + \\ & +\alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n-1} + \alpha_n(2n+1)d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}\frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}}\rho^{2n-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Theorem 1. The multiparameter determinant Δ_n (23) for all values of the parameters $G_i > 0$, $v_i \in [-1; 0.5)$ ($i = 0, 1$), $\rho \in (0, 1)$, and an arbitrary natural number $n \geq 2$ is positive. Moreover, the inequality holds

$$\Delta_n > G_{10}^2(n^2 - 1)^3 n(2n + 1). \quad (28)$$

To prove the theorem, we first prove a new classical inequality.

Lemma 1. For $\rho \in [0, 1]$ and an arbitrary natural number n , the classical inequality holds

$$4(1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) \geq (2n-1)(2n+3)(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}). \quad (29)$$

Proof of the lemma. Let's factorize the expression

$$\begin{aligned} & 4(1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - (2n-1)(2n+3)(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) = \\ & = (1 - \rho)^2 \left[4 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho)^2 \right]. \end{aligned}$$

Let us prove that the expression in square brackets is non-negative. Since $(1 + \rho)^2 \leq 2(1 + \rho^2)$, it is actually sufficient to prove the inequality

$$2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho^2) \geq 0. \quad (30)$$

By replacing the summation indices in the product of series, it can be represented as

$$\sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k = \sum_{m=0}^{2n-2} (m+1)\rho^m + (2n-1) \sum_{m=2n-1}^{2n+2} \rho^m + \sum_{m=2n+3}^{4n} (4n+1-m)\rho^m. \quad (31)$$

We perform the identity transformation of the expression that is included in the left side of the inequality (30)

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho^2) = \sum_{m=1}^{2n-2} m(m+1) \left[\rho^{m-1}(1 - \rho) - \rho^{4n-m}(1 - \rho) \right] + \\ & + 2n(2n-1) \left[\rho^{2n-2}(1 - \rho) - \rho^{2n+1}(1 - \rho) \right] - (2n-1) \left[\rho^{2n-1}(1 - \rho) - \rho^{2n}(1 - \rho) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

All expressions in square brackets in (32) are non-negative at $\rho \in [0, 1]$. In addition,

$$\left[\rho^{2n-2}(1 - \rho) - \rho^{2n+1}(1 - \rho) \right] \geq \left[\rho^{2n-1}(1 - \rho) - \rho^{2n}(1 - \rho) \right].$$

Therefore, the inequality

$$2 \sum_{i=0}^{2n-2} \rho^i \sum_{k=0}^{2k+2} \rho^k - (2n-1)(2n+3)\rho^{2n-1}(1 + \rho^2) \geq 0, \quad (33)$$

holds, and the lemma is fulfilled with it.

Proof of the theorem. Let us prove that all coefficients $I_n^{(i)}$ ($i = 0 \div 2$) in formula (24) are either non-negative or positive for arbitrary values of the parameters specified in the conditions of the theorem. Let us transform $I_n^{(0)}$ to the following form

$$I_n^{(0)} = \alpha_n(n+2)(2n+1) \left[d_n^{+(0)}d_n^{-(0)}(1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - n(n+2)(2n-1)\beta_n(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) \right].$$

Using the result of the lemma, we can estimate

$$I_n^{(0)} \geq \alpha_n(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3) \left[\frac{1}{4}d_n^{+(0)}d_n^{-(0)} - n(n+2)(n-1)(n+1) \right] \rho^{2n-1}(1 - \rho^2)^2.$$

The expression in square brackets can be written as:

$$\frac{1}{4} d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} - n(n+2)(n-1)(n+1) = [n^2 + (1+2\nu_0)n+1+\nu_0][n^2 + (1-2\nu_0)n+1-\nu_0] - (n^2+2n)(n^2-1).$$

The smallest value of the previous expression as a function of the parameter ν_0 on the interval $\nu_0 \in [-1; 0,5)$ is taken at $\nu_0 = -1$ and it is equal to zero. Therefore,

$$I_n^{(0)} \geq 0. \quad (34)$$

In addition, the inequality

$$\left[d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - n(n+2)(2n-1)\beta_n(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) \right] \geq 0. \quad (35)$$

is proved.

Now let's convert the coefficient $I_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} = & \alpha_n(2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \left[d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (1 - \rho^{2n-1} - \rho^{2n+3} + \rho^{4n+2}) - \right. \\ & \left. - n(n+2)(2n-1)\beta_n(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) \right] + \alpha_n(2n+1) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n-3} - \rho^{4n+2}) + \\ & + \alpha_n(2n+1) \left[(n-1)(n+2) d_n^{+(0)} (\Delta_n^{-(0)} + 2)(1 - \rho^{2n+3}) + (n+2) d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n-1} - \rho^{4n+2}) + \right. \\ & \left. + n(n+2)^2 (2n-1)\beta_n(\rho^{2n-1} - 2\rho^{2n+1} + \rho^{2n+3}) + (n+2) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} d_n^{-(0)} (\rho^{2n+3} - \rho^{4n+2}) \right]. \end{aligned}$$

Due to inequality (35), the first term of the previous formula is nonnegative, and all the others are positive.

The coefficient $I_n^{(2)}$ can be written as:

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} = & \alpha_n n(n+2)(2n-1)(2n+1)\beta_n \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1} (1 - \rho^2)^2 + \alpha_n (n-1)(n+2)(2n+1)(\Delta_n^{-(0)} + 2) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} \rho^{2n+3} + \\ & + \alpha_n (n-1)(2n+1) d_n^{+(0)} (\Delta_n^{-(0)} + 2) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} + \alpha_n (2n+1) d_n^{+(0)} d_n^{-(0)} \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} \rho^{2n-1} + \alpha_n (n+2)(2n+1) \frac{\Delta_n^{-(0)}}{\Delta_n^{-(1)}} d_n^{+(1)} d_n^{-(0)} \rho^{4n+2}. \end{aligned}$$

From this expression of the coefficient $I_n^{(2)}$ it follows that all its terms are positive and, as a consequence,

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} & > \alpha_n(2n+1)(n-1) d_n^{+(0)} (\Delta_n^{-(0)} + 2) \frac{d_n^{+(1)}}{\Delta_n^{-(1)}} = \\ & = 4(n-1)^2 (2n+1)^2 [n^2 + (1+2\nu_0)n+1+\nu_0] [(3-4\nu_0)n+2-2\nu_0] \frac{n^2 + (1+2\nu_1)n+1+\nu_1}{(3-4\nu_1)n+1-2\nu_1}. \end{aligned}$$

The minimum value of the last expression at $\nu_i \in [-1; 0,5)$ ($i = 0,1$) is equal to

$$4(n-1)^2 (2n+1)^2 [n^2 + 2n + 3/2] (n+1) \frac{n^2 - n}{7n+3} > (n^2 - 1)^3 n(2n+1),$$

which finally proves the theorem.

Theorem 1 makes it possible to reasonably construct an exact solution to problem (1) – (3).

Theorem 2. *If the series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|f_n^{(r)}| + n |f_n^{(\theta)}|), \quad (36)$$

converges and external load

$$\vec{f}(\theta) = 2G_0 \sum_{n=0}^{\infty} [f_n^{(r)} P_n(\cos \theta) \vec{e}_r + f_n^{(\theta)} P_n^1(\cos \theta) \vec{e}_\theta],$$

acting on the surface Γ_0 of the sphere $\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}$, is balanced

$$\oint_{\Gamma_0} (\vec{f}(\theta), \vec{e}_z) dS = 0, \quad (37)$$

then there exists a unique solution to problem (1) – (3) up to the rigid displacement vector, which has the form

$$\bar{U}(r, \theta) = \begin{cases} \bar{U}_0(r, \theta), & R_1 < r < R_0, \\ \bar{U}_1(r, \theta), & 0 \leq r < R_1 \end{cases} \quad (38)$$

and belongs to space $C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap C^1(\Omega_0 \cup \overline{\Omega_1}) \cap C(\overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_1})$. Vector functions $\bar{U}_0, \bar{U}_1$ are given by formulas (4), (5).

Proof of the theorem. Let us analyze the solution system of equations (19) – (22) separately for $n = 0$, $n = 1$ and $n \geq 2$.

For $n = 0$ there are no equations after equating the coefficients for $P_0^1 \equiv 0$, therefore, we have only three equations

$$-a_{1,0}^{(1)} + (4\nu_0 - 2)a_{2,0}^{(0)} = (4\nu_1 - 2)b_{2,0}, \quad (39)$$

$$2a_{1,0}^{(1)} - (2 + 2\nu_0)a_{2,0}^{(0)} = -G_{10}(2 + 2\nu_1)b_{2,0}, \quad (40)$$

$$-(2 + 2\nu_0)a_{2,0}^{(0)} + 2\rho^3 a_{1,0}^{(1)} = f_0^{(r)}. \quad (41)$$

System (39) – (41) has a unique solution

$$a_{2,0}^{(0)} = -\left(1 + G_{10} \frac{1 + \nu_1}{2 - 4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0}, \quad a_{1,0}^{(1)} = -(1 + \nu_0) \left(1 + G_{10} \frac{1 + \nu_1}{2 - 4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0} \rho^{-3} + \frac{f_0^{(r)}}{2} \rho^{-3}, \quad (42)$$

$$b_{2,0} = \frac{1}{2 - 4\nu_1} \left[-(1 + \nu_0) \left(1 + G_{10} \frac{1 + \nu_1}{2 - 4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0} \rho^{-3} + \frac{f_0^{(r)}}{2} \rho^{-3} \right] - \frac{2 - 4\nu_0}{2 - 4\nu_1} \left(1 + G_{10} \frac{1 + \nu_1}{2 - 4\nu_1}\right) \frac{f_0^{(r)}}{2\bar{\Delta}_0}, \quad (43)$$

where

$$\bar{\Delta}_0 = (1 + \nu_0)(1 - \rho^3) + \frac{1 + \nu_1}{2 - 4\nu_1} G_{10} [1 + \nu_0 + (2 - 4\nu_0)\rho^3] > 0.$$

Since the solutions $\bar{W}_{2,0}^+(r, \theta) \equiv 0$, $\bar{W}_{1,0}^-(r, \theta) \equiv 0$, then the coefficients $a_{2,0}^{(1)}$, $a_{1,0}^{(0)}$ and $b_{1,0}$ can be chosen arbitrarily.

The resolving system for $n = 1$ has the form

$$\rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + 2(4\nu_0 - 1)\rho a_{2,1}^{(0)} - 2a_{1,1}^{(1)} - (4 - 4\nu_0)a_{2,1}^{(1)} = b_{1,1} + 2(4\nu_1 - 1)b_{2,1}, \quad (42)$$

$$\rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + (6 - 4\nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} + a_{1,1}^{(1)} + (4\nu_0 - 3)a_{2,1}^{(1)} = b_{1,1} + (6 - 4\nu_1)b_{2,1}, \quad (43)$$

$$6a_{1,1}^{(1)} + (4 - 2\nu_0)a_{2,1}^{(1)} - 4(1 + \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = -4G_{10}(1 + \nu_1)b_{2,1}, \quad (44)$$

$$-3a_{1,1}^{(1)} + (1 - 2\nu_0)a_{2,1}^{(1)} + 2(1 + \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = 2G_{10}(1 + \nu_1)b_{2,1}, \quad (45)$$

$$6(1 - \nu_0)\rho^2 a_{2,1}^{(1)} = f_1^{(r)} + 2f_1^{(\theta)}, \quad (46)$$

$$-2(1 + \nu_0)a_{2,1}^{(0)} + 3\rho^4 a_{1,1}^{(1)} + \rho^2 a_{2,1}^{(1)} = (f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}) / 3. \quad (47)$$

Note that the statics condition (37) for the external load leads to the following relation:

$$f_1^{(r)} + 2f_1^{(\theta)} = 0.$$

Then from equation (46) it follows that $a_{2,1}^{(1)} = 0$. Two equations (44), (45) are proportional, so one of them must be eliminated. There remains a system of four equations (42), (43), (45), (47) with respect to the unknowns $a_{1,1}^{(1)}$, $a_{1,1}^{(0)}$, $a_{2,1}^{(0)}$, $b_{2,1}$. The variable $b_{1,1}$ is free and can take on any values. The term with it in the general solution corresponds to the rigid displacement vector. We fix the center of the sphere and then $b_{1,1} = 0$. After substituting into the previous system $a_{2,1}^{(1)} = 0$, $b_{1,1} = 0$ and simplifying, we obtain

$$b_{2,1} = \frac{3}{10} \rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + \rho a_{2,1}^{(0)}, \quad (48)$$

$$a_{1,1}^{(1)} + \left[1 - \frac{3}{10}(6 - 4\nu_1)\right] \rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + 4(\nu_1 - \nu_0)\rho a_{2,1}^{(0)} = 0, \quad (49)$$

$$-3a_{1,1}^{(1)} - \frac{3}{10} G_{10}(2 + 2\nu_1)\rho^{-1} a_{1,1}^{(0)} + [2 + 2\nu_0 - G_{10}(2 + 2\nu_1)]\rho a_{2,1}^{(0)} = 0, \quad (50)$$

$$3\rho^4 a_{1,1}^{(1)} - 2(1 + \nu_0)a_{2,1}^{(0)} = \frac{1}{3}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}). \quad (51)$$

System (48) – (51) has the determinant

$$\bar{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 1 & \left[1 - \frac{3}{10}(6 - 4\nu_1)\right]\rho^{-1} & 4(\nu_1 - \nu_0)\rho \\ -3 & -\frac{3}{10}G_{10}(2 + 2\nu_1)\rho^{-1} & [2 + 2\nu_0 - G_{10}(2 + 2\nu_1)]\rho \\ 3\rho^4 & 0 & -2(1 + \nu_0) \end{vmatrix} =$$

$$= 6(1 + \nu_0)\frac{8 - 12\nu_1}{10}(\rho^{-1} - \rho^4) + \frac{12}{10}G_{10}(1 + \nu_0)(1 + \nu_1)\rho^{-1} + 6G_{10}\frac{8 - 12\nu_0}{10}(1 + \nu_1)\rho^4. \quad (52)$$

Formula (52) shows that the determinant $\bar{\Delta}_1$ is positive. Therefore, the system (48) – (51) has a unique solution

$$a_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{15\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[-(8 - 12\nu_1)(1 + \nu_0) + G_{10}(8 - 12\nu_0)(1 + \nu_1)], \quad (53)$$

$$a_{1,1}^{(0)} = -\frac{2}{3\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[1 + 6\nu_1 - 5\nu_0 - G_{10}(1 + \nu_1)]\rho, \quad (54)$$

$$a_{2,1}^{(0)} = -\frac{1}{5\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)})[4 - 6\nu_1 + G_{10}(1 + \nu_1)]\rho^{-1}, \quad b_{2,1} = -\frac{1 - \nu_0}{\bar{\Delta}_1}(f_1^{(r)} - f_1^{(\theta)}). \quad (55)$$

Now consider the resolving system at $n \geq 2$. Since by Theorem 1 the determinant of the system is positive, the system has a unique solution, which looks like this:

$$a_{1,n}^{(1)} = \frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} \left\{ \alpha_n \Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(4)} \rho^n + (1 - G_{10})[\alpha_n n(2n - 1)\beta_n \Delta_n^{(3)}(\rho^{n-2} - \rho^n) - \alpha_n d_n^{-(0)} \Delta_n^{(4)} \rho^{3n-1}] \right\} +$$

$$+ \frac{f_n^{(r)} + (n + 1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})[\alpha_n n(2n - 1)\Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} \rho^{n-2} + \alpha_n n(n + 2)(2n - 1)\Delta_n^{(4)} \rho^{3n-1}], \quad (56)$$

$$a_{2,n}^{(1)} = -\frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})\alpha_n (2n + 1)\beta_n \Delta_n^{(3)}(\rho^{n-2} - \rho^n) -$$

$$-\frac{f_n^{(r)} + (n + 1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})[\alpha_n (2n + 1)\Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} \rho^{n-2} + \alpha_n (n + 2)(2n + 1)\Delta_n^{(4)} \rho^{3n+1}], \quad (57)$$

$$a_{1,n}^{(0)} = \frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} [(2n + 1)\beta_n \Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} - (1 - G_{10})(2n + 1)\beta_n \Delta_n^{(3)} d_n^{-(0)} \rho^{2n+1}] +$$

$$+ \frac{f_n^{(r)} + (n + 1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} \left[(2n + 1)\Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} d_n^{+(0)} + (n + 2)(2n + 1)\Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(4)} \rho^{2n+3} + \right.$$

$$\left. + (1 - G_{10})n(n + 2)(2n - 1)(2n + 1)\beta_n \Delta_n^{(3)}(\rho^{2n+1} - \rho^{2n+3}) \right], \quad (58)$$

$$a_{2,n}^{(0)} = -\frac{f_n^{(r)} - nf_n^{(\theta)}}{\Delta_n} [\alpha_n (2n + 1)\Delta_n^{(2)} \Delta_n^{(3)} - (1 - G_{10})\alpha_n (2n + 1)\Delta_n^{(3)} d_n^{-(0)} \rho^{2n-1}] -$$

$$-\frac{f_n^{(r)} + (n + 1)f_n^{(\theta)}}{\Delta_n} (1 - G_{10})\alpha_n n(n + 2)(2n - 1)(2n + 1)\Delta_n^{(3)}(\rho^{2n-1} - \rho^{2n+1}). \quad (59)$$

From formulas (56) – (59) and Theorem 1, we obtain estimates of the coefficients of the constructed solutions (4), (5) at $n \geq 2$

$$|a_{1,n}^{(1)}| < C_1(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|)\rho^{n-2}, \quad |a_{2,n}^{(1)}| < C_2 n^{-1}(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|)\rho^{n-2}, \quad |a_{1,n}^{(0)}| < C_3 n^{-1}(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|),$$

$$|a_{2,n}^{(0)}| < C_4 n^{-2}(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|), \quad |b_{1,n}| < C_5 n(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|)\rho^{n-2}, \quad |b_{2,n}| < C_6(|f_n^{(r)}| + n|f_n^{(\theta)}|)\rho^{n-2},$$

where $(C_k)_{k=1}^6$ are positive constants that do not depend on n . These estimates ensure absolute and uniform convergence of the series in formulas (4), (5) in the sphere up to its boundary, as well as the fulfillment of the condition $\bar{U} \in C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap C^1(\Omega_0 \cup \Omega_1) \cap C(\Omega_0 \cup \Omega_1)$. So, the theorem is proven.

Computer experiment. Problem (1) – (3) was solved numerically under the following conditions: the ball material was chosen to be steel with elastic constants $G_0 = 82$ GPa, $\nu_0 = 0.28$, the inclusion materials were chosen to be brass ($G_1 = 35.2$ GPa, $\nu_1 = 0.35$) or aluminum ($G_1 = 26$ GPa, $\nu_1 = 0.34$).

The first type of load. The external load on the surface of the sphere is given by a vector function $\vec{f}(\theta) = -\sigma \sin \theta \vec{e}_r$ (it is automatically balanced). Fig. 1 shows the distribution of normal stresses on the surface of a brass inclusion depending on the relative size of the inclusion $\rho = R_1 / R_0$. Naturally, the maximum modulus of compressive stresses on the surface of an inclusion act in its equatorial region, and they are greater the larger the relative size of the inclusion. At the poles of the inclusion, on the contrary, the greatest modulus of stress is observed at the smallest relative size of the inclusion.

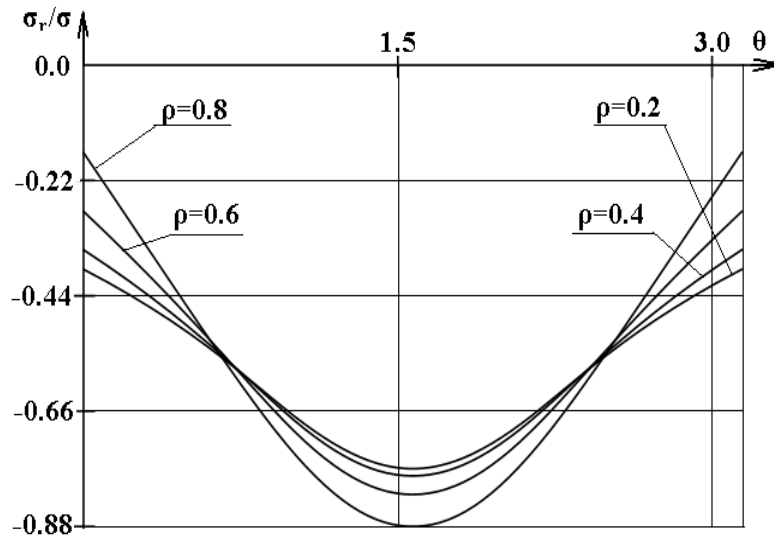


Fig. 1 – Stress graphs on the surface of the brass inclusion. The first type of load.

Fig. 2 shows the distribution of normal stresses on the surface of an aluminum inclusion. The external load is the same as in the previous case. The nature of the stresses remains unchanged, and the absolute values of the stresses change by a small amount. A fundamentally different situation is observed when the materials of the inclusion and the outer sphere are interchanged. Fig. 3 shows the graphs of normal stresses on the surface of the inclusion when the materials of the sphere and the inclusion are aluminum and steel, respectively. Now the maximum modulus of compressive stress is observed at the smallest ratio of the radii $\rho = R_1 / R_0$ of the inclusion and the sphere.

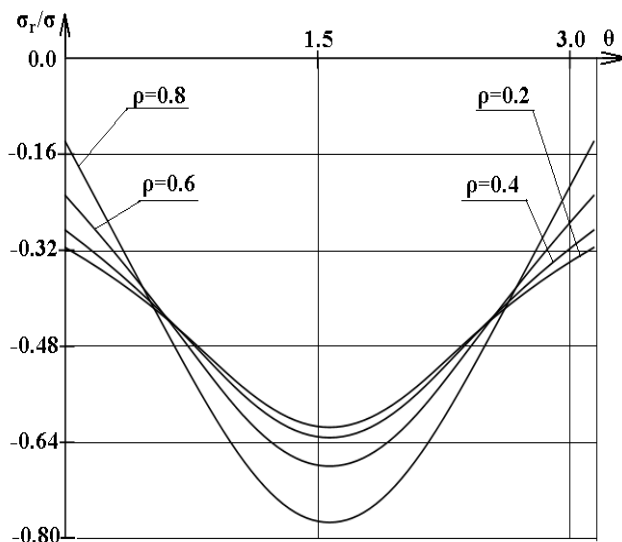


Fig. 2 – Stress graphs σ_r / σ on the surface of an aluminum inclusion. The first type of load.

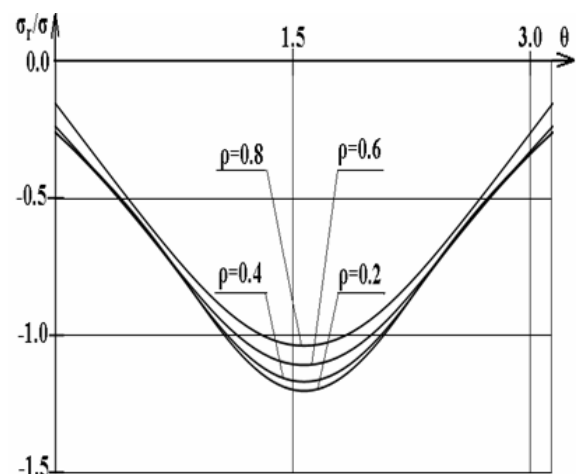


Fig. 3 – Stress graphs σ_r / σ on the surface of a steel inclusion. The first type of load.

The second type of load. Fig. 4, 5 shows the distribution of tangential and normal stresses on the surface of the inclusion (inclusion material is brass) under an external load on the surface of the sphere, which is described by the vector function $\vec{f}(\theta) = \sigma[3 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_r + \sin^2 \theta \vec{e}_\theta]$. Unlike the first type of load, each component of $\vec{f}(\theta)$ is not balanced, but the entire vector satisfies the static condition (37). The tangential stresses and the moduli of normal stresses increase

with increasing relative size of the inclusion. The nature of the normal stresses differs from the previous case and is determined by the peculiarity of the external load. With a large relative size of the inclusion, a region is observed on its surface in the vicinity of the poles where the sign of the normal stress differs from the sign of the load.

The practical convergence rate of the method is shown in Tables 1, 2 using the example of calculating normal and tangential stresses on the surface of the inclusion at $\rho = 0.8$ (the second type of load). Here $n_{\max}$ (convergence parameter) is the upper limit of summation when replacing infinite sums with finite ones. The lowest accuracy is observed when calculating $\sigma_r(0)/\sigma$ at $n_{\max} = 30$. It is equal to 0.05 %.

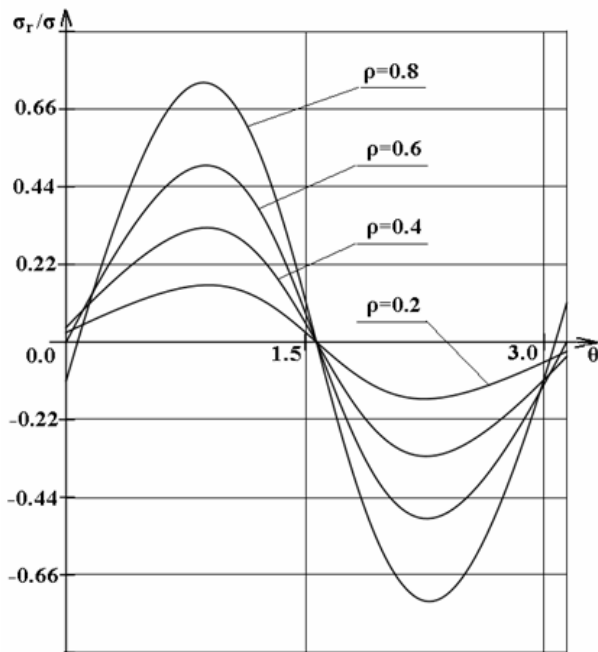


Fig. 4 – Graphs of stresses σ_r/σ on the surface of the inclusion. The second type of load.

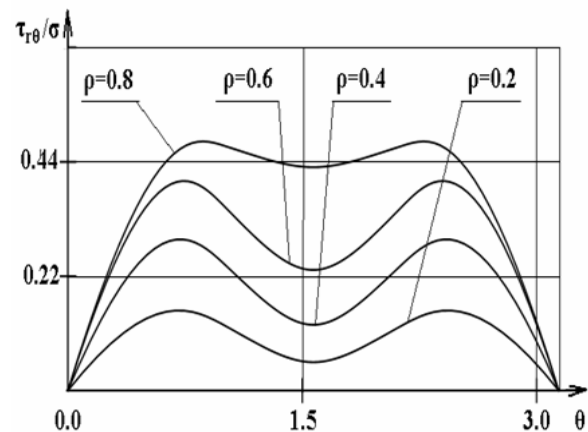


Fig. 5 – Graphs of stresses $\tau_{r\theta}/\sigma$ on the surface of the inclusion. The second type of load.

Table 1 – Practical convergence of the method when calculating $\sigma_r(\theta)/\sigma$, $\rho = 0.8$

$n_{\max} \setminus \theta$	0	$\pi/6$	$\pi/3$
30	-0.10743	0.69313	0.87618
40	-0.10752	0.69314	0.87618
50	-0.10753	0.69314	0.87618

Table 2 – Practical convergence of the method when calculating $\tau_{r\theta}(\theta)/\sigma$, $\rho = 0.8$

$n_{\max} \setminus \theta$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
30	0.50210	0.45777	0.40011
40	0.50210	0.45777	0.40011
50	0.50210	0.45777	0.40011

Prospects for further research. The results obtained in the work can be applied to solving a number of problems important for practice: on elastic space with a spherical layer, on a layered piecewise homogeneous sphere, on a sphere with an inclusion under the action of concentrated forces. A separate direction of research is associated with non-concentric spheres and spherical heterogeneity.

Conclusions. For the first time, an exact analytically justified solution of a classical problem of the theory of elasticity – the second axisymmetric boundary value problem in the general formulation for a sphere with a concentric spherical inclusion – was obtained using the Fourier method. The justification for the solution of such a problem and the establishment of its solvability class by the usual Fourier method is based on the analysis of a solvable algebraic system of the sixth order with coefficients that depend on five independent continuous parameters and one discrete one. The general solution of the problem is given in the form of series in terms of axisymmetric vector basis solutions of the Lamé

equation for a sphere, constructed by the authors in one of the previous articles. After transitioning to stresses and satisfying the boundary conditions, a solution system of the above form is obtained. When analyzing the system, a lower estimate for the modulus of its determinant was found for the first time, from which not only the condition for the unique solvability of the system follows, but also estimates of the solutions of the system itself. When estimating the determinant, a new classical inequality was proved for one continuous and one discrete parameter. The next step was to prove a theorem about the conditions that must be imposed on the vector of the external load applied to the surface of the sphere, which ensure the existence of a solution to the problem in a certain class of functions. In the numerical implementation of the solution to the problem, two types of loads on the outer surface of the sphere were considered, which satisfy the equilibrium condition. In the numerical implementation of the solution to the problem, two types of loads on the outer surface of the sphere were considered, which satisfy the equilibrium condition. A computer experiment was conducted with three materials of the ball and the inclusion: steel, brass, aluminum. Graphs of normal and tangential stresses on the surface of the inclusion were obtained, their parametric analysis was performed depending on the geometric and mechanical parameters. The practical convergence of the method was investigated.

Bibliography

1. *Lame M. G. Lecons Theorie Mathematique. L'elasticite des corps solides.* – Paris: Bachelier, Imprimeur – Libraire, 1852. – 335 p.
2. *Thomson W.* Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* – 1863. – Vol. 153. – pp. 583 – 616.
3. *Somigliana C.* Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.* – 1887. – S.1. – Vol. 4. – pp. 101 – 172.
4. *Cerruti V.* Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superficie limiti // *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Mem. della Classe di Sc. Fisiche, Matematiche e Naturali.* – 1891. – Ser. 4. – Vol. 7. – An. 287. – pp. 25 – 44.
5. *Lur'e A. I.* Equilibrium of an elastic hollow sphere // *Applied Mathematics and Mechanics.* – 1953. – Vol. 17. – no. 3. – pp. 311 – 325.
6. *Lur'e A. I.* Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity. – New Yor: Interscience Publishers, 1964. – 493 p.
7. *Strenberg E., Rosental F.* The elastic sphere under concentrated loads // *Journal of Applied Mechanics.* – 1953. – Vol. 19. – No. 1. – pp. 413 – 424.
8. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев : Наук. думка, 1979. – 264 с.
9. *Goodier J. N.* Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws // *ASME Journal of Applied Mechanics.* – 1933. – Vol. 55. – No. 7. – pp. 39 – 44.
10. *Amstutz H., Vormwald M.* Elastic spherical inhomogeneity in an infinite elastic solid: an exact analysis by an engineering treatment of the problem based on the corresponding cavity solution // *Archive of Applied Mechanics.* – 2021. – Vol. 91. – pp. 1577 – 1603. DOI: 10.1007/s00419-020-01842-9.
11. *Rahman M.* The stiffness of an elastic solid with an embedded, nominally spherical inclusion subjected to a small arbitrary motion // *International Journal of Solids and Structures.* – 2006. – Vol. 43. – pp. 2542 – 2577. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.042.
12. *Lim C. W., Li Z. R., He L. H.* Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress // *International Journal of Solids and Structures.* – 2006. – Vol. 43. – pp. 5055 – 5065. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.007.
13. *Li Z. R., Lim C. W., He L. H.* Stress concentration around a nano-scale spherical cavity in elastic media: effect of surface stress // *European Journal of Mechanics A/Solids.* – 2006. – Vol. 25. – pp. 260 – 270. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2005.09.005.
14. *Zappalorto M., Salvato M., Quaresimin M.* Stress distributions around rigid nanoparticles // *International Journal of Fracture.* – 2012. – Vol. 176. – No. 1. – pp. 105 – 112. DOI: 10.1007/s10704-012-9714-2.
15. *Nomura S.* Stress fields for a three-phase spherical inclusion problem // *Acta Mechanica.* – 2021. – Vol. 232. – No. 4. – pp. 2843 – 2851. DOI: 10.1007/s00707-021-02986-7.
16. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // *Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Сер. : Математика, прикладная математика и механика.* – 2010. – Т. 922. – С. 4 – 19.
17. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Модель зернистого композита со сферическими зёрнами // *Вісник національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 141 – 152.
18. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Трехмерная периодическая модель зернистого композиционного материала // *Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла : зб. наук. праць.* – Дніпро : Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 287 – 293.
19. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Упругая механика многокомпонентных тел : монография. – Харьков : Национальный аэрокосм. ун-т «Харьковский авиационный институт», 2014. – 272 с.
20. *Николаев А. Г., Скіцка М. В.* Локальна модель термопружного стану пористого матеріалу // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* – 2023. – № 1. – С. 92 – 100. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24.

References (transliterated)

1. *Lame M. G. Lecons Theorie Mathematique. L'elasticite des corps solides.* Paris, Bachelier, Imprimeur – Libraire, 1852. 335 p.
2. *Thomson W.* Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* 1863, Vol. 153, pp. 583–616.
3. *Somigliana C.* Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze.* 1887, S.1, Vol. 4, pp. 101–172.
4. *Cerruti V.* Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superficie limiti. *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Mem. della Classe di Sc. Fisiche, Matematiche e Naturali.* 1891, Ser. 4, Vol. 7, An. 287, pp. 25–44.
5. *Lur'e A. I.* Equilibrium of an elastic hollow sphere. *Applied Mathematics and Mechanics.* 1953, Vol. 17, no. 3, pp. 311–325.
6. *Lur'e A. I.* *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity.* New Yor, Interscience Publishers, 1964. 493 p.
7. *Strenberg E., Rosental F.* The elastic sphere under concentrated loads. *Journal of Applied Mechanics.* 1953, Vol. 19, No. 1, pp. 413–424.

8. Ulitko A. F. *Metod sobstvennykh vektornykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti* [The Method of Eigenvector Functions in Three-Dimensional Problems of Elasticity Theory]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1979. 264 p.
9. Goodier J. N. Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1933, Vol. 55, No. 7, pp. 39–44.
10. Amstutz H., Vormwald M. Elastic spherical inhomogeneity in an infinite elastic solid: an exact analysis by an engineering treatment of the problem based on the corresponding cavity solution. *Archive of Applied Mechanics*. 2021, Vol. 91, pp. 1577–1603. DOI: 10.1007/s00419-020-01842-9.
11. Rahman M. The stiffness of an elastic solid with an embedded, nominally spherical inclusion subjected to a small arbitrary motion. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, pp. 2542–2577. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.042.
12. Lim C. W., Li Z. R., He L. H. Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, pp. 5055–5065. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.007.
13. Li Z. R., Lim C. W., He L. H. Stress concentration around a nano-scale spherical cavity in elastic media: effect of surface stress. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2006, Vol. 25, pp. 260–270. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2005.09.005.
14. Zappalorto M., Salvati M., Quaresimin M. Stress distributions around rigid nanoparticles. *International Journal of Fracture*. 2012, Vol. 176, No. 1, pp. 105–112. DOI: 10.1007/s10704-012-9714-2.
15. Nomura S. Stress fields for a three-phase spherical inclusion problem. *Acta Mechanica*. 2021, Vol. 232, No. 4, pp. 2843–2851. DOI: 10.1007/s00707-021-02986-7.
16. Nikolaev O. G., Tanchyk Ye. A. Lokal'naya matematicheskaya model' zernistogo kompozitsionnogo materiala [A local mathematical model of a granular composite material]. *Vestnik Kharkovskogo natsional'nogo universiteta im. V. N. Karazina. Ser. : Matematika, prikladnaya matematika i mekhanika* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. : Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics]. 2010, vol. 922, pp. 4–19.
17. Nikolaev O. G., Tanchyk Ye. A. Model' zernistogo kompozita so sfericheskimi zernami [A model of a granular composite with spherical grains]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyak* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 39 (1082), pp. 141–152.
18. Nikolaev O. G., Tanchyk E. A. Trekhmernaya periodicheskaya model' zernistogo kompozitsionnogo materiala [Three-dimensional periodic model of a granular composite material]. *Metody rozv'yazannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnogo tverdogo tila. Zbirnyk naukovykh prats'* [Methods for solving applied problems of deformable solid mechanics: collection of scientific works]. Dnipro, Dnipropetrovsk'yy natsional'nyy yn-t im. O. Gonchara, Lira Publ., 2012, vol. 13, pp. 287–293.
19. Nikolaev O. G., Tanchyk E. A. *Uprugaya mekhanika mnogokomponentnykh tel : monografiya*. [Elastic mechanics of multicomponent bodies: Monograph]. Kharkiv, Natsional'nyy aerokosmicheskyy yn-t "Khar'kovskiy aviatsionnyy institut" Publ., 2014. 272 p.
20. Nikolaev O. G., Skitska M. V. Lokal'na model' termopruzhnogo stanu porystogo materialu [A local model of the thermomechanical state of a porous material]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyak* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, No. 1, pp. 92–100. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.24.

Надійшла (received) 12.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Ніколаєв Олексій Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Nikolaev Oleksii Georhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (067) 996-04-92; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7351-1392>; e-mail: a.nikolaev@khai.edu.

Скіцка Марія Вікторівна – аспірантка кафедри вищої математики та системного аналізу, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (095) 596-30-79; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8945-6069>; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Skitska Mariia Viktorivna – postgraduate student at the Department of Higher Mathematics and System Analysis, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv; tel.: (095) 596-30-79; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8945-6069>; e-mail: m.skitska@khai.edu.

Н. В. СТУЧИНСЬКА, М. Д. АНДРІЙЧУК, П. В. МИКИТЕНКО

ОПТИМІЗАЦІЯ ВИРОБНИЧИХ ТА ЛОГІСТИЧНИХ ЗАДАЧ У ФАРМАЦІЇ ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У статті представлено комплексне дослідження, що поєднує теоретичні та практичні аспекти застосування методів математичного моделювання у фармації, можливостей його використання для підвищення ефективності виробничих процесів, оптимізації логістичних рішень і вдосконалення процесу фахової підготовки майбутніх фармацевтів. Здійснено аналіз потреб та можливостей використання методів математичного та комп'ютерного моделювання для раціоналізації процесів розроблення нових препаратів та доведення фармацевтичних засобів і виробів медичного призначення від виробничої до споживчої сфери. Проведено огляд наукових публікацій у контексті розвитку методів математичного програмування від підходів Ж. Лагранжа до сучасних методів лінійного та нелінійного програмування, що знайшли широке застосування в економіці та фармацевтичній галузі. Особливу увагу приділено математичному моделюванню оптимального розподілу ресурсів і транспортної логістики у фармації. Розглянуто роль систем комп'ютерної математики (СКМ), таких як MathCad, у спрощенні процесу розв'язання оптимізаційних задач. Завдяки можливості оперативного змінення вихідних параметрів (запаси сировини, собівартість продукції тощо), програма MathCad дає змогу ефективно моделювати різні сценарії виробництва та логістики у фармації, швидко обчислювати задачі лінійного та нелінійного програмування, автоматизуючи розрахунки та мінімізуючи ризик помилок. В рамках дослідження продемонстровано методику розв'язання оптимізаційної задачі виробництва ліків. Цільовою функцією є максимальний прибуток від реалізації. Також запропоновано методику розв'язання типової транспортної задачі, що передбачає мінімізацію витрат на перевезення товару від декількох складів до декількох споживачів з урахуванням обмежень на ресурси. Використано метод потенціалів, що забезпечує коригування транспортних маршрутів з метою зниження загальних логістичних витрат. Розглянуто дидактичний аспект застосування математичних моделей у підготовці майбутніх магістрів фармації. Використання комп'ютерного моделювання в навчальному процесі сприяє розвитку аналітичного мислення та навичок роботи з оптимізаційними методами, що є важливими для ефективного управління ресурсами у фармацевтичній галузі. Автори обґрунтовують доцільність реалізації на практичних заняттях з дисципліни «Комп'ютерне моделювання у фармації» реальних задач фармацевтичної галузі, які є важливим засобом формування професійних компетентностей майбутніх працівників фармацевтичної сфери. Отримані результати вказують на ефективність використання методів математичного програмування для вирішення задач оптимізації у фармації. Використання математичних моделей дає змогу точніше прогнозувати попит, планувати виробничі потужності та логістичні процеси, що, в свою чергу, зменшує ризики браку або надлишків продукції. Подальший розвиток математичних методів та комп'ютерних технологій відкриває перспективи для модернізації процесів розроблення, виробництва та постачання лікарських засобів і виробів медичного призначення, їх раціонального використання для фармацевтичної опіки та підвищення якості медичної допомоги населенню.

Ключові слова: лінійне програмування, моделювання, імітаційне моделювання, оптимізація, екстремальні задачі, цільова функція, метод потенціалів, MathCad.

N. V. STUCHYNSKA, M. D. ANDRIICHUK, P. V. MYKYTENKO

OPTIMIZATION OF PRODUCTION AND LOGISTICS TASKS IN PHARMACY USING MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING

This publication provides an analysis of the development of mathematical programming from the approaches of J. Lagrange to modern methods of linear and nonlinear programming, which have found widespread application in the economy and the pharmaceutical industry. Special attention is given to mathematical modeling of optimal resource distribution and transport logistics in pharmacy. The role of computer mathematics systems (CMS), such as MathCad, in simplifying the process of solving optimization problems is considered. MathCad allows for quick formulation and computation of linear and nonlinear programming tasks, automating calculations and minimizing the risk of errors. Due to the ability to promptly adjust input parameters, such as raw material stocks and production costs, various production and logistics scenarios can be effectively modeled. The study demonstrates the methodology for solving an optimization problem in drug production, where the objective function is maximizing the profit from sales. Additionally, a methodology for solving a typical transport problem, which involves minimizing transportation costs from several warehouses to several consumers with resource constraints, is proposed. The potential method, which ensures the adjustment of transport routes to reduce overall logistics costs, is applied. The educational aspect of applying mathematical models in the preparation of future pharmacy masters is also considered. The use of computer modeling in the educational process contributes to the development of analytical thinking and skills in working with optimization methods, which are essential for effective resource management in the pharmaceutical sector. This work proposes the implementation of real pharmaceutical industry problems during practical lessons in the course «Computer Modeling in Pharmacy», which are crucial for the formation of professional competencies for future pharmaceutical workers. Thus, the article presents a comprehensive study that combines theoretical and practical aspects of mathematical modeling in pharmacy. The prospects for its use to improve the efficiency of production processes, optimize logistical decisions, and enhance the educational process are identified. The results obtained indicate the effectiveness of using mathematical programming methods to solve optimization problems in pharmacy. The use of mathematical models allows for more accurate demand forecasting, planning of production capacities, and logistics processes, which, in turn, reduces the risks of shortages or surpluses of products. Further development of mathematical methods and computer technologies opens up broad prospects for improving existing processes and implementing innovations.

Key words: linear programming, modeling, simulation modeling, optimization, extremal problems, objective function, potential method, MathCad.

Вступ. Фармацевтична галузь, будучи однією з важливих складових системи охорони здоров'я, є водночас однією з найбільш технологічних та наукоємних галузей промисловості України. Реалізуючи забезпечення населення лікарськими засобами, необхідними для раціональної фармакотерапії та фармацевтичної опіки, сучасна фармацевтична промисловість стикається з великою кількістю викликів, серед яких: виклики воєнного стану, висока конкуренція, суворе регулювання, потреба в інноваціях та дотриманні високих стандартів якості та конкурентоспроможності продукції. За таких умов зростає важливість оптимізації усіх ланок функціонування галузі: від процесів виробництва та постачання лікарських засобів і виробів медичного призначення до їх застосування для належного лікарського забезпечення населення. Математичне та комп'ютерне моделювання є інструментами, які мають високий потенціал для раціоналізації управління процесами розробки нових препаратів

© Н. В. Стучинська, М. Д. Андрійчук, П. В. Микитенко, 2025

та доведення фармацевтичних засобів і виробів медичного призначення від виробничої до споживчої сфери, забезпечення раціонального використання ресурсів і дотримання високих стандартів *Належної аптечної практики* (Good Pharmacy Practice, GPP) водночас.

У кожній конкретній виробничій чи логістичній ситуації математичний аналіз забезпечує вибір оптимального підходу з урахуванням як економічної складової, так і якості медичної допомоги (вибору ефективного методу опіки, який можна оцінювати за різними критеріями: показники здоров'я, збільшення тривалості життя, покращення його якості тощо). Економічна складова потребує більш точного прогнозування попиту, планування виробничих потужностей та логістичних процесів, зменшення ризиків при виробництві та постачанні фармацевтичної продукції. Моделювання задач виробництва та транспортування є визначальним для забезпечення критичного рівня запасів, зменшення часу доставки та уникнення затримок, що є важливим для фармацевтичної продукції, яка часто вимагає особливих умов зберігання та транспортування і має обмежений термін придатності. Таким чином, розробка та використання методів математичного моделювання дає змогу фармацевтичним компаніям приймати обґрунтовані рішення, які мінімізують витрати, оптимізують продуктивність і покращують якість фармацевтичної опіки. Керування, що базується на математичних моделях, є визначальним для підвищення ефективності виробництва, швидшого адаптування до змін ринкових умов, реалізації ефективної та надійної медичної допомоги.

Актуальність таких досліджень посилюється також потребами підготовки фахівців фармацевтичної галузі, які володіють сучасними технологіями аналізу та оптимізації виробничих і логістичних процесів. Це обумовило посилення уваги до навчальних дисциплін, що сприяють формуванню у здобувачів вищої освіти професійних компетентностей та практичних навичок роботи з системами комп'ютерної математики та математичного моделювання. Так, в НМУ імені *О. О. Богомольця* оновлено змістове наповнення окремих інформативних дисциплін, а навчальна дисципліна «Комп'ютерне моделювання у фармації» з наступного навчального року перенесена з вибіркових до обов'язкових компонентів ОПП «Фармація. Промислова фармація».

Аналіз останніх досліджень. Історія оптимізації як науки має глибокі корені, що сягають ще давніх часів, коли людство зіткнулося з необхідністю ефективного використання обмежених ресурсів. Математичне програмування – розділ прикладної математики, що вивчає багатовимірні екстремальні задачі з обмеженнями. Перші дослідження у галузі вивчення цих задач здійснено французьким математиком *Ж. Лагранжем* (1736 – 1813), присвячено пошуку екстремуму *функції багатьох змінних*, які задовольняють накладені на них відповідні обмеження [1]. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. 1939 р. – *Л. В. Канторович* монографія «Математичні методи організації і планування виробництва»: він заклав основи теорії оптимального виробничого планування й лінійного програмування; 1951 р. – *Дж. Данцигом* та *Т. Купмансом* введений термін «*лінійне програмування*» [2].

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання [2]. Задачі, які розв'язуються методами математичного програмування класифікують за характером залежності між змінними: лінійні і нелінійні. Якщо цільова функція та обмеження є лінійними функціями, тобто вони містять змінні у першому або нульовому степені, то така *задача є лінійною*. В усіх інших випадках задача буде *нелінійною*. Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних задач, де виникає проблема вибору найкращого (оптимального) варіанта. Слово «оптимальний» походить від латинського *optimus*, що значить – найкращий, досконалий. Щоб знайти оптимальний серед множини різних варіантів, доводиться розв'язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму певних показників, тобто розв'язувати задачі, що об'єднуються єдиним терміном «*екстремальні задачі*» або «*задачі на extremum*» [3].

Моделювання, формалізація та використання апарату математичного аналізу в логістиці висвітлюється в роботах багатьох вчених, серед яких роботи *В. М. Горбачука* [4], *А. В. Горбової* [5], *Д. А. Левкіна* [6], *О. А. Сергієнка* [7], *О. В. Чалого* [8] та інших.

Постановка задачі. Мета роботи полягає у дослідженні та аналізі методів комп'ютерного моделювання, які використовуються для оптимізації виробничих і логістичних процесів у фармацевтичній галузі. В дослідженні нами розглядаються можливості використання комп'ютерного моделювання для мінімізації витрат у фармацевтичному виробництві та оптимального використання сировини, а також моделі найкоротших або найдешевших шляхів транспортування лікарських засобів, враховуючи час, витрати та наявність складів.

Математична модель. Для досягнення визначених цілей нами використовувались різноманітні методи дослідження, включаючи аналіз наукової літератури, математичне моделювання та програмування на мові Python. Такий підхід дозволяє не лише теоретично вивчити предмет, але й застосовувати отримані знання на практиці, що є ключовим елементом успішної підготовки майбутніх фахівців у фармацевтичній галузі [9].

Оптимізація полягає в послідовному виконанні декількох прогонів моделі з різними значеннями параметрів і знаходженні оптимальних результатів, при яких цільова функція досягає свого екстремуму. Структура оптимізаційної моделі складається з трьох основних елементів: цільової функції, обмежень та її змінних. Цільова фун-

кція будується як математичний вираз, до складу якого входять вихідні показники й (іноді) задані параметри моделі. Обмеження моделі звужують область допустимих рішень моделі, задають діапазон допустимих значень для змінних, задовольняють всім заданим обмеженням, і тим самим дозволяють знаходити прийнятні розв'язання задачі моделювання [10].

При розв'язанні оптимізаційних задач важливим є знаходження не локальних екстремумів, а глобального максимуму чи глобального мінімуму (найбільшого або найменшого значень) функції на множині X . У випадку, коли цільова функція, яка оптимізується, й обмеження лінійні, завдання оптимізації вирішується методами лінійного програмування й зазвичай називається *задачею лінійного програмування*. Задача лінійного програмування полягає в знаходженні n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які мінімізують (або максимізують) лінійну цільову функцію:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

При лінійних обмеженнях – рівностях:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = A_i, \text{ де } i = 1, 2, \dots, k.$$

І лінійних обмеженнях – нерівностях:

$$A_{j1}x_1 + A_{j2}x_2 + \dots + A_{jn}x_n \geq B, \text{ де } j = 1, 2, \dots, m.$$

Допустимим розв'язком задачі лінійного програмування є впорядкована множина чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняють обмеженням. Найчастіше оптимальний розв'язок, якщо він існує, є єдиним. Однак можливі випадки, коли оптимальних розв'язків декілька. Тоді комп'ютерне моделювання розглядаємо також як інструмент вибору найбільш раціонального підходу на основі порівняльної оцінки ефективності кожного з альтернативних розв'язків.

Результати досліджень. Однією з основних задач у фармацевтичному виробництві є ефективне використання сировини для виготовлення лікарських засобів. Наявність обмежених ресурсів вимагає оптимізації їх використання для зменшення витрат та підвищення ефективності виробничого процесу. Математичне моделювання в цій сфері найчастіше включає такі методи:

- *імітаційне моделювання* – дозволяє відтворювати складні процеси, такі як виробництво лікарських засобів;
- *статистичне моделювання* – використовується для аналізу ризиків та прогнозування попиту на препарати;
- *моделювання на основі мереж Петрі* – ефективне для управління потоками матеріалів і продукції на фармацевтичних підприємствах.

До оптимізаційних задач математичного моделювання у фармацевтичній логістиці відносяться:

- визначення найкоротших або найдешевших шляхів транспортування лікарських засобів, враховуючи час, витрати та наявність складів;
- використання статистичних методів для передбачення необхідної кількості препаратів у різних регіонах;
- вибір найкращих постачальників з урахуванням вартості, часу доставки та якості продукції;
- визначення найбільш економічно вигідних методів перевезення лікарських засобів з урахуванням митних витрат та обмежень.

Важливу роль у математичному моделюванні відіграють комп'ютерні системи, зокрема, системи комп'ютерної математики (Matlab, MathCad), а також мови програмування (Python, R), які широко застосовуються для аналізу великих обсягів даних та побудови оптимізаційних моделей. Їх використання для побудови математичних моделей розглянуто нами в праці [10].

Для здобувачів вищої освіти спеціальності 226 «Фармація» на першому курсі викладається навчальна дисципліна «Комп'ютерне моделювання у фармації». Метою викладання дисципліни є: розвиток та формування у магістрів фармації компетентності щодо застосування методів математичного моделювання у фармації та статистичної обробки фармацевтичних даних за допомогою комп'ютерних технологій, набуття знань та навичок щодо застосування цифрових інструментів у фармацевтичному дослідженні лікарських засобів, та забезпечення етапності формування цифрової компетентності майбутніх працівників охорони здоров'я України. Зокрема, до робочого навчального плану дисципліни «Комп'ютерне моделювання у фармації» включено тему: «Моделювання задач про оптимальний план виробництва фармацевтичної продукції. Моделювання задач оптимального транспортування фармацевтичної продукції». Здобувачі освіти мають змогу освоїти сучасні інструменти для розв'язання реальних задач фармацевтичної галузі, розвивати навички математичного моделювання, аналізу та оптимізації, що є важливими для їх професійної діяльності.

Розглянемо одну з задач оптимізації використання сировини у виробництві лікарських засобів, яка пропонується здобувачам вищої фармацевтичної освіти на практичних заняттях. Фармацевтичне підприємство повинно виготовити 100 одиниць ліків трьох видів (x_1, x_2, x_3) , але не менше 20 одиниць кожного виду. На виготовлення однієї одиниці ліків x_1, x_2, x_3 відповідно витрачається 4 кг, 3,4 кг, і 2 кг сировини типу А, а її запаси складають 340 кг, а також на виготовлення цих ліків витрачається сировина типу В відповідно по 7,75 кг,

11 кг, і 2 кг і її запаси складають 700 кг. Прибуток, що дає реалізація кожної одиниці ліків складає 40, 30 і 20 грн. Визначити скільки одиниць ліків кожного типу x_1, x_2, x_3 необхідно виготовити для отримання максимального прибутку при умові встановлених запасів сировини («А» та «В»).

Сформулюємо математичну модель задачі: цільова функція, яка оптимізується й обмеження лінійні. Це класична задача лінійного програмування. Продемонструємо розв'язок задачі оптимізації виготовлення ліків в програмі MathCad (рис. 1).

$f(x_1, x_2, x_3) := 40 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3$ f - Цільова функція
 $x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$
Given
 $x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$
 $4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$ Пропишемо обмеження
 $4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$
 $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ Функція *Maximize* визначає максимальний прибуток від реалізації ліків x_1, x_2, x_3
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3)$ +
 Знаходимо оптимальну кількість одиниць ліків, яка задовільняє обмеженням та дає максимальний прибуток від реалізації
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$
 $f(x_1, x_2, x_3) = 3.32 \times 10^3$

Рис. 1 – Моделювання оптимізаційної задачі в MathCad.

Використання систем комп'ютерної математики (СКМ), таких як MathCad, суттєво спрощує розв'язок оптимізаційних задач у фармації. Формально MathCad – це програмне забезпечення для інженерних розрахунків (Engineering Calculation Software), проте, фактично, це інтерактивне середовище для інженерних та наукових обчислень, яке поєднує в собі текстовий редактор і інструменти для виконання математичних операцій [11]. MathCad дозволяє швидко формувати та розв'язувати задачі лінійного та нелінійного програмування. Всі обчислення виконуються автоматично, що мінімізує ризик помилок у розрахунках. У користувача є можливість змінювати вхідні параметри (наприклад, запаси сировини, собівартість тощо) і миттєво отримувати нові результати. Це особливо корисно для моделювання різних сценаріїв виробництва та логістики.

Здобувачам вищої фармацевтичної освіти також пропонується типова транспортна задача, в якій потрібно мінімізувати вартість транспортування товару з кількох складів до кількох споживачів з урахуванням обмежень на кількість товару на складах і потребу споживачів. Розв'язання такої задачі зазвичай здійснюється методом лінійного програмування або через спеціальні методи розв'язання транспортних задач, як, наприклад, *метод північно-західного кута* або *метод потенціалів*. Для розв'язання необхідно скористатись методом потенціалів (метод оптимізації). Цей метод ґрунтується на коригуванні значень транспортних маршрутів таким чином, щоб зменшити загальні витрати.

Маємо такі умови задачі: на трьох складах зберігаються $a_1 = 100$, $a_2 = 200$, $a_3 = 120$ одиниць фармацевтичної продукції одного найменування. Потрібно доставити її трьом споживачам, замовлення яких складають $b_1 = 200$, $b_2 = 110$, $b_3 = 80$ одиниць. Вартість перевезень одиниці продукції зі складу одному споживачу вказані в транспортній таблиці (табл. 1).

Таблиця 1 – Вартість перевезень продукції

	$b_1 = 200$	$b_2 = 110$	$b_3 = 80$
$a_1 = 100$	4	2	6
$a_2 = 200$	7	5	3
$a_3 = 120$	1	7	6

Необхідно побудувати план перевезень, який забезпечить мінімальну вартість доставки. Для цього, окрім значень b_1 , b_2 , b_3 , потрібно ввести ще один, фіктивний, пункт призначення b_4 , якому присвоїмо фіктивну за-

явку, що є різницею запасів на складах і потребою вказаної в заявках. Вартість перевезень із всіх пунктів відправки в фіктивний пункт призначення b_4 будемо вважати рівною нулю. Введення фіктивного пункту призначення з його заявкою вирівнює баланс транспортної задачі (табл. 2) і тепер її можливо вирішувати як звичайну транспортну задачу з правильним балансом (кількість перевезеного вантажу позначимо символами $x_1 \dots x_n$ відповідно).

Таблиця 2 – Баланс транспортної задачі

	$b_1 = 200$	$b_2 = 110$	$b_3 = 80$	$b_4 = 30$
$a_1 = 100$	4 x_1	2 x_2	6 x_3	0 x_4
$a_2 = 200$	7 x_5	5 x_6	3 x_7	0 x_8
$a_3 = 120$	1 x_9	7 x_{10}	6 x_{11}	0 x_{12}

Сформулюємо математичну модель задачі та продемонструємо розв'язок транспортної задачі в програмі MathCad.

ORIGIN := 1

$i := 1..12$ $x_i := 1$

Запишемо цільову функцію, яка визначає загальну вартість перевезення

F(x) := $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 + 3 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 1 \cdot x_9 + 7 \cdot x_{10} + 6 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12}$

Given

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ Запишемо обмеження:

$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 200$

$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 120$

по кількості заявок на отримання ліків (складемо систему рівнянь, права частина заявки).

$x_1 + x_5 + x_9 = 200$

$x_2 + x_6 + x_{10} = 110$

$x_3 + x_7 + x_{11} = 80$

$x_4 + x_8 + x_{12} = 30$

Обмеження по кількості доставки має бути більше нуля

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$ $x_4 \geq 0$

$x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$ $x_7 \geq 0$ $x_8 \geq 0$

$x_9 \geq 0$ $x_{10} \geq 0$ $x_{11} \geq 0$ $x_{12} \geq 0$

	1
1	0
2	100
3	0
4	0
5	80
6	10
7	80
8	30
9	120
10	0
11	0
12	0

Minimize(F, x) =

Скористаємось вбудованою функцією Minimize, для знаходження значень $x_1 \dots x_{12}$ при яких $F(x)$ (вартість перевезень) буде мінімальною.

кількість перевезеного товару, при мінімальній вартості транспортування.

$x_1 := 0$ $x_2 := 100$ $x_3 := 0$ $x_4 := 0$

$x_5 := 80$ $x_6 := 10$ $x_7 := 80$ $x_8 := 30$

$x_9 := 120$ $x_{10} := 0$ $x_{11} := 0$ $x_{12} := 0$

Мінімальна вартість перевезень:

$F(x) = 1.17 \times 10^3$

Рис. 2 – Моделювання транспортної задачі в MathCad.

Аналізуючи отримані дані можна зробити висновок, що для мінімізації вартості перевезень зі складу a_1 доцільно перевозити продукцію лише споживачу $b_2(100)$; зі складу a_2 – споживачу $b_1(80)$, споживачу $b_2(10)$ і споживачу $b_3(80)$; зі складу a_3 – лише споживачу $b_1(120)$. Таким чином всі потреби споживачів задовольнили. На складі a_2 є залишок 30 одиниць продукції. Мінімальна вартість перевезень становить 1170 грошових одиниць.

Для візуалізації результатів моделювання складемо план перевезень (табл. 3).

Таблиця 3 – Оптимальний план перевезень

	b1 = 200	b2 = 110	b3 = 80	b4 = 30
a1 = 100	4 x1 = 0	2 x2 = 100	6 x3 = 0	0 x4 = 0
a2 = 200	7 x5 = 80	5 x6 = 10	3 x7 = 80	0 x8 = 30
a3 = 120	1 x9 = 120	7 x10 = 0	6 x11 = 0	0 x12 = 0

Транспортна задача є класичним прикладом задачі оптимізації, яка має безліч практичних застосувань, зокрема в логістиці, постачанні товарів, управлінні запасами та розподілі ресурсів. Розв'язання таких задач допомагають знайти оптимальні маршрути для мінімізації витрат, що є важливим для зниження загальних операційних витрат підприємств. Залучення математичного моделювання у процес підготовки майбутніх фармацевтів сприяє розвитку аналітичного мислення студентів, формує навички використання комп'ютерних технологій для розв'язання реальних проблем фармації, а також готує майбутніх фахівців до ефективної роботи в умовах сучасної цифрової економіки.

Перспективи подальших досліджень. Подальший розвиток комп'ютерних технологій відкриває перспективи для модернізації процесів виробництва та постачання лікарських засобів, їх раціонального використання для фармацевтичної опіки та підвищення якості медичної допомоги населенню.

В подальших дослідженнях ми будемо працювати над вдосконаленням адаптивних математичних моделей оптимізації, здатних враховувати змінність ринкових умов, логістичні виклики та ресурсні обмеження у фармацевтичній галузі. Також буде перспективним працювати над інтеграцією методів математичного моделювання зі штучним інтелектом для створення інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень у виробничих і логістичних процесах. Особливу увагу варто приділити розробці навчальних цифрових платформ і симуляторів, заснованих на реальних кейсах фармацевтичної практики. Такі засоби сприятимуть формуванню у студентів практично орієнтованих навичок аналітичного мислення, оптимізаційного моделювання та прийняття рішень в умовах невизначеності, що є важливою складовою їх професійної підготовки.

Висновки. Математичне та комп'ютерне моделювання у фармації поєднує математичні методи та сучасні комп'ютерні технології для вирішення завдань у фармацевтичній галузі. Воно охоплює математичне моделювання, для створення моделей аналізу та прогнозування поведінки фармацевтичних систем; комп'ютерні технології, для використання програмного забезпечення опрацювання фармацевтичних даних, планування експериментів та контролю якості лікарських засобів; імітаційне моделювання процесів, таких як розробка нових препаратів або оптимізація виробничих процесів. Математичне та комп'ютерне моделювання є незамінним інструментом у фармації, оскільки дозволяє значно підвищити ефективність виробничих та логістичних процесів. Це дозволяє студентам та фахівцям розвивати навички аналізу, прогнозування та прийняття рішень у фармацевтичній практиці. Використання сучасних методів оптимізації сприяє покращенню якості лікарських засобів, зменшенню витрат і забезпеченню стабільного постачання препаратів на ринок. Включення математичного моделювання в освітній процес медичних університетів, зокрема у НМУ імені О. О. Богомольця, дозволяє студентам отримати практичні навички, що є необхідними для роботи у фармацевтичній галузі. MathCad забезпечує можливість вводити математичні вирази, формули, графіки та текст в одному документі, із реалізацією функцій автоматичного виконання обчислень та візуального адаптивного відображення результатів.

Розвиток математичних методів та комп'ютерних технологій відкриває широкі перспективи для оптимізації процесів розробки, виробництва та постачання лікарських засобів і виробів медичного призначення, їх раціонального застосування для фармацевтичної опіки та якості медичної допомоги населенню.

Список літератури

1. Буреннікова Н. В., Зелінська О. В., Ушкаленко І. М., Буренніков Ю. Ю. Оптимізаційні методи та моделі: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 121 с.
2. Мартинюк О. Матеріали для самостійного вивчення курсу «Математичне програмування». – Тернопіль, 2007. – 88 с.
3. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
4. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С. Математичні моделі підвищення ефективності децентралізованих систем та їх застосування // Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності. – Вінниця: Вінницький національний політехнічний університет, 2022. – С. 65 – 77.
5. Горбова О. В., Муркович М. С. Дослідження складних процесів на основі поетапного моделювання // Наука та прогрес транспорту. – 2021. – 5(95). – С. 51 – 59. DOI:10.15802/stp2021/252704.
6. Левкін Д. А. Чисельні методи і математичні моделі оптимізації параметрів біотехнологічних процесів // Вчені записки Таврійського Національного Університету імені В. І. Вернадського. Серія: «Технічні науки». – Київ, 2022. – №1. – Т.33(72). – С. 128 – 132. DOI: 10.32838/2663-5941/2022.1/21.
7. Сергієнко О. А., Голофаєва І. П., Швець А. Д. Розроблення оптимізованої моделі логістичних ланцюгів постачання-розподілу підприємств // Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Міжнародні економічні відносини та світове господарство. – 2019. – № 28. – С. 98 – 105.
8. Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленєвська А. В. Вища математика: навч. посібник для студ. мед. та фарм. навч. закладів. – Львів: Техніка, 2001. – 204 с.

9. Стучинська Н. В., Андрійчук М. Д. Формування фахово спрямованих предметних компетентностей магістрів фармації засобами моделювання ефективності реклами фармацевтичної продукції // Медицина та фармація : освітні дискурси. – 2024. – № 2. – С. 35 – 42. DOI : 10.32782/eddiscourses/2024-2-7.
10. Стучинська Н., Андрійчук М., Микитенко П. Значення математичних моделей SIR та SEIR у формуванні професійних компетентностей майбутніх магістрів фармації // Медицина та фармація : освітні дискурси. – 2025. – №1. – С. 131 – 138. DOI : 10.32782/eddiscourses/2025-1-21.
11. Чалій К., Кривенко І., Андрійчук М. Кінетичне моделювання біохімічних реакцій за допомогою Mathcad analytical toolkit // Медична наука України (МДУ). – 2024. – № 20 (2). – 68 – 78. DOI : 10.32345/2664-4738.2.2024.09.

References (transliterated)

1. Buriennikova N. V., Zelinska O. V., Ushkalenko I. M., Buriennikov Yu. Yu. *Optymizatsiyni metody ta modeli : navchal'nyy posibnyk* [Optimization methods and models: a textbook]. Vinnytsia, VNTU Publ., 2019. 121 p.
2. Martyniuk O. *Materialy dlya samostiyynogo vyvchennya kursu «Matematychnye programuvannya»* [Materials for self-study of the course "Mathematical Programming"]. Ternopil, 2007. 88 p.
3. Zhaldak M. I., Tryus Yu. V. *Osnovy teorii i metodiv optymizatsiyni : Navchal'nyy posibnyk* [Fundamentals of the theory and methods of optimization: Textbook]. Cherkasy, Brama-Ukraina Publ., 2005. 608 p.
4. Horbachuk V. M., Dunaievskyi M. S. *Matematychni modeli pidvyshchennya efektyvnosti detsentralizovanykh system ta yikh zastosuvannya* [Optimization methods and models: a textbook]. *Problemy vyshchoyi matematychnoyi osvity : vyklyky suchasnosti* [Problems of Higher Mathematical Education: Challenges of Modernity]. Vinnytsia, Vinnyts'kyi natsional'nyy politekhnichnyy universytet Publ., 2022. pp. 65–77.
5. Horbova O. V., Murkovych M. S. *Doslidzhennya skladnykh protsesiv na osnovy poetapnogo modelyuvannya* [Research of complex processes based on step-by-step modeling]. *Nauka ta progres transportu* [Science and Transport Progress]. 2021, 5(95), pp. 51–59, DOI :10.15802/stp2021/252704.
6. Levkin D. A. *Chysel'ni metody i matematychni modeli optymizatsiyni parametriv biotekhnologichnykh protsesiv* [Numerical methods and mathematical models of optimization of parameters of biotechnological processes]. *Vcheni zapysky Tavriys'kogo Natsional'nogo Universytetu imeni V. I. Vernadsk'kogo. Seriya : «Tekhnichni nauky»* [Science and Transport Progress]. Kyiv, 2022, no. 1, vol. 33(72), pp. 128–132. DOI : 10.32838/2663-5941/2022.1/21.
7. Serhiienko O. A., Holofaieva I. P., Shvets A. D. *Rozroblennya optymizovanoyi modeli logistychnykh lantsyugiv postachannya-rozpodilu pidpryemstv* [Development of an optimized model of logistics supply-distribution chains of enterprises]. *Naukovyy visnyk Uzhgorodskogo natsional'nogo universytetu. Seriya : Mizhnarodni ekonomichni vidnosyny ta svitove gospodarstvo* [Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Series: International Economic Relations and World Economy]. 2019, no. 28, pp. 98–105.
8. Chalyi O. V., Stuchynska N. V., Melenevska A. V. *Vyshha matematika : navch. posibnyk dlya stud. med. ta farm. navch. zakladiv* [Higher mathematics: a textbook for students of medical and pharmaceutical educational institutions]. Lviv, Tekhnika Publ., 2001. 204 p.
9. Stuchynska N. V., Andriichuk M. D. *Formuvannya fakhovo spryamovanykh predmetnykh kompetentnostey magistriv farmatsiyni zasobamy modelyuvannya efektyvnosti reklamy farmatsevtichnoyi produktsiyni* [Formation of professionally directed subject competencies of masters of pharmacy by means of modeling the effectiveness of advertising of pharmaceutical products]. *Medytsyna ta farmatsiya : osviti dyskursy* [Medicine and Pharmacy: Educational Discourses]. 2024, no. 2, pp. 35–42. DOI : 10.32782/eddiscourses/2024-2-7.
10. Stuchynska N., Andriichuk M., Mykytenko P. *Znachennya matematychnykh modeley SIR ta SEIR u formuvanni profesiyynykh kompetentnostey maybutnikh magistriv farmatsiyni* [The importance of mathematical models SIR and SEIR in the formation of professional competencies of future masters of pharmacy]. *Medytsyna ta farmatsiya : osviti dyskursy* [Medicine and Pharmacy: Educational Discourses]. 2025, no. 1, pp. 131–138. DOI : 10.32782/eddiscourses/2025-1-21.
11. Chalyi K., Kryvenko I., Andriichuk M. *Kinetychnye modelyuvannya biokhimichnykh reaktsiy za dopomogoyu MathCad analytical toolkit* [Kinetic modeling of biochemical reactions using Mathcad analytical toolkit]. *Medychna nauka Ukrainy (MDU)* [Medical Science of Ukraine (MSU)]. 2024, no. 20 (2), pp. 68–78. DOI : 10.32345/2664-4738.2.2024.09.

Надійшла (received) 13.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Стучинська Наталія Василівна – доктор педагогічних наук, професор, завідувачка кафедри медичної і біологічної фізики та інформатики, Національний медичний університет імені О. О. Богомольця, м. Київ; тел.: (050) 356-60-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5583-899X>; e-mail: nvstuchynska@gmail.com.

Stuchynska Nataliia Vasylivna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Medical and Biological Physics and Informatics, Bogomolets National Medical University, Kyiv; tel.: (050) 356-60-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5583-899X>; e-mail: nvstuchynska@gmail.com.

Андрійчук Марія Дмитрівна – викладач кафедри медичної і біологічної фізики та інформатики, Національний медичний університет імені О. О. Богомольця, м. Київ; тел.: (050) 875-55-50; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0112-3830>; e-mail: amarid1957@gmail.com.

Andriichuk Mariia Dmytrivna – Lecturer at the Department of Medical and Biological Physics and Informatics, Bogomolets National Medical University, Kyiv; tel.: (050) 875-55-50; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0112-3830>; e-mail: amarid1957@gmail.com.

Микитенко Павло Васильович – доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри медичної і біологічної фізики та інформатики, Національний медичний університет імені О. О. Богомольця, м. Київ; тел.: (093) 940-36-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1188-4334>; e-mail: mikitenko_p@npu.edu.ua.

Mykytenko Pavlo Vasylovych – Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Medical and Biological Physics and Informatics, Bogomolets National Medical University, Kyiv; tel.: (093) 940-36-21; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1188-4334>; e-mail: mikitenko_p@npu.edu.ua.

Н. В. СТУЧИНСЬКА, Г. В. ХРАПІЙЧУК

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФАРМАКОКІНЕТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В роботі проведено аналіз можливостей використання методів математичного та комп'ютерного моделювання для опису процесів, що відбуваються в організмі при різних способах введення лікарських засобів (ЛЗ). Автори детально розглядають фармакокінетичні моделі, що адекватно описують найбільш уживані у медичній практиці способи введення лікарських засобів – однокамерну лінійну модель, однокамерну лінійну модель з депо. Розглядають етапи створення відповідних моделей за допомогою диференціальних рівнянь, методи їх розв'язання, аналізують отримані результати та ілюструють їх графіками. Ці фармакокінетичні моделі дають змогу достатньо добре описати процеси, що відбуваються при одноразовій ін'єкції в кров, інфузії, пероральному і внутрішньом'язовому введенні лікарських препаратів. Водночас розуміння сутності цих процесів є базовим для створення інноваційних методів, здатних забезпечити ефективний фармацевтичний супровід в умовах сучасного технологічного прогресу. Автори обґрунтовують доцільність використання систем комп'ютерної математики (на прикладі MathCad) для аналізу фармакокінетичних моделей. Широкі можливості програми MathCad дають змогу оперативно змінювати вихідні параметри (сталу елімінації, коефіцієнти розчинення і всмоктування, швидкість інфузії тощо), моделюючи різні сценарії розподілу та зміни концентрації лікарського препарату в організмі при різних способах його введення. У статті автори демонструють спектр можливостей застосування методів комп'ютерного моделювання при підготовці майбутніх фахівців галузі охорони здоров'я. Показано, що вміння застосовувати методи моделювання для розв'язання практичних завдань у сучасній медицині є важливою складовою професійної компетентності сучасного лікаря та фармацевта. На прикладі однокамерних фармакокінетичних моделей продемонстровано методикою синергетичного поєднання фундаментальних (біофізики, математики, комп'ютерного моделювання) та фахових клінічних дисциплін. Натреновані до автоматизму вміння моделювати і аналізувати подібні процеси складають основу дослідницької компетентності і дають змогу виконувати проекти з трансдермального (підшкірного) введення ЛЗ чи інших новаторських технологій, основами яких майбутні лікарі мають оволодіти в процесі навчання в медичних університетах. Розроблена дидактична система орієнтована на вивчення математичних та комп'ютерних методів моделювання та їх широке використання у наукових дослідженнях і професійних кейсах.

Ключові слова: дидактика навчання, моделювання, біофізика, медична фізика, фармакокінетичні моделі, цифрові компетенції.

N. V. STUCHYNSKA, H. V. KHRAPICHUK

USING MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING METHODS TO STUDY PHARMACOKINETIC PROCESSES

This paper analyzes the possibilities of using mathematical and computer modeling methods to describe the processes occurring in the body during various drug administration routes. The authors provide a detailed examination of pharmacokinetic models that adequately describe the most commonly used drug administration methods in medical practice – namely, the one-compartment linear model and the one-compartment linear model with a depot. The stages of creating the corresponding models using differential equations are discussed, along with the methods of their solutions, an analysis of the obtained results, and graphical illustrations. These pharmacokinetic models allow for a sufficiently good description of the processes that occur during a single injection into the bloodstream, infusion, oral, and intramuscular drug administration. At the same time, understanding the essence of these processes is fundamental to the development of innovative methods capable of providing effective pharmaceutical support in the context of modern technological progress. The authors justify the feasibility of using computer mathematics systems (using MathCad as an example) to analyze pharmacokinetic models. The broad capabilities of the MathCad program for the operational modification of input parameters (elimination constant, absorption and distribution coefficients, infusion rate, etc.) allow for modeling various scenarios of distribution and changes in the concentration of the drug in the body with different administration routes. The article justifies the feasibility and demonstrates the range of possibilities for using computer modeling in the training of future specialists in the field of healthcare. It shows that the ability to apply modeling methods to solve practical problems in modern medicine is an important component of the professional competence of today's physicians and pharmacists. Using one-compartment pharmacokinetic models as an example, the methodology of synergistic integration of fundamental (biophysics, mathematics, computer modeling) and specialized clinical disciplines is demonstrated. The skills to model and analyze such processes, trained to the level of automation, form the foundation of research competence and enable the execution of projects involving transdermal (subcutaneous) administration of drugs or other innovative technologies, which future physicians must master during their education in medical universities. The developed didactic system is focused on studying mathematical and computer modeling methods and their extensive use in scientific research and professional case.

Key words: didactics of teaching, modeling, biophysics, medical physics, pharmacokinetic models, digital competencies of a physician.

Вступ. Методи математичного та комп'ютерного моделювання набувають все ширшого використання у різних сферах системи охорони здоров'я: фармації, діагностиці, лікуванні, прогнозуванні явищ і процесів епідеміологічного, здоров'язбережувального характеру тощо. На основі моделювання формуються практично всі наукові дослідження, як теоретичні (де використовуються різноманітні знакові та абстрактні моделі), так і експериментальні. Поняття «моделі» слугує універсальним методом інтеграції різних наукових галузей. Американський науковець, математик і педагог *Стівен Кранц* вважає, що моделі виступають конструкціями нашого мислення, які відтворюють різні аспекти реального світу [1]. У медико-біологічних дослідженнях метод моделювання відіграє особливу роль, оскільки без його застосування практично неможливо отримати уявлення про поведінку таких складних систем, якими є *живі організми*. Розуміння закономірностей фізичних процесів в організмі людини сприяє професійному розвитку в процесі навчання майбутніх медиків. Початкові теоретичні уявлення щодо будь-якої моделі формуються, насамперед, на основі *експериментальних досліджень* природних процесів і покликані сприяти правильному розумінню та прогнозуванню їх динаміки.

Фармакокінетичні моделі дають змогу досліджувати процеси, що відбуваються в організмі при введенні лікарських засобів. Традиційними і найбільш часто вживаними методами є такі, що описуються за допомогою *лінійних однокамерних моделей*: одноразова ін'єкція в кров, крапельниці (*інфузія*), пероральне і внутрішньом'яз-

зове введення лікарських препаратів. Водночас, стрімко розвиваються і набувають все ширшого застосування новітні методи: *використання ліпідних наночастинок (LNPs), екзосом, трансдермальне введення ліків* за допомогою спеціальних патчів з мікроголками тощо. Комп'ютерне моделювання сприяє глибинному розумінню сутності фармакокінетичних процесів і може стати основою для створення інноваційних методів, здатних забезпечити ефективний фармацевтичний супровід в умовах сучасного технологічного прогресу. Використання *систем комп'ютерної математики* (наприклад MathCad 15) дає змогу оперативно змінювати вихідні параметри (сталу елімінації, коефіцієнти розчинення і всмоктування, швидкість інфузії, кількість і діаметр мікроголок тощо), створюючи різні сценарії розподілу та зміни концентрації лікарського препарату в організмі.

Використанню моделей у навчальних технологіях вищої медичної освіти, зокрема в курсах вищої математики, медичній та біологічній фізиці, присвячені наукові праці *Е. Личковського, Н. Подопрігора, П. Свердана, Н. Стучинської, В. Тіманюка, О. Чалого, Л. Ісичко, С. Стадніченко* та інших [2 – 4].

Мета: вивчити можливості використання методів математичного та комп'ютерного моделювання для дослідження фармакокінетичних процесів.

Виклад основного матеріалу. Моделювання є ефективним методом пізнання і дає змогу вирішувати велику кількість задач медичного характеру. У медичній і біологічній фізиці, біології та медицині часто використовують моделі, які за природою можна розділити на три типи: фізичні, математичні та біологічні (приклади наведені у табл. 1).

Таблиця 1 – Типи та приклади моделей

Типи моделей		
Фізичні (аналогові)	Математичні	Біологічні (предметні)
Використовуються для проведення досліджень біооб'єктів, що мають подібні властивості до фізичних систем неживої природи.	Реальні процеси описуються за допомогою математичних рівнянь, функцій, графіків та таблиць, що ілюструють різні властивості відповідного процесу, об'єкта або явища.	Зручні біологічні об'єкти, що використовуються для вивчення загальних закономірностей на зручних біологічних об'єктах.
Приклади: а) для вивчення електричних властивостей біологічних тканин застосовують <i>схеми Фріке – Морзе</i> або <i>Швана</i> – комбінація ємнісних і активних опорів; б) для дослідження кровоносної системи використовують <i>моделі Франка</i> – поєднання еластичного резервуару і жорсткої трубки.	Приклади: а) моделі розвитку популяцій; б) поширення епідемії; в) реакції імунної системи; г) фармакокінетичні процеси.	Приклади: а) закономірності виникнення та поширення потенціалу дії у хребетних вивчили на гігантському аксоні кальмара; б) особливості скорочення міокарда досліджують на основі папілярного м'яза.

Дидактично значущим прикладом у курсі медичної та біологічної фізики є математичні концепції введення лікарських препаратів в організм людини. Використовуючи числові та наочні комп'ютерні моделі, студенти можуть самостійно досліджувати різні залежності та сценарії розвитку фармакокінетичних процесів, змінювати їх швидкість, конфігурацію та параметри системи, а також теоретично створювати об'єкти з новими властивостями. Термін «фармакокінетичні» вживають для узагальнення фізіологічних процесів, які визначають рух лікарської речовини в організмі після її введення.

Дослідження, здійснені на основі фармакокінетичних моделей, допомагають глибше розкрити властивості та закономірності процесів, що відбуваються в організмі під дією лікарських препаратів [5, 6]. Використання методів комп'ютерного моделювання та *стимуляційного навчання* є обов'язковою частиною сучасного освітнього процесу в медичних вишах [7, 8, 9]. Тому важливо дотримуватися певних *дидактичних принципів* для ефективного використання цих інструментів [10].

Досвід показує, що найскладнішим студентів та науковців є етап створення моделі. Для цього потрібні навички аналізу та синтезу, уміння співвідносити вихідні поняття з вибраними математичними чи фізичними аналогами, виокремлювати суттєві закономірності та характеристики, а також вміння користуватися науковою термінологією та іншими інструментами математики та фізики. Студентам нефізичних спеціальностей (медикам, біологам, хімікам) складно дається абстрагування від неістотних деталей, виокремлення ключових рис, спільних для різних явищ і процесів, уміння формалізувати та наочно представляти складні природні процеси, розуміти спрощення, використані в моделі. Складнощі також виникають при аналізі отриманих результатів та їх інтерпретації.

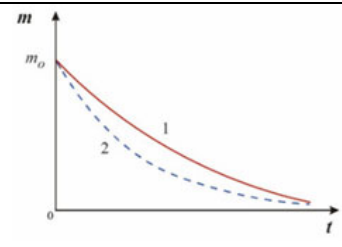
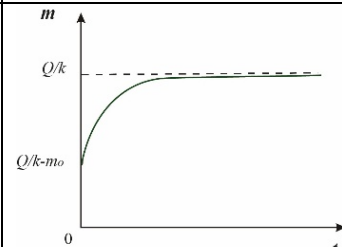
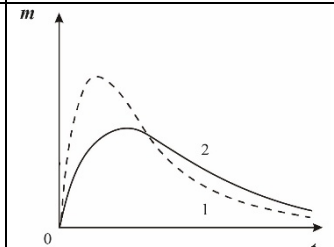
Зміна маси (доза) лікарських засобів в організмі залежить від багатьох процесів, але, зробивши певні припущення (абстрагуючись від багато стадійності методики введення, переносу та виведення препарату, ігноруючи механізми молекулярних процесів), можна отримати прості та наочні моделі, які адекватно описують цей

складний процес. Зокрема у фармакокінетиці для спрощення використовують однокамерну модель. «Камерою» (*compartment*) умовно означають все тіло, де ліки рівномірно розподіляються, тобто це не анатомічна структура, а *математична абстракція*. Модель такого типу дає досить точне уявлення для багатьох препаратів з простою кінетикою, коли після введення настає миттєве й рівномірне розподілення, а потім відбувається виведення (елімінація) препарату через печінку або нирки.

Для глибшого вивчення фармакокінетики ліків використовують двокамерну чи багатокамерну лінійні моделі. В двокамерній моделі препарат спочатку швидко перерозподіляється між центральною і периферійною камерами (наприклад, кров і м'язи), потім повільно елімінує.

Розглянемо закономірності зміни маси лікарського засобу $m(t)$ в організмі при трьох основних способах його введення: 1 – однократна *ін'єкція* в кровоносне русло, 2 – *інфузія* (за допомогою крапельниці), 3 – внутрішньом'язове та пероральне. Опис цих лінійних фармакокінетичних моделей наведено нижче в табл. 2.

Таблиця 2 – Лінійні фармакокінетичні моделі

Назва моделі	Однокамерна фармакокінетична модель однократного внутрішньовенного введення	Однокамерна фармакокінетична модель з постійною швидкістю інфузії	Однокамерна фармакокінетична модель із депо
Спосіб введення ліків	вся доза відразу (болюсно) потрапляє в кровотік при одноразовій ін'єкції	внутрішньовенне вливання за допомогою крапельниці (інфузивно)	внутрішньом'язове та пероральне введення
Досліджуваний процес	процес зменшення маси лікарського препарату – швидкість виведення (елімінації)	безперервно вводиться лікарський препарат із сталою швидкістю Q	процес виведення препарату з організму та одночасне надходження препарату з депо (з м'язової тканини або таблетки)
Диференціальне рівняння	$\frac{dm}{dt} = -km,$ k – стала елімінації	$\frac{dm}{dt} = Q - km$	$\frac{dm}{dt} = -km + rM_0e^{-rt}$
Частинний розв'язок	при $t = 0$ маса препарату дорівнювала $m = m_0$: $m(t) = m_0 e^{-k \cdot t}$	при $t = 0, m = m_0$: $m = e^{-kt} \left(\frac{Q}{k} e^{kt} + m_0 \frac{Q}{k} \right)$ або $m(t) = \frac{Q}{k} - \left(\frac{Q}{k} - m_0 \right) e^{-kt}$	при $t = 0, m = m_0$: $m(t) = \frac{M_0 r}{r - k} (e^{-kt} - e^{-rt}),$ M_0 – початкова маса препарату в депо; r – константа всмоктування
Графік зміни маси ЛЗ з часом			

Однокамерні лінійні моделі адекватно описують процеси, які відбуваються при введенні багатьох лікарських препаратів. Припускається, що організм є системою із сталим об'ємом V , циркуляція крові в якому практично відразу забезпечує рівномірний розподіл дози (маси) чи концентрації $c_0 = m_0 / V$. Швидкість виведення (елімінація) *лікарських засобів (ЛЗ)* лінійно залежить від його маси m у певний момент часу t ; процес елімінації на короткому проміжку часу здійснюється зі сталою швидкістю. Такі спрощення є загальними і часто використовуються при складанні *диференціальних рівнянь*. Їхне розуміння необхідне для успішної формалізації багатьох фізичних, біологічних, медичних, хімічних та інших процесів.

Розглянемо зміст сталої елімінації. За допомогою цього параметру здійснюється опис експоненціального зменшення маси ліків в плазмі крові з часом. Формула, що пов'язує сталу елімінації і період напіввиведення $t_{1/2}$ має вигляд $k = \ln 2 / t_{1/2}$. Тобто більше значення k означає, що препарат швидше виводиться з організму.

В табл. 2 графічно подано частинні розв'язки рівняння однокамерної лінійної фармакокінетичної моделі при однократному введенні різних лікарських речовин відразу в кровотік, тобто внутрішньовенно, з урахуванням умови, що їх сталі елімінації різні ($k_1 > k_2$) при однаковій початковій масі m_0 . Графічно показана зміна маси з часом при різних значеннях сталої елімінації (крива 1 відповідає меншому значенню k_1 , крива 2 – більшому зна-

ченню k_2). Програма в Mathcad дозволяє наочно демонструвати отримані результати для різних значень параметрів k , Q , r та m_0 , що входять у розв'язки диференціальних рівнянь з табл. 2. Це забезпечує зручний і зрозумілий спосіб вивчення впливу цих величин на результати, що сприяє глибшому засвоєнню матеріалу та посилює мотивацію вивчати дисципліну.

Студенти можуть змодельовати різні ситуації, змінюючи значення m_0 та параметру k (наприклад, $0,1-0,5 \text{ год}^{-1}$). Обчислення демонструють можливість представлення результатів як у графічному, так і в табличному форматах (рис. 1). Здобувачі освіти самостійно або спираючись на підтримку викладача мають зробити висновок, що стала елімінації є важливою суб'єктивною характеристикою організму, оскільки вона є величиною, оберненою до проміжку часу τ ($k = 1/\tau$), за який маса препарату в крові зменшується в $e \approx 2,7$ рази.

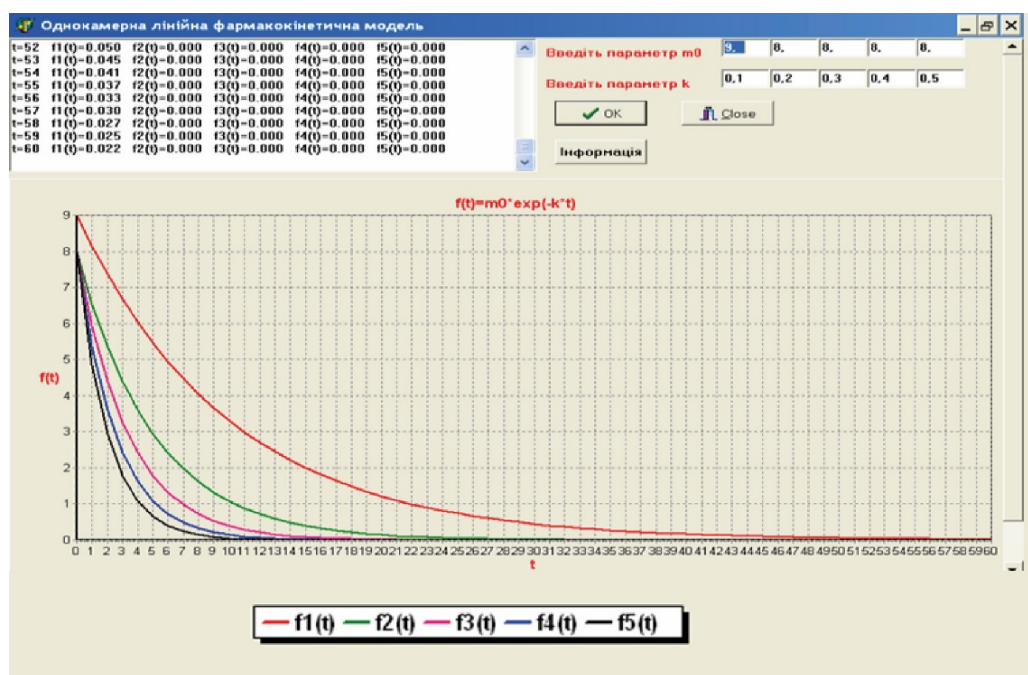


Рис. 1 – Зміна маси лікарського препарату з часом при різних значеннях сталої елімінації k та початкової маси m_0 при однократній ін'єкції у вену.

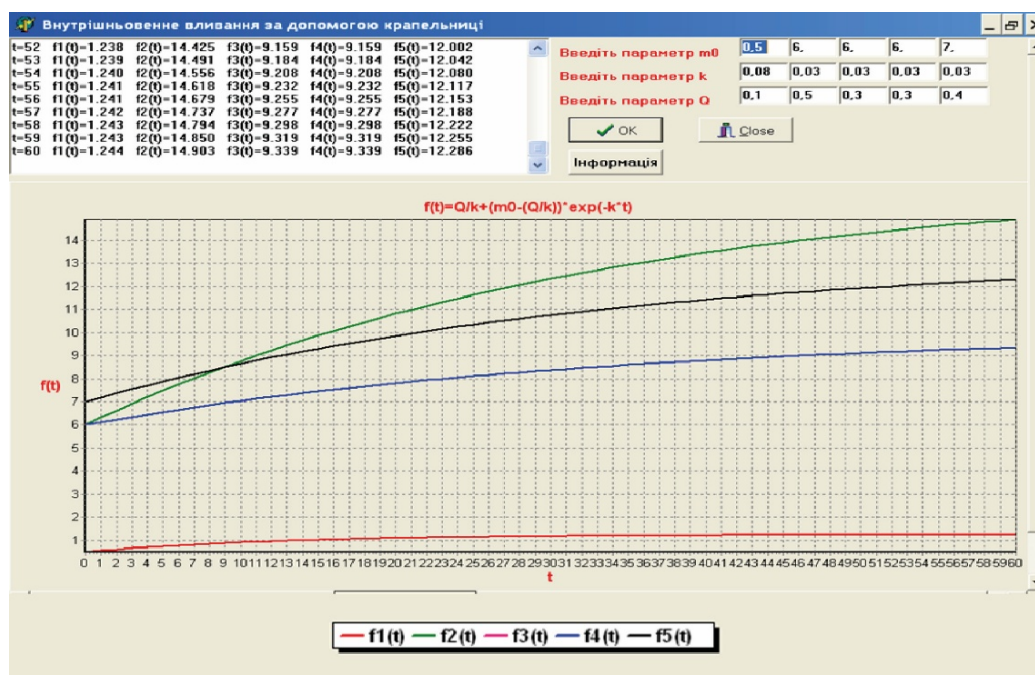


Рис. 2 – Зміна маси лікарського препарату з часом при інфузивному введенні.

Рівняння, яке описує введення лікарського препарату за допомогою крапельниці (інфузії) в іншій фармакокінетичній моделі, містить три константи: k , Q та m_0 , різні значення яких студенти можуть підібрати самостійно, скориставшись допомогою систем штучного інтелекту або довідковими даними для конкретних ЛЗ. Швидкість виведення Q прямо пропорційна до маси ЛЗ, наявної в крові в даний момент часу. Препарати, такі як глюкоза, часто вводять за допомогою крапельниці і їх нормальна концентрація в крові відрізняється від нуля, то логічно вважати, що при $t = 0$, $m = m_0$.

Велику увагу приділяємо аналізу графіків частинних розв'язків диференціального рівняння (рис. 2), використовуючи значення параметрів, максимально близькі до реальних. З фахової точки зору корисно досліджувати, як змінюється характер залежності $m(t)$ при зміні k , Q та m_0 в рамках цієї (другої) фармакокінетичної моделі. З графіка видно, що при $t \rightarrow \infty$ маса лікарського препарату асимптотично наближається до значення Q/k . Цій величині традиційно присвоюють зміст рівноважної кількості препарату в організмі. Цілком зрозуміло, що варто прагнути щоб рівноважна кількість препарату в організмі була близькою до оптимальної, тобто такою, що забезпечує максимальний лікувальний ефект. Зв'язок між швидкістю введення Q препарату та оптимальною концентрацією не є очевидною істиною для студентів. Вони мають самостійно дійти висновку, що для досягнення оптимальної (такої, що дає бажаний лікувальний ефект) концентрації швидкість введення повинна бути рівною $Q = km_{\text{опт}} = kc_{\text{опт}} \cdot V$. Так формується розуміння важливого у практичній діяльності аспекту: при неправильно підібраній швидкості введення препарату для інфузії лікувальний результат суттєво знижується, а інколи може навіть спричинити шкоду.

Третя однокамерна лінійна фармакокінетична модель описує внутрішньом'язове та пероральне введення ліків. Зміна дози препарату при такому способі введення визначається двома доданками. Один із цих доданків описує процес виведення препарату з організму, інший – відображає надходження препарату з депо (наприклад, з м'язової тканини або таблетки) [2]. Щоб записати другий доданок, нагадаємо, що процес розчинення речовини з таблетки описується наступним рівнянням:

$$M(t) = M_0 e^{-r \cdot t}.$$

де M_0 – початкова маса препарату в депо, r – константа, яка характеризує швидкість всмоктування. Характер впливу швидкості всмоктування ліків на процес їх виведення з організму відображений на графіку залежності $m(t)$, що наведений в табл. 2 для третьої моделі: крива 1 відповідає значенню r_1 , крива 2 – r_2 , тоді як $r_2 > r_1$.

Результати комп'ютерного обчислення залежності $m(t)$ при різних значеннях сталої елімінації k , початкової маси M_0 та швидкості всмоктування r подані на рис. 3.

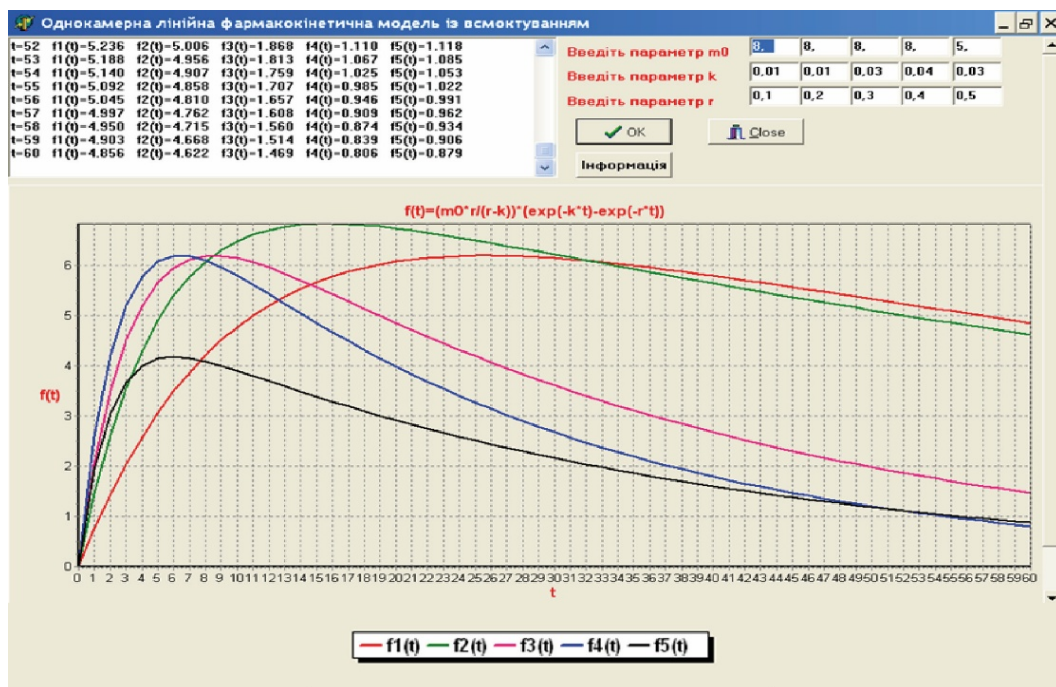


Рис. 3 – Зміна маси ліків з часом за однокамерною лінійною фармакокінетичною моделлю з депо.

Аналізуючи особливості графіка до третьої фармакокінетичної моделі, важливо звернути увагу студентів на те, що максимальна концентрація лікарського препарату досягається у момент часу

$$t_{\max} = \frac{\ln \frac{r}{k}}{r - k}.$$

Тоді, варіюючи параметри $t_{\max}$ від r і k , здобувачі освіти інтерпретують змодельовані ситуації та визначають тривалості періоду, протягом якого концентрація є оптимальною та забезпечує лікувальний ефект, що є важливим для їхньої професійної діяльності.

Підвищений інтерес у студентів викликає дослідження залежності $m(t)$ при різних значеннях константи r , яка описує швидкість всмоктування лікарських речовин. Це дає змогу будувати моделі з параметрами, які адекватно відображають процеси, що відбуваються при вживанні ЛЗ, у яких діючий компонент є одним і тим самим, але варіюються коефіцієнти всмоктування і виведення. Студенти самостійно підбирають значення цих констант для препаратів звичайних, пролонгованих чи швидкодіючих, наприклад, «шипучих таблеток» – ліків із добавкою бікарбонату натрію.

Комп'ютерне моделювання дає студентам можливість активно досліджувати різні сценарії, змінювати параметри моделей та спостерігати за результатами, що сприяє глибшому засвоєнню матеріалу та розвитку аналітичних навичок. Запропонований розроблений та апробований нами підхід має кілька суттєвих переваг порівняно з традиційними методами. Студент моделює фармакокінетичний процес відповідно до інструкції, а після виконання кількох однотипних дій вже самостійно формулює операцію, яку планує виконати, що сприяє подальшому аналізу та узагальненню.

Математичне моделювання як метод дослідження має декілька переваг для наукової діяльності студентів:

- 1) воно дозволяє спостерігати за явищами, які важко виміряти, такими як дифузія через клітинну мембрану, динаміка кровообігу чи виведення лікарських препаратів з організму;
- 2) студенти можуть змінювати параметри моделей і спостерігати за результатами, що допомагає їм краще усвідомити механізми фізичних явищ в живому організмі та прогнозувати їхню динаміку;
- 3) цей метод дозволяє виконувати численні експерименти, які в реальному житті можуть вимагати значних затрат часу та матеріальних ресурсів. Він також розширює можливості використання діяльнісного підходу, який є основою сучасної теорії активного навчання і визнається багатьма педагогами та психологами одним з найбільш перспективних та універсальних в освіті. Справді, знання не можна отримати в готовому вигляді, вони засвоюються завдяки їх використанню у тих чи інших формах діяльності [11, 12], спектр яких значно розширюється при використанні методів моделювання.

Метод моделювання виступає як фундаментальна основа встановлення міжпредметних зв'язків. Практично в кожній темі медичної і біологічної фізики розглядаються різноманітні моделі [13 – 16]. Цей навчальний метод спирається на основні *функції когнітивного впливу*: *гносеологічну* (забезпечення спрощеного дослідження об'єктів, які неможливо вивчати безпосередньо); *ілюстративну* (створення наочної основи для аналізу та узагальнень); *евристичну* (отримання нових знань) та *інтегруючу* (формування цілісного уявлення про досліджуване явище). Модель надає простоту сприйняття абстрактних характеристик об'єктів і процесів від простих до комплексних, полегшуючи сприйняття їх студентами.

Завершуючи вивчення теми, пропонуємо студентам в рамках проєктних робіт описати інші способи введення лікарських препаратів. Таким чином, використання елементів моделювання при вивченні медичної і біологічної фізики сприяє виробленню інтеграційної спрямованості фізичних та математичних знань, розширює можливості застосування діяльнісного підходу в навчанні, забезпечує професійну спрямованість дисципліни, формує загальнонаукову культуру, підсилює міждисциплінарні зв'язки.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розширення меж застосування математичного та комп'ютерного моделювання на фармакокінетику складніших комплексних інноваційних способів введення ЛЗ (парентеральне за допомогою комплексу мікроглоб, таргетне за допомогою спеціальних пептидів, наноструктур тощо).

Перспективним напрямком досліджень є впровадження елементів дослідження фармакокінетичних моделей в процес підготовки фахівців різних спеціальностей галузі охорони здоров'я, зокрема в практичні і лабораторні роботи з медичної і біологічної фізики. Такий вид навчальної діяльності може бути покладений в основу нових вибіркових навчальних дисциплін та спеціальних міждисциплінарних мікрокурсів.

Висновки. Таким чином, продемонстровано широкий спектр можливостей застосування методів комп'ютерного моделювання при дослідженні фармакокінетичних процесів як в наукових (прикладних і теоретичних), так і в освітніх цілях.

Показано, що уміння застосовувати методи моделювання для розв'язання практичних завдань у сучасній

медицині є важливою складовою професійної компетентності сучасного лікаря та фармацевта. На прикладі однокамерних фармакокінетичних моделей продемонстровано методологію синергетичного поєднання фундаментальних (біофізики, математики, комп'ютерного моделювання) та фахових клінічних дисциплін, що є важливим для формування цілісного уявлення про організм людини.

Базований на комп'ютерному моделюванні різновид форми реалізації діяльнісного підходу сприяє розвитку інтелектуальних здібностей студентів, покращує розуміння складних процесів, які відбуваються в організмі людини, підвищує інтерес до вивчення природничих дисциплін.

Лабораторні роботи з елементами комп'ютерного моделювання є перспективним напрямком, який потребує подальшого розвитку та впровадження в навчальний процес. Плануємо розширити межі застосування комп'ютерного моделювання на складніші фармакокінетичні процеси.

Список літератури

1. Steven G. Krantz A primer of mathematical writing. Second edition // Mathematical Association of America. – 2016. – 261. DOI: 10.48550/arXiv.1612.04888.
2. Чалий О. В., Стучинська Н. В., Меленєвська А. В. Вища математика. Навчальний посібник для студентів вищих медичних і фармацевтичних закладів. – К.: Техніка, 2001. – 204 с.
3. Чалий О. В., Цехмістер Я. Б., Агапов Б. Т., Чалий К. О., Меленєвська А. В., Мурашко М. І., Олійник О. І., Радченко Н. Ф. Медична та біологічна фізика підручник для студ. вищих мед. (фарм.) навч. закладів. – Вінниця: Нова Книга, 2017. – 528 с.
4. Stuchynska N. V. Навчання медичної і біологічної фізики засобами ІКТ: аналіз досвіду // Information Technologies and Learning Tools. – 2012. – № 32(6). DOI: 10.33407/itlt.v32i6.763.
5. Гарькава В. Ф., Бандура В. М., Гайша О. О., Ігнатова Т. В., Редькіна Є. А., Лук'янчук В. Д., Прозорова Г. О. Комп'ютерне моделювання та інформаційні технології в фармації: монографія. – Warsaw: RS Global Sp., 2021. – 43 с. DOI: 10.31435/rsglobal/029.
6. Булах Є., Войтенко Л. П., Кривенко І. П. Комп'ютерне моделювання у фармації: навч. посіб. / 2-е вид., випр. – ВСВ «Медицина», 2017. – 208 с.
7. Ковальова О. Впровадження стимуляційних технологій навчання в медичну освіту // Неперервна професійна освіта: теорія і практика. Серія: Педагогічні науки. – 2019. – Вип. 1(58). – С. 36 – 41. DOI: 10.28925/1609-8595.2019.1.3641.
8. Кулик А., Ревенко В., Кулик Я., Нікольський О. (2024). Розробка, впровадження і використання програм-симуляторів лабораторних робіт з медичної та біологічної фізики // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2024. – № 59(1). – С. 166 – 173. DOI: 10.31649/1999-9941-2024-59-1-166-173.
9. Kuchyn Iu., Vlasenko O., Melnyk V., Stuchynska N., Kucherenko I., Mykytenko P. Simulation training and virtual patients as a component of classroom training of future doctors under covid-19 conditions // Wiadomosci lekarskie (Warsaw, Poland) : 1960). – 2022. – № 75. – pp. 1118 – 1123. DOI: 10.36740/WLek202205112.
10. Yuriy R., Huzchenko S., Lobach N., Karbovanets O., Bokova S., Isychk L. Modern digital learning and simulation technologies in higher medical education: definitions, innovative potential Amazonia Investiga. – 2022. – № 11(60). – С. 53 – 61. DOI: 10.34069/AI/2022.60.12.6.
11. Стучинська Н. В., Шморган А. В., Мороз Л. Ю. Інтеграція знань при вивченні природничо-наукових дисциплін у класах медичного та біологічного профілю // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету імені ТГ Шевченка. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів: ЧНПУ, 2010. – С. 154 – 158.
12. Stuchynska N., Ostapovych N., Belous I., Mazurenko Ju., Zakusilova T. Game-based technologies in teaching professionally oriented natural sciences to the future doctors // Nuances estudos sobre Educação. – 2020. – № 31. – pp. 1 – 16. DOI: 10.32930/nuances.v31i0.8215.
13. Стадніченко С. М. Моделювання в професійній освіті майбутніх лікарів і фармацевтів // Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. – 2019. – № 183. – С. 158 – 162. DOI: 10.36550/2415-7988-2019-1-183-158-162.
14. Суховірська Л. П., Лунгол О. М., Задорожна О. В. Системи віртуальних лабораторних робіт з біофізики як засоби реалізації принципу професійної спрямованості навчання студентів // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2019. – Т. 70 (2). – С. 141 – 154. DOI: 10.33407/itlt.v70i2.2657.
15. Ісичко Л. В. Дидактичні принципи фізичного моделювання як методу пізнання в курсі медичної і біологічної фізики // Сучасна медична освіта: методологія, теорія, практика. – 2020. – С. 98 – 100.
16. Alexandru Morega, Mihaela Morega, Alin Dobre. Computational Modeling in Biomedical Engineering and Medical Physics. – Elsevier Science, 2020. 314 p.

References (transliterated)

1. Steven G. Krantz. A primer of mathematical writing. Second edition. *Mathematical Association of America*. 2016, 261. DOI: 10.48550/arXiv.1612.04888.
2. Chalyy O. V., Stuchyns'ka N. V., Melenyevs'ka A. V. *Vyshha matematika. Navchal'nyy posibnyk dly studentiv vyshhykh medychnykh i farmatsevtichnykh zakladiv*. Kyiv, Tekhnika Publ., 2001, 204 p.
3. Chalyy O. V., Tsekhmister Ya. V., Agapov V. T., Chalyy K. O., Melenyevs'ka A. V., Murashko M. I., Oliynyk O. I., Radchenko N. F. *Medychna ta biologichna fizyka pidruchnyk dlya stud. vyshhykh med. (farm.) navch. Zakladiv*. Vinnytsia, Nova Knyga Publ., 2017. 528 p.
4. Stuchynska N. V. Navchannya medychnoyi i biologichnoyi fizyky zasobamy IKT: analiz dosvidu [Teaching Medical and Biological Physics Using ICT Tools: Experience Analysis]. *Information Technologies and Learning Tools*. 2012, no. 32(6). DOI: 10.33407/itlt.v32i6.763.
5. Ghar'kava V. F., Bandura V. M., Ghaysha O. O., Ighnatova T. V., Red'kina Ye. A., Luk'yanchuk V. D., Prozorova Gh. O. *Komp'yuterne modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi v farmatsiyi: monografiya* [Computer Modeling and Information Technologies in Pharmacy: Monograph]. Warsaw, RS Global Sp., 2021. 43 p. DOI: 10.31435/rsglobal/029.
6. Bulakh Ye., Voytenko L. P., Kryvenko I. P. *Komp'yuterne modelyuvannya u farmatsiyi: navch. posib. / 2-e vyd., vypr.* [Computer Modeling in Pharmacy: Textbook / 2nd edition, corrected]. VSV "Medytyna", 2017. 208 p.
7. Kovalyova O. Vprovadzhennya symulyatsiynykh tekhnologiy navchannya v medychnu osvitu [Implementation of Simulation-Based Learning Technologies in Medical Education]. *Neperervna profesiyina: osvita teoriya i praktyka. Seriya: Pedagogichni nauky* [Continuing Professional Education: Theory and Practice. Series: Pedagogical Sciences]. 2019, vol. 1(58), pp. 36–41. DOI: 10.28925/1609-8595.2019.1.3641.
8. Kulyk A., Revenok V., Kulyk Ya., Nikol's'kyy O. (2024). Rozrobka, vprovadzhennya i vykorystannya program-symulyatoriv laboratornykh robot z medychnoyi ta biologichnoyi fizyky [Development, Implementation, and Use of Simulator Programs for Laboratory Exercises in Medical and

- Biological Physics]. *Informatsiyni tekhnologiyi ta komp'yuterna inzheneriya* [Information Technologies and Computer Engineering]. 2024, no. 59(1), pp. 166–173. DOI: 10.31649/1999-9941-2024-59-1-166-173.
9. Kuchyn Iu., Vlasenko O., Melnyk V., Stuchynska N., Kucherenko I., Mykytenko P. Simulation training and virtual patients as a component of classroom training of future doctors under covid-19 conditions. *Wiadomosci lekarskie (Warsaw, Poland : 1960)*. 2022, vol. 75, pp. 1118–1123. DOI: 10.36740/WLek202205112.
 10. Yuriy R., Huzchenko S., Lobach N., Karbovanets O., Bokova S., Isychk L. *Modern digital learning and simulation technologies in higher medical education: definitions, innovative potential Amazonia Investiga*. 2022, no. 11(60), pp. 53–61. DOI: 10.34069/AI/2022.60.12.6.
 11. Stuchynska N. V., Shmorhun A. V., Moroz L. Yu. Integratsiya znan' pry vyvchenni pryrodnycho-naukovykh dystsyplin u klasakh medychnogo ta biologichnogo profilu [Integration of knowledge in teaching natural science disciplines in medical and biological profile classes]. *Visnyk Chernigivs'kogo natsional'nogo pedagogichnogo universytetu imeni T. G. Shevchenka. Seriya: Pedagogichni nauky* [Herald of the Taras Shevchenko National Pedagogical University of Chernihiv. Series: Pedagogical Sciences]. Chernigiv, ChNPU Publ., 2010, pp. 154–158.
 12. Stuchynska N., Ostapovych N., Belous I., Mazurenko Ju., Zakusilova T. Game-based technologies in teaching professionally oriented natural sciences to the future doctors. *Nuances estudos sobre Educação*. 2020, no. 31, pp. 1–16. DOI: 10.32930/nuances.v31i0.8215.
 13. Stadnichenko S. M. Modelyuvannya v profesyniyni osviti maybutnikh likariv i farmatsevtiv [Modeling in the Professional Education of Future Doctors and Pharmacists]. *Naukovi zapysky. Seriya : Pedagogichni nauky* [Scientific Notes. Series: Pedagogical Sciences]. 2019, no. 183, pp. 158–162. DOI: 10.36550/2415-7988-2019-1-183-158-162.
 14. Sukhovir'ska L. P., Lungol O. M., Zadorozhna O. V. Systemy virtual'nykh laboratornykh robit z biofizyky yak zasoby realizatsiyi pryntsyphu profesyniynoi spryamovanosti navchannya studentiv [Virtual Laboratory Systems in Biophysics as Means of Implementing the Principle of Professional Orientation in Student Education]. *Informatsiyni tekhnologiyi i zasoby navchannya* [Information Technologies and Educational Tools]. 2019, vol. 70(2), pp. 141–154. DOI: 10.33407/itlt.v70i2.2657.
 15. Isychko L. V. Dydaktychni pryntsyipy fizychnogo modelyuvannya yak metodu piznannya v kursy medychnoyi i biologichnoyi fizyky [Didactic Principles of Physical Modeling as a Method of Cognition in the Course of Medical and Biological Physics]. *Suchasna medychna osvita: metodologiya, teoriya, praktyka* [Modern Medical Education: Methodology, Theory, Practice]. 2020, pp. 98–100.
 16. Alexandru Morega, Mihaela Morega, Alin Dobre. *Computational Modeling in Biomedical Engineering and Medical Physics*. Elsevier Science, 2020. 314 p.

Надійшла (received) 25.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Стучинська Наталія Василівна – доктор педагогічних наук, професор, завідувачка кафедри медичної і біологічної фізики та інформатики, Національний медичний університет імені О. О. Богомольця, м. Київ; тел.: (050) 356-60-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5583-899X>; e-mail: nvstuchynska@gmail.com.

Stuchynska Nataliia Vasyliyivna – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Medical and Biological Physics and Informatics, Bogomolets National Medical University, Kyiv; tel.: (050) 356-60-57; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5583-899X>; e-mail: nvstuchynska@gmail.com.

Храпійчук Галина Валентинівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри медичної і біологічної фізики та інформатики, Національний медичний університет ім. О. О. Богомольця, м. Київ; тел.: (067) 297-55-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6978-5850>; e-mail: halynakhrapiichuk@gmail.com.

Khrapiichuk Halyna Valentynivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Medical and Biological Physics and Informatics at the Bogomolets National Medical University, Kyiv; tel.: (067) 297-55-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6978-5850>; e-mail: halynakhrapiichuk@gmail.com.

ЗМІСТ

Ванін В. А., Кошовий Г. І. Методи дослідження розсіювання E -поляризованої хвилі двома провідними стрічками з імпедансом.....	3
Воропай О. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шапаната А. С. Ідентифікація моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка при нестационарному навантаженні	17
Voskoboinick V. A., Voskoboinyk O. A., Voskobiinyk A. V., Kharchenko A. G., Trudenko D. V. Features of wave transformation by a permeable breakwater.....	28
Voskoboinick V. A., Onyshchenko A. M., Voskoboinyk O. A., Voskobiinyk A. V., Trudenko D. V. Interaction of surface gravity waves with perforated screen.....	39
Городецька Н. С., Старовойт І. В., Олійник В. Н. Генерація антисиметричних хвиль в пружному хвилеводі різними видами навантаження	49
Грінченко В. Т., Маціпура В. Т. Дискретно-аналітичний метод розв'язання задач математичної фізики	55
Джалладова І. А., Камінський О. Є. Математичне моделювання та аналіз керованості сингулярних гібридних систем в прикладних задачах	61
Довгий С. О., Буланчук Г. Г., Буланчук О. М. GPU-реалізація розрахунку правої частини СЛАР у методі дискретних вихрових рамок для задач обтікання тонких пластин	67
Kulian V. R., Korobova M. V., Yunkova O. O., Dolenko G. O. Effective diversification and stock portfolio dynamics under constraints	75
Мельник О. С., Козаревич В. О. Комп'ютерне конфігурування мікро- та наноелектронних пристроїв	80
Neagu V. I. Solving some complete singular integral equations by integral transformations and analytic extensions	86
Nikolaev O. G., Krainychenko A. S. Strict justification of the Fourier method in boundary-value problems of the theory of elasticity for a symmetrically loaded transversally isotropic oblate spheroid and its application to a hollow spheroid	94
Nikolaev O. G., Skitska M. V. Classical problem about an elastic sphere with a spherical inclusion	107
Стучинська Н. В., Андрійчук М. Д., Микитенко П. В. Оптимізація виробничих та логістичних задач у формалізмі засобами математичного та комп'ютерного моделювання.....	120
Стучинська Н. В., Хранійчук Г. В. Використання методів математичного та комп'ютерного моделювання для дослідження фармакокінетичних процесів	127

CONTENTS

Vanin V. A., Koshovy G. I. Methods of studying the scattering of an E –polarized wave by two conductive ribbons with impedance	3
Voropay A. V., Yegorov P. A., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S. Identification of friction moments in hinge supports of Timoshenko beam under non-stationary loading	17
Voskoboinick V. A., Voskoboinyk O. A., Voskobiinyk A. V., Kharchenko A. G., Trudenko D. V. Features of wave transformation by a permeable breakwater	28
Voskoboinick V. A., Onyshchenko A. M., Voskoboinyk O. A., Voskobiinyk A. V., Trudenko D. V. Interaction of surface gravity waves with perforated screen	39
Gorodetska T. S., Starovoit I. M., Oliynyk V. N. Generation of anti-symmetrical waves in an elastic waveguide by different types of load	49
Grinchenko V. T., Matsypura V. T. Discrete-analytical method of solving problems in mathematical physics	55
Dzhalladova I. A., Kaminsky O. YE. Mathematical modeling and analysis of controllability of singular hybrid systems in applied problems	61
Dovgiy S. O., Bulanchuk G. G., Bulanchuk O. M. GPU implementation of the right-hand side computation in the discrete vortex method for thin plate flow simulation.....	67
Kulian V. R., Korobova M. V., Yunkova O. O., Dolenko G. O. Effective diversification and stock portfolio dynamics under constraints	75
Melnyk O. S., Kozarevych V. O. Computer configuration of micro- and nanoelectronic devices.....	80
Neagu V. I. Solving some complete singular integral equations by integral transformations and analytic extensions	86
Nikolaev O. G., Krainychenko A. S. Strict justification of the Fourier method in boundary-value problems of the theory of elasticity for a symmetrically loaded transversally isotropic oblate spheroid and its application to a hollow spheroid.....	94
Nikolaev O. G., Skitska M. V. Classical problem about an elastic sphere with a spherical inclusion.....	107
Stuchynska N. V., Andriichuk M. D., Mykytenko P. V. Optimization of production and logistics tasks in pharmacy using mathematical and computer modeling.....	120
Stuchynska N. V., Khrapiichuk H. V. Using mathematical and computer modeling methods to study pharmacokinetic processes	127

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

- зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory** (New Jersey, USA);
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний обсяг статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний обсяг** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може бути більше 5-ти осіб. Номер збірника не може містити понад 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані примірники журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронна версія відразу ж стає доступною у БД «Наукова періодика України» Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського та на сайті Науково-технічної бібліотеки Національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://mmtt.khpi.edu.ua>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2. Кафедра вищої математики.

Тел. +38-057-707-60-35

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 1 (8) ' 2025

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.
Мовний рецензент української мови асистент Католик І. М.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЙ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 19.06.2025 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 1069. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Залізнична, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.