



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях

№ 1 (6)'2024

Харків
2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№1 (6)'2024

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No.1 (6)'2024

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2024

Kharkiv
NTU "KhPI", 2024

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies : зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2024. — № 1 (6). — 68 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців у галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Ідентифікатор медіа R30-02563 згідно з рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення від 11.01.2024 №33.

Мова статей – українська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder
National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров С. Є., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Кошовий Г. І., канд. фіз.-мат. наук, доц., ІРЕ НАНУ, Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Литвин О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Меньшиков О. В., д-р фіз.-мат. наук, Абердинський університет, Великобританія;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірнін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук, НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 4 від 26 квітня 2024 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaiev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Koshoviy G., PhD, Phys.-Math. Sci., Assoc. Prof., IRE of NASU, Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Lytvyn O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., UEPA, Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Menshykov O., Dr. Phys.-Math. Sci., University of Aberdeen, UK;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershin I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD, Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

Ю. М. АНДРЕЄВ, Д. Д. КОВАЛЬОВ

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ТА АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКІВ МЕХАНІКИ КОНСТРУКЦІЙ З БАЛКАМИ БЕРНУЛЛІ – ЕЙЛЕРА У ССКА КІДИМ

Розглянуто завдання розробки універсального аналітичного опису та алгоритму автоматичного комп'ютерного проведення розрахунків динаміки, статички та кінестатики механічних моделей конструкцій, що включають балкові ґрати. Це можуть бути розрахунки перехідних процесів, вільних та вимушених коливань, що встановилися, визначення положень рівноваги та напружено-деформованого стану при статичних та динамічних навантаженнях тощо. Сама конструкція може бути плоскою або просторовою, нерухомою або рухатися на площині чи в просторі, до неї можуть бути прикріплені різні прилади та пристрої. Також можна враховувати будь-які в'язі. Показано, як можна лаконічно спеціальною мовою підготовки комп'ютерних даних аналітично описати частину конструкції, що представляє балочні ґрати. За підсумками теорії пружності балок Бернуллі – Ейлера отримано 2 форми канонічного уявлення потенціальної енергії пружної балки. Це дає можливість ввести в мову опису механічних моделей спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ) новий елемент – балку, для якої вказується положення систем координат, пов'язаних з крайніми перерізами. Положення цих перерізів визначаються вузлами ґрат як тверді тіла. Кутові та лінійні координати таких тіл дають узагальнені координати механічної моделі. Розроблено алгоритм формування елементів, прийнятих для опису механічних моделей у ССКА КіДиМ. Таким чином формується пружна структура механічної моделі. Найвими засобами у цій програмі автоматично будуються рівняння динаміки та статички, тобто формується математична модель, і можуть бути проведені динамічні та статичні розрахунки. У статті на прикладі розрахунку деформаційного стану пружної решітки – основи БПЛА (безпілотно-го літального апарату) докладно демонструється запропонована методика. Проведено порівняння результатів із розрахунками за програмою ANSYS.

Ключові слова: ґратчасті балкові конструкції, балки Бернуллі – Ейлера, кінематика та динаміка плоских та просторових систем, розрахунки динаміки та статички плоских та просторових механічних моделей.

Yu. M. ANDRIEIEV, D. D. KOVALOV

ANALYTICAL DESCRIPTION AND ALGORITHM OF CALCULATIONS OF MECHANICS OF STRUCTURES WITH BERNOULLI – EULER BEAMS USING SCAS KIDYM

The problems of developing a universal analytical description and algorithm for automatic computer calculations of dynamics, statics and kinestatics of mechanical models of structures including a beam lattice are considered. This can be calculations of transient processes, steady-state free and forced oscillations, determination of equilibrium positions and stress-strain states under static and dynamic loads, etc. The structure itself can be flat or spatial, stationary or moving on a plane or in space. Various instruments and devices can be attached to it. Arbitrary connections can be taken into account. It is shown how it is possible to succinctly, using a special language for preparing computer data, analytically describe a part of a structure representing a beam lattice. Based on the theory of elasticity of Bernoulli-Euler beams, 2 forms of the canonical representation of the potential energy of an elastic beam are obtained. This makes it possible to introduce into the language of description of mechanical models of the special computer algebra system KiDyM (SCAS KiDyM) a new beam element, for which the position of the coordinate systems associated with the extreme sections is indicated. The positions of these sections are determined by lattice nodes, like solid bodies. Angular and linear coordinates of such solid bodies give generalized coordinates of the mechanical model. An algorithm has been developed for the formation of elements adopted to describe mechanical models in SCAS KiDyM. Thus, the elastic structure of the mechanical model is formed. Using the available tools in this program, equations of dynamics and statics are automatically constructed, that is, a mathematical model is formed, and dynamic and static calculations can be carried out. The proposed method is demonstrated in detail on the example of calculating the deformation of an elastic lattice, with is the basis of a UAV (unmanned aerial vehicle). The results are compared with calculations using the ANSYS program.

Key words: grated beam structures, Bernoulli – Euler beam, kinematics and dynamics of flat and spatial structures, computing dynamics and statics of flat and special mechanical models.

Вступ. Є достатньо багато машинобудівних конструкцій, опорними елементами яких є *плоскі та просторові стрижневі ґрати та ферми*. Такі конструкції разом з елементами машини, що на них закріплені, потрібно розраховувати як *статичні або динамічні моделі*. Ефективним засобом для розрахунку статички, динаміки, кінестатики та коливань складних плоских і просторових дискретних моделей з будь-якими в'язями є *спеціальна система комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ)* [1 – 4]. Протягом існування і використання цього програмного комплексу відбувалися досить успішні спроби [5, 6] поширити його можливості для проведення розрахунків механічної поведінки моделей конструкцій, в склад яких включено *пружні балки Бернуллі – Ейлера*. Такі моделі досі є доволі популярними в літературі [7 – 10].

В статті розглядається універсальний підхід до завдання та опису балкових систем з прикріпленням в їх вузлах різноманітним обладнанням, дія елементів якого враховується відповідними силами. Пропонується універсальний алгоритм опису і завдання таких конструкцій на мові опису механічних моделей КіДиМ [1] для автоматичного отримання їх математичної моделі з метою проведення комплексних аналітичних і чисельних динамічних і статичних розрахунків засобами ССКА КіДиМ.

В результаті отримано універсальний алгоритм опису на аналітичному рівні таких механічних систем, який дозволяє за одним і тим же описом за допомогою ССКА КіДиМ автоматично отримати динамічні рівняння руху, зокрема коливань, або алгебраїчні рівняння положень рівноваги. Це дає змогу дуже ефективно проводити комплексні розрахунки статички та динаміки (в тому числі, розрахунки вільних та змушених коливань, перехідних процесів тощо).

Аналіз останніх досліджень. Підхід, що реалізований тут, базується на представленні балкових конструкцій

цій системою балок Бернуллі – Ейлера з твердими масивними тілами у вузлах. Такі тверді тіла мають масу і моменти інерції. Працездатність таких систем підтверджується, наприклад, роботою [10]. Основою такої дискретизації є робота [7], де розглянуто аналогічні моделі, в яких інерційність системи задається точковими масами в вузлах конструкції. Там же прикладаються і зосереджені сили. Пружність моделі визначається властивостями балок Бернуллі – Ейлера. Близькими підходами користувалися в роботах [5, 6, 9].

Результати, що наведені в даній статті, є безпосереднім продовженням досліджень і реалізацією алгоритму, що викладено в статті [11].

Постановка задачі. В статті пропонується аналітичний алгоритм комп'ютерної побудови динамічних рівнянь широкого класу плоских та просторових балкових конструкцій на базі розробленого аналітичного опису їх механічної моделі для комп'ютерних розрахунків статичної, кінетостатичної та динамічної поведінки. Розглядається конструкція, що закріплена шарнірно в кількох точках контуру, хоча розроблений підхід допускає будь-яке закріплення (а також і повну відсутність його) для моделювання процесів польоту. На прикладі гратчастої балкової рами демонструються основні положення такої методики.

Використання теорії стрижнів Бернуллі – Ейлера для цілей дослідження.

1. Об'єкт для розрахунків. Розглядаються балкові плоскі та просторові конструкції (наприклад решітка, що представлена на рис. 1, розрахунки якої тут наводяться), що зазнають просторового напруженого стану. Уся конструкція представлена сукупністю пружних балок, кінці яких жорстко скріплені у вузлах (наприклад, за допомогою зварних з'єднань). Припускається, що елементарні балки відчують всю множину деформацій: розтягання-стискання, кручення, вигин та зсув у двох площинах.

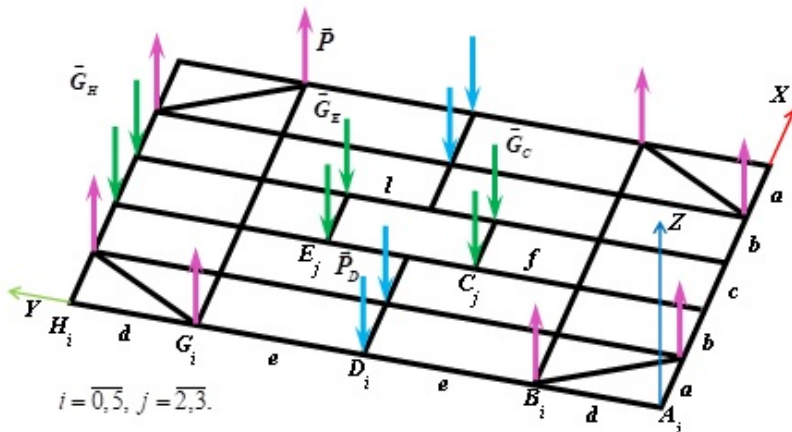


Рис. 1 – Зовнішній вигляд решітки із навантаженням.

в описі таких систем відносно того, що наведено в роботі [11]. Тому має сенс стисло і послідовно викласти всі міркування, які покладено в основу моделювання таких систем.

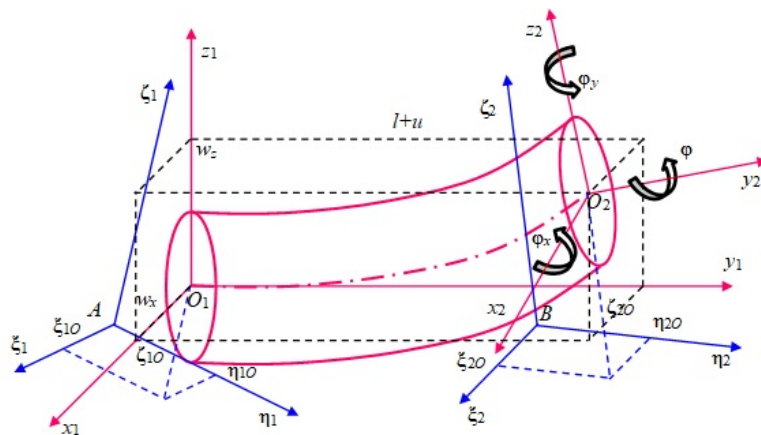


Рис. 2 – Балка у деформованому стані.

ні власні системи координат (показані на рис. 2 червоним кольором – $O_1x_1y_1z_1$ і $O_2x_2y_2z_2$). Положення цих

2. Завдання – отримати алгоритм визначення деформаційної картини всієї конструкції та внутрішніх зусиль в елементарних балках при статичному та динамічному навантаженні конструкції дискретною системою сил у вузлах. У вузлах розташовуються і зосереджені маси, зумовлені рівномірним рознесенням мас балок (наприклад, маса кожної балки розноситься по її кінцях навпіл [10]).

3. Опис балкової конструкції. Будемо дотримуватись таких позначень кутових і лінійних переміщень крайніх перерізів балки один щодо іншого, що показані на рис. 2 [8].

Практика використання запропонованого алгоритму привела до деяких змін

Кожна балка пов'язана своїми крайніми перерізами з вузлами, які представляються твердими тілами будь-якого розміру, маси, тензору інерції, зокрема і малими, в тому числі, і нескінченно малими та невагомими. З цими вузлами жорстко пов'язані системи координат (показані на рис. 2 синім кольором – $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ і $B\xi_2\eta_2\zeta_2$). Положення цих систем задаються в абсолютній системі координат, яка вважається умовно нерухомою, змінними координатами їх початків A та B і кутами Ейлера або Кривола, або літаковими, або кватерніонами, або матрицями напрямних косинусів орієнтації [12]. З крайніми перерізами балки пов'яза-

систем координат задаються *постійними* координатами центрів $O_1 (\xi_{10}\eta_{10}\zeta_{10})$ та $O_2 (\xi_{20}\eta_{20}\zeta_{20})$ і *постійними* кутами, кватерніонами або матрицями напрямних косинусів орієнтації в системах координат, пов'язаних з вузлами (твердими тілами) та показаними на рис. 2 синім кольором ($O_1x_1y_1z_1$ відносно $A\xi_1\eta_1\zeta_1$, $O_2x_2y_2z_2$ відносно $B\xi_2\eta_2\zeta_2$ відповідно).

Вся картина деформацій конструкції визначиться абсолютними координатами вузлів та абсолютними координатами орієнтації вузлів (кутами Ейлера, Крилова, літаковими, компонентами кватерніонів та іншим). Саме ці параметри можна взяти за узагальнені координати системи.

В даній роботі кожна балка припускається виконаною з одного матеріалу, має довжину l (у недеформованому стані), площу постійного поперечного перерізу F , постійні геометричні моменти інерції перерізу I_x , I_z , $I_y = I_x + I_z$, відомі значеннями модуля пружності E і модуля зсуву G матеріалу і може бути задана аналітичними записами – наступними синтаксичними конструкціями у вихідних даних ССКА КіДиМ:

$$\begin{aligned} Im'A_A &\sim \text{База}_A \mid OK_A \mid COM_A, m_A, Jx_A, Jy_A, Jz_A; \\ Im'A_B &\sim \text{База}_B \mid OK_B \mid COM_B, m_B, Jx_B, Jy_B, Jz_B; \\ Im'A_{A-}Im'A_B &\parallel K_A \mid K_B \mid L(I_{AB}), F(F_{AB}), Ix(I_{x_{AB}}), Iz(I_{z_{AB}}), E(E_{AB}), G(G_{AB}); \end{aligned} \quad (1)$$

Тут перші два вирази – це записи «тверде тіло» [1, 13], що задають положення та інерційність двох вузлів з іменами $Im'A_A$ та $Im'A_B$, до яких кріпиться балка. Положення їх задається положенням жорстко пов'язаних з ними систем координат (далі – СК) (на рис. 2 – це СК $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ і $B\xi_2\eta_2\zeta_2$) відносно базових для них СК, зв'язаних з тілами, позначеними тут База_A та База_B , або відносно абсолютної СК (тоді частина запису « $\sim \text{База}_A$ », або « $\sim \text{База}_B$ » не вказується). Саме положення пов'язаних з тілами СК записується в другій секції і позначене тут « OK_A » і « OK_B » відповідно, як списки зсувів та поворотів, які треба зробити, щоб поєднати абсолютну СК, або СК, що пов'язані з тілами База_A та База_B із СК тіл $Im'A_A$ та $Im'A_B$. Ці перетворення СК задаються списком у відповідному порядку виду $Sx(x)$, $Sy(y)$, $Sz(z)$, $Rx(\alpha)$, $Ry(\beta)$, $Rz(\gamma)$ – « S » означає зсув («shift») вздовж, « R » – поворот («rotation») навколо осі, що позначена після цих букв, на величини (числові або формульні), що вказані в дужках. В третій секції задана повна інформація про інерційність тіл в вузлах. COM_A і COM_B – це аналогічні списки, що задають положення головних центральних СК тіл – вузлів балки відносно пов'язаних із цими тілами СК (відносно показаних на рис. 2 СК $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ і $B\xi_2\eta_2\zeta_2$). Нарешті, m_A , Jx_A , Jy_A , Jz_A , m_B , Jx_B , Jy_B , Jz_B – формули або значення для мас та головних центральних моментів інерції тіл – вузлів. Ці два записи дозволяють програмі КіДиМ побудувати *інерційну структуру* рівнянь динаміки для руху вузлів $Im'A_A$ та $Im'A_B$ в абсолютній СК [1, 8].

Третій вираз в (1) – це, власне, і є опис балки, розташованої між вузлами $Im'A_A$ та $Im'A_B$. Тут

- K_A та K_B – списки виду $Sx(x)$, $Sy(y)$, $Sz(z)$, $Rx(\alpha)$, $Ry(\beta)$, $Rz(\gamma)$, що задають постійні координати положення та кути орієнтації «лівого» і «правого» перерізів балки в СК вузлів $Im'A_A$ та $Im'A_B$ відповідно;
- l_{AB} , F_{AB} , Ix_{AB} , Iz_{AB} , E_{AB} , G_{AB} – довжина, площа поперечного перерізу, геометричні моменти інерції перерізу, модулі пружності та зсуву матеріалу балки.

Інформація, що міститься в цьому записі, дає можливість програмі КіДиМ побудувати *пружну структуру* [8] рівнянь динаміки для балки з вузлами $Im'A_A$ та $Im'A_B$.

4. Побудова пружної структури динамічних рівнянь. У прийнятих тут припущеннях зв'язок між силами і парами (N – розтягуюча сила, Q_x і Q_z – перерізуючі сили, M – крутний момент, M_x , M_y – згинальні моменти), прикладеними до балки по рис. 2, та малими лінійними (u , w_x , w_z) і кутовими (φ , φ_x , φ_z) переміщеннями задається виразом

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{d},$$

де матриця \mathbf{C} має ненульові елементи, згідно [8]:

$$c_{11} = \frac{4EI_x}{l}, c_{15} = c_{51} = -\frac{6EI_x}{l^2}, c_{22} = \frac{4EI_z}{l}, c_{24} = c_{42} = \frac{6EI_z}{l^2}, c_{33} = \frac{GI}{l}, c_{44} = \frac{12EI_z}{l^3}, c_{55} = \frac{12EI_x}{l^3}, c_{66} = \frac{EF}{l},$$

а вектори

$$\mathbf{R}^T = \{M_x, M_y, M, Q_x, Q_y, N\} \quad \text{та} \quad \mathbf{d}^T = \{\varphi_x, \varphi_z, \varphi, w_x, w_z, u\}.$$

Ці вирази дозволяють записати потенціальну енергію балки:

$$\Pi = 0,5\mathbf{d}^T\mathbf{C}\mathbf{d}. \quad (2)$$

В роботах [6, 9, 11] показано, що потенціальна енергія з виразу (2) для наведених матриці \mathbf{C} та вектора \mathbf{d} – це квадратична форма у неканонічному вигляді. Її можна канонізувати лінійним перетворенням \mathbf{d} . Наведемо дві форми такого перетворення для вектору \mathbf{d} , коли матриця \mathbf{C} стає діагональною:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \left\{ \psi_x = \varphi_x - \frac{3}{2l} w_z, \psi_z = \varphi_z + \frac{3}{2l} w_x, \varphi, w_x, w_z, u \right\}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag} \left\{ \frac{4EI_x}{l}, \frac{4EI_z}{l}, \frac{GI}{l}, \frac{3EI_z}{l^3}, \frac{3EI_x}{l^3}, \frac{EF}{l} \right\}; \quad (3)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{d}}} = \left\{ \varphi_x, \varphi_z, \varphi, u_x = w_x + \frac{l}{2} \varphi_z, u_z = w_z - \frac{l}{2} \varphi_x, u \right\}; \quad \tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = \text{diag} \left\{ \frac{EI_x}{l}, \frac{EI_z}{l}, \frac{GI}{l}, \frac{12EI_z}{l^3}, \frac{12EI_x}{l^3}, \frac{EF}{l} \right\}. \quad (4)$$

5. Моделювання балкових конструкцій у ССКА КіДиМ. Вирази (3) або (4) дозволяють автоматично за інформацією у вигляді (1) отримати аналітичними перетвореннями у ССКА КіДиМ пружні елементи з координатами – компонентами вектора $\tilde{\mathbf{d}}$ (або $\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}$) та характеристиками – діагональними компонентами матриці $\tilde{\mathbf{C}}$ (або $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}$).

Тобто, для першої форми – це будуть елементи:

$$C.x = 4EI_x/l; \quad C.\psi_z = 4EI_z/l; \quad C.\varphi = GI/l;$$

$$C.w_x = 3EI_z/l^3; \quad C.w_z = 3EI_x/l^3; \quad C.u = EF/l;$$

для другої форми – це будуть елементи:

$$C.\varphi_x = EI_x/l; \quad C.\varphi_z = EI_z/l; \quad C.\varphi = GI/l;$$

$$C.u_x = 12EI_z/l^3; \quad C.u_z = 12EI_x/l^3; \quad C.u = EF/l.$$

Для того щоб виразити координати цих силових елементів через узагальнені координати всієї системи, треба виразити через них геометричні параметри (рис. 2) деформації балки ($\varphi_x, \varphi_z, \varphi, w_x, w_z, u$), що входять до виразів компонент вектору $\tilde{\mathbf{d}}$ (або $\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}$) в (3) і (4).

Будемо вважати, що СК $O_2x_2y_2z_2$ щодо СК $O_1x_1y_1z_1$ буде задана декартовими координатами початку (точка O_2) – $x_{O_2}^{(O_1)}, y_{O_2}^{(O_1)}, z_{O_2}^{(O_1)}$ і малими кутами Крилова: $\psi^{(O_1)}$ – кут повороту навколо осі O_1y_1 , $\theta^{(O_1)}$ – кут повороту навколо нового положення осі O_1x_1 , $\varphi^{(O_1)}$ – кут повороту навколо отриманого положення осі O_1z_1 (тут і далі верхній індекс у дужках означає позначення СК, в якій задані вектори, або компоненти векторів, або кути), для матриць індекси в дужках означають: верхній – у яку СК ця матриця перекладає вектори, а нижній – з якої.

Тоді шукані параметри деформації балки можна знайти через них

$$w_x = x_{O_2}^{(O_1)}, \quad w_z = z_{O_2}^{(O_1)}, \quad u = y_{O_2}^{(O_1)} - l, \quad \varphi_x = \theta^{(O_1)}, \quad \varphi = \psi^{(O_1)}, \quad \varphi_z = \varphi^{(O_1)}.$$

Декартові координати точки O_2 у СК $O_1x_1y_1z_1$ – це компоненти вектора:

$$\overline{O_1O_2}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(abc)}^{(A)} \overline{O_1O_2}^{(abc)} = S_{(A)}^{(O_1)} \left\{ S_{(abc)}^{(A)} \left[\left(\vec{r}_B^{(abc)} - \vec{r}_A^{(abc)} \right) + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} \right] - \overline{AO_1}^{(A)} \right\},$$

де

$$\overline{O_1O_2}^{(abc)} = \vec{r}_B^{(abc)} + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} - \vec{r}_A^{(abc)} - S_{(A)}^{(abc)} \overline{AO_1}^{(A)} = \left[\vec{r}_B^{(abc)} - \vec{r}_A^{(abc)} \right] + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} - S_{(A)}^{(abc)} \overline{AO_1}^{(A)}.$$

Тут матриці $S_{(abc)}^{(A)}$ і $S_{(B)}^{(abc)}$ визначаються з послідовності поворотів, заданих в описі поворотів СК у секціях OK_A та OK_B для вузлів $Im'A_A$ та $Im'y_B$ у формулах (1) відповідно, матриці $S_{(A)}^{(O_1)}$ і $S_{(O_2)}^{(B)}$ – аналогічно із секцій K_A та K_B описів балки (1). Так само вектори $\overline{AO_1}^{(A)}$ і $\overline{BO_2}^{(B)}$ легко визначаються з описів зміщень у секціях K_A і K_B завдань балки, а вектори $\vec{r}_A^{(abc)}, \vec{r}_B^{(abc)}$ – з завдань вузлів там же у формулах (1).

Кути Крилова знаходяться з компонент матриці повороту $S_{(O_2)}^{(O_1)}$, яку можна отримати через шукані кути $\psi^{(O_1)}, \theta^{(O_1)}, \varphi^{(O_1)}$:

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\gamma + S_\psi S_\theta S_\gamma & S_\psi S_\theta C_\gamma - C_\psi S_\gamma & S_\psi C_\theta \\ C_\theta S_\gamma & C_\theta S_\gamma & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\gamma - S_\psi C_\gamma & C_\psi S_\theta C_\gamma + S_\psi S_\gamma & C_\psi C_\theta \end{bmatrix},$$

де великими буквами C та S позначено \cos та \sin , а індексами – їх кути $\psi^{(O_1)}$, $\theta^{(O_1)}$, $\varphi^{(O_1)}$, і з послідовності поворотів СК від $O_1x_1y_1z_1$ до $A_5^x\eta_1\zeta_1$, від $A_5^x\eta_1\zeta_1$ до абсолютної, від абсолютної до $A_2^x\eta_2\zeta_2$ та від $A_2^x\eta_2\zeta_2$ до $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 2):

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(abc)}^{(A)} S_{(abc)}^{(B)} S_{(O_2)}^{(B)},$$

$$\psi^{(O_1)} = \arctg(S_{13}/S_{33}), \quad \theta^{(O_1)} = -\arcsin S_{23}, \quad \varphi^{(O_1)} = \arctg(S_{21}/S_{22}),$$

де S_{13} , S_{33} , S_{23} , S_{21} , S_{22} – компоненти матриці $S_{(O_2)}^{(O_1)}$. Очевидно, через малість кутів $\psi^{(O_1)}$, $\theta^{(O_1)}$, $\varphi^{(O_1)}$ ці формули не вироджуються.

Тестування та розрахунки за наведеним алгоритмом. Для налагодження процедур комплексу КіДиМ, що реалізують розроблений алгоритм, було розглянуто наступний приклад – розрахувати деформаційний стан балкової ґратчастої конструкції (рис. 1), що є несучою конструкцією БпЛА [15] (рис. 3).



Рис. 3 – Прототип квадрокоптеру, розробленого в НТУ «ХП».

Ця решітка зібрана зі сталевих труб прямокутного перерізу $30 \times 20 \times 2$ мм розмірами (м): $a = 0,42$; $b = 0,315$; $c = 0,41$; $d = 0,42$; $e = 0,52$; $f = 0,31$; $l = 0,21$ (рис. 1).

Відповідно до ГОСТ 8645 – 68 (<https://dneprofpmash.com/files/----8645-68.pdf>) визначаємо площу перерізу – $F = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, осеві геометричні моменти інерції перерізу (м^4 , осі за рис.2) $I_x = 2,01 \cdot 10^{-8}$, $I_z = 1,05 \cdot 10^{-8}$; погонну масу $1,39 \text{ кг/м}$. Модуль пружності для сталі приймаємо рівним $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, модуль зсуву $G = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Змодельована дія на решітку зосереджених сил (рис. 1) – підйомних, що приведені до вузлів A_1 , B_0 , A_4 , B_5 , G_0 , H_1 , G_5 , H_4 – $P = 125 \text{ Н}$, ваги встановленого обладнання – $G_C = 235 \text{ Н}$, $G_E = 205 \text{ Н}$, $G_H = 10 \text{ Н}$.

Рішення. Уявімо решітку, що складається з 58-и сталевих балок Бернуллі – Ейлера та 34-ма вузлами (рис. 1 та 3), 4 з яких в точках B_0 , B_5 , G_0 , G_5 «закріплені» защемленням. Замінімо для деякого спрощення подвійні балочки в кутах решітки однією, по діагоналі, отримаємо балки $\{A_1, B_0\}$, $\{A_4, B_5\}$, $\{G_0, H_1\}$, $\{G_5, H_4\}$. У кожному вузлі розташуємо точкове тверде тіло і зв'язану з ним локальну СК з осями, які в недеформованому стані решітки паралельні осям основної системи A_0XYZ (рис. 1). Враховуючи очевидну деформацію конструкції, будемо задавати орієнтацію пов'язаних з вузлами СК відносно абсолютної кутами Крилова – послідовністю поворотів навколо осі ординат (ψ), навколо осі абсцис (θ), навколо осі аплікату (φ). Зосередимо масу конструкції у вузлах шляхом поділу маси балок навпіл на їх кінцях. Уявімо таким чином у вузлах конструкції масивні точки, які крім маси можуть мати і моменти інерції. Це потрібно для того, щоб задача була динамічно визначеною. Для розв'язання поставленої задачі статичні величини інерційних властивостей представлених твердих тіл у вузлах особливого значення не мають і впливають лише на швидкість отримання рішення (сили ваги решітки тут не враховуються, хоча врахувати їх не становить труднощів).

Таким чином, у системі 180 узагальнених координат – 90 кутів (30 вузлів по 3 кути) та 90 декартових координат (30 вузлів по 3 координати).

Підготуємо вихідні дані завдання мовою ССКА КіДиМ. Наведемо для кращого розуміння деякі типові записи типу (1), що задають механічну модель конструкції:

1) вузли

$$\mathbf{A}_i | S_x(xA_i), S_y(yA_i), S_z(zA_i), R_y(\psi A_i), R_x(\theta A_i), R_z(\gamma A_i) | m(mA_i), J_x(JxA_i), J_y(JyA_i), J_z(JzA_i);$$

$$\mathbf{B}_i | S_x(xB_i), S_y(yB_i), S_z(zB_i), R_y(\psi B_i), R_x(\theta B_i), R_z(\gamma B_i) | m(mB_i), J_x(JxA_i), J_y(JyA_i), J_z(JzA_i); \quad (5)$$

...

2) балки

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i & \parallel \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | L(d), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{B}_j \mathbf{C}_j & \parallel \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | L(f), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 & \parallel Rz(-\pi/2) | Rz(-\pi/2) | L(a), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 & \parallel Rz(\alpha) \quad | Rz(\alpha) \quad | L(h), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_5 & \parallel Rz(-\alpha) \quad | Rz(-\alpha) \quad | L(h), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для скорочення записів даних тут використано нижні індекси i, j , межі значень яких вказано на рис. 1, що задаються в інструкції:

$$\mathbf{РОЗМНОЖИТИ} := i(0,5), j(2,3).$$

Це дає змогу ССКА КіДиМ побудувати повний комплект даних [14]. Такий комплект дозволяє ССКА КіДиМ автоматично побудувати динамічні рівняння руху обраної моделі і провести розрахунки. Для того щоб отримати координати вузлів в положенні рівноваги, треба мати в моделі демпфуючі елементи і обрати величини інерційних параметрів. Ще треба задати початкові значення узагальнених координат. Це дасть змогу отримати необхідний перехідний процес.

Сили дисипації мають вплив на швидкість динамічного процесу переходу системи з початкового положення до урівноваженого. Тут достатньо їх задати в лінійному вигляді [7], що і було зроблено. Треба тільки підібрати значення коефіцієнтів дисипації. На рис. 4 показано закон зміни аплікати центральної точки D_3 для двох наборів значень коефіцієнтів дисипації. Для задач статички потрібно підбирати величину дисипації так, щоб отримати аперіодичний процес. Це робиться декількома пробними розрахунками.

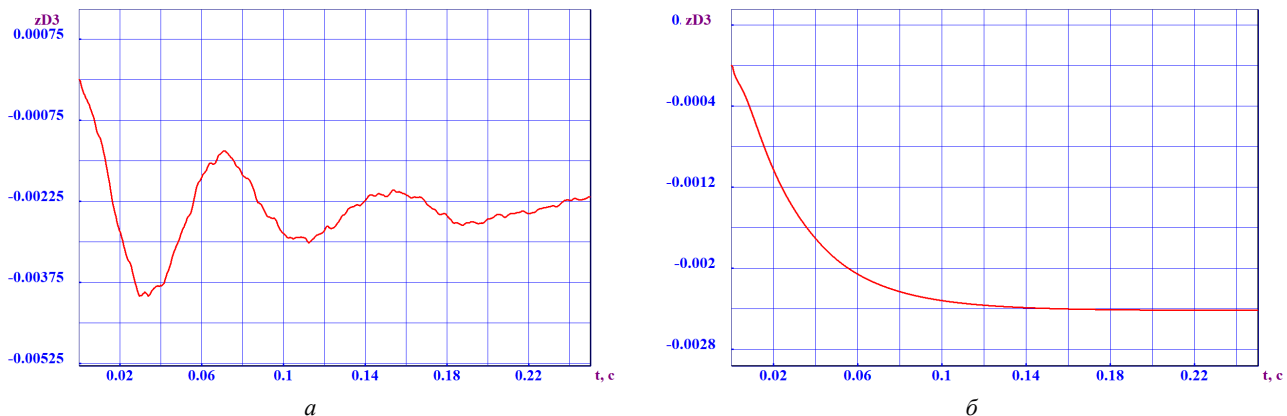


Рис. 4 – Аплікати точки D_3 для коефіцієнтів дисипації:

a – по кутам 100 кгм/с, по координатам 10 кг/с; b – по кутам 100 кгм/с, по координатам 1000 кг/с.

Аналогічні міркування відносно моделі інерції приводять нас до того, що точне відображення інерційних властивостей вузлів для задачі, що тут розглядається, не має особливого значення, тим паче важко визначити їх моменти інерції. Представлення інерційності вузлів решітки повним тензором інерції призводить до дуже складної математичної моделі, яка інтегрується *методом Рунге – Кутти* дуже довго. Тому для розв'язання поставленої задачі було використано представлення інерційності вузлів тільки як точкових мас. Це зменшило час розрахунку задачі в сотні разів (до однієї чи кількох хвилин на сучасних комп'ютерах). Але такий підхід приводить до виродження динамічних рівнянь по узагальненим кутам вузлів – в них відсутні члени з другими похідними. Таким чином, в матриці інерції системи диференціальних рівнянь з'являються нульові рядки і нульові стовпці. Оскільки матриця є діагональною, то в ній відсутні відповідні значення на головній діагоналі. Такі рівняння (в яких нема членів з прискореннями узагальнених координат) можна трактувати як *рівняння неголономних в'язей* (при наявності сил дисипації, що залежать від узагальнених швидкостей). Так як ССКА КіДиМ може розв'язувати задачі неголономної механіки, то поставлена в статті задача теж благополучно була розв'язана. Алгоритмічно це вимагало змінити процедуру отримання рівнянь динаміки в *формі Коші* шляхом заміни в матриці інерції нульових значень одиничними.

Початкові умови логічно обирати в положенні недеформованої конструкції.

В табл. 1 надано найбільш суттєві результати, що отримані в розрахунках деформаційного стану решітки –

величини аплікат вузлів в положенні рівноваги під дією заданих сил (рис. 1).

Таблиця 1 – Результати розрахунків решітки – аплікати вузлів, мм

Індекс вузла	0	1	2	3	4	5
ZA_i	0,365136	0,357982	0,163867	0,163875	0,358001	0,36514
ZB_i		-0,681327	-1,33361	-1,33358	-0,681273	
ZC_j			-2,24774	-2,24771		
ZD_i	-0,114815	-1,41409	-2,41838	-2,41835	-1,41405	-0,114803
ZE_j			-2,22254	-2,22251		
ZG_i		-0,679146	-1,32325	-1,32322	-0,679094	
ZH_i	0,352641	0,321095	0,108345	0,108353	0,321114	0,352644

Для об'єктивної перевірки отриманих динамічним методом результатів цей же приклад було розраховано за допомогою програми *Ansys*. Модель решітки будувалася за висхідним алгоритмом за методикою, що викладена в статті [15]. На рис. 5 представлено геометричну фігуру решітки (переміщення в напрямку, що перпендикулярний площині недеформованої конструкції показані на порядок більшими, ніж вони є). Слід додати, що на рис. 5 показані сумарні переміщення точок решітки з урахуванням переміщень в площині рами. Але вони на 3 порядки менші, ніж переміщення точок вздовж осі аплікат, що показані в табл. 1. З цього випливає, що результати розрахунків сформульованої тут задачі запропонованим методом і за допомогою програми *Ansys* збігаються.

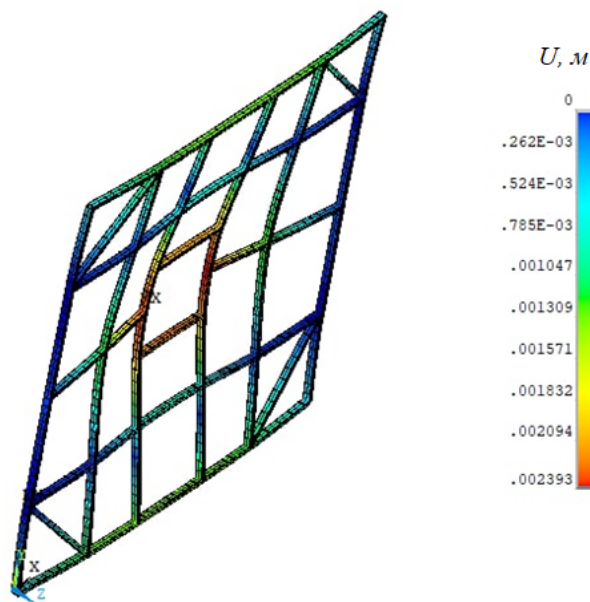


Рис. 5 – Розподіл сумарних переміщень в моделі рами.

Перспективи подальших досліджень. Розроблений підхід дає змогу ставити і розв'язувати задачі динаміки і статки механічних систем, в моделі яких можуть входити наряду з поширеними в дискретних системах твердими тілами, що здійснюють будь-які рухи, крутильними та лінійними пружними елементами, пружні властивості яких визначаються однією координатою, пружні балки та стрижні, які можна моделювати балками Бернуллі – Ейлера. Прикладом такої системи є система, що наведена в статті на рис. 3. Це задачі розв'язання вільних та вимушених коливань, розрахунок перехідних процесів та визначення положень рівноваги як в розглянутій тут задачі. Для цієї задачі в подальшому можна розглянути автоматичне спрощення рівнянь шляхом використання малих значень кутів повороту кінцевих перетинів балок. Це актуально для задач більшої розмірності відносно розглянутої.

Висновки. В статті розглянуто завдання визначення положення рівноваги гратчастої решітки розв'язанням динамічної задачі відносно великої розмірності зі 180 узагальненими координатами. Динамічні рівняння складаються комп'ютером за допомогою спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ). Для того щоб використати переваги таких можливостей, пропонується спеціальний аналітичний опис таких систем і

Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, №1 (6)'2024.

алгоритм автоматичного отримання дискретних елементів завдання механічної моделі в ССКА КіДиМ. Показано, як краще задати інерційні і дисипативні властивості моделі для швидкого розрахунку деформаційного стану конструкції. Не зважаючи на те, що алгоритми тут викладаються з метою їх реалізації в ССКА КіДиМ, вони мають значення і для реалізації в інших системах.

Список літератури

1. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – №7. – С. 130 – 138.
2. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. – К. : ИПП им. Писаренко Г.С. Ассоц. «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
3. Антощенко Р. В., Андреев Ю. М., Тищенко Л. Н. К построению уравнений динамики многоэлементного машинно-тракторного агрегата // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця : Міністерство аграрної політики України, 2015. – №3 (79). – С. 69 – 78.
4. Antoshchenkov R., Andreev Yu. Dynamics of multielement agricultural aggregates, taking into account nonholonomic constraints and spatial motion // Nonlinear Dynamics – 2016 : Proceedings of 5th International Conference (September 27 – 30, 2016)/National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al. – Kharkov, 2016. – P. 48 – 56.
5. Митин В. Н., Халыпа В. М., Штейнвольф Л. И. К расчету перемещений и внутренних усилий в балочных конструкциях // Динамика и прочность машин: респ. межотвод. науч.-техн. сб. – X. : Вища шк. Изд-во при Харк. ун-те, 1981. – Вып. 34. – С. 36 – 41.
6. Андреев Ю. М. Моделирование стержневых и балочных конструкций в специальной системе компьютерной алгебры // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – №1/1 (25). – С. 63 – 66.
7. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. – М. : Науч.-изд. центр "Инженер", 1999. – 145 с.
8. Мясенков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник. – М. : Машиностроение, 1989. – 520 с.
9. Кравец В. В., Крышко Е. П. Исследование параметров пространственного движения свободного твердого тела в нелинейной постановке // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20. – №11. – С. 122 – 125.
10. Горбачев В. И., Мельник Т. М. О постановке задач в общей теории Бернулли – Эйлера неоднородных анизотропных стержней // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2018. – №1. – С. 43 – 51.
11. Андреев Ю. М., Марусенко О. М. Алгоритм, реалізація, підготовка даних, проведення розрахунків статичної та динамічної балкових ґратчастих конструкцій у ССКА КіДиМ // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2022. – № 2 (2022). – С. 23 – 28. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270159.
12. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М. : Гл. ред. физмат. лит., 1961. – 824 с.
13. Андреев Ю. М. Реализация и использование алгоритма Левенберга – Маркварда в задачах калибровки роботов-манипуляторов // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
14. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Метод подсистем для аналитического динамического анализа и синтеза // Физические и компьютерные технологии : 12-я Междунар. конф. : труды. – Харьков : ХНПК «ФЭД», 2006. – С. 123 – 131.
15. Бреславський Д. В., Конкін В. М., Кортунов В. І., Марусенко О. М. Комп'ютерне моделювання деформованого стану та міцності рамної конструкції важкого БПЛА // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2022. – № 2 (2022). – С. 17 – 22. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270148.

References (transliterated)

1. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh sistem tverdykh tel [On the dynamics of holonom solid systems]. // *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2005, vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
2. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebrы dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [A new computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonom and non-hilonom solid systems]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy: mezhd. nauch.-tekhn. sb. NAN Ukrainy* [Reliability and durability of machines and structures: international scientific and technical digest of the National Academy of Science of Ukraine.]. Kiev, IPP im. Pisarenko G.S. Assots. «Nadezhnost' i sooruzheniy» Publ., 2006, vol. 26, pp. 11–18.
3. Antoshchenkov R. V., Andreev Yu. M., Tishhenko L. N. K postroyeniyu uravneniy dinamiki mnogoelementnogo mashinno-traktornogo agregata [On deriving the equation of dynamics of a multi-element machine-tractor agregate]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Vibrations in thechnics and technologies]. Vinnitsya, Ministerstvo agrarnoyi polityky Ukrainy Publ., 2015, no. 3 (79), pp. 69 – 78.
4. Antoshchenkov R., Andreev Yu. Dynamics of multielement agricultural aggregates, taking into account nonholonomic constraints and spatial motion. *Nonlinear Dynamics – 2016 : Proceedings of 5th International Conference (September 27 – 30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al.* Kharkov, 2016. pp. 48–56.
5. Mitin V. N., Khalypa V. M., Shteynvol'f L. I. K raschetu peremeshheniy i vnutrennykh usiliiy v balochnykh konstruksiyakh [On computing displacements and internal strains in beam structures]. *Dinamika i prochnost' mashin: resp. mezhotvod. nauch.-tekhn. sb.* [Dynamics and strength of machines]. Kharkov, Vyshha shk. Izd-vo pri Khark. un-te Publ., 1981, vol. 34, pp. 36–41.
6. Andreev Yu. M. Modelirovaniye stержnevyykh i balochnyykh konstruksiy v spetsial'noy sisteme komp'yuternoy algebrы [Modeling of rod and beam structures in a special computer algebra system]. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of Enterprice Technologies]. Kharkov, 2007, no. 1/1 (25), pp. 63–66.
7. Zylev V. B. *Vychislitel'nye metody v nelineynoy mekhanike konstruksiy* [Numerical methods in nonlinear structure mechanics]. Moscow, Nauch.-izd. tsentr "Inzhener", 1999. 145 p.
8. Myachenkov V. I., Mal'tsev V. P., Mayboroda V. P. *Raschety mashinostroitel'nykh konstruksiy metodom konechnyykh elementov : spravochnik* [Computations of structures in mechanical engineering by the finite element method: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 520 p.
9. Kravets V. V., Kryshko E. P. Issledovanie parametrov prostranstvennogo dvizheniya svobodnogo tverdogo tela v nelineynoy postanovke [Studying the parameters of the spacial movement of a free solid in nonlinear setting]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 19846 vol. 20, no. 11, pp. 122–125.
10. Gorbachev V. I., Mel'nik T. M. O postanovke zadach v obshhey teorii Bernulli – Eyera neodnorodnykh anizotropnykh stержney [On the problem setting in the general Bernoulli-Euler theory for anisotropic rods]. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika* [Bulletin of the Moscow University. Ser. 1, Mathematics. Mechanics]. 2018, no. 1, pp. 43–51.

11. Andreev Yu. M., Marusenko O. M. Algoritm, realizatsiya, pidgotovka danykh, provedennya rozrakhunkiv statyky ta dynamiky balkovykh gratchastykh konstruktsiy u SSKA KiDyM [Algorithm, implementation, data preparation, computation of the statics and dynamics of grating beam structures using SCAS KiDyM]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 2 (2022), pp. 23–28. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270159.
12. Lur'e A. I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1961. 824 p.
13. Andreev Yu. M. Realizatsiya i ispol'zovanie algoritma Levenberga – Markvarda v zadachakh kalibrovki robotov-manipulyatorov [Implementing and using the Levenberg-Markward algorithm in the problems of calibrating manipulator robots]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2021, no. 2 (2021), pp. 86–93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
14. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Metod podsistem dlya analiticheskogo dinamicheskogo analiza i sinteza [Subsystem Method for analytical dynamical analysis and synthesis]. *Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 12-ya Mezhdunar. konf. : trudy* [Physical and computer technologies. Theses of the 12th International Conference]. Kharkov, KhNPK «FED» Publ., 2006. pp. 123–131.
15. Breslavs'ky D. V., Konkin V. M., Kortunov V. I., Marusenko O. M. Komp'yuterne modelyuvannya deformovanogo stanu ta mitsnosti ramnoyi konstruktsiyi vazhkogo BPLA [Computer modeling of the deformed state and strength of a frame structure of an unmanned aerial vehicle]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2021, no. 2 (2022), pp. 17–22. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270148.

Надійшло (received) 11.01.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Ковальов Даниїл Денисович – магістрант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 284-70-86; e-mail: daniil.kovalov@infiz.khpi.edu.ua.

Kovalov Daniil Denysovich – graduate student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (066) 284-70-86; e-mail: daniil.kovalov@infiz.khpi.edu.ua.

С. В. БАРАНОВСЬКИЙ

ПРОБЛЕМИ УПРАВЛІННЯ ІМУННОЮ ВІДПОВІДДЮ В УМОВАХ КОНКУРЕНТНОЇ АДСОРБЦІЇ, ДИФУЗІЙНИХ ЗБУРЕНЬ ТА ТЕМПЕРАТУРНОЇ РЕАКЦІЇ ОРГАНІЗМУ

Аналіз проблем, які пов'язані з швидким поширенням інфекційних захворювань, вказує на необхідність формування нових підходів до діагностики та розробки ефективних персоналізованих програм лікування. Одним із важливих аспектів вирішення цього завдання є створення інструментарію математичного моделювання для прогнозування динаміки інфекційних захворювань з урахуванням просторових ефектів, зосереджених впливів, різних механізмів захисту організму в умовах застосування різного роду терапевтичних методів лікування. Важливим компонентом комплексних методів лікування широкого спектру інфекційних захворювань є застосування адсорбційних препаратів, які поряд з детоксикацією організму здатні забезпечити ще й додатковий механізм нейтралізації вірусних елементів. В процесі застосування таких засобів матиме місце адсорбція не лише патогенних елементів і токсинів, але й різного роду імунних агентів, що впливатиме на динаміку імунної відповіді. У статті запропоновано узагальнення моделі інфекційного захворювання для урахування особливостей конкурентної адсорбції антигенів та імунних агентів в умовах дифузійних збурень, зосереджених впливів та температурної реакції організму. Шляхом синтезу ідей покрокових процедур, асимптотичних і числових методів сконструйовано ефективну обчислювальну технологію поетапного наближення розв'язку вихідної модельної сингулярно збуреної задачі. Наведені результати комп'ютерних експериментів ілюструють особливості зменшення прогнозованої концентрації вірусних елементів при їх конкурентній адсорбції разом з імунними агентами, зокрема, ефект зниження ефективності застосування неспецифічних адсорбентів. Підкреслено, що урахування особливостей дії конкурентної адсорбції є важливим для прийняття рішень щодо формування раціональних програм лікування із комплексним застосуванням адсорбційних речовин та імунологічних препаратів.

Ключові слова: модель інфекційного захворювання, конкурентна адсорбція, динамічні системи із запізненням, дифузійне розсіювання, зосереджені впливи, асимптотичні методи, сингулярно збурені задачі.

S. V. BARANOVSKY

PROBLEMS OF MANAGING THE IMMUNE RESPONSE UNDER CONDITIONS OF COMPETITIVE ADSORPTION, DIFFUSION PERTURBATIONS AND TEMPERATURE RESPONSE OF THE ORGANISM

Analysis of the problems associated with the rapid spread of infectious diseases indicates the need for new approaches to the diagnosis and development of effective personalized treatment programs. One of the important aspects of solving this problem is the creation of a mathematical modeling toolkit for predicting the dynamics of infectious diseases, taking into account spatial effects, concentrated effects, various mechanisms of body protection in the conditions of the application of various types of therapeutic methods of treatment. An important component of complex methods of treatment of a wide range of infectious diseases is the use of adsorption drugs, which, along with detoxification of the body, are able to provide an additional mechanism of neutralization of viral elements. In the process of using such means, not only pathogenic elements and toxins will be adsorbed, but also various types of immune agents, which will affect the dynamics of the immune response. In the paper the infectious disease model is generalized to take into account the features of competitive adsorption of antigens and immune agents in the conditions of diffusion perturbations, concentrated influences and temperature reaction of the body. By synthesizing the ideas of step-by-step procedures, asymptotic and numerical methods, an effective computational technology of step-by-step approximation of the solution of the original model singularly perturbed problem was built. The results of the computer experiments presented in the paper illustrate the features of reducing the predicted concentration of viral elements during their competitive adsorption together with immune agents, in particular, the effect of reducing the efficiency of the use of non-specific adsorbents. It is emphasized that taking into account the features of the action of competitive adsorption is important for making decisions regarding the formation of rational treatment programs with the complex use of adsorbing substances and immunological drugs.

Key words: infectious disease model, competitive adsorption, dynamic systems with delay, diffusion scattering, concentrated influences, asymptotic methods, singularly perturbed problems.

Вступ. Застосування різного роду *адсорбційних препаратів* є давнім та досить поширеним і у сучасній медичній практиці способом *детоксикації організму*. Перевагою такого способу є простота його реалізації, висока ефективність та відсутність складних побічних ефектів. Крім того, здатність адсорбентів зв'язувати та виводити з організму *патогенні елементи* забезпечує можливість застосування відповідних препаратів як доповнення чи навіть альтернативу *антибактеріальним, протівірусним та імунобіологічним засобам* [1], а також, як додатковий механізм впливу на перебіг *інфекційної хвороби*. Таким чином, при розробці раціональних програм лікування із застосуванням *спеціалізованих експертних систем прийняття рішень* необхідно забезпечити наявність в них ефективного інструментарію для прогнозування динаміки хвороби, в тому числі, в умовах *адсорбційної терапії*.

Аналіз останніх досліджень. У [2] запропоновано модифікації моделей інфекційного захворювання, що забезпечує урахування *дифузійних збурень* та зосередженого впливу імунологічних препаратів, що вводяться в організм шляхом ін'єкцій чи за допомогою крапельниці. А в [3] такий підхід узагальнено для моделі протівірусної імунної відповіді щодо комплексного урахування зосереджених впливів та умов дифузійних збурень, температурної реакції організму і логістичної динаміки антигенів. Як відомо [1, 4], процес адсорбування патогенних елементів, на відміну від дії імунологічних засобів, має зовсім інший механізм та пов'язаний з дифузією цих елементів у мезо- та мікропори адсорбенту. У [5] представлена модифікація базової моделі інфекційного захворювання (наприклад, [6]), яка забезпечує урахування ефектів адсорбування антигенів при прогнозуванні динаміки вірусної інфекції в умовах дифузійних збурень та зосереджених впливів імунологічних засобів. А в [6]

такий підхід використано при узагальненні моделі вірусної інфекції для прогнозування комплексного керованого впливу адсорбційної та імунної терапії на розвиток імунної відповіді в умовах дифузійного збурення та температурної реакції організму.

Постановка задачі. Підвищення інтересу до *методів еферентної медицини*, що спостерігається в останні десятиліття, сприяв розробці великої кількості адсорбційних препаратів, які відрізняються як розміром частинок, так і особливостями їхньої поверхні, розміром пор, хімічною структурою. Значна частина адсорбентів не є специфічними до конкретних типів патогенних елементів. Вони вбирають та виводять різні хімічні сполуки, які здатні проникнути у їх пори. Таким чином, у випадку застосування неспецифічних адсорбентів матиме місце *конкурентна адсорбція*, що важливо враховувати при прогнозуванні ефектів відповідної терапії. Зазначимо, що питання математичного моделювання конкурентної адсорбції та дифузії багатьох газів у нанопористих кіберсистемах досліджувались, зокрема, у роботах [7, 8].

Метою даної роботи є узагальнення моделі інфекційного захворювання для прогнозування корекційного впливу на перебіг хвороби адсорбуючих лікарських засобів в умовах дифузійних збурень, температурної реакції організму та конкурентної адсорбції.

Узагальнення математичної моделі інфекційного захворювання для урахування конкурентної адсорбції. Для прогнозування динаміки вірусної інфекції з урахуванням особливостей 2-компонентної адсорбції узагальнено запропоновану в [5] модифікацію моделі інфекційного захворювання шляхом введення додаткових умов конкурентної адсорбційної рівноваги між елементами компонентів адсорбату. Відповідну динаміку інфекційного захворювання з урахуванням впливу адсорбційних препаратів в умовах дифузійних збурень та температурної реакції організму опишемо (для спрощення викладок) у простій канонічній області $G = \{(x, r, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < r < R, t > 0\}$ такою сингулярно-збуреною знерозміреною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \omega^V + \beta(\theta)V - \gamma FV + \varepsilon D^V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - u^* \cdot \varepsilon^2 D_*^W \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}; \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= u^* \cdot \varepsilon^2 D^W \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \xi(m) \cdot \alpha(\theta) \cdot F(t - \tau) \cdot V(t - \tau) - \mu_C (C - C^*) + \varepsilon^2 D^C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \omega^F + \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V) \cdot F + \varepsilon D^F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - u^* \cdot \varepsilon^2 D_*^P \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}; \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= u^* \cdot \varepsilon^2 D^P \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= \sigma \cdot V - \mu_m m + \varepsilon^2 D^m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \alpha_\theta V F - \mu_\theta (\theta - \theta^*) + \varepsilon D^\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

за умов

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= C^0(x), \quad m(x, 0) = m^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad V(x, \tilde{t}) = V^0(x, \tilde{t}); \\ F(x, \tilde{t}) &= F^0(x, \tilde{t}), \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \quad W(x, r, 0) = 0, \quad P(x, r, 0) = 0, \quad \frac{\partial W(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P(x, 0, t)}{\partial r} = 0; \\ W(x, R, t) &= \frac{\kappa_V \cdot V(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V(x, t) + \kappa_F \cdot F(x, t)}, \quad P(x, R, t) = \frac{\kappa_F \cdot F(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V(x, t) + \kappa_F \cdot F(x, t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $V(x, t)$, $F(x, t)$, $C(x, t)$, $m(x, t)$, $\theta(x, t)$ – відповідно концентрації антигенів, специфічних їм імунних агентів, імунологічних клітин, значення відносної характеристики ураження *органу-мішені* та температура в міжклітинному середовищі; $W(x, r, t)$, $P(x, r, t)$ – концентрації антигенів та специфічних їм імунних агентів у мезопорах частинок адсорбенту (будемо тут представляти їх кульками досить малого радіуса R); $\beta(\theta) = \beta_0 / (1 + \beta_1(\theta - \theta^*))$ – темп розмноження антигенів, що зменшується зі збільшенням температури організму, $\beta_1 = \text{const} > 0$; γ – коефіцієнт, що враховує результат взаємодії антигенів з імунними агентами; $\alpha(\theta) = \alpha_0 (1 + \alpha_1(\theta - \theta^*))$ – коефіцієнт стимулювання імунної системи, що лінійно залежить від температури організму.

му, $\alpha_1 = \text{const} > 0$; τ – запізнення в часі; μ_C – величина, зворотна до тривалості життя імунологічних клітин; C^* – рівень концентрації імунологічних клітин у здоровому організмі; ρ – швидкість виробництва власних імунних агентів однією імунологічною клітиною; μ_f – величина, зворотна до тривалості існування імунних агентів; η – витрати імунних агентів на нейтралізацію одного антигену; σ – темп ураження клітин органу-мішені; μ_m – швидкість відновлення органу-мішені; $\theta^*(x)$ – розподіл температури в здоровому організмі;

$$\alpha_\theta = \begin{cases} 0, & VF < (VF)^*; \\ \alpha_\theta^*, & VF \geq (VF)^*, \end{cases}$$

$(VF)^*$ – порогове значення VF – комплексів, при якому починається стимулювання процесу підвищення температури (тут приймається гіпотеза, що температура тіла залежить від концентрації VF – комплексів), $\alpha_\theta^* = \text{const} > 0$; μ_θ – швидкість відновлення підвищеної температури до рівня θ^* ; εD^V , εD^F , $\varepsilon^2 D^C$, $\varepsilon^2 D^m$, εD^θ – коефіцієнти дифузійного розсіювання відповідно антигенів, імунних агентів, імунологічних та уражених клітин, теплопровідності у міжклітинному середовищі; $\varepsilon^2 D^W$, $\varepsilon^2 D^P$ – коефіцієнти дифузійного перерозподілу відповідно антигенів та імунних агентів у мезопорах частинок сорбенту; $\varepsilon^2 D_*^W$, $\varepsilon^2 D_*^P$ – коефіцієнти, що характеризують вплив дифузійного перерозподілу антигенів та імунних агентів у мезопорах частинок сорбенту на їх дифузійне розсіювання у міжклітинному середовищі організму; ε – малий параметр, який характеризує малий вплив відповідних компонент у порівнянні з іншими складовими процесу; κ_V , κ_F – константи адсорбційної рівноваги відповідно антигенів та імунних агентів [5, 7, 8]; $C^0(x)$, $m^0(x)$, $\theta^0(x)$, $V^0(x, \tilde{t})$, $F^0(x, \tilde{t})$ – обмежені достатньо гладкі функції, які забезпечують коректність постановки задачі в даній області. Тут монотонно спадна неперервно-диференційована функція $\xi(m)$ призначена для урахування ефекту зниження продуктивності виробництва власних імунних агентів при значному ураженні органу-мішені ($0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(0) = 1$, $\xi(1) = 0$). Функції $\omega^V(x, t)$, $\omega^F(x, t)$ описують зосереджені у просторі і часі зміни відповідно концентрацій антигенів та імунних агентів [2, 3, 5, 6], а функція $u^*(t)$, яку представимо у вигляді:

$$u^*(t) = \sum_{l=1}^{n^*} \left(e^{\delta_l^*(t-t_l^*)} / \left(1 + e^{\delta_l^*(t-t_l^*)} \right) \right),$$

забезпечує «запуск» процесу адсорбції у визначені моменти часу. Розглядаємо випадок, коли дифузійні компоненти процесу вносять досить малий вклад у порівнянні з іншими домінуючими чинниками, а вклад компонентів масообміну (потоків в мікрочастинки адсорбенту) є ще на порядок меншим. Це приводить до появи малих параметрів ε та ε^2 при відповідних членах у певним чином знерозміреній задачі (1) – (2) (наприклад, [2]).

Поетапна процедура чисельно-асимптотичного наближення розв’язку модельної задачі. Для побудови обчислювальної процедури знаходження розв’язку модельної задачі із запізненням скористаємось ідеями *покрокових методів* та представимо його, аналогічно до [2, 3, 5, 6], у вигляді послідовності розв’язків відповідних задач без запізнення на проміжках $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{(k)}}{\partial t} &= \omega_{(k)}^V + \beta(\theta_{(k)})V_{(k)} - \gamma F_{(k)}V_{(k)} + \varepsilon D^V \frac{\partial^2 V_{(k)}}{\partial x^2} - u_{(k)}^* \cdot \varepsilon^2 D_*^W \left(\frac{\partial W_{(k)}}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R}; \\ \frac{\partial W_{(k)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot \varepsilon^2 D^W \left(\frac{\partial^2 W_{(k)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W_{(k)}}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial C_{(k)}}{\partial t} &= \xi(m_{(k)})\alpha(\theta_{(k)}) \cdot \Psi_{(k)} - \mu_C(C_{(k)} - C^*) + \varepsilon^2 D^C \frac{\partial^2 C_{(k)}}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial F_{(k)}}{\partial t} &= \omega_{(k)}^F + \rho C_{(k)} - (\mu_f + \eta \gamma V_{(k)}) \cdot F_{(k)} + \varepsilon D^F \frac{\partial^2 F_{(k)}}{\partial x^2} - u_{(k)}^* \cdot \varepsilon^2 D_*^P \left(\frac{\partial P_{(k)}}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=R}; \\ \frac{\partial P_{(k)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot \varepsilon^2 D^P \left(\frac{\partial^2 P_{(k)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial P_{(k)}}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial m_{(k)}}{\partial t} &= \sigma \cdot V_{(k)} - \mu_m m_{(k)} + \varepsilon^2 D^m \frac{\partial^2 m_{(k)}}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta_{(k)}}{\partial t} = \alpha_{\theta} V_{(k)} F_{(k)} - \mu_{\theta} (\theta_{(k)} - \theta^*) + \varepsilon D^{\theta} \frac{\partial^2 \theta_{(k)}}{\partial x^2}, \quad (3)$$

за умов:

$$\begin{aligned} C_{(k)}(x, k\tau) &= C_{(k-1)}(x, k\tau), \quad m_{(k)}(x, k\tau) = m_{(k-1)}(x, k\tau), \quad \theta_{(k)}(x, k\tau) = \theta_{(k-1)}(x, k\tau), \quad V_{(k)}(x, k\tau) = V_{(k-1)}(x, k\tau); \\ F_{(k)}(x, k\tau) &= F_{(k-1)}(x, k\tau), \quad W_{(k)}(x, r, k\tau) = W_{(k-1)}(x, r, k\tau), \quad P_{(k)}(x, r, k\tau) = P_{(k-1)}(x, r, k\tau), \quad \frac{\partial W_{(k)}(x, 0, t)}{\partial r} = 0; \\ \frac{\partial P_{(k)}(x, 0, t)}{\partial r} &= 0, \quad W_{(k)}(x, R, t) = \frac{\kappa_V \cdot V_{(k)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k)}(x, t)}, \quad P_{(k)}(x, R, t) = \frac{\kappa_F \cdot F_{(k)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k)}(x, t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} C_{(-1)}(x, 0) &= C^0(x); \quad m_{(-1)}(x, 0) = m^0(x); \quad \theta_{(-1)}(x, 0) = \theta^0(x); \quad V_{(-1)}(x, 0) = V^0(x, 0); \quad F_{(-1)}(x, 0) = F^0(x, 0); \\ W_{(-1)}(x, r, 0) &= 0; \quad P_{(-1)}(x, r, 0) = 0; \quad \Psi_{(0)} = F^0(x, t - \tau) V^0(x, t - \tau); \quad \Psi_{(k)} = F_{(k-1)}(x, t - \tau) V_{(k-1)}(x, t - \tau) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

При цьому потрібний рівень гладкості такого розв'язку у моменти часу $\tau, 2\tau, \dots$ забезпечимо шляхом накладання додаткових умов узгодження [2, 3, 5, 6].

Далі, для наближення розв'язків отриманих сингулярно збурених задач (3) – (4), як і в [5, 6], скористаємось методом збурень та формально представимо їх у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} V_{(k)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i V_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^V(x, t, \varepsilon); \quad C_{(k)} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i C_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^C(x, t, \varepsilon); \\ F_{(k)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i F_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^F(x, t, \varepsilon); \quad m_{(k)} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i m_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^m(x, t, \varepsilon); \\ \theta_{(k)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \theta_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^{\theta}(x, t, \varepsilon); \quad W_{(k)} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^W(x, t, \varepsilon); \\ P_{(k)} &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i P_{(k,i)}(x, t) + R_{(k,n)}^P(x, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $V_{(k,i)}(x, t)$, $C_{(k,i)}(x, t)$, $F_{(k,i)}(x, t)$, $m_{(k,i)}(x, t)$, $\theta_{(k,i)}(x, t)$, $W_{(k,i)}(x, t)$, $P_{(k,i)}(x, t)$ – члени асимптотики (шукані функції); $R_{(k,n)}^V(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^C(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^F(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^m(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^{\theta}(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^W(x, t, \varepsilon)$, $R_{(k,n)}^P(x, t, \varepsilon)$ – відповідні залишкові члени. Також, зважаючи на малі розміри адсорбційних частинок, здійснимо регуляризуюче перетворення $\tilde{r} = r/\varepsilon$ ($0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{R} = R/\varepsilon$) [5]. Після реалізації стандартної «процедури прирівнювання» [2, 3, 5], у випадку, наприклад, $\xi(m) = 1$ отримуємо такі вироджені щодо вихідних (3) – (4) задачі для знаходження функцій $V_{(k,0)}$, $C_{(k,0)}$, $F_{(k,0)}$, $m_{(k,0)}$, $\theta_{(k,0)}$, $W_{(k,0)}$, $P_{(k,0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{(k,0)}}{\partial t} &= \omega_{(k)}^V + B_0 V_{(k,0)} - \gamma V_{(k,0)} F_{(k,0)}, \\ \frac{\partial W_{(k,0)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot D^W \left(\frac{\partial^2 W_{(k,0)}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial W_{(k,0)}}{\partial \tilde{r}} \right), \\ \frac{\partial C_{(k,0)}}{\partial t} &= \alpha_0 (1 + \alpha_1 (\theta_{(k,0)} - \theta^*)) \Psi_{(k)} - \mu_C (C_{(k,0)} - C^*), \\ \frac{\partial F_{(k,0)}}{\partial t} &= \omega_{(k)}^F + \rho C_{(k,0)} - \mu_f F_{(k,0)} - \eta \gamma V_{(k,0)} F_{(k,0)}, \\ \frac{\partial P_{(k,0)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot D^P \left(\frac{\partial^2 P_{(k,0)}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial P_{(k,0)}}{\partial \tilde{r}} \right), \\ \frac{\partial m_{(k,0)}}{\partial t} &= \sigma V_{(k,0)} - \mu_m m_{(k,0)}, \\ \frac{\partial \theta_{(k,0)}}{\partial t} &= \alpha_{\theta} V_{(k,0)} F_{(k,0)} - \mu_{\theta} (\theta_{(k,0)} - \theta^*); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_{(k,0)}(x, k\tau) &= C_{(k-1)}(x, k\tau), \quad m_{(k,0)}(x, k\tau) = m_{(k-1)}(x, k\tau), \quad \theta_{(k,0)}(x, k\tau) = \theta_{(k-1)}(x, k\tau), \\ V_{(k,0)}(x, k\tau) &= V_{(k-1)}(x, k\tau), \quad F_{(k,0)}(x, k\tau) = F_{(k-1)}(x, k\tau), \quad W_{(k,0)}(x, r, k\tau) = W_{(k-1)}(x, r, k\tau), \\ P_{(k,0)}(x, r, k\tau) &= P_{(k-1)}(x, r, k\tau), \quad W_{(k,0)}(x, \tilde{R}, t) = \frac{\kappa_V \cdot V_{(k,0)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k,0)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k,0)}(x, t)}, \end{aligned}$$

$$P_{(k,0)}(x, \tilde{R}, t) = \frac{\kappa_F \cdot F_{(k,0)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k,0)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k,0)}(x, t)}, \quad \frac{\partial W_{(k,0)}(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P_{(k,0)}(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

де $B_0 = \beta_0 / (1 + \beta_1(\theta_{(k,0)} - \theta^*))$. А задачі для знаходження поправок розв'язку задачі (5) – (6), які забезпечують урахування ефектів дифузійного розсіювання діючих чинників у міжклітинному середовищі та конкурентну адсорбцію антигенів і імунних агентів, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{(k,s)}}{\partial t} &= (B_0 V_{(k,s)} + B_s V_{(k,0)}) - \gamma (V_{(k,0)} F_{(k,s)} + V_{(k,s)} F_{(k,0)}) + \Phi_{(k,s)}^V, \\ \frac{\partial W_{(k,s)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot D^W \left(\frac{\partial^2 W_{(k,s)}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial W_{(k,s)}}{\partial \tilde{r}} \right), \\ \frac{\partial C_{(k,s)}}{\partial t} &= \alpha_0 \alpha_1 \theta_{(k,s)} \Psi_{(k)} - \mu_C C_{(k,s)} + \Phi_{(k,s)}^C, \\ \frac{\partial F_{(k,s)}}{\partial t} &= \rho C_{(k,s)} - \mu_f F_{(k,s)} - \eta \gamma (V_{(k,0)} F_{(k,s)} + V_{(k,s)} F_{(k,0)}) + \Phi_{(k,s)}^F, \\ \frac{\partial P_{(k,s)}}{\partial t} &= u_{(k)}^* \cdot D^P \left(\frac{\partial^2 P_{(k,s)}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial P_{(k,s)}}{\partial \tilde{r}} \right), \\ \frac{\partial m_{(k,s)}}{\partial t} &= \sigma V_{(k,s)} - \mu_m m_{(k,s)} + \Phi_{(k,s)}^m, \\ \frac{\partial \theta_{(k,s)}}{\partial t} &= \alpha_\theta (V_{(k,0)} F_{(k,s)} + V_{(k,s)} F_{(k,0)}) - \mu_\theta \theta_{(k,s)} + \Phi_{(k,s)}^\theta; \end{aligned} \quad (7)$$

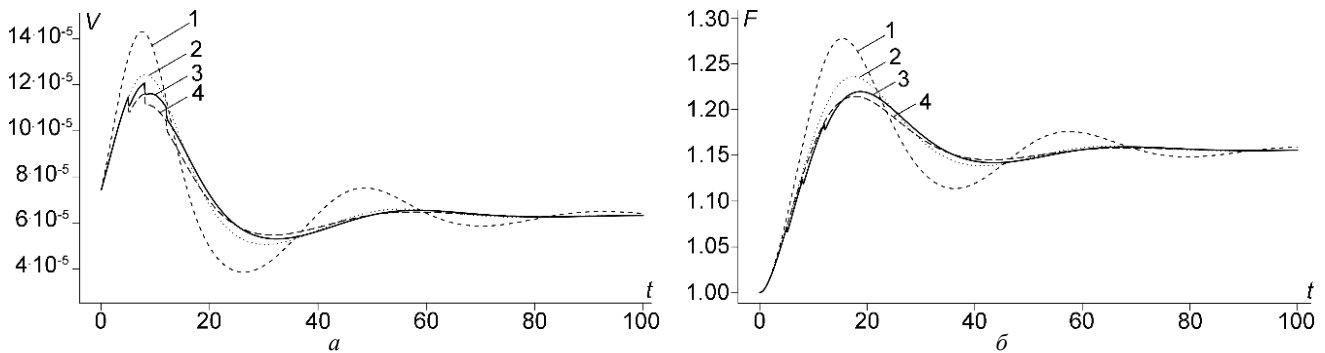


Рис. 1 – Динаміка антигенів – а та імунних агентів – б при: $\varepsilon D^V = \varepsilon^2 D_*^W = \varepsilon^2 D_*^P = 0$ (криві 1); $\varepsilon D^V = 0.02$, $\varepsilon^2 D_*^W = 0$ і $\varepsilon^2 D_*^P = 0$ (криві 2); $\varepsilon D^V = 0.02$, $\varepsilon^2 D_*^W = 5 \cdot 10^{-3}$ і $\varepsilon^2 D_*^P = 0$ (криві 3); $\varepsilon D^V = 0.02$, $\varepsilon^2 D_*^W = 5 \cdot 10^{-3}$ і $\varepsilon^2 D_*^P = 10^{-3}$ (криві 4).

$$C_{(k,s)}(x, k\tau) = 0, \quad m_{(k,s)}(x, k\tau) = 0, \quad \theta_{(k,s)}(x, k\tau) = 0, \quad V_{(k,s)}(x, k\tau) = 0, \quad F_{(k,s)}(x, k\tau) = 0;$$

$$W_{(k,s)}(x, r, k\tau) = 0, \quad P_{(k,s)}(x, r, k\tau) = 0, \quad \frac{\partial W_{(k,s)}(x, 0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P_{(k,s)}(x, 0, t)}{\partial r} = 0;$$

$$W_{(k,s)}(x, \tilde{R}, t) = \frac{\kappa_V \cdot V_{(k,s)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k,s)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k,s)}(x, t)}, \quad P_{(k,s)}(x, \tilde{R}, t) = \frac{\kappa_F \cdot F_{(k,s)}(x, t)}{1 + \kappa_V \cdot V_{(k,s)}(x, t) + \kappa_F \cdot F_{(k,s)}(x, t)}, \quad (8)$$

де

$$\Phi_{(k,1)}^V = D^V \frac{\partial^2 V_{(k,0)}}{\partial x^2}; \quad \Phi_{(k,1)}^C = 0; \quad \Phi_{(k,1)}^F = D^F \frac{\partial^2 F_{(k,0)}}{\partial x^2}; \quad \Phi_{(k,1)}^m = 0; \quad \Phi_{(k,1)}^\theta = D^\theta \frac{\partial^2 \theta_{(k,0)}}{\partial x^2};$$

$$\Phi_{(k,s)}^V = \sum_{r=1}^{s-1} B_r V_{(k,s-r)} - \gamma \sum_{r=1}^{s-1} V_{(k,r)} F_{(k,s-r)} + D^V \frac{\partial^2 V_{(k,s-1)}}{\partial x^2} - u_{(k)}^* \cdot D_*^W \left(\frac{\partial W_{(k,s-2)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}; \quad \Phi_{(k,s)}^C = D^C \frac{\partial^2 C_{(k,s-2)}}{\partial x^2};$$

$$\Phi_{(k,s)}^F = D^F \frac{\partial^2 F_{(k,s-1)}}{\partial x^2} - \eta \gamma \sum_{r=1}^{s-1} V_{(k,r)} F_{(k,s-r)} - u_{(k)}^* \cdot D_*^P \left(\frac{\partial P_{(k,s-1)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}; \quad \Phi_{(k,s)}^m = D^m \frac{\partial^2 m_{(k,s-2)}}{\partial x^2};$$

$$\Phi_{(k,s)}^\theta = D^\theta \frac{\partial^2 \theta_{(k,s-1)}}{\partial x^2} + \alpha_\theta \sum_{r=1}^{s-1} V_{(k,r)} F_{(k,s-r)} \quad (s = 2, 3, \dots); \quad B_r = -\beta_1 \sum_{j=0}^{r-1} \theta_{(k,r-j)} B_j / (1 + \beta_1(\theta_{(k,0)} - \theta^*)).$$

Розв'язки задач (5) – (6) та (7) – (8) на кожному проміжку $(k-1)\tau \leq t \leq k\tau$, $k = 1, 2, \dots$ знаходимо послідовно чисельними методами (наприклад, *методами Рунге – Кутти*), використовуючи вже відомі розв'язки відповідних задач на попередніх часових етапах. Просторово-часові проміжки збіжності отриманих розв'язків встановлюємо аналогічно до [2, 3, 5].

Результати числових експериментів. Як відомо [1, 4], застосування адсорбційних засобів під час інфекційного захворювання дає можливість задіяти додатковий механізм для знешкодження та виведення з організму вірусних елементів, що, в свою чергу, забезпечує як зниження гостроти протікання хвороби, так і підвищення ефективності лікувальної дії, наприклад, різного роду імунологічних препаратів. З іншого боку, як вже зазначалось вище, адсорбційні засоби, як правило, не є специфічними до конкретних типів вірусних елементів, а тому можуть поглинати також імунні агенти, знижуючи тим самим потужність імунної відповіді. Урахування таких ефектів є важливим при формуванні програм лікування із комплексним застосуванням, наприклад, адсорбційної та імунологічної терапії. Власне на дослідженні особливостей впливу конкурентної адсорбції на прогнозу динаміку інфекційного захворювання в умовах температурної реакції організму і були орієнтовані комп'ютерні експерименти.

На рис. 1 продемонстровано прогнозні графіки динаміки антигенів (рис. 1, *a*) та імунних агентів (рис. 1, *б*) з розвитком хронічної форми інфекційного захворювання в епіцентрі зараження для різних модельних ситуацій: без урахування дифузійного розсіювання діючих чинників та відсутності адсорбції (криві 1); з урахуванням ефекту дифузійного розсіювання та відсутності адсорбції (криві 2); з урахуванням дифузійного розсіювання та ефекту адсорбційного поглинання лише антигенів (криві 3); з урахуванням дифузійного розсіювання та умов конкурентної адсорбції антигенів і імунних агентів (криві 4). Під час комп'ютерного моделювання для параметрів використані значення, які отримані в [1] та були далі необхідним чином перетворені у результаті застосування процедури знерозмірення: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 10$; $\gamma = 0.8$; $\mu_c = 0.5$; $\alpha_0 = 1000$, $\alpha_1 = 25$; $C^* = 1$; $\rho = 0.17$; $\mu_f = 0.17$; $\eta = 10$; $\sigma = 10$; $\mu_m = 0.12$; $\theta^* = 1$; $\alpha_\theta = 20$; $\mu_\theta = 0.16$. Тут початок дії механізму адсорбційного поглинання антигенів та імунних агентів (прогнозне «введення» в організм адсорбційних засобів) моделювався у моменти часу $t_1^* = 5$, $t_2^* = 8$ і $t_3^* = 12$ (криві 3, 4). Як і очікувалось, найменший рівень максимальної концентрації антигенів отримано у випадку, коли прогнозування здійснювалось з урахуванням ефектів дифузійного розсіювання та неконкурентної адсорбції лише антигенів. При цьому у ситуації прогнозування динаміки інфекційного захворювання в умовах поглинання адсорбентом як вірусних елементів, так і імунних агентів таке зниження максимального значення концентрації антигенів очікувано було меншим, що засвідчує модельний вплив ефекту конкурентної адсорбції. Представлені тут результати комп'ютерного моделювання також підтверджують доцільність застосування адсорбційних засобів як додаткового механізму нейтралізації вірусних елементів, проте у випадку прогнозування бажаного терапевтичного ефекту при комплексному застосуванні адсорбентів та імунологічних препаратів важливим є урахування особливостей конкурентної адсорбції антигенів та імунних агентів.

Висновки. У роботі представлено узагальнення моделі інфекційного захворювання для урахування ефектів конкурентної адсорбції антигенів та імунних агентів в умовах дифузійних збурень та температурної реакції організму. На основі синтезу ідей покрокових методів, асимптотичних та чисельних методів сконструйовано ефективну обчислювальну технологію поетапного наближення розв'язку вихідної сингулярно збуреної модельної задачі із запізненням.

Наведені результати комп'ютерних експериментів демонструють особливості зниження прогнозної кількості антигенів внаслідок їх конкурентної адсорбції разом з імунними агентами. Показано, що урахування здатності неспецифічних адсорбентів до поглинання та виведення з організму як антигенів, так і імунних агентів призводить до певного прогнозного зниження ефективності застосування відповідної терапії. Підкреслено, що наявність інструментарію, який забезпечує можливість прогнозування динаміки захворювання з урахуванням, зокрема, особливостей дії конкурентної адсорбції, є важливим для створення експертних систем прийняття рішень щодо формування раціональних програм лікування із комплексним застосуванням процедур адсорбційної та імунологічної терапії.

У **перспективі** передбачається адаптація та розширення меж застосування представленого підходу для урахування умов конвекції, гетеродифузії, змішаних інфекцій та біостимуляції. Також перспективним є застосування більш складних форм функціональної залежності $\xi(m)$, яка забезпечує урахування ефекту зниження продуктивності виробництва імунних агентів при значному ураженні органу-мішені, а також умов квазіперіодичного введення адсорбційних препаратів.

Список літератури

1. Сорбенты и их клиническое применение / Под ред. К. Джордано. – Киев : Вища школа, 1989. – 400 с.
2. Барановський С. В., Бомба А. Я., Ляшко С. І. Прийняття рішень при моделюванні динаміки інфекційного захворювання з урахуванням дифузійних збурень та зосереджених впливів // Проблеми керування та інформатики. – 2021. – № 3. – С. 115 – 129. DOI: 10.34229/1028-0979-2021-3-10.
3. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya., Lyashko S. I. Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – Vol. 58. – No. 4. – P. 576 – 592. DOI: 10.1007/s10559-022-00491-w.
4. Геращенко І. І. Ентеросорбенти: лікарські засоби і дієтичні добавки. – К. : НАН України, ІХП ім. О.О. Чуйка, 2014. – 250 с.
5. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya. Generalizing the infectious disease model to account for sorption therapy in conditions of diffusion disorders // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – Vol. 59. – No. 4. – P. 601 – 611. DOI: 10.1007/s10559-023-00595-x.
6. Барановський С. В., Бомба А. Я. Автоматизоване управління імунною відповіддю на збудників інфекційного захворювання // Штучний інтелект. – 2023. – 28 (3). – С. 10 – 17. DOI: 10.15407/jai2023.03.010.
7. Petryk M., Ivanchov M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. Competitive adsorption and diffusion of gases in a microporous solid // Zeolites – New Challenges. Margeta K., Farkas A. (Eds.). London: IntechOpen. – 2019. – P. 1 – 23. DOI: 10.5772/intechopen.77482.
8. Petryk M. R., Boyko I. V., Khimich O. M. High-Performance Supercomputer Technologies of Simulation and Identification of Nanoporous Systems with Feedback for n-Component Competitive Adsorption. // Cybernetics and Systems Analysis. – Vol. 57. – 2021. – P. 316 – 328. DOI: 10.1007/s10559-021-00357-7.

References (transliterated)

1. Sorbenty i ikh klinicheskoe primenenie [Sorbents and their clinical use]. Pod red. K. Dzhordano. Kiev, Vyshha shkola Publ., 1989. 400 p.
2. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya., Lyashko S. I. Prynyattya rishen' pry modelyuvanni dynamiky infektsiynogo zakhvoryuvannya z urakhuvannyam dyfuziynykh zburen' ta zoseredzhenykh vplyviv [Decision-making when modeling the dynamics of infectious disease with taking into account diffusion perturbations and concentrated effects]. *Problemy keruvannya ta informatyky* [Problems of control and informatics]. 2021, no. 3, pp. 115–129. DOI: 10.34229/1028-0979-2021-3-10.
3. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya., Lyashko S. I. Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022, vol. 58, no. 4, pp. 576–592. DOI: 10.1007/s10559-022-00491-w.
4. Herashhenko I. I. *Enterosorbenty: likars'ki zasoby i dietychni dobavky* [Enterosorbents: medicine and dietary supplements]. Kyiv, NAN Ukrainy, IKHP im. O.O. Chuyka Publ., 2014. 250 p.
5. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya. Generalizing the infectious disease model to account for sorption therapy in conditions of diffusion disorders. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023, vol. 59, no. 4, pp. 601–611. DOI: 10.1007/s10559-023-00595-x.
6. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya. Avtomatyzovane upravlinnya immunoyu vidpoviddyu na zbudnykiv infektsiynogo zakhvoryuvannya [Automated control of immune response to infectious disease agents]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial intelligence]. 2023, no. 28 (3), pp. 10–17.
7. Petryk M., Ivanchov M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. Competitive adsorption and diffusion of gases in a microporous solid. *Zeolites – New Challenges*. Margeta K., Farkas A. (Eds.). London, IntechOpen. 2019, pp. 1–23. DOI: 10.5772/intechopen.77482.
8. Petryk M. R., Boyko I. V., Khimich O. M. High-Performance Supercomputer Technologies of Simulation and Identification of Nanoporous Systems with Feedback for n-Component Competitive Adsorption. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021, vol. 57, pp. 316–328. DOI: 10.1007/s10559-021-00357-7.

Надійшла (received) 28.03.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Барановський Сергій Віталійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (096) 314-37-47; e-mail: svbaranovsky@gmail.com.

Baranovsky Serhii Vitaliiovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Computer Technology and Economic Cybernetics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (096) 314-37-47; e-mail: svbaranovsky@gmail.com.

В. А. ВАНІН, Г. І. КОШОВИЙ, В. І. КАРПЕНКО, Б. В. ВАНІН

РОЗСІЮВАННЯ E-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ОДНІЄЮ ПРОВІДНОЮ СТРІЧКОЮ З ІМПЕДАНСОМ

Проведено детальне дослідження ключової задачі розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. У результаті застосування модифікації класичного методу інтегральних рівнянь отримано коректну повно-хвильову математичну модель розсіювання у формі особливого інтегрального рівняння першого роду. При дослідженні цього особливого інтегрального рівняння основна увага приділена двом важливим методам його розв'язку: асимптотичному методу Релея та прямому чисельному методу. Як результат застосування першого методу отримуємо розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот далі застосовується відомий та добре обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур. Проведено ряд чисельних експериментів розсіювання E -поляризованої хвилі однією електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Порівняння чисельних розрахунків показало, що в асимптотичній довгохвильовій області частот результати добре співпадають. Це дало можливість провести чисельні експерименти в більш широкому діапазоні частот і бути певними у їх правильності.

Ключові слова: математичне моделювання, розсіювання хвилі, метод інтегральних рівнянь, асимптотичний метод Релея, прямий чисельний метод.

V. A. VANIN, G. I. KOSHOVY, V. I. KARPENKO, B. V. VANIN

SCATTERING OF THE E-POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVE BY SOLITUDE CONDUCTIVE STRIP WITH IMPEDANCE

The key problem of scattering of a plane E -polarized electromagnetic wave by a solitude electrically conductive impedance strip is studied in detail. A well-posed full-wave mathematical model of scattering in the form of the first order singular integral equation was obtained by applying a modification of a classical method of integral equations. To examine this singular integral equation two basic methods were used. The first one is remarkable Lord Rayleigh's asymptotic method, which delivers an explicit analytical solution in a narrow frequency range. It deals with the long-wave case of the plane E -polarized electromagnetic wave scattering problem. The second method is a direct numerical method, dealing with approximate computation of definite integrals, which gives an approximate solution as well, but in the full-frequency range. A series of numerical experiments on scattering a E -polarized electromagnetic wave by impedance strip were carried out and are presented in this paper. Comparing of computation results shows good agreement in long-wave case of the plane E -polarized electromagnetic wave scattering problem, which indicates the correctness of numeric computation in full frequency range as well.

Key words: mathematical modeling, wave scattering, the integral equation technique, Rayleigh's asymptotic method, direct numerical method.

Вступ. У сучасній радіоелектроніці використовують багато пристроїв, де у якості одного з основних вузлів присутні *металеві ґратки* [1, 2]. Довгий час теоретичне дослідження розсіювання *електромагнітної (ЕМ) хвилі* ґратками обмежувалось ідеальною провідністю металів, з яких вони виготовлялись, та найпростішими способами впорядкування її елементів [3 – 6].

Сучасний розвиток радіоелектроніки вимагає більш досконалих електронних пристроїв, поліпшення яких може бути як за рахунок врахування неідеальної провідності металу, так і за рахунок нових способів впорядкування, які ґрунтуються на законах творення різноманітних ніде не щільних досконалих множинах на сегменті $[-1, 1]$ зі змінною *фрактальною розмірністю* [6 – 8].

У теоретичному плані врахування неідеальної провідності металу приводить до ускладнення задачі і необхідності розробки нових підходів до побудови *коректних математичних моделей* розсіювання хвиль просто провідними стрічковими ґратками. Так, коли мова йде про розсіювання E -поляризованої хвилі, то у випадку ідеально провідної стрічки маємо найпростішу граничну *проблему Діріхле* для хвильового рівняння, а для випадку неідеальної провідності виникає найскладніша змішана гранична проблема для хвильового рівняння [9, 10].

У даній статті проведемо дослідження ключової задачі розсіювання E -поляризованої хвилі однією провідною (не обов'язково ідеально провідною) стрічкою, де основну увагу приділимо двом важливим методам її розв'язку. Спершу до загальної коректної математичної моделі розсіювання *електронно-провідною стрічкою з імпедансом* буде застосовано *асимптотичний метод Релея* [9]. Як результат отримаємо розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот далі застосуюмо відомий та добре обґрунтований *прямий чисельний метод механічних квадратур* [4, 11].

Загальна математична модель розсіювання E -поляризованої хвилі провідною стрічкою з імпедансом.

Використовуючи класичний *метод інтегрального рівняння*, спочатку отримаємо змішане інтегрально-диференціальне рівняння, а далі відокремимо диференціальну частину від інтегральної та скористаємось *методом малого параметра*, як це вперше зроблено у науковій публікації [12].

У результаті застосування такої модифікації класичного методу інтегрального рівняння отримаємо коректну математичну модель розсіювання E -поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Наведемо тут основні моменти зазначеної модифікації для повної інформативності даної статті. Отже, при відо-

кремленні диференціальної частини від інтегральної у змішаному інтегрально-диференціальному рівнянні отримаємо таке рівняння:

$$\left[\mu^2 \frac{d^2}{dx^2} + k^2 (\mu^2 - 1) \right] \cdot \int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = 4ik^2 (1 + \mu \cdot q_2) \cdot \exp(ikq_1 x). \quad (1)$$

Тут $\mu = w / \chi = \text{Re } \mu + i \text{Im } \mu$ є безрозмірним параметром, де w – поверхневий імпеданс матеріалу, з якого виготовлена стрічка, а χ – хвильовий опір середовища навколо стрічки, k – хвильове число, $H_0^{(1)}(z)$ – функція Ганкеля першого роду нульового порядку. У правій частині маємо дві складові напрямного вектора E – поляризованої хвилі, яка набігає на стрічку. Тобто $q_1 = \sin \phi_0$, $q_2 = \sin \phi_0$, де ϕ_0 є кутом, під яким набігає зазначена хвиля.

Очевидно, коли безрозмірний параметр μ буде нульовим, що відповідає ідеальній провідності матеріалу стрічки, то змішане інтегрально-диференціальне рівняння (1) перестає бути змішаним, бо спрощується до особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = -4i \cdot \exp(ikq_1 x). \quad (2)$$

Звідси випливає, що випадок розсіювання ідеально провідною стрічкою E – поляризованої ЕМ хвилі є значно простішим від більш загального випадку розсіювання просто електронно-провідною стрічкою. Тобто маємо дещо змінювати та вдосконалювати класичний метод інтегрального рівняння, щоб отримати коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом, $\mu \neq 0$.

Введемо функцію

$$Y(x) = \int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k|x - x'|) dx', \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

тоді (1) запишеться у вигляді звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\mu^2 \cdot Y''(x) + k^2 (\mu^2 - 1) \cdot Y(x) = 4ik^2 (1 + \mu \cdot q_2) \cdot \exp(iq_1 kx), \quad |x| \leq a. \quad (4)$$

Загальний розв'язок (4) має вигляд:

$$Y(x) = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 x) - \frac{-4i \cdot \exp(ikq_1 x)}{(1 - q_2 \mu)}, \quad (5)$$

де C_1, C_2 – довільні константи; λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння для (4)

$$\lambda^2 = \frac{k^2 \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)}}{\mu^2}.$$

Коли знайдемо потрібний розв'язок диференціального рівняння, то це інтегральне перетворення і приведе до відповідного особливого інтегрального рівняння першого роду. Отримане вище рівняння (3) з урахуванням (4), (5) може розглядатись як нова проміжна загальна (вже одновимірна) математична модель розсіювання E – поляризованої хвилі провідною стрічкою з імпедансом.

Подальше дослідження цієї математичної моделі з метою її спрощення та вдосконалення у випадку двох електронно-провідних стрічок з імпедансом, вперше наведеної у статті [12]. Там пропонується знайти потрібний розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (4), використавши степеневий ряд. Припускаючи, що безрозмірний параметр μ прямо пропорційний поверхневому імпедансу стрічки, є малим та користуючись простим виразом шуканої функції при $\mu = 0$, за цим методом степеневого ряду знаходиться потрібний розв'язок, який співпадає з (5) при $C_1 = C_2 = 0$. Так отримуємо коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом у вигляді особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = \frac{-4i \cdot \exp(ikq_1 x)}{(1 - q_2 \mu)}. \quad (6)$$

Воно вже не виявляє принципової відмінності від особливого інтегрального рівняння (2) і забезпечує потрібну властивість поведінки шуканої функції $\psi = \psi(x)$, яка визначає поздовжню складову щільності поверхневого струму на стрічці.

Таким чином, маємо досить просту і коректну математичну модель розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі нескінченно тонкою провідною стрічкою з імпедансом. Як добре відомо з попередніх більше вікових досліджень, розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді можна знайти тільки асимптотичним методом Релея [9]. Тому і тут доречно спершу розібратись з вузькострічковою моделлю задачі

розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі нескінченно тонкою електронно-провідною стрічкою з імпедансом.

Вузькострічкова модель розсіювання плоскої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою. Для перевірки правильності розв’язку задач розсіювання електромагнітних хвиль є важливим отримати його у явному аналітичному вигляді навіть при певних припущеннях, що звужують частотний діапазон застосування математичних моделей [7, 8, 12]. Така можливість була реалізована при розробці *теорії взаємодії* плоскої електромагнітної хвилі з ідеальною провідною та нескінченно тонкою циліндричною стрічкою [9]. Тому зараз приділимо певну увагу розробці *асимптотичної моделі* взаємодії плоскої електромагнітної хвилі з електронно-провідною вузькою стрічкою з імпедансом. Основним припущенням при її розробці є те, що довжина хвилі має бути великою у порівнянні з шириною стрічки, а основним методом буде класичний метод Релея. Для нашої ключової задачі розсіювання вже є правильна математична модель у вигляді інтегрального рівняння першого роду із особливістю (6). Щоб мати більш зручну для подальших практичних застосувань математичну модель, виконаємо заміну $x = a \cdot t$, $x' = a \cdot \tau$. Це приводить до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 j(t) \cdot \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|\tau-t|) dt = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau)}{1-q_2 \mu}, \quad |\tau| \leq 1. \quad (7)$$

Введена нова невідома функція $j(t) = \alpha \psi(\alpha t)$, а ядро визначає *функція Ганкеля* першого роду нульового порядку. Слід зазначити, що далі буде зручно використати відоме розвинення цієї функції в ряд:

$$\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|u|) = \ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha |u|}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} - \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \right) \right]. \quad (8)$$

Величина $\ln \gamma = C \approx 0,5772\dots$ є *постійною Ейлера*, $\alpha = ka = 2\pi a / \lambda$ є безрозмірним частотним параметром, а λ – довжина падаючої плоскої E – поляризованої хвилі. Звідси стає очевидною логарифмічна особливість ядра інтегрального рівняння першого роду (7) за умови збігу внутрішньої змінної із зовнішньою.

Застосуємо тепер класичний метод Релея, припускаючи, що безрозмірний частотний параметр $\alpha = ka$ є достатньо малим, щоб можна було обмежитись кількома доданками в рядах, що представляють відомі та невідомі величини. Зокрема, використовуючи розгортання в ряд ядра (8) та відомої функції у правій частині (7), приходимо до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 [j_0(x) + j_1(x) \alpha] \cdot [\ln|x-t| + \ln(\gamma \alpha / (2i))] \cdot dt = c_0(\mu) \pi (1 + iq_1 x \alpha), \quad |x| \leq 1. \quad (9)$$

Тут величина $c_0(\mu) = -2(1 - q_2 \mu)^{-1}$ залежить від безрозмірного параметра, пов’язаного з імпедансом, а невідомі функції $j_0(t)$ та $j_1(t)$ визначають головний доданок та головну поправку для вихідної функції математичної моделі. Це рівняння легко розв’язати та отримати асимптотичний розв’язок інтегрального рівняння (9) у явному аналітичному вигляді:

$$j(x) \approx c_0(\mu) \cdot [\ln^{-1}(\alpha \gamma / (4i)) - iq_1 x] / (\pi \sqrt{1-x^2}), \quad |x| \leq 1. \quad (10)$$

Відносна похибка цієї наближеної рівності оцінюється як $O(\alpha^2 \ln \alpha^{-1})$, тому, зменшуючи безрозмірний частотний параметр $\alpha = 2\pi a / \lambda$, можемо підвищувати її точність до потрібного рівня. Зокрема, це важливо для тестування обчислювальних алгоритмів та здійснення контролю над їх роботою при застосуванні прямих чисельних та чисельно-аналітичних методів регуляризації [11 – 13].

Вираз (10) дозволяє досліджувати залежність вихідної змінної асимптотичної моделі від поверхневого імпедансу стрічки. Коли безрозмірний параметр, пов’язаний з імпедансом, є нульовим ($\mu = 0$), то головний доданок вихідної функції обраної математичної моделі стає таким:

$$j_0(x) = -2 \cdot \ln^{-1}(\alpha \gamma / (4i)) / (\pi \sqrt{1-x^2}),$$

що повністю співпадає з відомим класичним виразом [9]. З порівняння цих виразів випливає, що завдяки імпедансу у головному доданку (10) з’явилась залежність від кута ϕ_0 , під яким набігає E – поляризована електромагнітна хвиля. Це дозволяє досліджувати також залежність вихідної змінної асимптотичної моделі від кута набігання ϕ_0 .

Щоб суттєво розширити частотний діапазон, надалі до всього діапазону потрібних частот застосуємо добре відомий та обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур [4, 11].

Метод механічних квадратур для випадку розсіювання E-поляризованої електромагнітної хвилі про-

відною стрічкою. Метод механічних квадратур був розроблений львівськими вченими для наближеного розв'язання двовимірних задач дифракції [4, 11]. При цьому спочатку використовується метод інтегральних рівнянь, а далі до отриманих особливих інтегральних рівнянь застосовують метод механічних квадратур. Загальна схема цього прямого чисельного методу полягає у виборі відповідних квадратурних формул для особливих інтегралів, квадратурних вузлів та зовнішніх вузлових точок. В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, де шуканими є значення невідомої функції у квадратурних вузлових точках. Нарешті, за вказаними значеннями невідомої функції у квадратурних вузлах відновлюють за тією чи іншою апроксимаційною формулою і саму невідому функцію.

На жаль, у вказаних монографіях [4, 11] розглядалися тільки задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі двовимірними ідеально провідними екранами, що значно звужує практичне застосування. У даній дослідницькій роботі метод механічних квадратур буде використаний для випадку розсіювання нескінченно тонкою провідною стрічкою з імпедансом E – поляризованої електромагнітної хвилі. Отримана вище коректна математична модель розсіювання подається як особливе інтегральне рівняння першого роду формулою (7). Ядро містить логарифмічну особливість, тому виділяємо цю особливість у найпростішій формі, використовуючи відоме розв'язання функції Ганкеля першого роду нульового порядку в ряд (8). Це приводить до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 j(t) \ln|\tau-t| dt + \int_{-1}^1 j(t) R(\alpha|\tau-t|) dt = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau)}{1-q_2 \mu}, \quad |\tau| \leq 1. \quad (11)$$

Тут нова невідома функція $j(t) = \alpha \psi(\alpha t)$, а правильна частина ядра визначається формулою:

$$R(\alpha u) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|u|) - \ln|u|. \quad (12)$$

Це особливе інтегральне рівняння повністю готове до застосування методу механічних квадратур. Зазначимо ще раз, що різницева функція, що визначає ядро інтегрального рівняння, має логарифмічну особливість при однакових значеннях змінної інтегрування та зовнішньої змінної. Тому шукану невідому функцію слід подати у такому вигляді:

$$j(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

де нова допоміжна невідома функція $\varphi(t)$ вже не містить особливостей і є неперервною у сегменті $[-1, 1]$. Відповідно, квадратурну формулу для обчислення інтеграла обираємо з урахуванням зазначеної особливості:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k), \quad (13)$$

де квадратурні вузли $\xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$.

Цій формулі більше півтора століття, вона запропонована ще Меллером у 1864 році і має найвищу алгебраїчну степінь точності.

Для інтеграла з логарифмом застосовуємо іншу квадратурну формулу, що запропонована в книгах [4, 11]

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{\ln|t-\tau|}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) \cdot \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\tau) \right], \quad (14)$$

де $T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$ є *поліномом Чебишева першого роду*. Якщо підставимо наведені вище квадратурні формули (14) до особливого інтегрального рівняння першого роду (1), враховуючи (13), та вимагаючи виконання рівнянь на деякій системі точок, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\vec{\varphi} = \{\varphi(\xi_k)\}_{k=1}^n$:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\tau_l) + R(\alpha|\tau_l - \xi_k|) \right] \varphi(\xi_k) = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau_l)}{1-q_2 \mu}. \quad (15)$$

Нарешті, візьмемо в якості зовнішніх вузлових точок обрані раніше внутрішні чи квадратурні вузли, тобто $\tau_l = \xi_l = \cos \frac{2l-1}{2n} \pi$, $l = 1 \dots n$, тоді коефіцієнти в системі (15), записаної для кожного n як

$$A\vec{\varphi} = \vec{b}, \quad (16)$$

обчислюються за формулами:

$$a_{lk} = \frac{1}{n} \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\xi_l) + R(\alpha|\xi_l - \xi_k|) \right], \quad b_l = -\frac{2 \cdot \exp(i\alpha q_1 \xi_l)}{1-q_2 \mu}.$$

Структуруємо матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь $A = S + R$, де S – матриця, що відповідає сингулярній частині ядра, а R – відповідно її регулярній частині. Тоді маємо такі елементи зазначених вище матриць:

$$s_{lk} = \frac{1}{n} \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\xi_l) \right], \text{ а } r_{lk} = \frac{1}{n} R(\alpha |\xi_l - \xi_k|).$$

У процесі розв’язування цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо значення допоміжної функції у точках квадратурних вузлів $\varphi(\xi_k)$. Потрібну точність розрахунку можна досягти за рахунок подвоєння кількості квадратурних вузлів і порівняння відповідних значень допоміжної функції. За значеннями допоміжної функції у точках квадратурних вузлів потрібно відновлювати основну шукану функцію. При цьому можна застосовувати різні наближені формули, але тут варто використати наступну формулу:

$$j(t) \approx \psi_n(t) = \frac{1}{n\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^n \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(\xi_k) T_m(t) \right] \varphi(\xi_k). \tag{17}$$

Така залежність використовувалась при проведенні чисельних експериментів в задачах дифракції плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі двовимірними ідеально провідними екранами [4, 11].

Таким чином, маємо аналітичний вираз для вихідної змінної загальної електродинамічної математичної моделі, чим завершується розв’язання задачі взаємодії плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі з провідною та нескінченно тонкою циліндричною стрічкою з імпедансом.

Дещо інша схема методу квадратур, за якою можна успішно діяти при проведенні чисельних експериментів в задачах розсіювання плоскої електромагнітної хвилі провідною стрічкою, пропонується у монографії [13].

Чисельні експерименти в задачах розсіювання E -поляризованої електромагнітної хвилі провідною стрічкою. Досліджуються вплив на розв’язки системи алгебраїчних рівнянь (16) параметрів α, μ, ϕ_0, n . На рис. 1 наведено розподіл густини струму, де $\psi_{322}(ksi)$ – асимптотичні значення, $\psi_{31}(ksi)$ – розрахункові значення, за умови, що

$$\alpha = 0.1, \mu = (1+i)r, \phi_0 = \pi/20, n = 32, r = 0.01,$$

який демонструє кількісну їх відповідність. В подальшому, на основі аналізу чисельних розрахунків подібних (рис. 2, рис. 3), вибиралось $n = 32$.

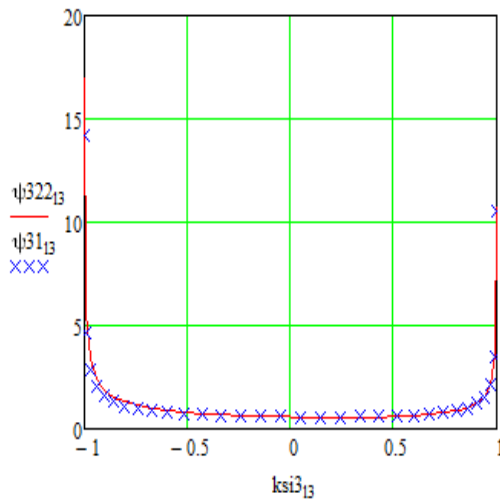


Рис. 1 – Розрахунковий і асимптотичний розподіл густини струму при $n = 32$.

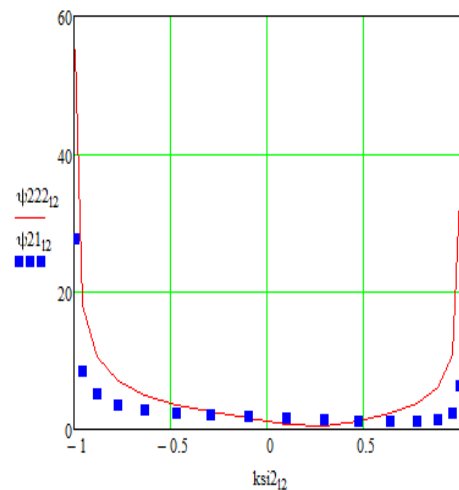


Рис. 2 – Розрахунковий розподіл густини струму при $n = 8, 16, 32$.

Зміна величини α у бік неасимптотичних значень $\alpha = 1.1$ показує узгодженість розподілів із розрахункової моделі при різній кількості точок колокації (рис. 2, рис. 3), але відрізняються від асимптотичних (рис. 4).

Вплив кута падіння електромагнітної хвилі (несиметричний розподіл густини струму при неортогональному падінні) на стрічку в зоні неасимптотичних значень $\alpha = 1; 1.5; 5$ та різних імпедансних даних на розподіл густини струму, наведений на рис. 5, рис. 6, рис. 8.. При неасимптотичних значеннях величини α в розрахунковій

моделі маємо значне відхилення в розподілі густини струму (рис. 5, рис. 6) в порівнянні з даними із асимптотичної області (рис. 7) при $\alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

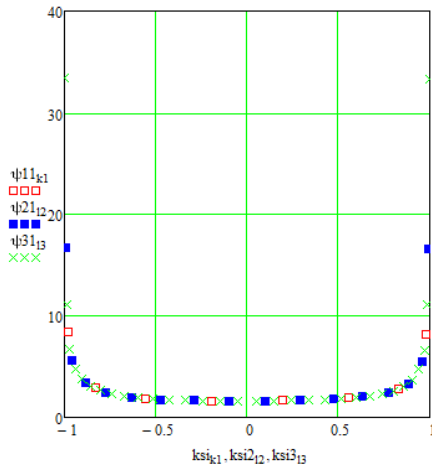


Рис. 3 – Розрахунковий розподіл густини струму при $n = 8, 16, 32$ (ортогональне падіння хвилі).

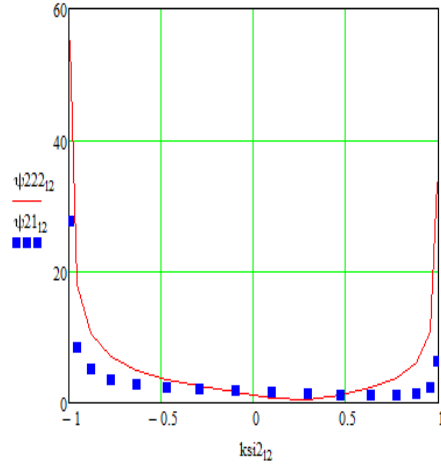


Рис. 4 – Розрахунковий і асимптотичний розподіл густини струму при $n = 16$.

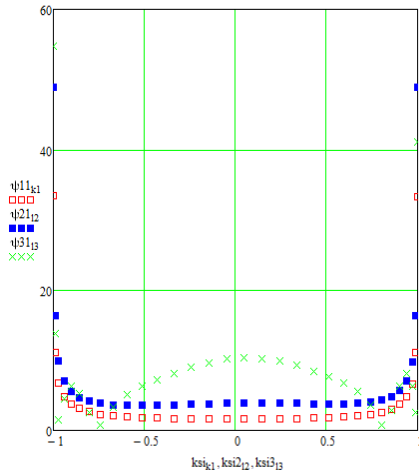


Рис. 5 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/2, r = 0.01, \alpha = 1; 1.5; 5$.

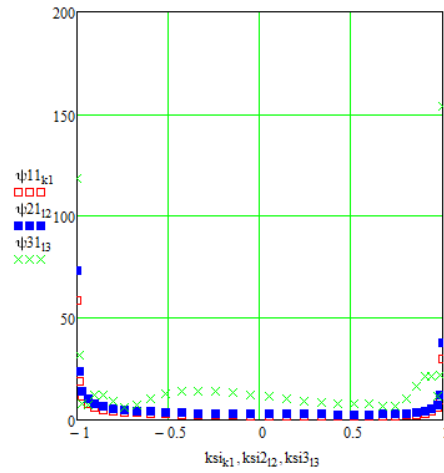


Рис. 6 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/3, r = 0.5, \alpha = 1; 1.5; 5$.

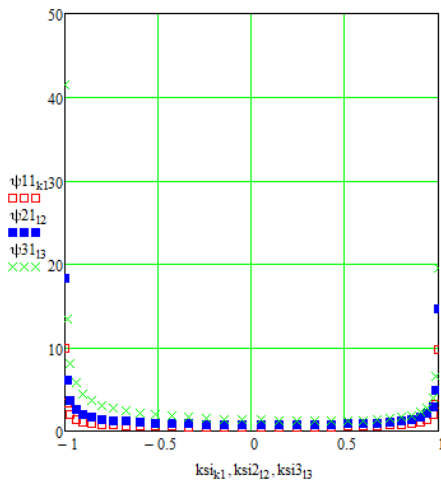


Рис. 7 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/4, r = 0.5, \alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

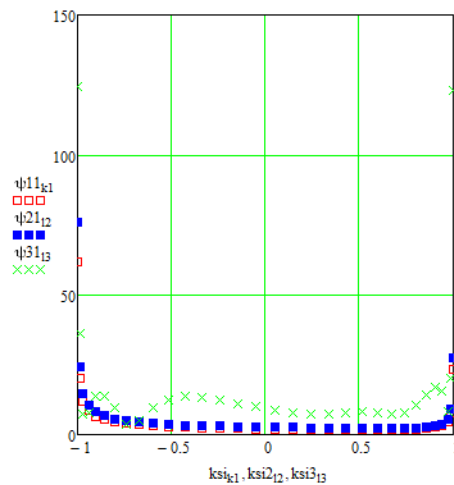


Рис. 8 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/4, r = 0.5, \alpha = 1; 1.5; 5$.

На рис. 9, рис. 10 показано вплив величини імпедансу на розрахунковий розподіл густини струму в асимптотичні області значень параметра α і за її межами. Відмітимо несиметричність розподілу при такому куті падіння електромагнітної хвилі та зменшення величини густини струму із збільшенням імпедансу.

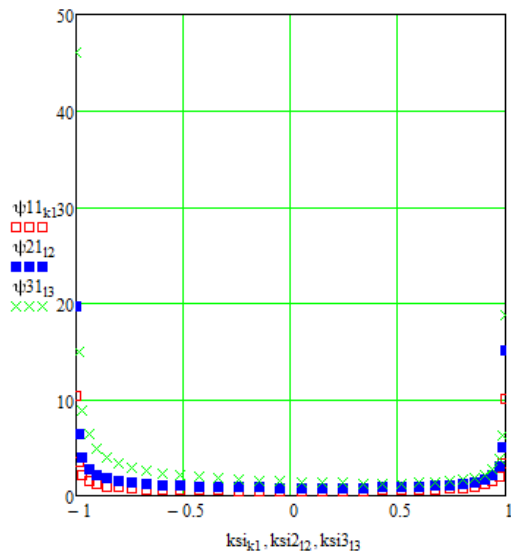


Рис. 9 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/6, r = 1, \alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

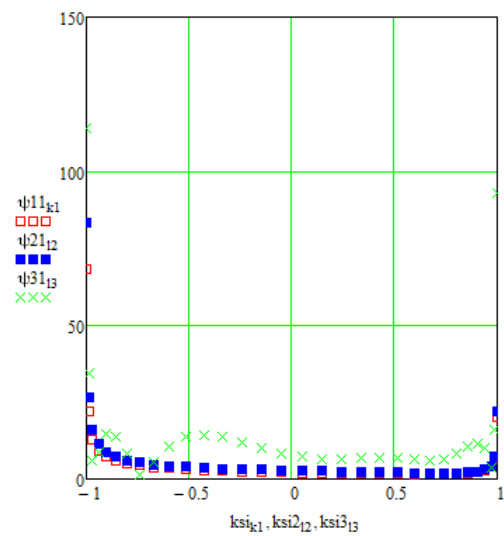


Рис. 10 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/6, r = 1, \alpha = 1; 1.5; 5$.

Деякий портретний аналіз особливостей застосованого чисельного методу. Наведені нижче графіки (рис. 11) значень складових (сингулярної та регулярної) матриці алгебраїчної системи рівнянь показують структурно перевагу діагональних елементів, що забезпечує якісну побудову її розв’язку.

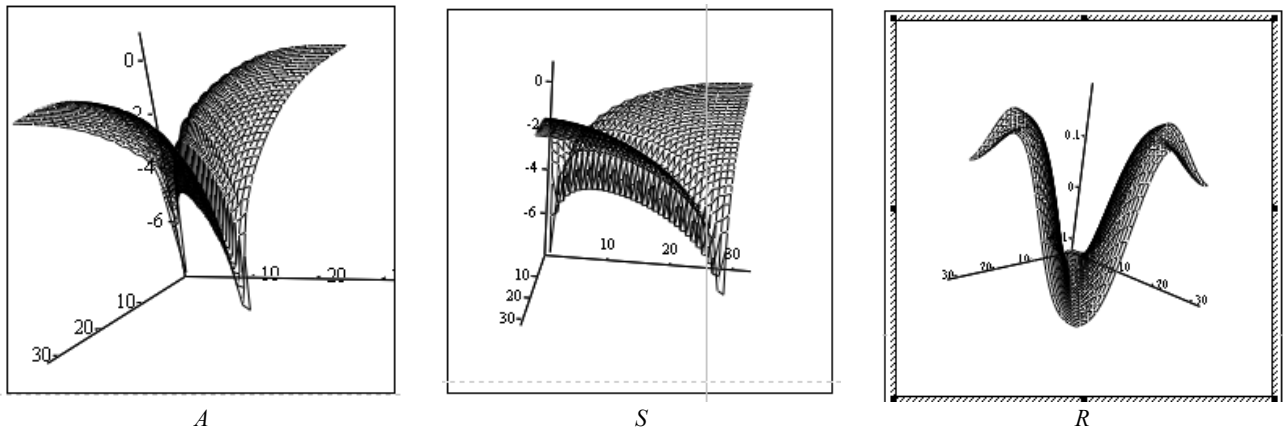


Рис. 11 – Значення елементів матриць ядро СІР (A), сингулярна складова (S), регулярна складова (R).

Висновки. В даній статті проведено детальне дослідження ключової задачі розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. У результаті застосування модифікації класичного методу інтегральних рівнянь отримано коректну повнохвильову математичну модель розсіювання у формі особливого інтегрального рівняння першого роду. При дослідженні цього особливого інтегрального рівняння основна увага приділена двом важливим методам його розв’язку: асимптотичному методу Реллея та прямому чисельному методу механічних квадратур. Як результат застосування першого методу отримаємо розв’язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв’язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот, далі застосовується відомий та добре обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур. Проведено ряд чисельних експериментів розсіювання E – поляризованої хвилі однією електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Порівняння чисельних ро-

зрахунків показало, що в асимптотичній довгохвильовій області частот вони добре співпадають. Це дало можливість провести чисельні експерименти в більш широкому діапазоні частот і бути певними у їх правильності.

Подальше дослідження можливе в напрямі пошуку аналітичних асимптотичних розв'язків для задач просорової дифракції на мета матеріалах із [14 – 15], використовуючи їх для тестування чисельних методів.

Список літератури

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Х. : Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1973. – 287 с.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. В 2 т. 1 т. Дифракционные решетки. – К. : Наук. Думка, 1986. – 232 с.
3. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев : Наук. Думка, 1984. – 240 с.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К. : Наук. Думка, 1984. – 344 с.
5. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Х. : Основа, 1997. – 283 с.
6. Koshovy G. I. Pre-fractal gratings of PEC strips: general mathematical models of wave scattering // Proc. Int. Conf. Mathem. Methods in Electromagn. Theory (MMET-2016). – Lviv, 2016. – pp. 89 – 95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544128.
7. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Х. : Ин-т радиофизики и электроники. НАН Украины. – 2007. – Вып. 12. – № 1. – С. 141 – 147.
8. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. – Х. : Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2007. – Вып. 12. – № 3. – С. 451 – 455.
9. Хьонл Х., Мауе А., Вестпфаль К. Теорія дифракції. – М. : Мир, 1964. – 428 с.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
11. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев : Наук. думка, 1989. – 256 с.
12. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E -polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips // IET Microwaves, Antennas and Propagation. – 2021. – № 15(10). – pp. 1218 – 1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
13. Ліфанов І. К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь та чисельний експеримент. – М. : ТОО Янус, 1995. – 520 с.
14. Ванін В. А., Просвирнин С. Л. Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решетке // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9. – №4. – С. 1 – 13.
15. Vanin V. A., Pershyna Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2024. – № 1(68). – pp.41 – 50. DOI: 10.15558/1607-3274-2024-1-4.

References (transliterated)

1. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Wave diffraction by gratings]. Kharkov, Izd-vo Khar'kovskogo gos. un-ta Publ., 1973. 287 p.
2. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko YU. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. V 2-kh t. 1 t. Difraktsionnye reshetki* [Resonant scattering of waves. In 2 Vol. Vol. 1 Diffraction grates B 2 т. 1 т. Diffraction gratings]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1986. 232 p.
3. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. *Spektral'nye operatory rasseyaniya v zadachakh difraktsii voln na ploskikh yekranakh* [Spectral scattering operators in the problems of wave diffraction by plane screens]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1984. 240 p.
4. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1984. 344 p.
5. Shestopalov V. P., Tuchkin YU. A., Poedinchuk A. E., Sirenko YU. K. *Novye metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach teorii difraktsii* [New methods for solving direct and inverse problems of diffraction theory]. Kharkov, Osнова Publ., 1997. 283 p.
6. Koshovy G. I. Pre-fractal gratings of PEC strips: general mathematical models of wave scattering. *Proc. Int. Conf. Mathem. Methods in Electromagn. Theory (MMET-2016)*. Lviv, 2016, pp. 89–95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544128.
7. Koshovy G. I. Rozsiyuvannya yelektromagnitnykh khvyly' predfraktal'nykh systememy tsylindrychnykh strichok [Electromagnetic wave scattering by prefractal systems of cylindrical strips]. *Radiofizika i yelektronika* [Radiophysics and electronics]. Kharkov, In-t radiofiziki i yelektroniki. NAN Ukrainy Publ., 2007, vol. 12, no. 1, pp. 141–147.
8. Koshovy G. I. Rozsiyuvannya yelektromagnitnykh khvyly' systemamy strichok zi zminnoyu fraktal'noyu rozmirmisty [Electromagnetic wave scattering by strip systems with variable fractal dimension]. *Radiofizika i yelektronika* [Radiophysics and electronics]. Kharkov, In-t radiofiziki i yelektroniki. NAN Ukrainy Publ., 2007, vol. 12, no. 3, pp. 451–455.
9. Kh'onl Kh., Maue A., Vestpfal' K. *Teoriya dyfraktsiyi* [Diffraction theory]. Moscow, Mir Publ., 1964. 428 p.
10. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
11. Nazarchuk Z. T. *Chislennoe issledovanie difraktsii voln na tsylindricheskikh strukturakh* [Numerical study of wave diffraction by cylindrical structures]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1989. 256 p.
12. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E -polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021, vol. 15(10), pp. 1218–1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
13. Lifanov I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rinvyan' ta chysel'nyy yeksperyment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, TOO Yanus Publ., 1995. 520 p.
14. Vanin V. A., Prosvirnin S. L. Difraktsiya nestatsionarmoy yelektromagnitnoy volny na biperiodicheskoy resheytk [Diffraction of non-stationary electromagnetic wave by biperiodic grating]. *Radiofizika i radioastronomiya* [Radiophysics and radioastronomy]. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 1–13.
15. Vanin V. A., Pershyna Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2024, no. 1(68), pp.41–50. DOI: 10.15558/1607-3274-2024-1-4.

Надійшла (received) 18.03.2024

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Кошовий Георгій Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, м. Харків; тел.: (098) 851-32-21; e-mail: gikosh@gmail.com.

Koshovy George Ivanovych – PhD, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department no. 35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Kharkiv 61085, Ukraine; tel.: (098) 851-32-21; e-mail: gikosh@gmail.com.

Карпенко Валентина Іванівна – провідний інженер відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, м. Харків; тел.: (097) 465-06-86; e-mail: karvalya@gmail.com.

Karpenko Valentyna Ivanivna – Leading Engineer at the Department no. 35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Kharkiv, Ukraine; tel.: (097) 465-06-86; e-mail: karvalya@gmail.com.

Ванін Борис Вікторович – магістр IT, інженер-викладач, Robocode, м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Borys Viktorovych – Master IT, Engineer-Teacher, Robocode, Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

О. В. ВОРОПАЙ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДОВІЛЬНОГО РУХОМОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ЩО ДІЄ НА ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ

На різні елементи конструкцій та циліндричні оболонки скінченної довжини зокрема можуть діяти різні види зовнішнього нестационарного навантаження: розподілене та зосереджене, нерухоме та рухоме. При застосуванні різних методів ідентифікації зовнішнього навантаження, зазвичай, тип зовнішнього навантаження відомий. На практиці це не завжди так. Метою дослідження є розробка методу ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосований при ідентифікації рухомого навантаження. Для моделювання нестационарного навантаження циліндричної оболонки була використана система диференціальних рівнянь уточненої теорії оболонок середньої товщини типу Тимошенка. Розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь отримано шляхом розкладання невідомих функцій у ряди Фур'є та застосування інтегрального перетворення Лапласа. Розв'язок відповідної оберненої задачі був отриманий з використанням теорії інтегральних рівнянь та методу регуляризації Тихонова. В результаті дослідження отримано розв'язок оберненої задачі механіки деформівного твердого тіла з ідентифікації довільного осесиметричного нестационарного навантаження. Проведено числовий експеримент з використанням розробленого методу при ідентифікації рухомого нестационарного навантаження, що діє на шарнірно оберту циліндричну оболонку середньої товщини. Результати моделювання свідчать про досить точну ідентифікацію як зміни в часі, так і розподілу вздовж оболонки нестационарного осесиметричного рухомого навантаження. Розроблено метод ідентифікації зовнішнього нестационарного навантаження, яке довільно розподілено вздовж циліндричної оболонки. Описаний метод дозволяє ідентифікувати рухоме навантаження без попередньої інформації про тип цього навантаження, а також відтворювати рухомі нестационарні навантаження, що часто зустрічаються на практиці та розширити його на інші види елементів конструкцій.

Ключові слова: циліндрична оболонка, нестационарне рухоме осесиметричне навантаження, обернена задача, ідентифікація, регуляризація Тихонова.

O. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, A. S. SHARAPATA

IDENTIFICATION OF AN ARBITRARY MOVING AXISYMMETRIC LOAD ACTING ON A CYLINDRICAL SHELL

Various types of external non-stationary loads can act on various structural elements and cylindrical shells of finite length in particular distributed and concentrated, stationary and moving load. When using various external load identification methods, the type of external load is usually known. In practice this is not always the case. The purpose of the study is to develop a method for identifying an arbitrary axisymmetric load acting on an elastic cylindrical shell of finite length, which can be used to identify a moving load. To model the non-stationary load of a cylindrical shell, a system of differential equations of the refined Timoshenko theory for medium thickness shells was used. The solution to this system of differential equations is obtained by expanding the unknown functions into Fourier series and applying the integral Laplace transform. The solution of the inverse problem was obtained using the theory of integral equations and the Tikhonov regularization method. As a result of the study, a solution of the inverse problem of solid mechanics to identify an arbitrary axisymmetric non-stationary load was obtained. A numerical experiment was carried out to use the developed method to identify a moving non-stationary load acting on a simply supported cylindrical shell of medium thickness. The simulation results indicate a fairly accurate identification of both the change in time and the distribution along the shell of a non-stationary axisymmetric moving load. A method has been developed for identifying an external non-stationary load randomly distributed along a cylindrical shell, which makes it possible to identify a moving load without preliminary information about the type of this load. The developed method allows us to reproduce moving non-stationary loads, which are often encountered in practice, and expand it to other types of structural elements.

Key words: cylindrical shell, non-stationary moving axisymmetric load, inverse problem, identification, Tikhonov regularization.

Вступ. Під час розв'язання обернених задач з ідентифікації зовнішніх нестационарних навантажень, що діють на різні елементи конструкцій, невідомими можуть бути: функція навантаження у часі, геометричний розподіл навантаження та вид цього навантаження. В залежності від задачі дослідження, певна інформація про зовнішнє навантаження може бути відомою. Втім найбільш складною є задача, коли будь-яка інформація про прикладене навантаження є відсутньою.

Саме така задача з ідентифікації довільного навантаження, що діє на циліндричну оболонку середньої товщини типу Тимошенка, розглянута в даному дослідженні.

Аналіз останніх досліджень. Розрахунок елементів конструкцій під дією зовнішніх навантажень базується на застосуванні теорії коливань. В роботі [1] наведено огляд моделей, які використовуються для опису коливань елементів конструкції у вигляді стержнів, пластин та оболонок. Їх застосування дозволяє розв'язувати різноманітні задачі механіки деформівного твердого тіла для циліндричних оболонок.

Найбільш розповсюдженими є задачі з визначення параметрів напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Так, наприклад, в роботах [2, 3] досліджується напружено-деформований стан багатопарових конструкцій при різних типах динамічного навантаження. Дослідження імпульсного навантаження шаруватих ортотропних незамкнених оболонок постійної товщини наведено в роботі [4]. Розв'язана задача мінімізації маси оболонки. В статті [5] методом Галеркіна розв'язано рівняння балансу вільних і вимушених коливань складеної циліндричної оболонки, підкріпленої ребрами, і досліджено вплив ребер сітки на динамічний відклик оболонки.

Багато прикладних задач пов'язано з дією на елементи конструкцій рухомих навантажень. Так, авторами роботи [6] проведено дослідження реакції нескінченно довгої тришарової циліндричної оболонки на дію нормального навантаження, що рухається вздовж осі з постійною до резонансної швидкістю. Вплив рухомого гармонічного навантаження на нанокмпозитні циліндричні оболонки досліджений в роботі [7]. Коливання скла-

деної циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску, що рухається, досліджено в роботі [8]. Реакцію дорожньої конструкції на рухоме нестационарне навантаження досліджено в роботі [9]. Розглянуто можливість урахування в'язкопружних властивостей матеріалу пластини.

Менш дослідженими є задачі ідентифікації зовнішніх навантажень, що діють на циліндричні оболонки. Серед них слід відмітити роботу [10], де наведено ідентифікацію нерухомого нестационарного осесиметричного навантаження, що діє на *однопрогонну циліндричну оболонку*. Оболонка складається з двох жорстко скріплених встик ділянок, виготовлених з різних матеріалів. Розглянуто випадок, коли навантаження є розподіленим по певній ділянці циліндричної оболонки.

Авторами роботи [11] на основі *методу розширеної регуляризації Тихонова* і *методу збурення матриці* запропоновано метод для реконструкції ударних навантажень, що діють на композитну ламіновану циліндричну оболонку з випадковими характеристиками.

Задача ідентифікації нестационарного навантаження, що діє на підкріплені ребрами жорсткості циліндричні оболонки розглянута в роботі [12].

Втім, актуальною проблемою є розв'язання обернених задач з ідентифікації саме рухомих зовнішніх навантажень у зв'язку з багатьма існуючими прикладними задачами.

В роботі [13] отримано розв'язок обернених задач механіки твердого тіла з ідентифікації як нерухомої так і рухомої зосередженої осесиметричної нестационарної сили, що діє на циліндричну оболонку. Тип навантаження та його швидкість вважаються відомими. Здійснюється відновлення залежності нестационарного навантаження від часу.

Виходячи з виконаного аналізу, можна зробити висновок, що ідентифікація зовнішнього рухомого навантаження, що діє на циліндричну оболонку є актуальною. Дане дослідження є продовженням робіт [9, 10, 13, 14], його відмінність полягає в ідентифікації не тільки функції навантаження у часі, а й типу навантаження та його геометричного розподілу.

Постановка задачі. Метою дослідження є розробка методу ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосований при ідентифікації рухомого навантаження.

Для досягнення мети були поставлені наступні задачі:

- отримання в інтегральному вигляді розв'язку системи диференціальних рівнянь коливань циліндричної оболонки відносно функцій її переміщень;
- розробка методу ідентифікації зовнішнього довільного нестационарного навантаження на основі розкладання невідомого навантаження у ряд Фур'є та методу регуляризації Тихонова;
- проведення числового моделювання з ідентифікації зовнішнього нестационарного осесиметричного навантаження, що рухається вздовж циліндричної оболонки.

Отримання розв'язку системи диференціальних рівнянь коливань циліндричної оболонки. В якості об'єкту дослідження розглянута шарнірно-обперта циліндрична оболонка середньої товщини *теорії типу Тимошенка* (рис. 1). На оболонку діє рухоме довільно розподілене вздовж осі оболонки осесиметричне нестационарне поперечне навантаження $q(x, t)$, що розповсюджується вздовж осі x оболонки зі швидкістю V .

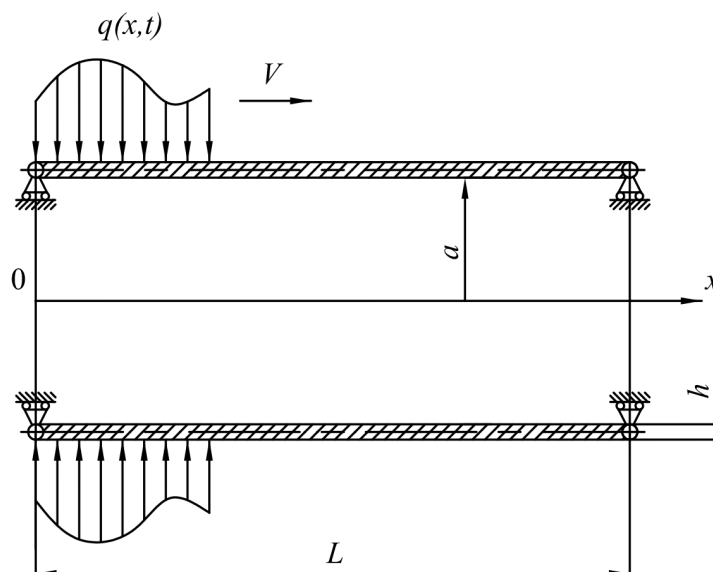


Рис. 1 – Механічна система, що досліджується.

Реакція оболонки середньої товщини теорії типу Тимошенка на осесиметричне поперечне навантаження

моделюється системою лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\nu l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ \bar{k}^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{l^2}{a} w + \nu l \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{(1-\nu^2)l^2}{Eh} q(\xi, t); \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \bar{k}^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi l^2 \right) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad t = \frac{t_p \sqrt{E}}{l \sqrt{\rho(1-\nu^2)}}; \quad \bar{k}^2 = \frac{1-\nu}{2} k^2;$$

l – довжина оболонки; t – безрозмірний час; t_p – розмірний час; u, w – переміщення точок серединної поверхні в осьовому та радіальному напрямках, відповідно; ψ – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки; ν, E – пружні постійні матеріалу оболонки; ρ – густина матеріалу оболонки; k – коефіцієнт зсуву; x – координата в осьовому напрямку; $q(\xi, t)$ – задане поперечне нестационарне навантаження.

Граничні умови для аналізованої механічної системи (рис. 1) мають вигляд:

$$N_x(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad w(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad M_x(\xi, t)|_{\xi=1} = 0. \quad (2)$$

Невідомі функції (переміщення та кут повороту нормалі) були розкладені в наступні тригонометричні ряди Фур'є:

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(k\pi\xi); \\ u(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cos(k\pi\xi); \\ \psi(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cos(k\pi\xi), \end{aligned} \quad (3)$$

де $a_k(t), b_k(t), c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти розкладання.

Система диференціальних рівнянь у частинних похідних (1) після підстановки розвинень у ряди (3) та процедури ортогоналізації перетворюється у систему звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Після оберненого перетворення Лапласа з застосуванням теорему згортки, отримано наступний розв'язок:

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{I_{n,r}(t) (C_n - \alpha_{n,r}^2) (B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \sin(n\pi\xi); \\ u(\xi, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{I_{n,r}(t) \frac{\nu l \pi n}{a} (C_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cos(n\pi\xi); \\ \psi(\xi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{12}{h^2} I_{n,r}(t) l \pi n \bar{k}^2 (B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cos(n\pi\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

де $I_{n,r}(t) = \frac{2(1-\nu^2)l^2}{Eh} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \alpha_{n,r}(t-\tau) d\tau$, причому

$$Q_n(s) = \int_0^1 q(\xi, s) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (5)$$

Для подальшого аналізу застосована *кусково-постійна апроксимація функцій часу* [15], що входять до (4). В результаті використання цієї апроксимації отримано, що

$$I_{n,r,m} = \frac{2(1-\nu^2)l^2}{Eh} \sum_{p=1}^m Q_{n,p} \cdot \frac{\cos[\alpha_{n,r}(m-p)\Delta t] - \cos[\alpha_{n,r}(m-p+1)\Delta t]}{\alpha_{n,r}}, \quad (6)$$

де $t_m = m \cdot \Delta t$; $m = 0, 1, \dots, M$ – кількість часових інтервалів; $p = 0, 1, \dots, m$; Δt – величина «кроку» у часі.

Співвідношення (4) при відомій функції розподілення зовнішнього навантаження $q(x, t)$ дозволяють знайти всі компоненти переміщення будь-якої точки оболонки, що є *прямою задачею* механіки деформівного твердого тіла.

При невідомому зовнішньому навантаженні можливо декілька постановок *оберненої задачі*:

1) *часткова ідентифікація*: по вихідним даним (компонентам переміщення певної або певних точок оболонки) та відомому геометричному розподіленню $Q(x)$ зовнішнього навантаження треба знайти закон зміни у часі цього навантаження $Q(t)$ або при відомій функції $Q(t)$ знайти $Q(x)$;

2) *повна ідентифікація*: по вихідним даним (компонентам переміщення в певних точках оболонки) треба знайти невідому функцію зовнішнього навантаження $q(x, t)$.

Зазначимо, що в цій роботі далі розв'язується обернена задача повної ідентифікації.

При невідомому зовнішньому навантаженні співвідношення (4) є *інтегральними рівняннями Вольтерра I-го роду*.

Розробка методу ідентифікації зовнішнього довільного нестационарного навантаження. Далі розглянуто ідентифікацію нормального нестационарного навантаження, що діє на шарнірно-оперту циліндричну оболонку (рис. 1) за значеннями поперечного прогину. Причому, визначено не тільки закон зміни нестационарного навантаження в часі, а й його геометричний розподіл уздовж осі циліндричної оболонки.

Для ідентифікації невідоме навантаження подавалося у вигляді K – часткової суми ряду Фур'є наступного виду:

$$q(\xi, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \xi), \quad (7)$$

де $q_k(t)$ – невідомі коефіцієнти розкладання в ряд Фур'є; K – число утримуваних членів ряду.

По суті, за допомогою формули (7) здійснювалася апроксимація невідомого навантаження першими K членами її розкладання в ряд Фур'є. Вкажемо, що тригонометричні функції, що входять до апроксимаційної формули, збігаються з відповідними формами коливань нормального переміщення для шарнірно-опертої циліндричної оболонки.

На основі (4) та (7) для ідентифікації невідомого навантаження за значеннями прогинів було отримано інтегральне рівняння:

$$w(\xi, t) = -\frac{(1-\nu^2)l^2}{Eh} \sum_{n=1}^K \sum_{r=1}^3 \frac{(C_n - \alpha_{n,r}^2)(B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cdot \sin(n\pi\xi) \int_0^t q_n(\tau) \cdot \sin \alpha_{n,r}(t-\tau) d\tau. \quad (8)$$

Аналізуючи інтегральне рівняння (8), зазначимо, що в ньому міститься K невідомих функцій часу. Тому для ідентифікації довільного розподіленого нестационарного навантаження необхідно отримати K рівнянь. Природно припустити, що ідентифікація навантаження з точністю, що відповідає K членам ряду, можлива за значеннями прогину в K точках циліндричної оболонки.

При реальних експериментальних дослідженнях треба забезпечити вимірювання зміни прогину у часі в K точках оболонки, причому ці точки повинні не збігатись.

Отже, у матричній формі необхідно розв'язувати систему рівнянь розмірністю $K \times K$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K A_{1,n} \cdot q_n &= w_1, \\ \sum_{n=1}^K A_{2,n} \cdot q_n &= w_2, \\ &\dots \\ \sum_{n=1}^K A_{K,n} \cdot q_n &= w_K, \end{aligned} \quad (9)$$

де матриця $\mathbf{A}_{m,p}$ – відповідає дискретизованим ядрам інтегральних рівнянь Вольтерра; у правій частині записаний вектор-стовпець \mathbf{w}_k , що є дискретним аналогом функції прогинів в оболонці $w_k(t)$.

Елементи блокової матриці $(\mathbf{A}_{m,p})_{k,n}$ знаходяться наступним чином:

$$(\mathbf{A}_{m,p})_{k,n} = - \sum_{r=1}^3 \frac{(C_n - \alpha_{n,r}^2)(B_n - \alpha_{n,r}^2) 2(1 - \nu^2) l^2 \cos[\alpha_{n,r}(m-p)\Delta t] - \cos[\alpha_{n,r}(m-p+1)\Delta t]}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \frac{Eh}{\alpha_{n,r}} \sin(n\pi\xi_k). \quad (10)$$

Для розв'язання системи матричних рівнянь використаний узагальнений алгоритм Гауса [15]. Внаслідок його застосування система (9) приводиться до виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1,1} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_{1,2} \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{B}_{1,3} \cdot \mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{B}_{1,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_1, \\ \mathbf{B}_{2,2} \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{B}_{2,3} \cdot \mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{B}_{2,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_2, \\ &\dots \\ \mathbf{B}_{K,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_K. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) блокова матриця \mathbf{B} має верхню трикутну форму після прямого проходу узагальненого алгоритму Гауса.

З (11) з використанням алгоритму Тихонова [16, 17], послідовно знаходяться коефіцієнти $q_k(t)$ розкладання шуканого навантаження $q(\xi, t)$.

Зауважимо, що при розв'язанні розглянутої задачі особливу увагу слід приділяти алгоритму вибору параметра регуляризації. Якщо при ідентифікації часової складової одного навантаження необхідно обирати один параметр регуляризації, то при вирішенні СЛАУ (11) із застосуванням алгоритму Тихонова необхідно обирати K параметрів регуляризації.

Для вибору параметрів регуляризації можна використовувати принцип нев'язки, що детально описаний в роботі [16], а оптимальні значення параметрів регуляризації визначати послідовно для $1, 2, \dots, K$ чисел членів ряду.

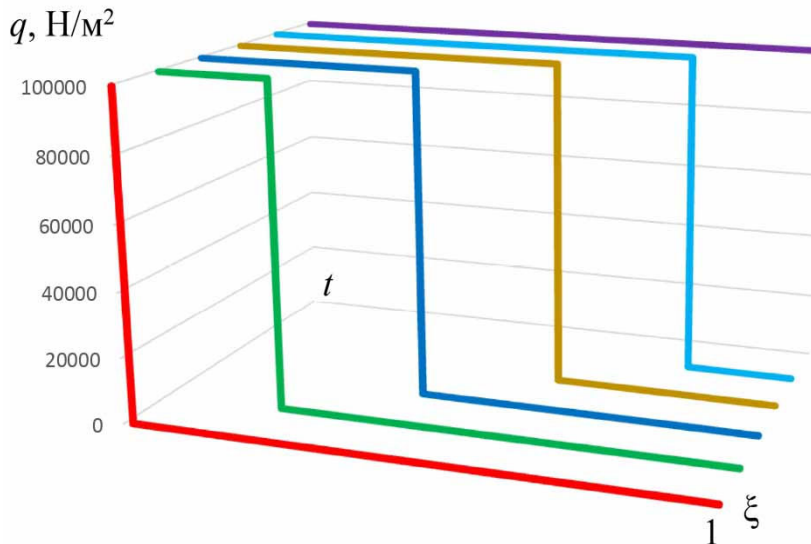


Рис. 2 – Зовнішнє навантаження.

Ідентифікація зовнішнього рухомого нестационарного навантаження. При чисельних розрахунках було розглянуто сталеву циліндричну оболонку, що має такі геометричні та фізичні характеристики: довжина $l = 1.5$ м, радіус середньої поверхні $a = 0.3$ м, товщина $h = 0.043$ м, модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$ коефіцієнт зсуву $k = 0.833$.

На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження, що розширюється від лівого торця оболонки ($\xi = 0$) до правого ($\xi = 1$) зі швидкістю $V = 542$ м/с. Епюри даного навантаження при різних значеннях часу показані на рис. 2.

Зазначимо, що в цій роботі описаний розрахунковий експеримент, в якому спочатку була розв'язана пряма задача при заданій функції зовнішнього навантаження. В результаті впливу цього навантаження в 13 ($K = 13$) обраних точках з координатами $\xi = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9$ було розраховано прогини як функції часу. На рис. 3 показані функції цих прогинів в точках $\xi = 0.25, 0.5, 0.75$ оболонки.

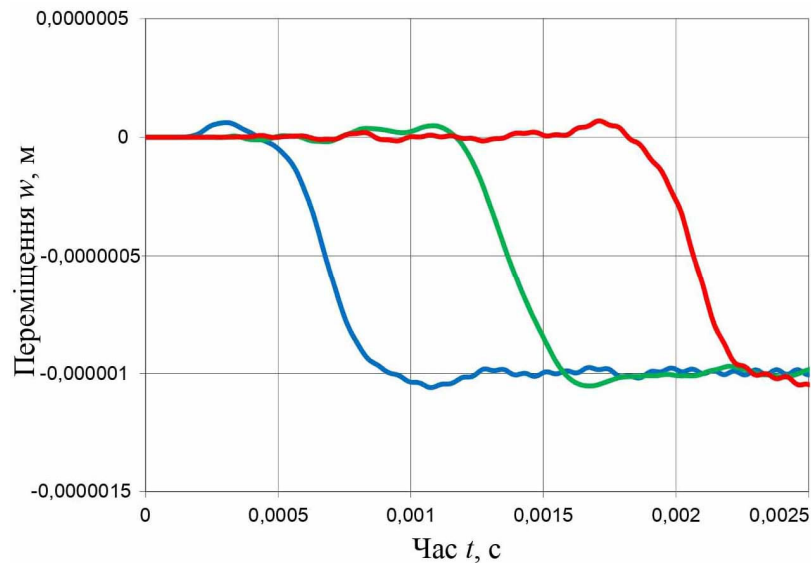


Рис. 3 – Функції прогинів оболонки.

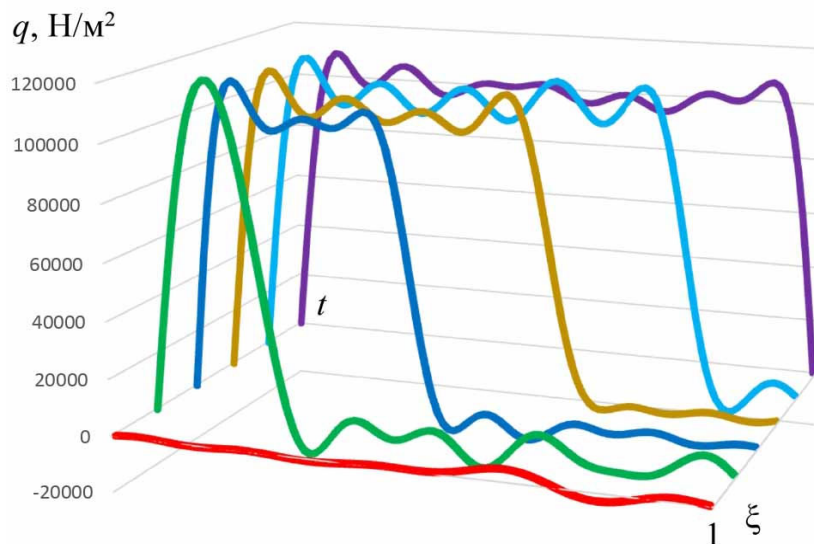


Рис. 4 – Результати ідентифікації рухомого навантаження.

На підставі цих прогинів відновлюється залежність невідомого навантаження у часі одночасно з його *геометричним розподілом (епюрою)*.

На знайдені з прямої задачі еталонні функції прогинів $\bar{w}(t)$ накладалася «похибка» $\delta = 0.05$, що моделює неточності вихідних даних для задачі ідентифікації при реальних вимірюваннях:

$$w_k(t_m) = \bar{w}_k(t_m) + \delta \cdot \max(|\bar{w}_k|) \cdot \text{rnd}(t_m),$$

де $\max(|\bar{w}_k|)$ – максимальне абсолютне значення еталонні функції прогинів в k -тій точці; $\text{rnd}(t_m)$ – псевдо-випадкове число в діапазоні $[-1, 1]$.

Результати ідентифікації рухомого навантаження у вигляді епюр при різних значеннях часу показані на рис. 4. На рис. 5 наведено порівняння епюр заданого навантаження (крива 1) та ідентифікованого навантаження (значення 2) у певний момент часу.

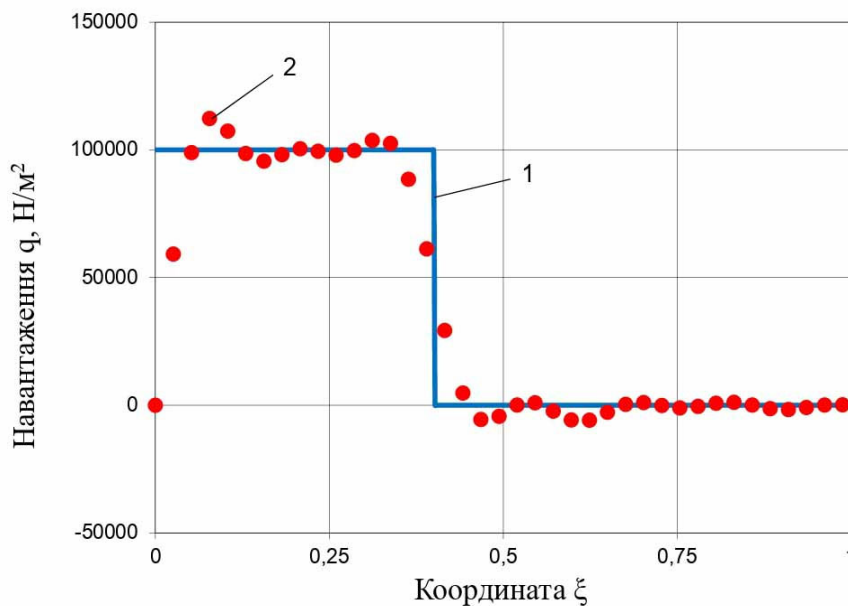


Рис. 5 – Порівняння ідентифікованого та заданого навантаження.

Чисельні результати, що наведені на рис. 4 та рис. 5 свідчать, що розроблений метод дозволяє досить точно відновлювати довільні зовнішні нестационарні навантаження (у тому числі і рухомі), що діють на циліндричні оболонки.

Висновки. У цій роботі розроблено метод ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосовано при ідентифікації рухомого навантаження. Ідентифікація здійснювалася на основі прогинів циліндричної оболонки.

При ідентифікації зовнішнього рухомого нестационарного навантаження на конкретному прикладі досліджено вплив кількості точок, в яких заданий прогин, на точність ідентифікації. Дослідження показали, що для розглянутої задачі достатньою є кількість точок, в яких задаються функції прогинів $K = 13$. Зазначимо, що в роботі графічний матеріал наведений саме для $K = 13$. При $K < 13$ точність ідентифікації значно погіршується, а при $K > 13$ помітно зростає розрахунковий час. Розв'язок оберненої задачі базується на застосуванні методу регуляризації Тихонова, демонструє його універсальність, стійкість до похибок у вихідних даних, малу чутливість до наявності точок розриву 1-го роду у відновлюваного навантаження. Основним його недоліком є наявність 13 параметрів регуляризації і необхідність застосування спеціальних алгоритмів для їх вибору.

Список літератури

1. Weaver Jr. W., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration problems in engineering // John Wiley & Sons. – 1991. – 634 p.

2. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact // Springer. – 2020. – P. 267–276. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_22.
3. Сметанкіна Н. В., Шушніков О. М., Угримов С. В. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатосарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон. – 2016. – № 3(58). – С. 408–413.
4. Smetankina N. V., Postnyi O. V., Misura S. Yu., Merkulova A. I., Merkulov D. O. Optimal design of layered cylindrical shells with minimum weight under impulse loading // In: 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). – 2021. – P. 506–509.
5. Davar A., Azarafza R., Fayed M. S., Fallahi S., Jam J. E. Dynamic response of a grid-stiffened composite cylindrical shell reinforced with carbon nanotubes to a radial impulse load // Mechanics of Composite Materials. – 2021. – Vol. 57(2). – P. 181–204.
6. Kuldashov N. U., Marasulov A. M., Yunusov G. G., Ruzimov A. S., Hojiev T. S. Stationary stress-strain state of a three-layer viscoelastic cylindrical shell under normal loading // In Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373 (2). – 022039.
7. Eyvazian A., Davood Sh., Behrouz K. On the dynamic of graphene reinforced nanocomposite cylindrical shells subjected to a moving harmonic load // International Journal of Engineering Science. – 2020. – Vol. 154. – 103339.
8. Eipakchi H., Nasrekani F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure // Composite Structures. – 2020. – Vol. 254. – 112847. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112847.
9. Voropay A. Simulation of non-stationary deformation of rectangular plate with vibration absorber // Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University. – 2011. – Vol. 53. – P. 87–90.
10. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2022. – Vol. 119 (7). – P. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
11. Wang L., Liu Y., Xie Y., Chen B. Impact load identification of composite laminated cylindrical shell with stochastic characteristic // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol. 92 (4). – P. 1397–1411.
12. Янютін С. Г., Гнатенко Г. О., Єгоров П. А. Нестационарне деформування підкріплених циліндричних оболонки // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – Vol. 27 (1303). – P. 148–156.
13. Воропай О., Пovalyayev С., Шарпата А. Two inverse non-stationary problems of axially symmetric deformation of a finite-length elastic cylindrical shell // Автомобільний транспорт. – 2022. – № 51. – С. 74–84. DOI: 10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08.
14. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Dynamics and Strength of Machines. – 2022. – No. 1. – P. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
15. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. – Mineola, N.Y : Dover Publications. – 2000. – 1130 p.
16. Yang X. J., Wang L. A modified Tikhonov regularization method // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 288. – P. 180–192. DOI: 10.1016/j.cam.2015.04.011.
17. Янютін С. Г., Єгоров П. А. Нестационарні коливання шарнірно-обертої пластини, підкріпленої лінійними ребрами жорсткості (пряма та обернена задача) // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6(1115). – С. 191–200.

References (transliterated)

1. Weaver Jr. W., Timoshenko S. P., Young D. H. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, 1991. 634 p.
2. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact. *Springer*. 2020. pp. 267–276. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_22.
3. Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. Matematychnе modelyuvannya protsesu nestatsionarnogo deformuvannya bagatosarovogo osklinnya pry rozpodilennykh ta lokalizovanykh sylovykh navantazhenyakh [Mathematical modeling of nonstationary deformation process of multilayer glazing at distributed and localized loadings]. *Visnik Kherson'skogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. Kherson, 2016, no. 3(58), pp. 408–413.
4. Smetankina N. V., Postnyi O. V., Misura S. Yu., Merkulova A. I., Merkulov D. O. Optimal design of layered cylindrical shells with minimum weight under impulse loading. In: *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. 2021, pp. 506–509.
5. Davar A., Azarafza R., Fayed M. S., Fallahi S., Jam J. E. Dynamic response of a grid-stiffened composite cylindrical shell reinforced with carbon nanotubes to a radial impulse load. *Mechanics of Composite Materials*. 2021, vol. 57(2), pp. 181–204.
6. Kuldashov N. U., Marasulov A. M., Yunusov G. G., Ruzimov A. S., Hojiev T. S. Stationary stress-strain state of a three-layer viscoelastic cylindrical shell under normal loading. In *Journal of Physics: Conference Series*. 2022, vol. 2373 (2), 022039.
7. Eyvazian A., Davood Sh., Behrouz K. On the dynamic of graphene reinforced nanocomposite cylindrical shells subjected to a moving harmonic load. *International Journal of Engineering Science*. 2020, vol. 154, 103339.
8. Eipakchi H., Nasrekani F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure. *Composite Structures*. 2020, vol. 254, 112847. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112847.
9. Voropay A. Simulation of non-stationary deformation of rectangular plate with vibration absorber. *Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University*. 2011, vol. 53, pp. 87–90.
10. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, vol. 119 (7), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
11. Wang L., Liu Y., Xie Y., Chen B. Impact load identification of composite laminated cylindrical shell with stochastic characteristic. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, vol. 92 (4), pp. 1397–1411.
12. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Yegorov P. A. Nestatsionarne deformuvannya pidkriplenykh tsylindrychnykh obolonok [Nonstationary deformation of reinforced cylindrical shells]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27(1303), pp. 148–156.
13. Voropaj O., Povalyayev S., Sharapata A. Two inverse non-stationary problems of axially symmetric deformation of a finite-length elastic cylindrical shell. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2022, no. 51, pp. 74–84. DOI: 10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08.
14. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Dynamics and Strength of Machines*. 2022, no. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.

15. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p.
16. Yang X. J., Wang L. A modified Tikhonov regularization method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015, vol. 288, pp. 180–192. DOI: 10.1016/j.cam.2015.04.011.
17. Yanyutin Ye. G., Yegorov P. A. Nestatsionarni kolyvannya sharnirno-obpertoivi plastyny, pidkriplenoyi liniynymy rebramy zhorstkosti (pryama ta obrernena zadacha) [Non-stationary vibrations of a simple supported plate reinforced with linear stiffeners (direct and inverse problems)]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2015, no. 6(1115), pp. 191–200.

Надійшла (received) 15.03.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Olexiy Valeriiovych – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарпата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergiiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

С. Є. ГАРДЕР, Т. Л. КОРНІЛЬ, С. М. РЕШЕТНИКОВА, І. В. СЕРДЮК

СИНГУЛЯРНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО БАГАТОВИМІРНОГО ЧАСОВОГО РЯДУ

В роботі застосовано алгоритм сингулярно-структурного аналізу і прогнозу багатовимірною методом MSSA. Розроблена програма, в якій реалізовані кроки методу для виділення компонент сингулярного розкладання, проведено аналіз і прогноз реальних часових рядів. В дослідженні часових рядів все частіше використовують сингулярний спектральний аналіз SSA (Singular Spectrum Analysis). На відміну від інших методів статистичного дослідження часових рядів, цей метод використовується для дослідження структури, виділення окремих складових і прогнозу як стаціонарних, так і нестаціонарних часових рядів. Він не вимагає аналітичної моделі ряду. Фактично, даний підхід заснований на методі головних компонент. В його основі лежить трансформація ряду в матрицю і її сингулярне розкладання. Після ідентифікації компонент сингулярного розкладання відбувається їх угруповання, що призводить до розкладання вихідного ряду на адитивні компоненти, такі як тренд, коливання (періодики) і шум. Метод SSA дозволяє продовжувати структуру часового ряду, будуючи тим самим прогноз (продовження). Важливим напрямком розвитку методу SSA як методу аналізу часових рядів є його узагальнення для аналізу багатовимірних часових рядів. Метод відомий під назвами MSSA (Multi-Channel SSA) або E-EOFs (Extended Empirical Orthogonal Functions). В даному випадку очікуваним результатом є одночасний розклад декількох рядів на інтерпретовані складові. Однак достатньо повної теорії для MSSA не існує.

Ключові слова: сингулярний спектральний аналіз SSA, метод гусениці, траєкторна матриця, розкладання на адитивні компоненти, власні трійки, діагональне усереднення, багатовимірний часовий ряд, MSSA, прогноз.

S. Ye. HARDER, T. L. KORNIL, S. M. RESHETNIKOVA, I. V. SERDIUK

SINGULAR SPECTRAL ANALYSIS OF TEMPERATURE MULTIDIMENSIONAL TIME SERIES

In the paper the algorithm of singular structural analysis and forecasting of a multidimensional series by the MSSA method is used. The program was developed, in which the steps of the method for the selection of singular decomposition components were implemented, the analysis and forecast of real time series was carried out. Singular spectrum analysis (SSA) is increasingly used in the study of time series. Unlike other methods of statistical research of time series, this method is used to study the structure, selection of individual components and forecast of both stationary and non-stationary time series. It does not require an analytical model of the series. In fact, this approach is based on the method of principal components. It is based on the transformation of a series into a matrix and its singular decomposition. After identifying the components of the singular decomposition, their grouping takes place, which leads to the decomposition of the original series into additive components, such as trend, oscillations (periodics), and noise. The SSA method allows you to continue the structure of the time series, thus building a forecast (continuation). An important direction of the development of the SSA method as a method of time series analysis is its generalization for the analysis of multidimensional time series. The method is known as MSSA (Multi-Channel SSA) or E-EOFs (Extended Empirical Orthogonal Functions). In this case, the expected result is the simultaneous decomposition of several series into interpreted components. However, a sufficiently complete theory for MSSA does not exist.

Key words: SSA singular spectral analysis, caterpillar method, trajectory matrix, decomposition into additive components, eigentriples, Diagonal averaging, multidimensional time series, MSSA, forecast.

Вступ. В останні роки у дослідженні часових рядів все частіше використовують сингулярний спектральний аналіз SSA (Singular Spectrum Analysis) або «Гусеницю» [1, 2, 3]. Він виник з теорії динамічних систем. На відміну від інших методів статистичного дослідження часових рядів [4, 5] (метод виділення тренда, часового згладжування, регресійного, автокореляційного, методу гармонійного аналізу, методу Бокса – Дженкінса ARIMA, чисельного розмноження вибірок і нейромережевого), цей метод використовується для дослідження структури, виділення окремих складових і прогнозу як стаціонарних, так і нестаціонарних часових рядів. Він не вимагає аналітичної моделі ряду. Фактично даний підхід заснований на методі головних компонент.

Метод «Гусениця» зародився у 70 – 80 роках минулого століття. В його основі лежить трансформація ряду в матрицю і її сингулярне розкладання. Після ідентифікації компонент сингулярного розкладання відбувається їх угруповання, що призводить до розкладання вихідного ряду на адитивні компоненти, такі як тренд, коливання (періодики) і шум.

Метод гусениці застосовується для вирішення досить широкого кола завдань [6], таких як: розбиття ряду на інтерпретовані складові, придушення шумів і згладжування, заповнення пропущених значень в даних [7, 8] і багатьох інших завдань. Діапазон областей знань, де метод може бути застосований, дуже широкий: техніка, економіка, фінанси, природничі науки, кліматологія, геофізика, обробка зображень, медицина тощо. У практичних додатках використовуються різні модифікації методу.

Метод SSA дозволяє продовжувати структуру часового ряду, будуючи тим самим прогноз (продовження). В одновимірному методі SSA таку структуру задає лінійна рекурентна формула (ЛРФ), що керує рядом. У випадку прогнозу, побудованого на основі багатовимірною SSA, використовуються аналогічні ідеї [6, 9].

Важливим напрямком розвитку методу SSA, як методу аналізу часових рядів, є його узагальнення для аналізу багатовимірних часових рядів. За кордоном метод відомий під назвами MSSA (Multi-Channel SSA) або E-EOFs (Extended Empirical Orthogonal Functions). В статті [6] ідеї методу одновимірною SSA розповсюджуються на випадок декількох часових рядів. В даному випадку очікуваним результатом є одночасний розклад декількох рядів на інтерпретовані складові. Однак, достатньо повної теорії для багатовимірною SSA (MSSA – Multi-Channel SSA) не існує.

У роботі застосовано алгоритм структурного аналізу і прогнозу багатовимірною рядом методом MSSA. Розроблена програма, в якій реалізовані кроки методу для виділення компонент сингулярного розкладання, проведено аналіз і прогноз реальних часових рядів.

Структурний аналіз методом SSA. Розглянемо багатовимірний часовий ряд

$$\left(x_i^{(k)}\right)_{i=1}^N, \quad k=1, \dots, s, \quad (1)$$

де s – кількість часових рядів; k – номер ряду; N – довжина часових рядів; i – номер відліку.

Для розкладу часових рядів обирається параметр L – «час життя багатовимірної гусениці» такий, що $0 < L \leq N-1$.

Нехай $K = N - L + 1$ – довжина гусениці. Для кожного s будується $L \times K$ траєкторна матриця ряду $X^{(s)}$, яка переводить початковий часовий ряд у послідовність векторів за формулою (2):

$$X_i^{(s)} = \left(x_i^{(s)}, \dots, x_{i+L-1}^{(s)}\right)^T. \quad (2)$$

Тоді траєкторна матриця багатовимірною рядом буде мати вигляд:

$$X = \left[X_1^{(1)} \dots X_k^{(1)} \dots X_1^{(s)} \dots X_k^{(s)} \right]. \quad (3)$$

На наступному етапі проводиться *сингулярне розкладання (SVD)* траєкторної матриці X .

$$S = XX^T. \quad (4)$$

Для матриці S знаходять власні числа $\lambda_1, \dots, \lambda_L$, ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$). Обчислюються відповідні власні вектори U_1, \dots, U_L , що складають *ортонормовану систему власних векторів матриці S* .

Нехай:

$$d = \text{rank}(X) = \max\{i : \lambda_i > 0\} \quad \text{і} \quad V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, d).$$

Сингулярне розкладання траєкторної матриці X може бути записано як $X = X_1 + \dots + X_d$, де матриці $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ мають ранг 1 і називаються елементарними матрицями. Матриця $X_i^{(s)}$ також може бути записана у вигляді:

$$X_i^{(s)} = \sum_{k=1}^d U_k \cdot U_k^T \cdot X^{(s)}.$$

Набір $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ називається i -тою власною трійкою сингулярного розкладання. Вектори U_i і V_i називаються відповідно лівими і правими сингулярними векторами матриці X , числа $\sqrt{\lambda_i}$ – сингулярні числа, вони складають сингулярний спектр X . Вектори $\sqrt{\lambda_i} V_i = X^T U_i$, за аналогією з аналізом головних векторів, називаються *векторами головних компонент*.

Далі проводиться угруповання власних трійок. Множина всіх індексів $\{1, \dots, d\}$ розбивається на m неперетинних підмножин I_1, \dots, I_m .

Нехай $I = \{i_1, \dots, i_p\}$. Тоді результуюча матриця $X_I^{(s)}$, що відповідає групі I , визначається як $X_I^{(s)} = X_{i_1}^{(s)} + \dots + X_{i_p}^{(s)}$. Результуючі матриці обчислюються за групами $I = I_1, \dots, I_m$ і згруповане SVD розкладання матриці $X^{(s)}$ може бути записано як:

$$X^{(s)} = X_{I_1}^{(s)} + \dots + X_{I_m}^{(s)}. \quad (5)$$

На останньому етапі проводиться діагональне усереднення кожної матриці $X_{I_j}^{(s)}$ по антидіагоналям. Нехай $X^{(s)}$ – деяка $L \times K$ матриця з елементами $x_{ij}^{(s)}$, де $1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K$. Припустимо $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ і $N = L + K - 1$. Нехай $\left(x^{(s)}\right)_{ij}^* = x_{ij}^{(s)}$, якщо $L < K$, та $\left(x^{(s)}\right)_{ij}^* = x_{ji}^{(s)}$ інакше. Отримана *ганкелева матриця* трансформується в новий часовий ряд довжини N на підставі взаємно-однозначної відповідності між ганкелевими матрицями і часовими рядами. Діагональне усереднення, застосоване до кожної результуючої матриці $X_{I_j}^{(s)}$, створює відновлені ряди $\tilde{X}^{(k)} = \left(\tilde{x}_1^{(k)}, \dots, \tilde{x}_N^{(k)}\right)$:

$$\tilde{X}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} x_{m,k-m+2}^* & 0 \leq k < L^* - 1; \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} x_{m,k-m+2}^* & L^* - 1 \leq k < K^*; \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} x_{m,k-m+2}^* & K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (6)$$

Таким чином, початковий ряд $x_1^{(s)}, \dots, x_N^{(s)}$ розкладається у суму m відновлених рядів

$$x_n = \sum_{k=1}^m \tilde{x}_n^{(k)} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Дане розкладання є головним результатом алгоритму SSA для аналізу часового ряду. Це розкладання має сенс, якщо кожна з його компонент може бути інтерпретована або як тренд, або коливання (періодики), або шум.

Цей метод дослідження дозволяє розглянути прогноз. На жаль, дати статистичну оцінку точності неможливо у силу непараметричності методу SSA [9, 10]. Нехай X – траєкторна матриця ряду, відновленого за K^* компонентами. Вибірка, представлена матрицею X , належить до деякої поверхні S . Як базис цієї поверхні можна взяти відібрані власні вектори U_1, \dots, U_{K^*} , що входять у сингулярні трійки, для матриці X .

Запишемо розкладання i -го стовпця матриці X за базисом U_1, \dots, U_{K^*} :

$$X^{(i)} = (U_1, U_2, \dots, U_{K^*}) \cdot (m_1^i, m_2^i, \dots, m_{K^*}^i)^T, \quad (8)$$

де m_i – невідомі параметри розкладання, що підлягають визначенню.

Кількість рівнянь в формулі (8) більше кількості невідомих ($L > r$), тому можна знайти вектор параметрів $(p_1^i, p_2^i, \dots, p_r^i)$ із системи $L-1$ рівнянь.

Додамо до матриці X K^*+1 стовпець і запишемо співвідношення (9) для цього стовпця:

$$(U_1, U_2, \dots, U_{K^*}) \cdot \begin{pmatrix} m_1^{K^*+1} \\ m_2^{K^*+1} \\ \vdots \\ m_{K^*}^{K^*+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{K^*+1} \\ x_{K^*+2} \\ \vdots \\ x_{K^*+L+1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

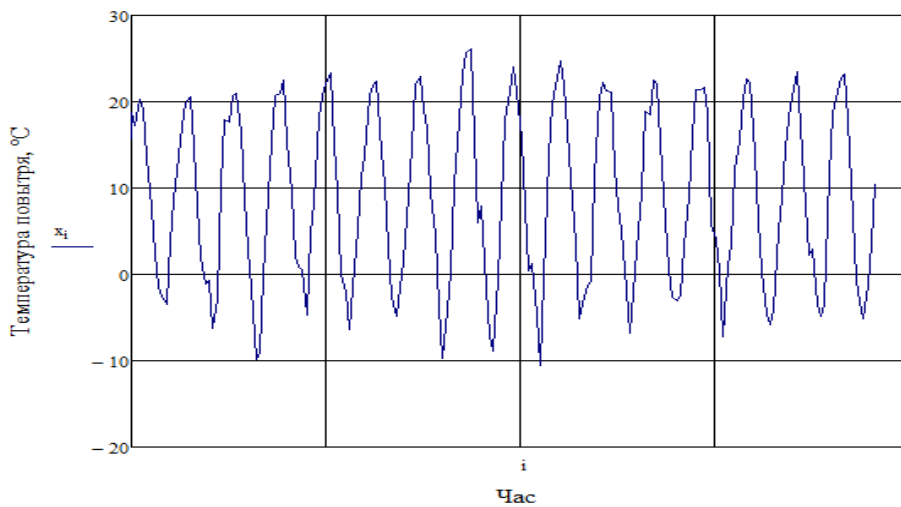


Рис. 1 – Ряд температури повітря.

Останній елемент у стовпці X^{K^*+1} – це **прогноzne значення**, яке підлягає визначенню. Відкинемо в системі (9) останнє рівняння, що містить невідому x_{K^*+L+1} . Розв’язавши отриману усічену систему рівнянь, знайдемо

параметри розкладання $(m_1^{K^*+1}, \dots, m_{K^*}^{K^*+1})^T$:

$$\bar{m} = (U_*^T \cdot U_*)^{-1} U_* \cdot X_*,$$

де U_* – усічена матриця своїх значень. Тепер можна визначити прогнозне значення:

$$x_{K^*+L+1} = (u_L^1, u_L^2, \dots, u_L^{K^*}) \cdot \bar{m}. \quad (10)$$

Для знаходження наступного прогнозного значення алгоритм повторюється з відомим x_{K^*+L+1} .

На жаль, відсутність математичної моделі не дає змоги отримати статистичну оцінку точності прогнозу. Однак доведено [11], що точність забезпечується асимптотично.

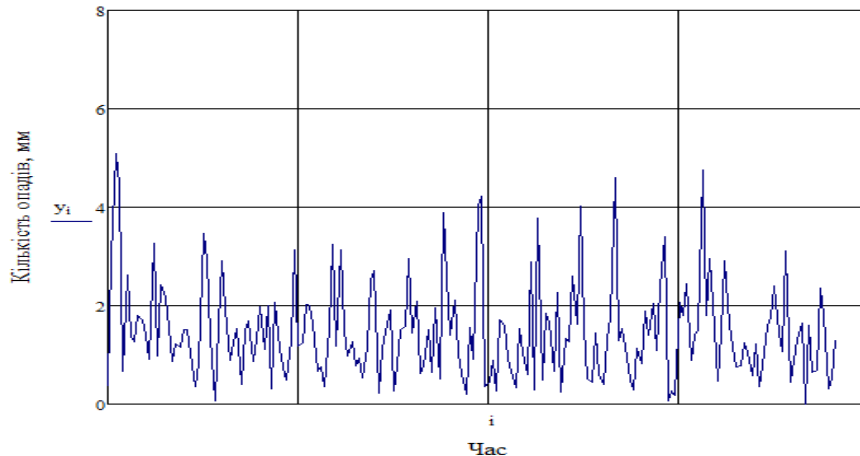


Рис. 2 – Ряд кількості опадів.

Вибір початкових даних для дослідження. В якості вихідних даних було обрано три часових ряди для дослідження кліматичних умов в Харківській області з 1970 по 2018 роки: температура повітря, кількість опадів та атмосферний тиск. Місячні дані температури повітря були взяті з бази даних довідково-інформаційного порталу «Погода та клімат» [12]. Вихідні дані: довжина рядів по 592 значення, на рис. 1 – 3 наведені останні 200 значень.

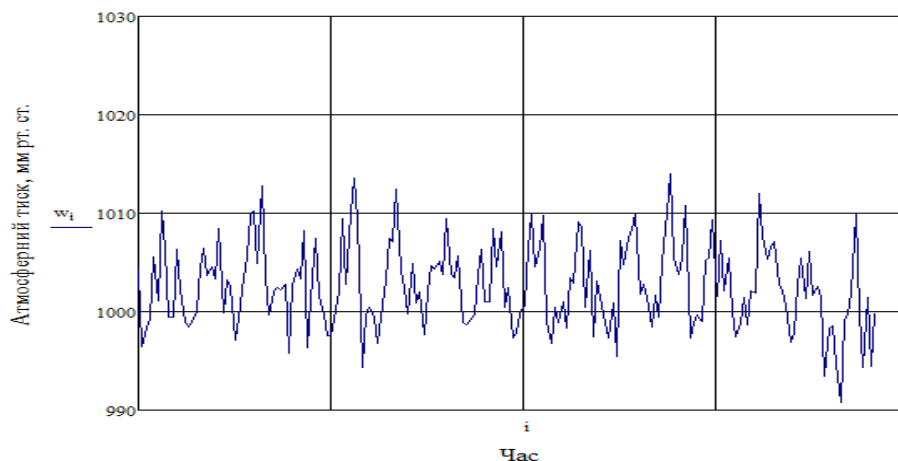


Рис. 3 – Ряд атмосферного тиску.

Структурний аналіз методом «Гусениця-MSSA». Для кращої роздільності обрано довжину вікна L – кратну періоду сезонної компоненти (тобто 12) і таку, що приблизно дорівнює половині довжини ряду: $L = 288$, тоді $K = 305$. Таким чином, при довжині ряду $N = 592$ сформовано траєкторну матрицю 288×305 за формулою (2).

За формулою (4) розраховано матрицю S та для неї знайдено власні числа, відповідні власні і факторні вектори. На рис. 4 зображені логарифми власних чисел сингулярного розкладання траєкторної матриці рядів для багатовимірного MSSA.

З форми графіку власних чисел можна зробити висновок, що перші п'ять власних трійок відповідають ко-

рисному сигналу, а останні – шуму.

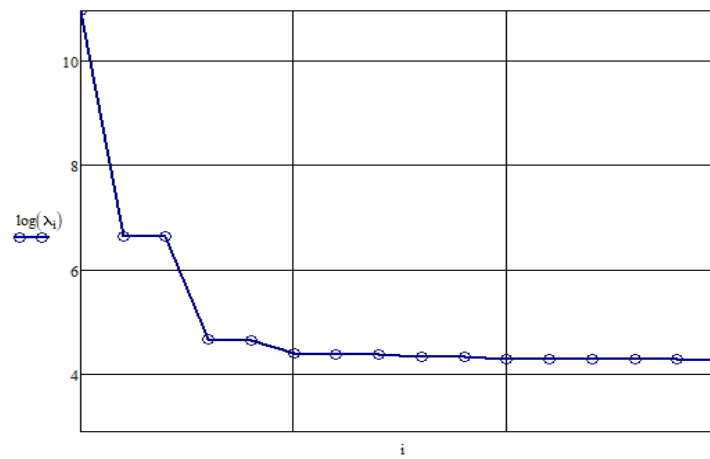


Рис. 4 – Логарифми власних чисел траекторної матриці.

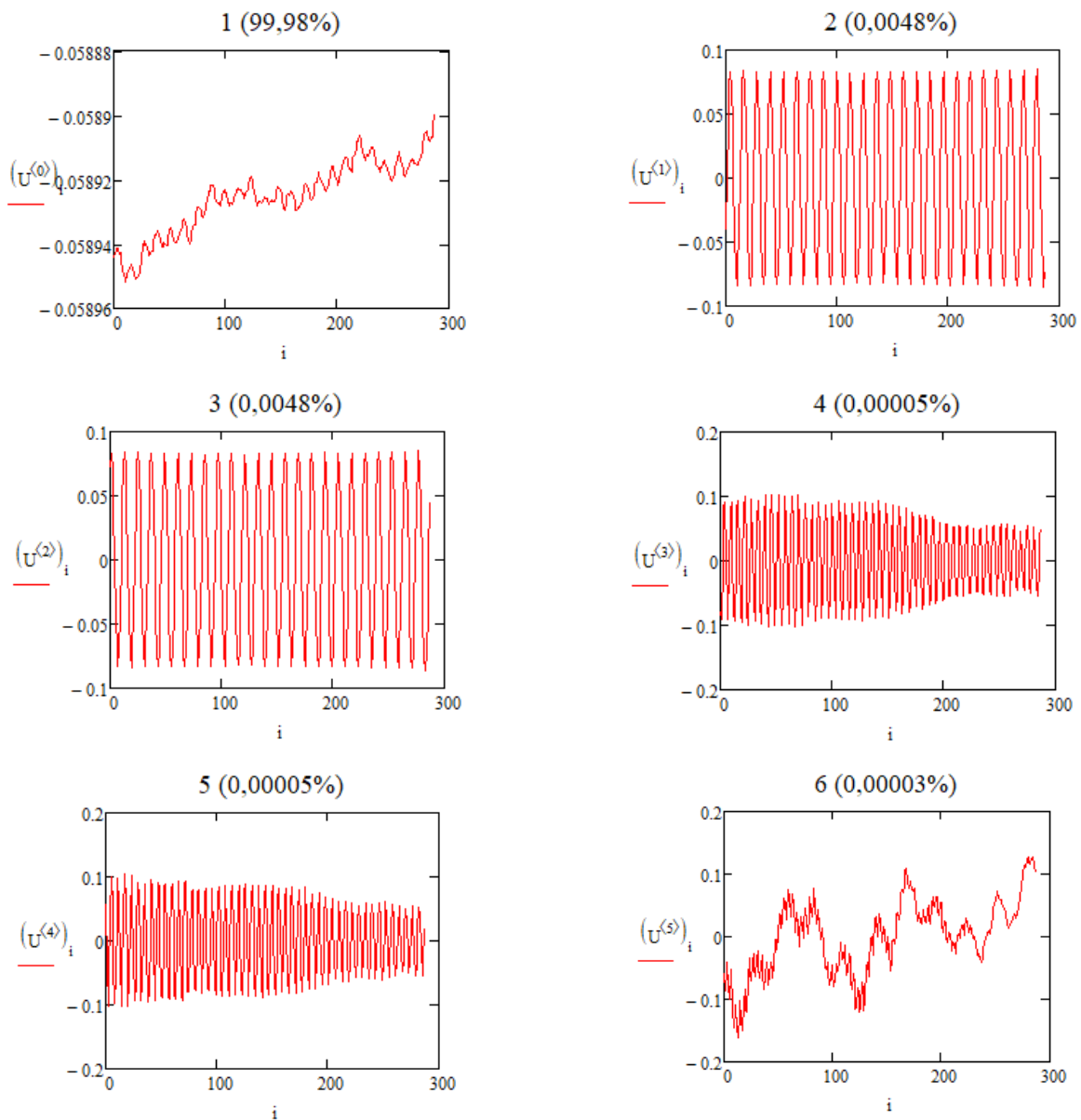


Рис. 5 – Власні вектори сингулярного розкладання (одномірні діаграми).

На рис. 5 наведені перші шість власних векторів сингулярного розкладання траєкторної матриці.

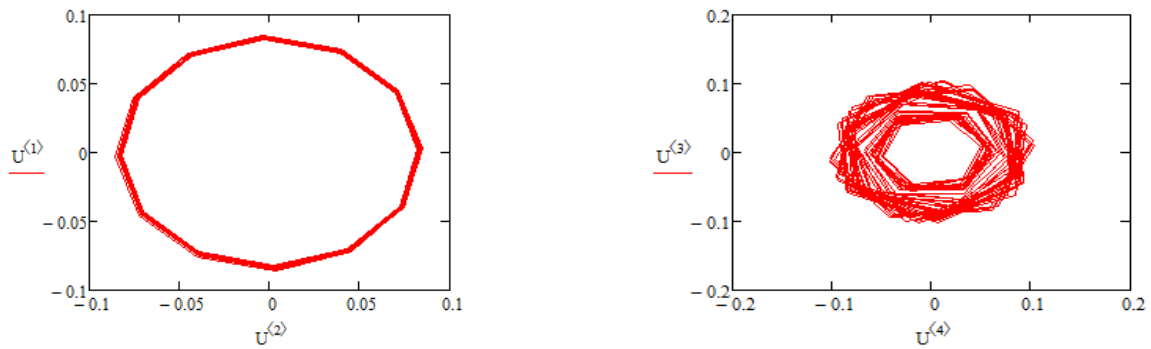


Рис. 6 – Власні вектори сингулярного розкладання (двовимірні діаграми).

Для ідентифікації тренда потрібно на одновимірних діаграмах знайти повільно мінливі власні вектори. В даному випадку саме перший власний вектор має необхідний вид. На рис. 5 видно, що власні трійки з номерами 2 – 5, можливо, відповідають будь-яким гармонікам, тому що мають регулярну періодичну поведінку.

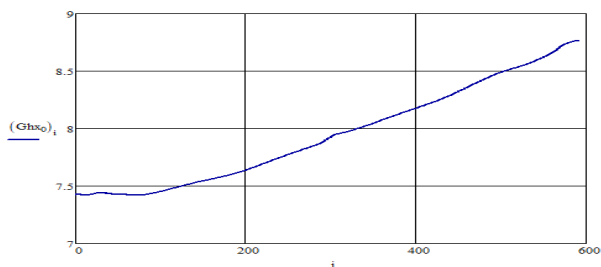


Рис. 7 – Тренд ряду температури повітря, відновлений по першій компоненті.

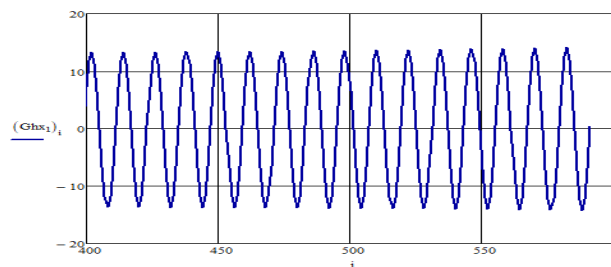


Рис. 8 – Сезонна компонента температури повітря, відновлена по 2 – 5 компонентам.

Для пошуку пар власних трійок, що відносяться до гармонік, були використані двовимірні діаграми. Оскільки при досить великій довжині ряду відповідна пара власних чисел має близькі значення, то достатньо розглядати двовимірні діаграми власних векторів з сусідніх, упорядкованих за власними значеннями, власних трійок.

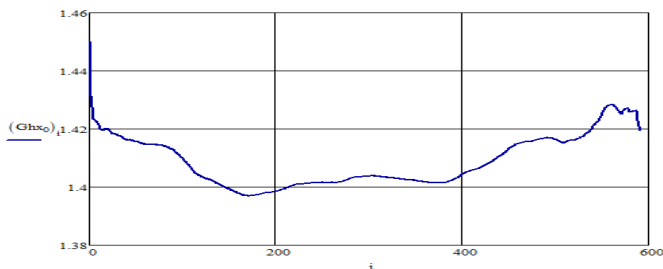


Рис. 9 – Тренд ряду кількості опадів відновлений, по першій компоненті.

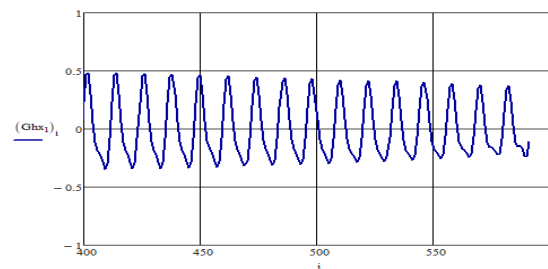


Рис. 10 – Сезонна компонента ряду кількості опадів, відновлена по 2 – 5 компонентам.

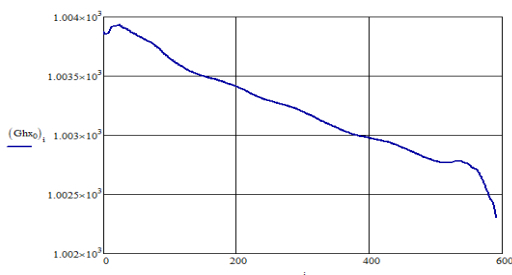


Рис. 11 – Тренд ряду атмосферного тиску, відновлений по першій компоненті.

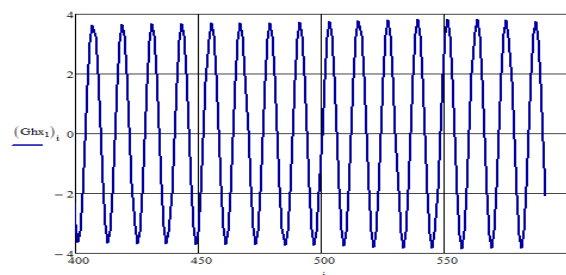


Рис. 12 – Сезонна компонента ряду атмосферного тиску, відновлена по 2 – 5 компонентам.

На рис. 6 наведено регулярні двовимірні зображення, що утворюють двовимірні траєкторії з вершинами, що лежать на кривій, яка має спіралеподібну форму. Це означає, що відповідна пара власних векторів породже-

на модульовану гармонійною компонентою вихідного ряду. Двомірні зображення векторів U_1 та U_2 мають вигляд правильного 12-кутника, а векторів U_3 та U_4 – правильного 6-кутника. Це означає, що вони відповідають компоненті з періодом 12 та 6 відповідно. Після угруповання і діагонального усереднення за формулою (4) отримано по три ряди для кожного з трьох початкових рядів, сума яких відповідає вихідному ряду (рис. 7 – 12).

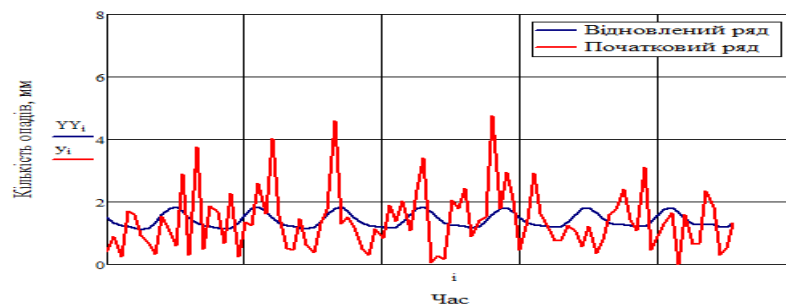


Рис. 13 – Початковий (червоний) та відновлений (синій) ряд кількості опадів (без залишків).

Підсумовування правих трійок, що відповідають тренду та сезонній складовій, дає очищений від шуму ряд. Так на рис. 13 показано в якості прикладу початковий та відновлений (без залишків) ряд кількості опадів.

Прогнозування багатовимірного часового ряду методом «Гусениця-MSSA». Прогнозування багатовимірного часового ряду проводилося методом «Гусениця-MSSA», що описаний вище (формули (8) – (10)). Для прогнозування тривимірного часового ряду розглядали ряд із перших $N = 582$ значень. Останні 10 значень використані в якості екзаменаційної вибірки.

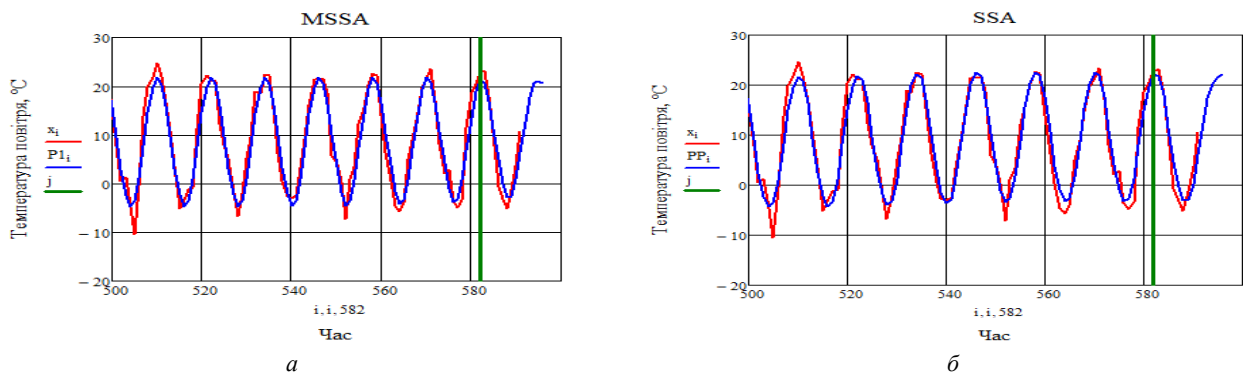


Рис. 14 – Прогноз ряду температури повітря методами: а – MSSA; б – SSA.

На рис. 14 – 15 зображено прогноз рядів на 10 значень з порівнянням методів SSA та MSSA. Зеленою вертикальною лінією позначено момент початку прогнозу. По першим десяти значенням прогнозу можна визначити точність прогнозу.

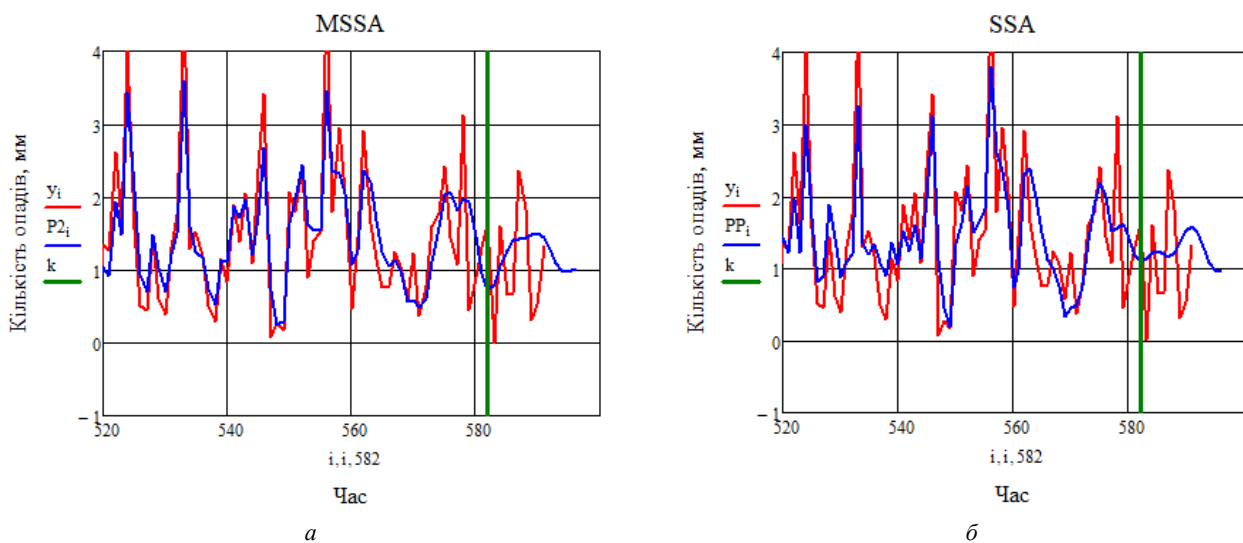


Рис. 15 – Прогноз ряду кількості опадів методами: а – MSSA; б – SSA.

Оцінка якості прогнозу [13, 14]. Якість побудованого прогнозу розраховувалась за допомогою середньої квадратичної помилки за формулою:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - y_t^*)^2}{n}},$$

де y_t – вихідний ряд; y_t^* – відновлений ряд.

Результати розрахунків наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Середня квадратична помилка для методів SSA та MSSA

Ряд	SSA	MSSA
Температура повітря	$\sigma_n = 2,81$	$\sigma_n = 2,91$
Кількість опадів	$\sigma_n = 0,79$	$\sigma_n = 0,78$
Атмосферний тиск	$\sigma_n = 7,04$	$\sigma_n = 8,04$

Висновки. Розглянуто алгоритм сингулярно-структурного аналізу і прогнозу багатовимірною ряду кліматичних характеристик методом MSSA. Розроблена програма, у якій реалізовані кроки методу для виділення компонент сингулярного розкладання, проведено аналіз і прогноз реальних взаємопов'язаних кліматичних часових рядів (багатовимірною ряду). Показано, що середня квадратична помилка методів SSA та MSSA не має суттєвої різниці.

Викладена в статті методика може бути використана для декомпозиції часових рядів спільно з класичними методами аналізу, а також у задачах кластеризації, прогнозування та управління енергетичними системами.

Список літератури

1. Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // *Physica D.* – 1986. – Vol. 20. – Issues 2–3. – P. 217–236.
2. Golyadina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques.* – Chapman&Hall/CRC, 2001. – 320 с. DOI: 10.1201/9780367801687.
3. Golyandina Nina. On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspacebased methods // *Statistics and Its Interface.* – 2010. – №3. – P. 259–279. DOI: 10.4310/SII.2010.v3.n3.a2.
4. Бабак З. П. Статистична обробка даних. – Київ : МІВВІЦ, 2001. – 388 с.
5. Большаков А. А., Карімов Р. М. Методи обробки багатовимірних даних та тимчасових рядів / Навчальний посібник для вузів. – М. : Гаряча лінія – Телеком, 2007. – 522 с.
6. James B. Elsner, Anastasios A. Tsonis. *Singular Spectrum Analysis. A New Tool in Time Series Analysis.* – New-York : Plenum Press, 1996. – 164 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2514-8.
7. Nason G. P., Silverman B. W. *The stationary wavelet transform and some statistical applications.* – N.Y. : Springer, 1995. – 464 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-2544-7_17.
8. Keppenne C., Lall U. Complex singular spectrum analysis and multivariate adaptive regression splines applied to forecasting the Southern Oscillation // *Exp. Long-Lead Forcast. Bull.* – Vol. 1, No. 4 (онлайн-версія). – 1996.
9. Прогнозування часових рядів шляхом SSA. – Режим доступу : <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=>. – Дата звертання : 18 грудня 2023 р.
10. Гардер С. Є., Гомозов Є. П. Аналіз та прогнозування курсової вартості біткойна методом SSA // *Вісник НТУ «ХП».* Серія : Математичне моделювання у техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2018. – №3(1279)2018. – С. 31–36.
11. Єлісєєва О. К., Твердохліб І. С. Застосування методу SSA для аналізу і прогнозування розвитку економічних систем // *Статистика України.* – 2009. – №1. – С. 21–25.
12. Метеопост. Архів метеоданих. Перегляд фактичної погоди на певну дату. – Режим доступу : <https://meteopost.com/weather/archive/>. – Дата звертання : 18 грудня 2023 р.
13. Gioia F., Lauro C. N. Principal component analysis on interval data // *Comput. Stat.* – 2006. – №21(2). – P. 343–363. DOI: 10.1007/s00180-006-0267-6.
14. Golyandina N. E., Nekrutkin V. V., Zhigljavsky A. A. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques.* – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2000. – 305 p.

References (transliterated)

1. Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D.* 1986, vol. 20, issues 2–3, pp. 217–236.
2. Golyadina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. A. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques.* Chapman&Hall/CRC, 2001. 320 p. DOI: 10.1201/9780367801687.
3. Golyandina Nina. On the choice of parameters in Singular Spectrum Analysis and related subspacebased methods. *Statistics and Its Interface.* 2010, no. 3, pp. 259–279. DOI: 10.4310/SII.2010.v3.n3.a2.
4. Babak Z. P. *Statystychna obrobka danykh* [Statistical data processing]. Kyiv, MIVVTS Publ., 2001. 388 p.

5. Bolshakov A. A., Karimov P. M. *Metody obrobky bagatovymirnykh danykh ta tymchasovykh ryadiv* [Methods for processing multidimensional data and time series]. *Navchal'nyy posibnyk dlya vuziv* [Handbook for Universities]. Moscow, Garyacha liniya – Telecom Publ., 2007. 522 p.
6. James B. Elsner, Anastasios A. Tsonis. *Singular Spectrum Analysis. A New Tool in Time Series Analysis*. New-York, Plenum Press, 1996. 164 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2514-8.
7. Nason G. P., Silverman B. W. *The stationary wavelet transform and some statistical applications*. N.Y., Springer, 1995. 464 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-2544-7_17.
8. Keppenne C., Lall U. Complex singular spectrum analysis and multivariate adaptive regression splines applied to forecasting the Southern Oscillation. *Exp. Long-Lead Forcst. Bull.* 1996, vol. 1, no. 4 (on-line version).
9. *Prognozuvannya chasovykh ryadiv shlyakhom SSA* [Forecasting time series by SSA]. Available at : <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=> (accessed 18 Desember 2023).
10. Garder S. YE., Gomozov YE. P. Analiz ta prognozuvannya kursovoyi vartosti [Analysis and prediction of bitcoin rate by SSA method]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2018, no. 3(1279)/2018, pp. 31–36.
11. Yeliseeva O. K., Tverdokhlib I. S. Zastosuvannya metodu SSA dlya analizu i prognozuvannya rozvytku ekonomichnykh system [Applying SSA method for analyzing and forecasting the development of economical systems]. *Statystyka Ukrainy* [Statistics of Ukraine]. 2009, vol. 1, pp. 21–25.
12. *Meteorpost. Arkhiv meteorodanykh. Pereglyad faktychnoyi pogody na pevnu datu* [Weather station. Archive of weather data. Browsing the actual weather for a specific date]. Available at : <https://meteorpost.com/weather/archive/> (accessed 18 Desember 2023).
13. Gioia F., Lauro C. N. Principal component analysis on interval data. *Comput. Stat.* 2006, no. 21(2), pp. 343–363. DOI: 10.1007/s00180-006-0267-6.
14. Golyandina N. E., Nekrutkin V. V., Zhigljavsky A. A. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Boca Raton, Chapman&Hall/CRC, 2000. 305 p.

Hadziuua (received) 17.01.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Гардер Сергій Євгенійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 760-63-96; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9055-3255>; e-mail: sergey.garder@gmail.com.

Harder Serhii Yevheniyovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 760-63-96; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9055-3255>; e-mail: sergey.garder@gmail.com.

Корніль Тетяна Леонівна – кандидатка технічних наук, доцентка, доцентка кафедри комп'ютерної математики та аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (099) 563-75-50; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5241-7970>; e-mail: tatiana.kornil@khi.edu.ua.

Kornil Tetiana Leonivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (099) 563-75-50; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5241-7970>; e-mail: tatiana.kornil@khi.edu.ua.

Решетнікова Світлана Миколаївна – кандидатка технічних наук, доцентка кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 939-07-00; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-1435-8656>; e-mail: reshetnikovasn.cmds@gmail.com.

Reshetnikova Svitlana Mykolaivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 939-07-00; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-1435-8656>; e-mail: reshetnikovasn.cmds@gmail.com.

Сердюк Ірина Василівна – доцентка кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (096) 211-46-10; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1143-9145>; e-mail: irinaserdiuk135@gmail.com.

Serdiuk Iryna Vasylivna – Associate Professor at the Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (096) 211-46-10; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1143-9145>; e-mail: irinaserdiuk135@gmail.com.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

ОДНОЕЛЕКТРОННИЙ НАНОСУМАТОР З МАЖОРИТАРНИМ ВИБОРОМ

Одноелектронні прилади є перспективною технологією цифрової наноелектроніки, в якій біт інформації кодується наявністю або відсутністю електрона. В таких приладах переміщення електрона відбувається за рахунок процесів тунелювання або кулонівської блокади. Теоретична межа швидкодії одноелектронних приладів надзвичайно висока, оскільки тунелювання є безінерційним, а енергія переміщення електрона є надмалою. Як наслідок, теоретична межа швидкодії одноелектронних приладів складає сотні терагерц, а споживана енергія не перевищує одного аттоджоуля. Стаття присвячена впровадженню нового одноелектронного повного однорозрядного наносуматора на п'ятиходовому мажоритарному елементі для комп'ютерного моделювання і проектування високоефективних чотирирозрядних суматорів-віднімачів. В розроблених арифметично-логічних пристроях використана технологія квантових коміркового автоматів. Створений наносуматор використовує лише 231 квантову комірку на кристалі площею $0,49\text{ мкм}^2$. Затримки виконання логічних операцій та щільність енергій перемикання самих комірок суттєво зменшені в порівнянні з існуючими прототипами. Система автоматизованого проектування QCADdesigner версії 2.0.3 синтезує наносхеми повних суматорів та моделює часові діаграми їх працездатності. Енергія синхросигналів та споживання не перевищує $3,8 \times 10^{-22}$ Дж. Результати моделювання одноелектронних наносуматорів підтвердили переваги над схемами інших розробників по усім експлуатаційним параметрам і характеристикам і стимулюють їх подальший розвиток для більшої розрядності і кількості мажоритарних функцій.

Ключові слова: комірково автомат з квантовими точками, мажоритарна логіка, повний суматор, системи автоматизованого проектування, моделювання часових діаграм, енергія синхронізації.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH

SINGLE-ELECTRON NANOSUMMER WITH MAJORITY SELECTION

Single-electron devices are a promising technology of digital nanoelectronics, in which a bit of information is encoded by the presence or absence of an electron. In such devices, electron movement occurs due to tunneling or Coulomb blockade processes. The theoretical speed limit of single-electron devices is extremely high, since tunneling is inertialess, and the energy of electron movement is extremely small. As a result, the theoretical speed limit of single-electron devices is hundreds of terahertz, and the consumed energy does not exceed one attojoule. The article is devoted to the introduction of a new one-electron full one-bit nanoadder on a five-way majority element for computer modeling and design of highly efficient four-bit adder-subtractors. The developed arithmetic logic devices use the technology of quantum cellular automata. The created nanoadder uses only 231 quantum cells on a crystal with an area of $0,49\text{ }\mu\text{m}^2$. Logical operation delays and switching energy density of the cells themselves are significantly reduced compared to existing prototypes. The automated design system QCADdesigner version 2.0.3 synthesizes nanocircuits of full adders and models time diagrams of their performance. The energy of synchronous signals and consumption does not exceed $3,8 \times 10^{-22}$ J. The results of simulation of single-electron nanoadders confirmed their advantages over the schemes of other developers in all operational parameters and characteristics and stimulate their further development for greater bit rate and number of majority functions.

Key words: cellular automata with quantum dots; majoritarian logic, full adder; automated design systems, modeling of time charts, synchronization energy.

Вступ та актуальність досліджень. Комп'ютерні обчислення продовжують відігравати важливу роль в інформаційних та комунікаційних системах, зокрема, в таких, як арифметично-логічні пристрої (АЛП) та кодування. У складі таких пристроїв повні суматори залишаються найбільш розповсюдженими компонентами. Тому подальше впровадження систем комп'ютерного проектування, в першу чергу, визначається ефективністю реалізації повних наносуматорів [1 – 3].

Технологія коміркового автоматів з квантовими точками (КА) є перспективним напрямком одноелектронної технології, яка може продовжити розвиток закону Мура [3]. Ця технологія використовує формування заряду для передачі інформації замість струму. Як наслідок, схемотехніка в технології КА має переваги порівняно зі звичайними технологіями, такими як комплементарні транзистори з структурою метал-окисел-напівпровідник (КМОП), з точки зору малих розмірів, швидкодії та наднизького енергоспоживання [4], [5].

В роботах попередніх років [6 – 15] отримані деякі результати автоматизованого проектування одноелектронних наносуматорів на базі КА. У статті [6] представлено повний суматор КА, який потребує 102 комірок КА та площі $0,1\text{ мкм}^2$. Вчені [7] розробили повний суматор КА, який складається з 52 комірок КА і площею $0,038\text{ мкм}^2$. Автори [8] розробили повний суматор КА, який вимагає 59 комірок КА і площу $0,043\text{ мкм}^2$. У статті [9] запропоновано повний суматор КА, який потребує 71 комірки та площі $0,06\text{ мкм}^2$. Автори [10] представили повний суматор КА, для якого потрібно 38 комірок КА і площа $0,02\text{ мкм}^2$. Вчені [11] сконструювали повний суматор КА, який складається з 41 комірок КА і площею $0,04\text{ мкм}^2$. У статті [12] представлено повний суматор КА, який вимагає 63 комірок КА і площі $0,05\text{ мкм}^2$. Вчені [13] розробили повний суматор КА, який потребує 29 клітин КА і площу $0,02\text{ мкм}^2$. Проте ці схеми повного суматора мають незначні переваги, але суттєву складність і велику площу кристала повного суматора в технології КА, що дозволяє зменшити нова методика, запропонована в цій статті.

Передумови розвитку квантових автоматів. Технологія коміркових автоматів із квантовими точками є новою технологією, яку можна використовувати для розробки *цифрових схем* на основі закону Мура. Ця нова технологія використовує формування заряду замість струму для передачі інформації. Основним елементом у цій технології є квадрат із чотирма крапками, який містить два вільних електрони. На рис. 1 показана базова комірка КА, два способи її розміщення в просторі та поляризація електронів [6].

Логічні мажоритарний елемент та інвертор. Розташувавши комірки послідовно одну за одною і змусивши їх взаємодіяти одна з одною, можна забезпечити потік інформації по такому провіднику. Теоретично існують два способи побудови провідника в залежності від орієнтації комірок під кутом 45° або 90° (рис. 1), але технологічно важко формувати *нанокмірки* з різними орієнтаціями. За допомогою КА можна створювати різні елементи для виконання *логічних* і *арифметичних операцій*. Основними логічними наноконпонентами в *теорії клітинних автоматів* є *мажоритарний елемент (МЕ)* та *інвертор* (рис. 2).

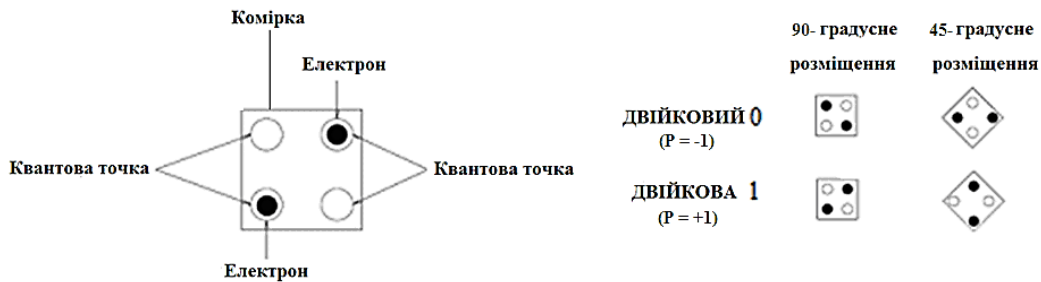


Рис. 1 – Базова комірка КА, два способи її розміщення в просторі та поляризація електронів.

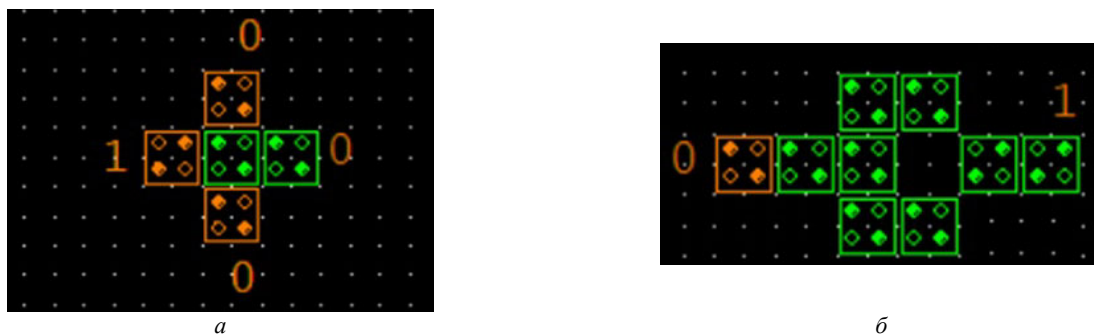


Рис. 2 – Тривходовий мажоритарний елемент – а та інвертор – б на основі клітинних автоматів.

Поляризація вихідної комірки МЕ збігається з поляризаціями більшості вхідних комірок.

Логічний вираз для мажоритарної функції (вибору більшості) має вигляд:

$$\text{maj}(x_2, x_1, x_0) = x_2x_1 \vee x_2x_0 \vee x_1x_0,$$

де x_2, x_1 і x_0 – вхідні аргументи. Фіксація поляризації одного з входів МЕ дозволяє отримати функції логічних елементів *булевої алгебри* І чи АБО:

$$\text{maj}(x_2, x_1, 0) = x_2 \cdot x_1, \quad \text{maj}(x_2, x_1, 1) = x_2 \vee x_1.$$

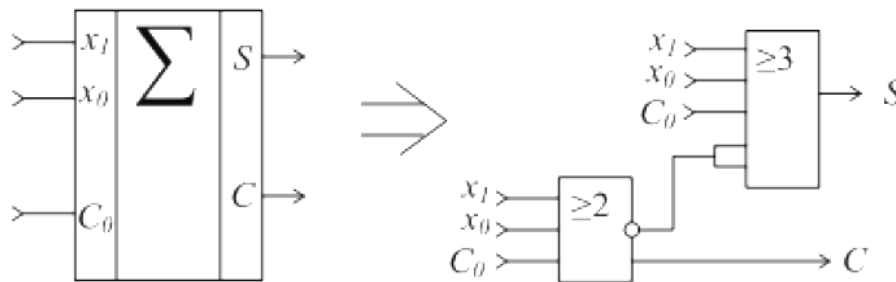


Рис. 3 – Схема однорозрядного суматора на основі п’ятивходового МЕ.

Такі комірки можуть бути створені в процесі промислового виготовлення, що усуває необхідність підтримувати постійний струм через схему.

Новий наносуматор з п'ятиходовим МЕ. При використанні п'ятиходових МЕ існує унікальна можливість синтезувати найбільш ефективну і найпростішу наносхему повного однорозрядного суматора [7], структурна схема якого приведена на рис. 3.

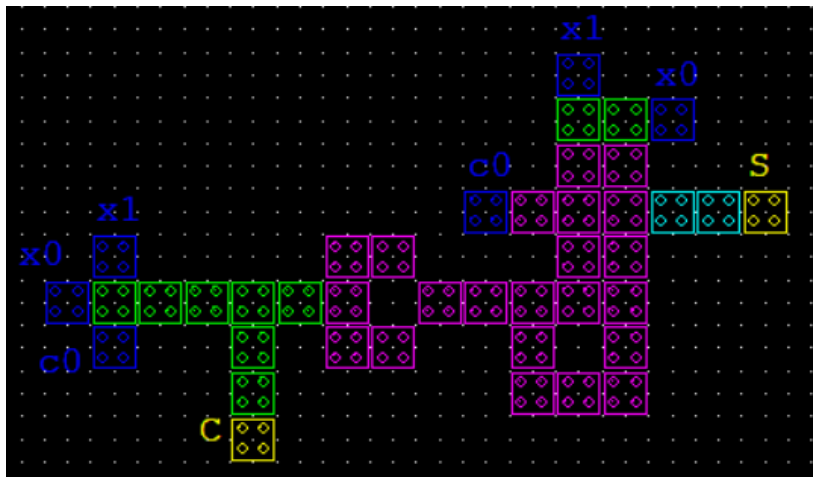
Результати комп'ютерного проектування та моделювання часових діаграм за допомогою системи автоматизованого проектування QCADesigner [14] наведено на рис. 4.

Результати реалізації розробленої схеми для однорозрядного повного суматора КА підтверджують коректність цієї схеми.

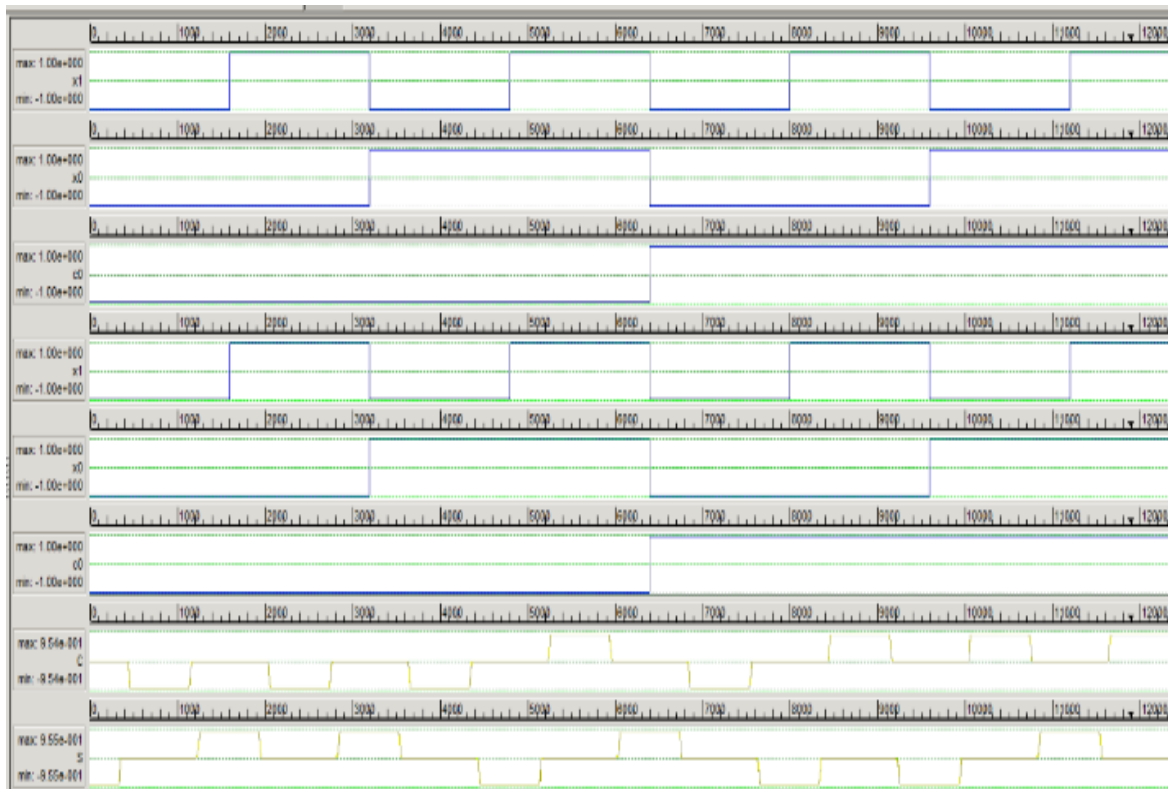
Функції додавання S і переносу C на цих діаграмах визначаються правилами мажоритарного арифметичного додавання:

$$S = \text{maj}(x_1, x_0, C_0, \bar{C}) = \bar{C}(x_1 \vee x_0 \vee C_0) \vee x_1 x_0 C_0,$$

$$C = \text{maj}(x_1, x_0, C_0) = x_1 \vee x_0 \vee x_1 C_0 \vee x_0 C_0.$$



а



б

Рис. 4 – Проект повного однорозрядного суматора на п'ятиходовому МЕ – а та моделювання його часових діаграм – б.

Розроблена наносхема повного суматора базується на 41 КА, а її загальний розмір становить (288×162) нм.

У цій схемі використовуються три зони синхронізації: світло-блакитний колір вказує на синхронзону 2, фіолетовий вказує на синхронзону 1, а зелений вказує на синхронзону 0.

Табл. 1 підсумовує результати реалізації розробленої схеми для однорозрядного повного суматора КА порівняно з іншими однорозрядними схемами повного суматора КА в [8] – [16].

Таблиця 1 – Порівняння параметрів існуючих та запропонованої наносхем однорозрядного суматора

Література	Кількість КА	Площа, мкм ²	Кількість синхронзон
[8]	102	0.1	8
[9]	71	0.06	5
[10]	52	0.038	4
[11]	59	0.042	4
[12]	38	0.02	3
[13]	41	0.04	2
[14]	63	0.05	3
[15]	29	0.02	2
[16]	46	0.04	4
Пропозиція статті	41	0.07	4

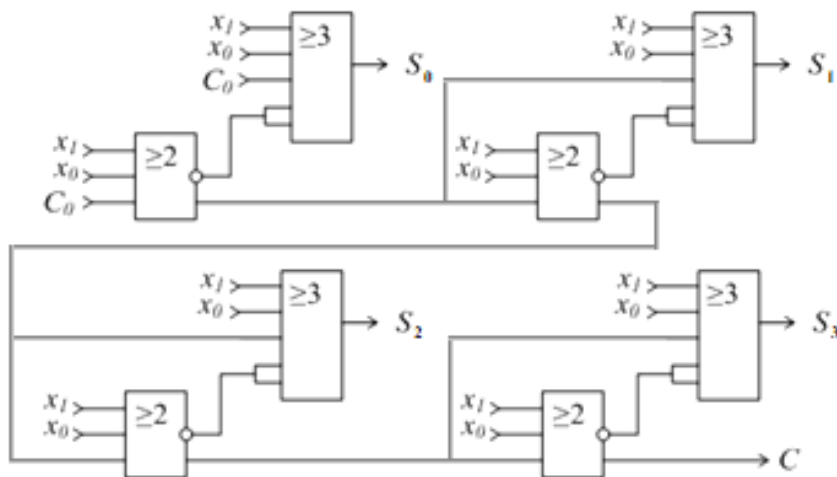


Рис. 5 – Схема чотирирозрядного суматора на основі повних однорозрядних суматорів.

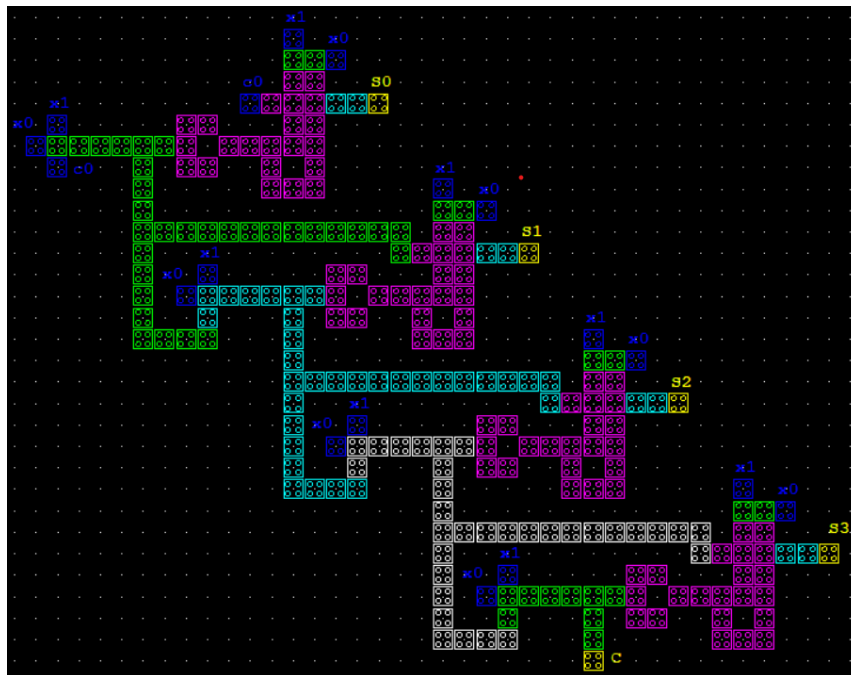


Рис. 7 – Автоматизоване проектування повного чотирирозрядного наносуматора.

Чотирирозрядний повний наносуматор. На основі одnorозрядного повного суматора побудовано чотирирозрядний суматор, структурна схема якого представлена на рис. 5.

На рис. 7 – 8 показані результати комп'ютерного проектування чотирирозрядного наносуматора на базі запропонованих одnorозрядних наносхем.

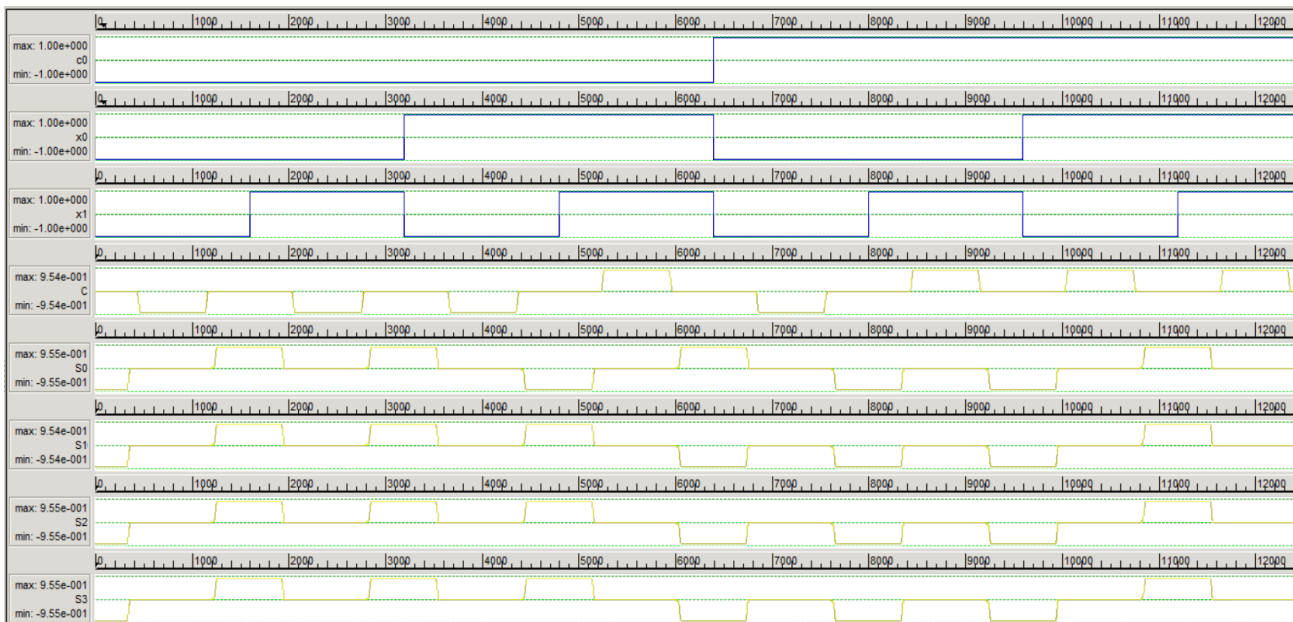


Рис. 8 – Моделювання часових діаграм повного чотирирозрядного наносуматора.

Часові діаграми чотирирозрядного суматора (рис. 8) підтверджують повну працездатність наносхеми. Наприклад, для двох доданків $x_1 = 0101$ та $x_0 = 0110$ сума складає $S = 1011$, а перенос до старшого розряду $C = 0100$.

Табл. 2 підсумовує результати проектування розробленої схеми для чотирирозрядного КА суматора порівняно з іншими наносхемами в [8] – [12], [14] – [17].

Таблиця 2 – Порівняльні параметри розробленого та існуючих чотирирозрядних наносуматорів

Література	Кількість КА	Площа, мкм ²	Кількість синхронів
[8]	558	0.85	20
[11]	442	1	8
[9]	260	0.28	10
[10]	262	0.208	28
[12]	237	0.24	6
[14]	295	0.3	6
[15]	269	0.37	14
[17]	339	0.2542	7
[16]	187	0.2	16
Пропозиція статті	231	0.49	15

Висновки. Повні наносуматори є важливими складовими комп'ютерних арифметико-логічних пристроїв. Автоматизоване проектування таких схем, як видно з інформаційного огляду, на сьогоднішній день є складною, проте актуальною проблемою. У цій статті за допомогою сучасної системи автоматизованого проектування QCA Designer розроблені одно- та чотирирозрядні одноелектронні наносуматори з мінімально можливими розмірами і підвищеною швидкодією в порівнянні з існуючими сучасними аналогами. Вперше запроваджені склад-

ні п'ятиходові мажоритарні елементи з мінімальними розмірами, що дозволило суттєво скоротити ресурси проектування високорозрядних наносуматорів. За результатами моделювання встановлено, що чотирирозрядний суматор з мажоритарною логікою функціонування є найбільш працездатним і перспективним базовим елементом комп'ютерної наноелектроніки.

Список літератури

1. Balasubramanian P. A latency optimized biased implementation style weak-indication self-timed full adder // *Facta Universitatis. Series: Electronics and Energetics*. – 2015. – vol. 28. – pp. 657 – 671. DOI: 10.2298/FUEE1504657B.
2. Rezaei A., Keshavarzi P. High-performance scalable architecture for modular multiplication using a new digit-serial computation // *Micro. J.* – 2016. – vol. 55. – pp. 169 – 178. DOI: 10.1016/j.mejo.2016.07.012.
3. Rezaei A., Keshavarzi P. High-throughput modular multiplication and exponentiation algorithm using multibit-scan-multibit-shift technique // *IEEE Trans. VLSI syst.* – 2015. – vol. 23. – pp. 1710 – 1719. DOI: 10.1109/TVLSI.2014.2355854.
4. Balali M., Rezaei A., Balali H., Rabiei F., Emadi S. A novel design of 5-input majority gate in quantum-dot cellular automata technology // In *Proceedings of the IEEE Symp. Comput. Appl. Indust. Electr. (ISCAIE 2017)*. – 2017. – pp. 13 – 16. DOI: 10.1109/ISCAIE.2017.8074941.
5. Rashidi H., Rezaei A., Soltani S. High-performance multiplexer circuit for quantum-dot cellular automata // *J. Comput. Electr.* – 2016. – vol. 15. – pp. 968 – 98. DOI: 10.1007/s10825-016-0832-3.
6. All-Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection. – Режим доступу : Resource access mode: https://www.ewdtest.com/asu/wp-content/uploads/2015/05/asu_166_2014_new1.pdf (date of application 10.01.2023 p) [in Ukrainian]. – Дата звернення : 2 січня 2024 р.
7. Pakulov N. N. The majority principle of constructing reliable components and devices of a digital computer. – Moscow : Sov. radio, 1974. [in Russian]. – 157 p.
8. Hänninen I., Takala J. Binary adders on quantum-dot cellular automata // *J. Sign. Process. Syst.* – 2010. – vol. 58. – pp. 87 – 103. DOI: 10.1007/s11265-008-0284-5.
9. Ramesh B., Rani M. A. Design of binary to BCD code converter using area optimized quantum-dot cellular automata full Adder // *Int. J. Eng.* – 2015. – vol. 9. – pp. 49 – 64.
10. Abedi D., Jaberipur G., Sangsefidi M. Coplanar full adder in quantum-dot cellular automata via clock-zone-based crossover // *IEEE Trans. Nanotech.* – 2015. – vol. 14. – pp. 497 – 504. DOI: 10.1109/TNANO.2015.2409117.
11. Hashemi S., Navia K. A Novel Robust QCA Full-adder // *Proc. Mater. Sci.* – 2015. – vol. 11. – pp. 376 – 380. DOI: 10.1016/j.mspro.2015.11.133.
12. Mohammadi M., Mohammadi M., Gorgin S. An efficient design of full adder in quantum-dot cellular automata (QCA) technology // *Microelectr. J.* – 2016. – vol. 50. – pp. 35 – 43. DOI: 10.1016/j.mejo.2016.02.004.
13. Ahmad F., Bhat G. M., Khademolhosseini H., Azimi S., Angizi S., Navi K. Towards single layer quantum-dot cellular automata adders based on explicit interaction of cells // *J. Comput. Sci.* – 2016. – vol. 16. – pp. 8 – 15. DOI: 10.1016/j.jocs.2016.02.005.
14. Labrado C., Thapliyal H. Design of adder and subtractor circuits in majority logic-based field-coupled QCA nano computing // *Electron. Lett.* – 2016. – vol. 52. – pp. 464 – 466. DOI: 10.1049/el.2015.3834.
15. Balali M., Rezaei A., Balali H., Rabiei F., Emadi S. Towards coplanar quantum-dot cellular automata adders based on efficient three-input XOR gate // *Result. Phys.* – 2017. – vol. 7. – pp. 1389 – 1395. DOI: 10.1016/j.rinp.2017.04.005.
16. Design of novel efficient full adder circuit for quantum-dot cellular automata technology. – Режим доступу : Resource access mode: <http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/0353-3670/2018/0353-36701802279M.pdf> (date of application 05.01.2023 p) – Дата звернення : 2 січня 2024 р.
17. Pudi V., Sridharan K. Low complexity design of ripple carry and Brent-Kung adders in QCA // *IEEE Trans. Nanotech.* – 2012. – vol. 11. – pp. 105 – 119. DOI: 10.1109/TNANO.2011.2158006.

References (transliterated)

1. Balasubramanian P. A latency optimized biased implementation style weak-indication self-timed full adder. *Facta Universitatis. Series: Electronics and Energetics*. 2015, vol. 28, pp. 657–671. DOI: 10.2298/FUEE1504657B.
2. Rezaei A., Keshavarzi P. High-performance scalable architecture for modular multiplication using a new digit-serial computation. *Micro. J.* 2016, vol. 55, pp. 169 – 178. DOI: 10.1016/j.mejo.2016.07.012.
3. Rezaei A., Keshavarzi P. High-throughput modular multiplication and exponentiation algorithm using multibit-scan-multibit-shift technique. *IEEE Trans. VLSI syst.* 2015, vol. 23, pp. 1710–1719. DOI: 10.1109/TVLSI.2014.2355854.
4. Balali M., Rezaei A., Balali H., Rabiei F., Emadi S. A novel design of 5-input majority gate in quantum-dot cellular automata technology. In *Proceedings of the IEEE Symp. Comput. Appl. Indust. Electr. (ISCAIE 2017)*. 2017. pp. 13–16. DOI: 10.1109/ISCAIE.2017.8074941.
5. Rashidi H., Rezaei A., Soltani S. High-performance multiplexer circuit for quantum-dot cellular automata. *J. Comput. Electr.* 2016, vol. 15, pp. 968–98. DOI: 10.1007/s10825-016-0832-3.
6. All-Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection. Available at : Resource access mode: https://www.ewdtest.com/asu/wp-content/uploads/2015/05/asu_166_2014_new1.pdf (date of application 10.01.2023 p) [in Ukrainian]. (accessed 2 January 2024).
7. Pakulov N. N. *The majority principle of constructing reliable components and devices of a digital computer*. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974. [in Russian]. 157 p.
8. Hänninen I., Takala J. Binary adders on quantum-dot cellular automata. *J. Sign. Process. Syst.* 2010, vol. 58, pp. 87–103. DOI: 10.1007/s11265-008-0284-5.
9. Ramesh B., Rani M. A. Design of binary to BCD code converter using area optimized quantum-dot cellular automata full Adder. *Int. J. Eng.* 2015, vol. 9, pp. 49–64.
10. Abedi D., Jaberipur G., Sangsefidi M. Coplanar full adder in quantum-dot cellular automata via clock-zone-based crossover. *IEEE Trans. Nanotech.* 2015, vol. 14, pp. 497–504. DOI: 10.1109/TNANO.2015.2409117.
11. Hashemi S., Navia K. A Novel Robust QCA Full-adder. *Proc. Mater. Sci.* 2015, vol. 11, pp. 376–380. DOI: 10.1016/j.mspro.2015.11.133.

12. Mohammadi M., Mohammadi M., Gorgin S. An efficient design of full adder in quantum-dot cellular automata (QCA) technology. *Microelectr. J.* 2016, vol. 50, pp. 35–43. DOI: 10.1016/j.mejo.2016.02.004.
13. Ahmad F., Bhat G. M., Khademolhosseini H., Azimi S., Angizi S., Navi K. Towards single layer quantum-dot cellular automata adders based on explicit interaction of cells. *J. Comput. Sci.* 2016, vol. 16, pp. 8–15. DOI: 10.1016/j.jocs.2016.02.005.
14. Labrado C., Thapliyal H. Design of adder and subtractor circuits in majority logic-based field-coupled QCA nano computing. *Electron. Lett.* 2016, vol. 52, pp. 464–466. DOI: 10.1049/el.2015.3834.
15. Balali M., Rezai A., Balali H., Rabiei F., Emadid S. Towards coplanar quantum-dot cellular automata adders based on efficient three-input XOR gate. *Result. Phys.* 2017, vol. 7, pp. 1389–1395. DOI: 10.1016/j.rinp.2017.04.005.
16. *Design of novel efficient full adder circuit for quantum-dot cellular automata technology.* Available at : Resource access mode: <http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/0353-3670/2018/0353-36701802279M.pdf> (date of application 05.01.2023 p) (accessed 2 January 2024).
17. Pudi V., Sridharan K. Low complexity design of ripple carry and Brent-Kung adders in QCA. *IEEE Trans. Nanotech.* 2012, vol. 11, pp. 105–119. DOI: 10.1109/TNANO.2011.2158006.

Надійшла (received) 11.01.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, С. С. ІВАНОВ, К. Г. КОВАЛЬЧУК

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Сучасний етап розвитку багатьох технічних напрямків характеризується швидким впровадженням нових цифрових технологій, алгоритмів, методів. Розвиток інформаційних технологій сприяв виникненню нових підходів до отримання, обробки та аналізу інформації. Поява нових підходів до отримання вхідної інформації вимагає подальшої розробки нових алгоритмів та створення нових чисельних методів для вирішення необхідних задач. Виникає проблема побудови нових або вдосконалення відомих математичних моделей, а також їх ефективної комп'ютерної реалізації. Відповідно до типу моделювання в процесі підготовки інформації широко використовуються, зокрема, методи теорії ймовірностей і математичної статистики, одно та багатовимірної теорії інтерполяції та апроксимації. Поряд із задачами багатовимірної інтерполяції при побудові математичних моделей різноманітних процесів широко використовується теорія нових інформаційних операторів. До нових інформаційних операторів відносяться оператори, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних на лініях, площинах, тощо. Автором цієї теорії є Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор фізико-математичних наук, професор О. М. Литвин. Теорія нових інформаційних операторів ефективно зарекомендувала себе в багатьох галузях науки, зокрема, при математичному моделюванні соціально-економічних та природничих процесів. Прикладом ефективного застосування теорії нових інформаційних операторів, де в залежності від типу завдання інформації вибирається алгоритм, є теорія обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних.

Ключові слова: нові цифрові технології, алгоритми, методи, чисельне інтегрування функцій багатьох змінних, кубатурна формула, інтерлінація функцій.

O. P. NECHUIVITER, S. S. IVANOV, K. G. KOVALCHUK

NEW INFORMATION OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF THREE VARIABLES

Modern development of many technical areas is characterized by the rapid introduction of new digital technologies, algorithms, and methods which contribute to the emergence of latest approaches to obtaining, processing and analyzing information. It leads to further creation of new numerical methods for solving corresponding issues. Thereupon, there arises a problem of building new or improving known mathematical models, as well as their effective computer implementation. Depending on the modeling type the methods of probability theory and mathematical statistics, one- and multidimensional interpolation and approximation theory are widely used in the process of preparing information. Along with the tasks of multidimensional interpolation, operators that restore intermediate values of quantities from an existing set of known data are widely used in the construction of mathematical models of various processes, in particular, when the values of a function of many variables on lines, planes, etc. are known. An example of the effective use of the above operators is the theory of calculating integrals of highly oscillating functions of many variables since the algorithm is chosen depending on the type of information about the functions. The author of this theory is the Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor O.M. Lytvyn. The purpose of this article is to review the results of applying the theory of new information operators to the calculation of integrals of fast oscillating functions of many variables, as well as to present a new cubature formula for the approximate calculation of double integrals of fast oscillating functions of general type. The cubature formula is effective in terms of using the input information to achieve a given accuracy.

Key words: new digital technologies, algorithms, methods, numerical integration of functions of many variables, cubature formula, interlineation of functions.

Вступ. На сучасному етапі розвитку різних технічних напрямків відбувається стрімке впровадження нових цифрових технологій, алгоритмів і методів. Інформаційні технології зробили можливим використання нових підходів до збору, обробки та аналізу даних. Впровадження нових методів отримання вхідної інформації вимагає розробки нових алгоритмів та створення чисельних методів для розв'язання актуальних задач. Це призводить до необхідності створення нових або вдосконалення існуючих математичних моделей та їх ефективної реалізації у комп'ютерних системах. Математичне моделювання відіграє ключову роль у багатьох наукових і технічних галузях, забезпечуючи інструменти для аналізу та прогнозування складних систем і процесів. Серед різноманітних методів моделювання особливе місце займають методи багатовимірного інтерполювання, які дозволяють точно оцінювати значення функцій на основі обмеженого набору даних. Це особливо важливо в умовах, коли прямі вимірювання або експерименти є занадто дорогими чи складними. Багатовимірна теорія інтерполяції та апроксимації дозволяє створювати моделі, які адекватно відображають реальні процеси. Досягнення в теорії нових інформаційних операторів відкривають додаткові можливості для удосконалення математичних моделей, підвищуючи їхню точність та ефективність. Теорія нових інформаційних операторів була розроблена лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки, доктором фізико-математичних наук, професором О. М. Литвином. Ці оператори призначені для відновлення проміжних значень функцій багатьох змінних на основі відомих значень, розташованих на різних геометричних об'єктах, таких як лінії та площини. Застосування теорії нових інформаційних операторів в багатьох наукових областях дало можливість отримати значні наукові результати, зокрема в математичному моделюванні соціально-економічних і природничих процесів. Теорія також демонструє свою ефективність в наближеному обчисленні інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних, де алгоритм обчислення підбирається відповідно до специфіки задачі, від типу за-

вдання інформації про функцію та забезпечує високу точність і ефективність розрахунків.

Статтю присвячено пам'яті видатного українського вченого в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів Олега Миколайовичу Литвину. **Метою** даної статті є огляд результатів застосування теорії нових інформаційних операторів до обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних, а також представлення нової *кубатурної формули* наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Кубатурна формула є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності.

Аналіз останніх досліджень. Перші спроби використати *оператори інтерлінації* до наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних були аносовані в роботах [1 – 2], а в [3] отримані перші оцінки похибки наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних. Більш вагомі дослідження щодо обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій були зроблені в роботах [4 – 12]. В цих статтях були представлені дослідження кубатурних формул для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є на різних класах функцій. Кубатурні формули використовували в своїй побудові оператори інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. В монографіях [13, 14] вперше було викладено вищезазначені дослідження з точки зору нових інформаційних операторів, а саме була зроблена класифікація кубатурних формул за типом завдання інформації про *неосцилюючий множник підінтегральної функції*. Співавторами монографій стали директор Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, генеральний директор Кібернетичного центру НАНУ, академік НАНУ Іван Васильович Сергієнко та академік НАНУ Валерій Костянтинівич Задірака. В 2010 році, завдяки гранту від Комісії міжнародного математичного союзу, результати досліджень в даному напрямку були представлені у Великобританії в місті Кембридж на конференції «*ESF-EMS-ERCOM Conference on Highly Oscillatory Problems From Theory to Applications*».

Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних (в тому числі на прикладі $3D$ – коефіцієнтів Фур'є) з використанням нових інформаційних операторів детально представлено в роботах [15 – 22]. У цих дослідженнях представлено кубатурні формули з використанням *операторів інтерфлетації*, *інтерлінації* та *інтерполяції* з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. Такі оператори в своїй побудові використовували сліди функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значення функції в точках. Дослідження про якість побудованих кубатурних формул детально викладено в монографії [23]. В 2016 році, дякуючи Грантовому комітету 7-го Європейського конгресу математиків, результати досліджень в даному напрямку були представлені у Німеччині в місті Берлін на 7-му Європейському конгресі математиків. Отриманий грант «*Open Arms Grant of IMU*» також дозволив представити застосування нових інформаційних операторів до наближеного обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є в доповіді на Міжнародному математичному конгресі в Бразилії в місті Ріо-де-Жанейро.

Застосування теорії нових інформаційних операторів до наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду представлено в статтях [24 – 31]. При дослідженні питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів були використані результати робіт [24] та [25], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. У 2021 році було отримано грант Комісії міжнародного математичного союзу для участі з онлайн доповіддю на Восьмому Європейському математичному конгресі в Словенії в місті Порторож, де вже були представлені результати щодо побудови кубатурних формул для наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду.

Питанню чисельного інтегрування подвійних та потрійних інтегралів з використанням нових інформаційних операторів приділено значно менше уваги. До таких досліджень можна віднести роботи [32, 33], де викладено алгоритм побудови кубатурних формул з використанням слідів функції на лініях (в тому числі на оптимально вибраних лініях), а також [34], де розглядалося питання наближеного обчислення потрійного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних площинах. Логічним продовженням досліджень в цьому напрямку є наближене обчислення потрійного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних лініях [35].

На основі нових інформаційних операторів будуються ефективні (з точки зору кількості використаних значень функції двох чи трьох змінних) оператори інтерполяції. Використання таких операторів інтерполяції для наближеного обчислення $2D$ – та $3D$ – коефіцієнтів Фур'є досліджено в монографіях [13, 14, 23]. Однак до на-

ближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду такі алгоритми не були використанні. Таке дослідження є актуальним, в результаті будуть отримані ефективні кубатурні формули.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (1)$$

дослідити кубатурну формулу з використанням операторів кусково-сталой сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах кусково-сталой інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримати оцінку похибки наближення кубатурною формулою.

Кубатурна формула обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду. Введемо наступні позначення:

$$h1_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X1_k, \\ 0, & x \notin X1_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell_1}, \quad H1_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y1_j, \\ 0, & y \notin Y1_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell_1};$$

$$X1_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y1_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}];$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad k, j = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1/\ell_1;$$

$$\tilde{h}1_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{X}1_{\tilde{k}}, \\ 0, & x \notin \tilde{X}1_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell_1^2}, \quad \tilde{H}1_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \tilde{Y}1_{\tilde{j}}, \\ 0, & y \notin \tilde{Y}1_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2};$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}];$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_1/2, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_1/2, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \frac{1}{\ell_1^2};$$

$$h2_{0p}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X2_p, \\ 0, & x \notin X2_p, \end{cases} \quad p = \overline{1, \ell_2}, \quad H2_{0s}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y2_s, \\ 0, & y \notin Y2_s, \end{cases} \quad s = \overline{1, \ell_2};$$

$$X2_p = [x_{p-1/2}, x_{p+1/2}], \quad Y2_s = [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}];$$

$$x_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad y_s = s\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad p, s = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1/\ell_2;$$

$$\tilde{h}2_{0\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{X}2_{\tilde{p}}, \\ 0, & x \notin \tilde{X}2_{\tilde{p}}, \end{cases} \quad \tilde{p} = \overline{1, \ell_2^2}, \quad \tilde{H}2_{0\tilde{s}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \tilde{Y}2_{\tilde{s}}, \\ 0, & y \notin \tilde{Y}2_{\tilde{s}}, \end{cases} \quad \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2};$$

$$\tilde{X}2_{\tilde{p}} = [\tilde{x}_{\tilde{p}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{p}+1/2}], \quad \tilde{Y}2_{\tilde{s}} = [\tilde{y}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{s}+1/2}];$$

$$\tilde{x}_{\tilde{p}} = \tilde{p}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \quad \tilde{y}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \quad \tilde{p}, \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2}, \quad \tilde{\Delta}_2 = 1/\ell_2^2.$$

Розглянемо оператори

$$\mathcal{J}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{0k}(x) H1_{0j}(y);$$

$$\tilde{\mathcal{J}}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1^2} f(x_k, \tilde{y}_j) h1_{0k}(x) \tilde{H}1_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{k=1}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_k, y_j) \tilde{h}1_{0\tilde{k}}(x) H1_{0j}(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{0k}(x) H1_{0j}(y);$$

$$Og(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x) + \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y) - \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y);$$

$$\tilde{O}g(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}}) h_{20p}(x) \tilde{H}_{20\tilde{s}}(y) + \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_j) \tilde{h}_{20\tilde{p}}(x) H_{20s}(y) -$$

$$- \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h_{10k}(x), \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H_{10j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}_{10\tilde{k}}(x), \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell_1^2} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}_{10\tilde{j}}(y);$$

$$O_1 g(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x), \quad O_2 g(x, y) = \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y);$$

$$\tilde{O}_1 g(x, y) = \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_j) \tilde{h}_{20\tilde{p}}(x), \quad \tilde{O}_2 g(x, y) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \tilde{H}_{20\tilde{s}}(y),$$

тоді для операторів-інтерліантів $Jf(x, y)$, $Og(x, y)$ та операторів-інтерполантів $\tilde{J}f(x, y)$, $\tilde{O}g(x, y)$, справедливі наступні тотожності:

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f, \quad \tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f;$$

$$Og = (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g, \quad \tilde{O}g = (O_1 \tilde{O}_2 + \tilde{O}_1 O_2 - O_1 O_2) g.$$

Наступна кубатурна формула

$$\tilde{\Phi}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy.$$

Розглянемо $H^{2,r}(M, \tilde{M})$, $r \geq 0$ – клас дійсних функцій $r \geq 0$, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що

$$|f^{(r,0)}(x, y)| \leq M, \quad |f^{(0,r)}(x, y)| \leq M, \quad r \neq 0, \quad |f^{(r,r)}(x, y)| \leq \tilde{M}, \quad r \geq 0.$$

Теорема. Нехай $f(x, y)$, $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M} + 8M}{16\ell_1^2} + \tilde{M} \min \left(2; \frac{\omega(\tilde{M} + 8M)}{16\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega))$:

$$\begin{aligned}
\rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| + \\
&+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O g(x, y)} dx dy \right| + \\
&+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega O g(x, y)} \right| dx dy + \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega O g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} \right| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + O g(x, y))} \right| dx dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega O g(x, y) - \omega \tilde{O}g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O g(x, y) + \tilde{O}g(x, y))} \right| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy + \\
&+ 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega O g(x, y) - \omega \tilde{O}g(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f \right| dx dy + \\
&\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1, \frac{\omega |g(x, y) - O g(x, y)|}{2} \right) dx dy + \\
&\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1, \frac{\omega |(O_1 + O_2 - O_1 O_2) g - (O_1 \tilde{O}_2 + O_2 \tilde{O}_1 - O_1 O_2) g|}{2} \right) dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 - J_1 \tilde{J}_2) f + (J_2 - J_2 \tilde{J}_1) f \right| dx dy + \\
&\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1, \frac{\omega |g(x, y) - O g(x, y)|}{2} \right) dx dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega(O_1 - O_1 \widetilde{O}_2)g + (O_2 - O_2 \widetilde{O}_1)g}{2} \right) dx dy \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy + \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_j)| dy + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{k=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |f(x, y_j) - f(\tilde{x}_k, y_j)| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy + \\
& \quad + 2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \int_{x_p}^x \int_{y_s}^y g^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) dx dy + \\
& \quad + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} |g(x_p, y) - g(x_p, \tilde{y}_s)| dy + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\omega}{2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} |g(x, y_s) - g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_s)| dx \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dy \right) \leq \\
& \leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy + \\
& \quad + M \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_j| dy + M \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{k=1}^{\ell_1} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy + \\
& \quad + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} |x - x_p| |y - y_s| dx dy \right) + \\
& \quad + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} |y - \tilde{y}_s| dy + \frac{\omega}{2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_{\tilde{p}}| dx \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dy \right) \leq \\
& \leq \widetilde{M} \ell_1^2 \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} + 2M \ell_1 \Delta_1 \frac{\Delta_1^2}{4} \ell_1^2 + \\
& \quad + 2\widetilde{M} \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{\Delta_2^2}{4} \right) + 2\widetilde{M} \min \left((\ell_2^2 \Delta_2^2)^2, \frac{2M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{4} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{M}}{16\ell_1^2} + \frac{M}{2\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(2; \frac{\tilde{M}\omega}{16\ell_2^2}\right) + \tilde{M} \min\left(2; \frac{M\omega}{2\ell_2^2}\right) = \frac{\tilde{M} + 8M}{16\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(2; \frac{\omega(\tilde{M} + 8M)}{16\ell_2^2}\right).$$

Теорема доведена.

В табл. 1 наведено результати обчислень $I^2 = I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi}^2(\omega)$ для функцій

$$f(x, y) = \sin(x + y), \quad g(x, y) = \cos(x + y)$$

при різних ℓ та ω .

Таблиця 1 – Обчислення $I^2 = I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi}^2(\omega)$

ℓ	$\omega = 2\pi$	$\text{Re}\Phi^2,$ $\text{Im}\Phi^2$	$\text{Re}I^2,$ $\text{Im}I^2$	$ \text{Re}I^2 - \text{Re}\Phi^2 ,$ $ \text{Im}I^2 - \text{Im}\Phi^2 $	$\varepsilon(\omega)$
2	2π	0.3540375916459062 - 0.33304613008975337	0.3558050633093754 -0.3289739994021025	0.00176747166346924 0.00407213068765083	1.0241979338
4	2π	0.3555893919184368 - 0.3291350269882384	0.3558050633093754 -0.3289739994021025	0.00021567139093864 0.00016102758613584	0.2560494835
6	4π	0.20660758891345235 -0.22871334346415143	0.2067321725608352 -0.22893074545300268	0.000124583647382 0.00021740198885124	0.2119745408
10	4π	0.20663494102710486 -0.22900022093506067	0.2067321725608352 -0.22893074545300268	0.000097231533730 0.000069475482058	0.07631083471
10	7π	-0.1532312838429917 0.15179659763083148	-0.15356616365737322 0.151662234496899	0.00033487981438152 0.00013436313393248	0.12932521074
4	10π	0.15139020344623452 -0.12580278614219909	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.01088406140044776 0.00000382176545952	1.13962241728
6	10π	0.14071225700304252 -0.1254919790979713	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.0002061149572557 0.0003146288096873	0.50649885212
10	10π	0.14083352577051267 -0.1251188448477139	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.00032738372472592 0.0006877630599447	0.18233958676
15	10π	0.14046349223555732 -0.12556607218226937	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.00004264981022944 0.00024053572538924	0.0810398163

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядається кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу з використанням оператора кусково-сталої інтерполяції, побудованого на основі кусково-сталого оператора інтерлінації. В подальшому планується провести більш детальне тестування запропонованої кубатурної формули для виявлення її потенційної спроможності на різних класах функцій. Наступним кроком в дослідженні є питання побудови та дослідження кубатурної формули з використанням оператора лінійної інтерполяції, побудованого на основі лінійного оператора інтерлінації.

Висновки. Статтю присвячено пам'яті видатного українського вченого в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, доктора фізико-математичних наук, професора Олега Миколайовича Литвина. Представлений огляд результатів демонструє ефективність застосування теорії нових інформаційних операторів, створеної Олегом Миколайовичем Литвином, в математичному моделюванні систем та процесів, зокрема для задач цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі використання нових інформаційних операторів в чисельному інтегруванні швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних.

В статті запропоновано нову кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Кубатурна формула є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності. На класі диференційованих функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюючої функції загального виду. Кубатурна формула в своїй побудові використовує оператор інтерполіант, побудований на основі оператора інтерлінанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Кубатурна формула має високу точність наближення. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичні результати.

Список літератури

1. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Застосування інтерлінації функцій та швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є // Матеріали XVIII науково-методичної конференції. – Харків, УІПА, 1995. – С. 229 – 231.
2. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Застосування швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних // Тез. доп. на Всеукр. науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях». – Львів, 1995. – С. 5 – 7.
3. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 13 – 17.
5. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
6. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління : зб. наук. пр. – Х., 2010. – № 926. – С. 153 – 160.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації // Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18 – 21 травня 2010 р., Харків. – Х., 2010. – Ч. 2. – С. 211 – 213.
8. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – pp. 90 – 96.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ -коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
10. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ -коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2011. – № 125. – С. 51 – 55.
11. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2011. – № 16. – С. 207 – 214.
12. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
13. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
14. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
15. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflation // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 44. – Is. 3. – 2012. – pp. 45 – 56.
16. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ -коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетатії // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
17. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
18. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления $3D$ -интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
19. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ -коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетатії // Математичні машини та системи. – 2012. – Том 1. – № 4. – С. 28 – 40.
20. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
21. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
22. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
23. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
24. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення $2D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вып. 13. – С. 124 – 131.
25. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетатії // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.
26. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Оптимальне інтегрування двовимірних швидкоосцилюючих функцій загального вигляду // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2017. – Вып. 15. – С. 139 – 144.
27. Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Mezhyuev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 365 – 373. DOI: 10.1007/978-3-319-97885-7_36.
28. Mezhyuev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // U.P.B. Sci. Bull., Series A. – 2018. – Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.

29. Nechuiwiter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
30. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 68 – 72. DOI: 10.15407/fimmit2021.33.068.
31. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2023. – Вип. 37. – С. 37 – 41. DOI: 10.15407/10.15407/fimmit2023.37.037.
32. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
33. Nechuiwiter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies // Information Technologies and Learning Tools. – 2021. – no. 82 (2). – pp. 282 – 296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
34. Nechuiwiter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 1031 (1). – 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
35. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1. – С. 82 – 91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Zastosuvannya interlinatsiyi funktsiy ta shvydkogo peretvorenniya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e [Application of function interpolation and fast Fourier transform to calculate Fourier coefficients]. *Materialy XVIII naukovometodychnoyi konferentsiyi* [Materials of the XVIII scientific-methodological conference]. Kharkiv, UIPA Publ., 1995, pp. 229–231.
2. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Zastosuvannya shvydkogo peretvorenniya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiyi dvokh zminnykh [Application of the fast Fourier transform to calculate the Fourier coefficients of the functions of two variables]. *Tez. dop. na Vseukr. naukoviy konferentsiyi «Rozrobka ta zastosuvannya matematychnykh metodiv v nauково-tekhnichnykh doslidzhennyakh»* [Theses of the All-Ukrainian scientific conference "Development and application of mathematical methods in scientific and technical research"]. Lviv, 1995, pp. 5–7.
3. Lytvyn O. M., Nechuywiter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystanniam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
4. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Optymal'na za porjadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoost-sylyuuchykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [Optimal cubature formula for calculating double integrals from rapidly oscillating functions and spline interlineation]. *Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2008, no. 2, pp. 13–17.
5. Lytvyn O. M., Nechuywiter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'ye z vykorystanniam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2D Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
6. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Kubaturna formula dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e z vykorystanniam interlinatsiyi funktsiy [The cubature formula for calculating 2D – Fourier coefficients using the interlineation of functions]. *Visnyk KhNU Im. V. N. Karazina. Ser. : Matematychno modelyuvannya. Informatsiyi tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya : zb. nauk. pr.* [Bulletin of the Karazin Charkiv National University. Series : Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems : Collection of scientific papers]. Kharkiv., 2010, no. 926, pp. 153–160.
7. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Optymal'nyy za porjadkom tochnosti metod obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e za dopomogoyu interlinatsiyi [The optimal method of calculating 2D – Fourier coefficients using interlineation]. *Komp'yuterne modelyuvannya v naukotmykh tekhnologiyakh : pr. nauk.-tehn. konf. z mizhnarodnoyu uchastyu, 18–21 travnya 2010r.* [Computer modeling in science-intensive technologies: Practical Scientific and Technical Conference with international participation, May 18–21]. Kharkiv., 2010, no. 2, pp. 211–213.
8. Lytvyn O. N., Nechuywiter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk. 2010, pp. 90–96.
9. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. 2D – koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D – Fourier coefficients on the class of differential functions and spline-interlineation]. *Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
10. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. 2D – koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta operatory kuskovo-staloyi splayn-interlinatsiyi [2D Fourier coefficients on a class of differentiable functions and piecewise-constant spline interlineation operators]. *Naukovi zapysky NaUKMA. Komp'yuterni nauky* [Scientific notes of the National University of Kyiv Mohyla Academy. Computer sciences]. 2011, no. 125, pp. 51–55.
11. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Splayn-interlinatsiya ta optymal'ni po tochnosti kubaturni formuly obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e odnogo klasy funktsiy [Spline interlineation and optimally accurate cubature formulas for computing 2D Fourier coefficients for a class of functions]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya : Matematychno modelyuvannya. Informatsiyi tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2011, no. 16, pp. 207–214.
12. Lytvyn O. M., Nechuiwiter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsyuyuchykh funktsiy z vykorystanniam la-granzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from rapidly varying functions using Lagrangian polynomial interlineation]. *Shtuchniy Intel'ekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
13. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiwiter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoost-silyuuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 1. Algorytmy : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 1. Algorithms: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 447 p.
14. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiwiter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoost-silyuuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 2. Zastosuvannya : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 2. Applications: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 348 p.

15. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflotation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012, vol. 44, is. 3, pp. 45–56.
16. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D – Fourier coefficients on a class of differential functions using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematika. Pryrodovnavstvo. Tekhnichny nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
17. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiy tryekh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of the Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differential functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
18. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya 3D – integralov ob bystroostsiliruyushchikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of the accuracy of cubature formulas for the approximate calculation of 3D integrals of fast-oscillating functions with the use of interflotation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.
19. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi Geldera z vykorystanniam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Hölder class using piecewise constant spline interpolation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, vol. 1, no. 4, pp. 28–40.
20. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Priblizhenoe vychislenie ostsiliruyushchikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate calculation of oscillating integrals of three variables using interflotation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.
21. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsiliruyushchikh funktsiy trekh peremennykh [On the errors of the numerical integration of the fast-oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series : mathematics and physics]. 2013, vol. 32, no. 19 (162), pp. 101–107.
22. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflotation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
23. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'ni algoritmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosovanniam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
24. Nechuyviter O. P., Keita K. V. Obchyslennya 2D integraliv vid trigonometrichnih funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2D integrals from trigonometric functions using piecewise constant interlineation]. *Matematychna ta komp'yuterne modelyuvannya. Seriya : Fiziko-matematychni nauky : zb. nauk. prats.* [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences : coll. of science works]. Kam'yanets'-Podil's'kiy, Kam'yanets'-Podil's'kiy natsional'nyy universytet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016, no. 13, pp. 124 – 131.
25. Nechuyviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interfletatsiyi [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkiv's'kyi politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychna modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.
26. Nechuyviter O. P., Keita K. V. Optymal'ne integruvannya dvovymirnykh shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vyglyadu [Optimal integration of two-dimensional rapidly oscillating generic functions]. *Matematychna ta kompiuterne modelyuvannya* [Mathematical and computer modeling]. 2017, vol. 15, pp. 139–144.
27. Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Mezhuhev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case). *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information*. Kyiv, Ukraine, 2018, pp. 365–373. DOI: 10.1007/978-3-319-97885-7_36.
28. Mezhuhev V., Lytvyn O. M., Nechuyviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.
29. Nechuyviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020, vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
30. Nechuyviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Optymal'ne integruvannya shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Optimal integration of rapidly oscillating functions of the general form]. *Fiziko-matematychna modelyuvannya ta informatsiyi tekhnologiyi* [Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies]. 2021, no. 33, pp. 68–72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.
31. Nechuyviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Approximate computation of double integrals of rapidly oscillating generic functions]. *Fiziko-matematychna modelyuvannya ta informatsiyi tekhnologiyi* [Physical and mathematical modeling and information technologies]. 2023, vol. 37, pp. 37–41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.37.037.
32. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using Lagrangian polynomial interlineation]. *Tavrivs'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
33. Nechuyviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021, vol. 82, no 2 (2021), pp. 282–296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
34. Nechuyviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1031 (1), 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
35. Nechuyviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Novi informatsiyi operatory v zadachakh chysel'nogo integruvannya funktsiyi trokh zminnykh [New information operators in problems of numerical integration of functions of three variables]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychna modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 82–91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

Надійшла (received) 27.01.2024

Нечуйвітер Олесь Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В.Н Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Іванов Сергій Сергійович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В.Н Каразіна, м. Харків; тел.: (099) 560-42-21; e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Ivanov Serhii Serhiyovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (099) 560-42-21; e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Ковальчук Кирило Геннадійович – студент фізичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (066) 127-04-52; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.

Kovalchuk Kyrylo Gennadiyovych – student at the Faculty of Physics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv; tel.: (066) 127-04-52; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.

ВИПРАВЛЕННЯ

Рисунки 1, 2 сторінки 74 Вісника Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 2(5) ' 2023 з виправленнями:

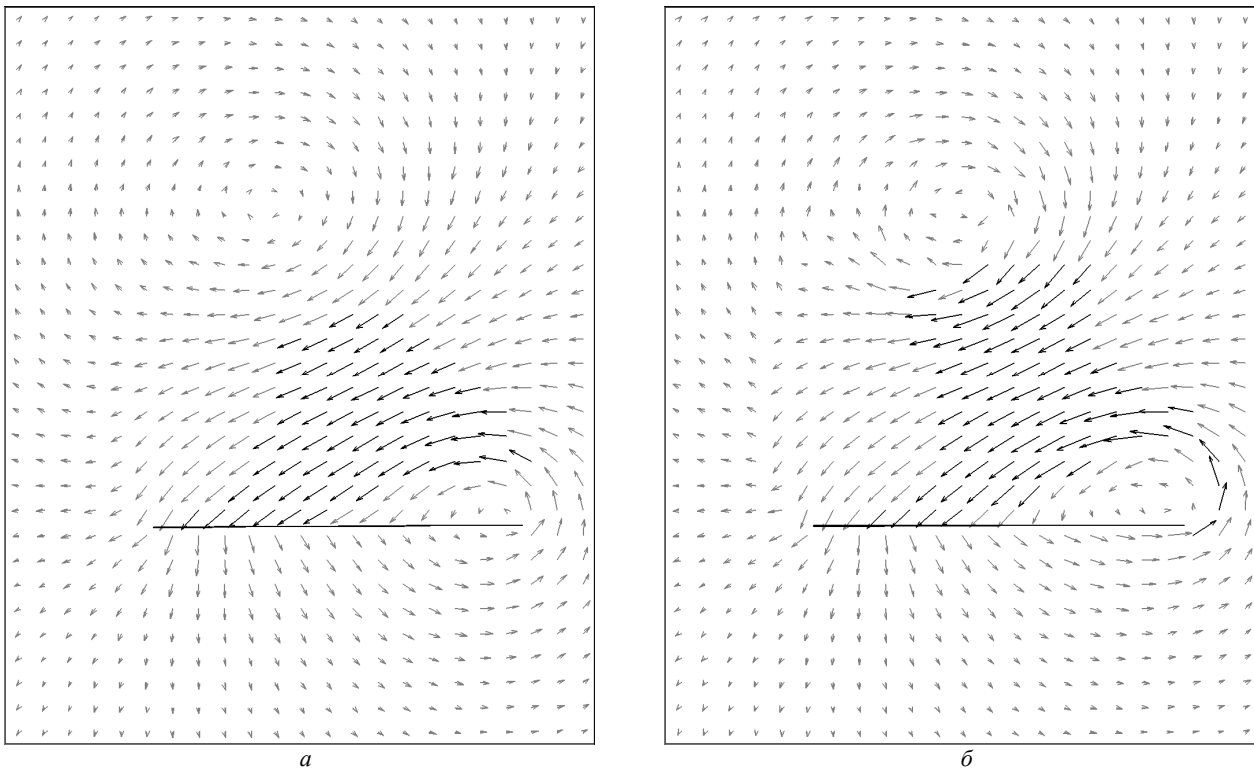


Рис. 1 – Поля швидкостей при обертанні пластини у безмежному в'язкому середовищі: *a* – ламінарний режим при $Re = 100$; *б* – турбулентний режим при $Re = 10^6$.

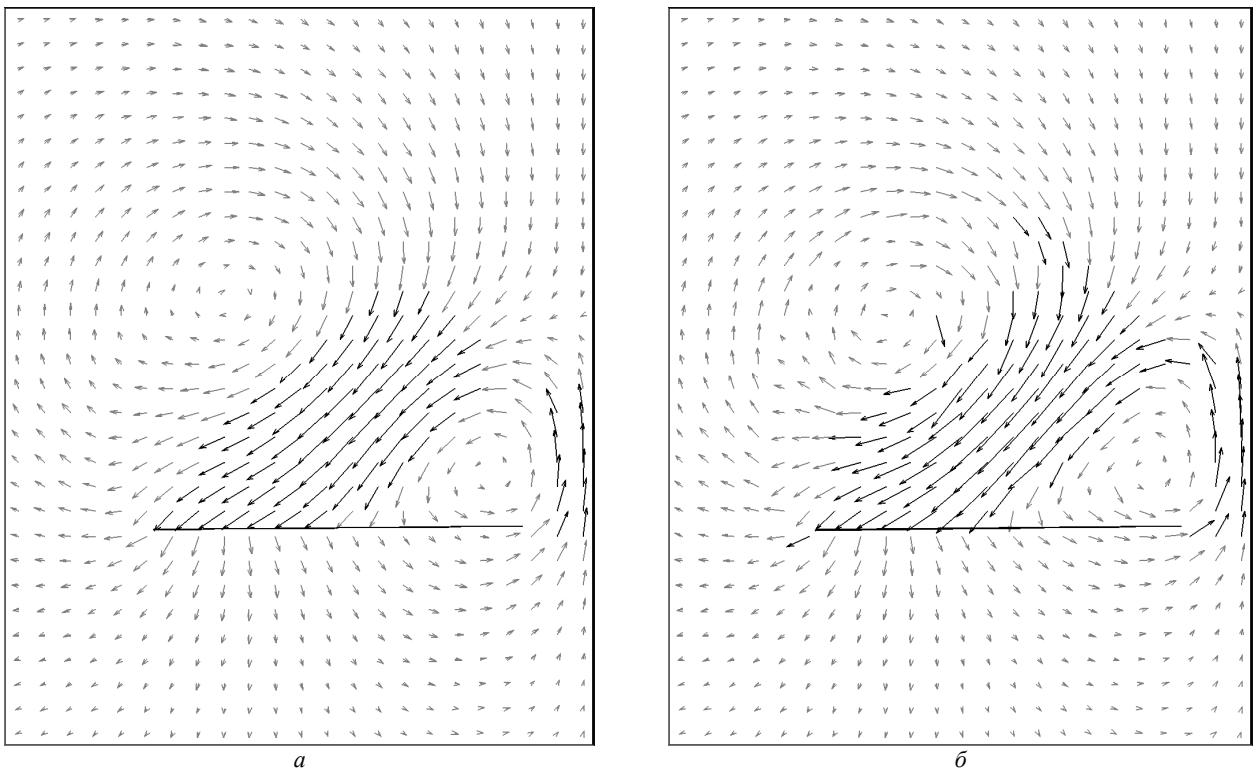


Рис. 2 – Поля швидкостей при обертанні пластини на відстані $h = 0.2$ від стінки: *a* – ламінарний режим при $Re = 100$; *б* – турбулентний режим при $Re = 10^6$.

ЗМІСТ

<i>Андрєєв Ю. М., Ковальов Д. Д.</i> Аналітичний опис та алгоритм розрахунків механіки конструкцій з балками Бернуллі – Ейлера у ССКА КіДиМ.....	3
<i>Барановський С. В.</i> Проблеми управління імунною відповіддю в умовах конкурентної адсорбції, дифузійних збурень та температурної реакції організму.....	12
<i>Ванін В. А., Кошовий Г. І., Карпенко В. І., Ванін Б. В.</i> Розсіювання Е-поляризованої електромагнітної хвилі однією провідною стрічкою з імпедансом.....	19
<i>Воропай О. В., Поваляєв С. І., Шарапата А. С.</i> Ідентифікація довільного рухомого осесиметричного навантаження, що діє на циліндричну оболонку.....	28
<i>Гардер С. Є., Корніль Т. Л., Решетнікова С. М., Сердюк І. В.</i> Сингулярний спектральний аналіз температурного багатовимірного часового ряду.....	37
<i>Мельник О. С., Козаревич В. О.</i> Одноелектронний наносуматор з мажоритарним вибором.....	46
<i>Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г.</i> Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних.....	53
<i>Шеховцов О. В.</i> Виправлення.....	64

CONTENTS

<i>Andriev Yu. M., Kovalov D. D.</i> Analytical description and algorithm of calculations of mechanics of structures with Bernoulli – Euler beams using SCAS KiDyM.....	3
<i>Baranovsky S. V.</i> Problems of managing the immune response under conditions of competitive adsorption, diffusion perturbations and temperature response of the organism.....	12
<i>Vanin V. A., Koshovy G. I., Karpenko V. I., Vanin B. V.</i> Scattering of the E-polarized electromagnetic wave by solitide conductive strip with impedance.....	19
<i>Voropay O. V., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S.</i> Identification of an arbitrary moving axisymmetric load acting on a cylindrical shell.....	28
<i>Harder S. Ye., Kornil T. L., Reshetnikova S. M., Serdiuk I. V.</i> Singular spectral analysis of temperature multidimensional time series.....	37
<i>Melnyk O. S., Kozarevych V. O.</i> Single-electron nanosummer with majority selection.....	46
<i>Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. G.</i> New information operators in problems of numerical integration of functions of three variables.....	53
<i>Shekhovtsov A. V.</i> Corrections.....	64

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

- зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory** (New Jersey, USA);
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний обсяг статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний обсяг** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може бути більше 5-ти осіб. Номер збірника не може містити більше 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані примірники журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронна версія відразу ж стає доступною у БД «Наукова періодика України» Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського та на сайті Науково-технічної бібліотеки Національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://mmtt.khpi.edu.ua>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2. Кафедра вищої математики.

Тел. +38-057-707-60-35

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ

Збірник наукових праць

№ 1 (6) ' 2024

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.
Мовний рецензент української мови асистент Католик І. М.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 30.05.2024 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 132024. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.