



ISSN 2222-0631

ВІСНИК

**Національного технічного університету
«ХПІ»**

**Серія: Математичне моделювання в техніці
та технологіях**

№ 2 (5)'2023

**Харків
2023**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

MINISTRY OF EDUCATION
AND SCIENCE OF UKRAINE

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

**Вісник Національного
технічного університету
«ХПІ». Серія: Математичне
моделювання в техніці та
технологіях**

№2 (5) ' 2023

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

**Bulletin of the National
Technical University
"KhPI". Series: Mathematical
modeling in engineering and
technologies**

No.2 (5) ' 2023

Collection of Scientific papers

The edition was founded in 1961

Харків
НТУ «ХПІ», 2023

Kharkiv
NTU "KhPI", 2023

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies: зб. наук. пр. / Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». — Харків : НТУ «ХПІ», 2023. — № 2 (5). — 82 с. — ISSN 2222-0631.

У збірнику наведені результати створення, верифікації та впровадження нових математичних методів та моделей для проектування і дослідження зразків сучасної техніки, виробничих процесів та інформаційних технологій різноманітного призначення.

Для науковців, викладачів вищої школи, аспірантів, студентів і фахівців в галузях, де застосовується математичне моделювання в техніці та технологіях.

The Bulletin presents the results of development, verification, and implementation of new mathematical methods and models aimed at designing and investigating samples of innovative techniques, manufacturing processes, and information technologies with diverse applications.

The Bulletin is intended for scientists, university teachers, post-graduate students, and specialists in the fields involving mathematical modeling in engineering and technologies.

Державне видання

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ № 24552-14462Р від 15 липня 2020 року.

Мова статей – українська, російська, англійська.

Наказом МОН України № 894 від 10 жовтня 2022 року «Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях» внесено до категорії Б «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук».

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях включений до наукометричної бази Index Copernicus, зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).

Офіційний сайт видання <http://mmtt.khpi.edu.ua/>

Засновник

Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Founder

National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute"

Редакційна колегія

Головний редактор:

Ванін В. А., д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Заст. головного редактора:

Міхлін Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна.

Члени редколегії:

Александров Є. Є., д-р техн. наук, проф., ХНАДУ, Україна;

Воропаєв Г. О., член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ІГМ НАН України;

Галуза О. А., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Курпа Л. В., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Куценко О. С., д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Литвин О. М., д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Україна;

Межуєв В. І., д-р техн. наук, проф., Університет прикладних наук FH JOANNEUM, Австрія;

Меньшиков О. В., д-р фіз.-мат. наук, Абердинський університет, Великобританія;

Новожилова М. В., д-р фіз.-мат. наук, проф.,

ХНУМГ ім. Бекетова, Україна;

Олексенко В. М., д-р пед. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Першина Ю. І., д-р фіз.-мат. наук, проф., НТУ «ХПІ», Україна;

Просвірін С. Л., д-р фіз.-мат. наук, проф., РІАН, Україна.

Черній Д. І., д-р техн. наук, доц., КНУ ім. Т.Г.Шевченко, Україна.

Відповідальний секретар:

Набока О. О., канд. фіз.-мат. наук., НТУ «ХПІ», Україна.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 10 від 1 грудня 2023 р.

Editorial Board

Editor-in-chief:

Vanin V., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Deputy editor-in-chief:

Mikhlin Yu., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine.

Members of the Editorial Board:

Aleksandrov Ye., Dr. Tech. Sci., Prof., KhNAHU, Ukraine;

Voropaev G., Corresponding Member of NASU, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IHM of NASU, Ukraine;

Galuzha A., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kurpa L., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Kutsenko O., Dr. Tech. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Lytvyn O., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., UEPA, Ukraine;

Mezhuyev V., Dr. Tech. Sci., Prof., FH JOANNEUM University of Applied Sciences, Austria;

Menshykov O., Dr. Phys.-Math. Sci., University of Aberdeen, UK;

Novozhilova M., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Beketov NUUE, Ukraine;

Oleksenko V., Dr. Pedagog. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Pershina I., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., NTU «KhPI», Ukraine;

Prosvirnin S., Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., IRA NASU, Ukraine.

Cherniy D., Dr. Tech. Sci., Docent, KNU, Ukraine;

Executive Secretary:

Naboka O., PhD. Phys.-Math. Sci., NTU «KhPI», Ukraine.

G. S. ABRAMOV, M. G. ABRAMOV

FORMATION OF TWO-PHASE ZONES DURING INTERNAL OXIDATION OF BINARY ALLOYS

In the paper the formation patterns of two-phase regions during the internal oxidation process in low-alloyed binary alloys is studied. The goal of the research is the creation of a mathematical model for the internal oxidation process, which is to describe the kinetics of formation and evolution of internal oxidation zones, the study of the patterns governing the two-phase zone formation during internal oxidation, the study of the space-time dynamics of the structural parameters of the two-phase area, namely the number of the oxide particles, their average radius and the phase volume, at different stages of the internal oxidation zone evolution.

The two-phase process of diffusion saturation with light components applied to binary alloys is analyzed theoretically. The conditions for formation of disperse oxide particles are formulated. A mathematical model for the formation of two-phase areas as well as the numerical solution for the system of equations describing the kinetics of formation and evolution of the two-phase area for different values of the process parameters is proposed.

The modeling and experiments demonstrate that the distribution of structural parameters of the two-phase area has complex, non-monotonous nature. The influence of the main parameters of the process on the kinetics of the formation of the two-phase area in a lightly-alloyed binary nickel-based alloy plate is also determined. All stages of the plate's oxidation process are studied – from the inception of the particles to the coalescence of second-stage particles.

The results of the work could be used for developing new technologies in thermal and chemical-thermal treatments for disperse strengthening of materials using internal oxidation, as a physical basis for seeking ways of providing certain distributions of the internal oxidation zone structural parameters, which are required to give the alloy a necessary set of physical and mechanical properties.

The comparison of the modeling and experimental results shows a good correlation, which allows them to be recommended for developing new technologies in disperse strengthening, new heat-resistant steels, disperse-strengthened magnetic materials and electrotechnical alloys.

Key words: internal oxidation, binary alloys, two-phase area, internal oxidation area, internal oxidation area parameters, mathematical modeling, kinetics of internal oxidation zone formation.

Г. С. АБРАМОВ, М. Г. АБРАМОВ

ФОРМУВАННЯ ДВОФАЗНИХ ЗОН В ПРОЦЕСІ ВНУТРІШНЬОГО ОКИСЛЕННЯ БІНАРНИХ СПЛАВІВ

Розглянуто закономірності утворення двофазних зон в процесі внутрішнього окислення слабологованих бінарних сплавів. Створено математичну модель процесу внутрішнього окислення, що описує кінетику формування та еволюції зони внутрішнього окислення; досліджено закономірності, що керують формуванням двофазної області в процесі внутрішнього окислення; вивчено просторово-часові зміни параметрів структури двофазної області – кількість частин окислів, їх середній радіус і об'єм фази – на різних стадіях еволюції зон внутрішнього окислення. Проведено теоретичний аналіз процесу дифузійного насичення легкокорухомими компонентами бінарних сплавів. Сформульовані умови виникнення дисперсних частин окислів. Запропоновано математичну модель формування двофазної області та проведено чисельне рішення систем рівнянь, що описують кінетику формування та еволюцію двофазної області для різних значущих чинників процесу.

Моделюванням та експериментально показано, що розподіл параметрів структури двофазної області має складний немонотонний характер. Визначені основні параметри процесу, що впливають на кінетику утворення двофазної зони в пластині слабологованих бінарних сплавів на основі нікелю. Вивчені всі стадії процесу окислення пластини – від зародження до коалесценції частинок другої фази.

Результати роботи можуть бути використані для розробки нових технологій термічної та хіміко-термічної обробки для дисперсного зміцнення матеріалів методом внутрішнього окислення, як фізичної основи для пошуку шляхів забезпечення певних розподілів параметрів структури зон внутрішнього окислення, необхідних для надання даному сплаву конкретного комплексу фізико-механічних якостей.

Порівняння результатів моделювання та експериментальних результатів показали їх хорошу відповідність, що дозволяє рекомендувати їх використовувати при розробці нових технологій дисперсного зміцнення, нових жароміцних сплавів, дисперсно-зміцнених магнітних матеріалів та електротехнічних сплавів.

Ключові слова: внутрішнє окислення, бінарні сплави, двофазна область, зона внутрішнього окислення, параметри зони внутрішнього окислення, математичне моделювання, кінетика формування зони внутрішнього окислення.

Г. С. АБРАМОВ, М. Г. АБРАМОВ

ФОРМИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЗОН В ПРОЦЕССЕ ВНУТРЕННЕГО ОКИСЛЕНИЯ БИНАРНЫХ СПЛАВОВ

Изучены закономерности формирования двухфазных областей в процессе внутреннего окисления слабологированных бинарных сплавов. Целью исследования явилось создание математической модели процесса внутреннего окисления, описывающей кинетику формирования и эволюции зоны внутреннего окисления; исследование закономерностей, управляющих формированием двухфазной области в процессе внутреннего окисления; изучение пространственно-временного изменения параметров структуры двухфазной области – числа частиц окислов, их среднего радиуса и объёма фазы – на различных стадиях эволюции зоны внутреннего окисления. В работе выполнен теоретический анализ процесса диффузионного насыщения легкоподвижным компонентом бинарных сплавов. Сформулированы условия образования дисперсных частиц окислов. Предложена математическая модель формирования двухфазной области и проведено численное решение систем уравнений, описывающих кинетику формирования и эволюции двухфазной области для различных значений параметров процесса.

Моделированием и экспериментально показано, что распределения параметров структуры двухфазной области имеют сложный немонотонный характер. Определено влияние основных параметров процесса на кинетику формирования двухфазной области в пластине слабологированных бинарных сплавов на основе никеля. Исследованы все стадии процесса окисления пластины – от зарождения частиц до коалесценции частиц второй фазы.

Результаты работы могут быть использованы для разработки новых технологий термической и химико-термической обработок для дисперсного упрочнения материалов методом внутреннего окисления, как физическая основа для поиска путей обеспечения заданных распределений параметров структуры зоны внутреннего окисления, необходимых для придания данному сплаву требуемого комплекса физико-механических свойств.

Сравнение результатов моделирования и экспериментальных результатов показало их хорошее соответствие, что позволяет рекомендовать их для разработки новых технологий дисперсного упрочнения, новых жаропрочных сталей, дисперсно-упрочненных магнитных материалов

и электротехнических сплавов.

Ключевые слова: внутреннее окисление, бинарные сплавы, двухфазная область, зона внутреннего окисления, параметры зоны внутреннего окисления, математическое моделирование, кинетика формирования зоны внутреннего окисления.

Introduction. In recent years, the number of materials which have their necessary service qualities formed in the process of disperse hardening of the hard mix using second stage particles, has increased considerably. The most widespread techniques for the manufacturing of such materials are thermal aging and powder-based metallurgy techniques. However, during the manufacture of high-strength and heat-resistant materials it is common for the requisite qualities to be achieved through the formation of disperse second-stage particles in the surface layers of the material only. As well, there is often the need to have various qualities both in the surface layer and throughout the volume of the material, which the aforementioned methods cannot provide. The most promising method for creating a disperse-hardened surface layer is the internal oxidation process (as well as internal nitration, borating, etc.).

However, both in theoretical and experimental aspects, the kinetics of two-phase area formation and its evolution throughout the internal oxidation process are not sufficiently studied, which somewhat holds back the wide practical use of the internal oxidation process.

Relevant research analysis. The theoretical analysis of the internal oxidation process is complex, as the task is concerned with a wide array of parameters, and the manifestations of internal oxidation take many forms and are hard to systemise. The analysis of literary data [1 – 10] shows that the existing models don't consider the process of two-phase area formation and don't always provide a satisfactory description of the *internal oxidation zone (IOZ)* growth kinetics. For a more comprehensive description of the internal oxidation process, the kinetics of the diffuse interaction of growing particles with the hard mix in the two-phase area need to be considered. For describing the change of the parameters of the two-phase area, such as the number of particles $N(x, t)$, their average radius $\bar{R}(x, t)$ and the volume of the phase $V_\phi(x, t)$, the particle size distribution functions in each IOZ section must be considered.

In turn, the lack of systematic and detailed experimental data makes it difficult to develop and specify the theory of the internal oxidation process.

The goal of the work is the creation of a quantitative model of binary alloy internal oxidation, which describes the IOZ formation and evolution kinetics, the study of patterns in the formation of two-phase area during internal oxidation and study of the space-time dynamics of the two-phase area structural parameters, namely the number of particles, $N(x, t)$, their average radius $\bar{R}(x, t)$ and phase volume $V_\phi(x, t)$, at different stages of the evolution stages of the internal oxidation zone.

In regards to that, the works [11 – 18] contain a theoretical analysis of the diffuse saturation process using light components applied to binary alloys. Based on that, the conditions for the formation of disperse nuclei of the second phase and the process of their growth is observed. A model is formed for the two-phase area formation process during internal oxidation, including the formation of the new phase particles and their diffuse growth (dissolution) during their interaction with the hard mix. Numerical solutions for the system of equations which describes the two-phase area formation kinetics for different values of the parameters of the internal oxidation process in a binary alloy plate are presented. All stages of the internal oxidation process in the plate are studied – from formation, to the coalescence of second stage particles. Experimentally studied is the kinetics of the internal oxidation of $Ni-Cr$, $Ni-Ti$ alloys, the experimental data are compared to the data obtained from the mathematical model.

Main results. We study the formation of the two-phase area during the internal oxidation process. Within this study, we shall look into the question regarding the use of constant diffusion coefficients in problems of diffuse saturation of binary alloys using light components, i.e. mostly the diffusion in $Fe-Me-O$ type systems, where the diagonal diffusion coefficient of the O element in the hard mix exceeds considerably the corresponding coefficient for the alloying element: $D_{11} \gg D_{22}$.

For that purpose, the following system of equations for diffusion in the hard mix of three-component systems was solved using a perturbation method:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D_{ii} \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_{ij} \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (1)$$

with the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} C_1(0) &= C_1^1; & C_1(\infty) &= C_1^0; \\ C_2(0) &= C_2^1; & C_2(\infty) &= C_2^0; \end{aligned} \quad (2)$$

where $C_i (i=1, 2)$ is the concentration of the i -th component. The index of 1 hereinafter corresponds to the O component, and 2 for the alloying element. $D_{ij} (i, j=1, 2)$ are the diffusion coefficients, which are normally used as component concentration functions. Here it is shown that under the condition of

$$\left| \frac{1}{2} \varepsilon_{12} (C_2^1 - C_2^0) \right| \ll 1 \quad (3)$$

one could use the solutions of diffusion equation (1) with constant diffusion coefficients D_{11} , D_{12} , D_{22} and $D_{21} = 0$:

$$C_1(\xi) = C_1^1 - \left[C_1^1 - C_1^0 + \frac{D_{12}}{D_{11}} (C_2^1 - C_2^0) \right] \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{D_{11}}} + \frac{D_{12}}{D_{11}} (C_2^1 - C_2^0) \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{D_{22}}}, \quad (4)$$

$$C_2(\xi) = C_2^1 - (C_2^1 - C_2^0) \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{D_{22}}}, \quad (5)$$

where $D_{12}/D_{11} = \varepsilon_{12}C_1^1$, $\xi = x/\sqrt{t}$ is the generalised coordinate, and ε_{12} is the interaction parameter.

The work provides a comparison of the numerical solution to equation (1) (with diffusion coefficients that depend on the concentration) with solution (4) for variable values of C_2^0 (and, accordingly, the parameter $A = \left| 1/2\varepsilon_{12} (C_2^1 - C_2^0) \right|$). A correlation is obtained for the maximum deviation of these solutions from the parameter A , which allows us to evaluate the error resulting from the use of constant diffusion coefficients. For values of the parameter A that don't exceed 0.19, the relative solution error in (4) does not exceed 5%.

Using the corresponding isometric sections of the triple balance diagram for $Fe-Me-O$ types, conditions for $Me_{\omega_2}O_{\omega_1}$ type disperse phase formation are studied in diffuse saturation of binary alloys. The condition for formation of new phase nuclei is the oversaturation of the hard mix. To analyse the saturation of the hard mix, the oversaturation function $L(\xi)$ is introduced:

$$L(\xi) = \Phi(\mu_1, \mu_2) - \Phi(\mu_1^\rho, \mu_2^\rho) = \frac{2\gamma V_m}{R_k}, \quad (6)$$

where R_k is the critical radius of new phase nuclei, γ is the surface tension coefficient, and V_m is the new phase molecule volume.

The function $\Phi(\mu_1^\rho, \mu_2^\rho)$ is an equation for solubility on an isometric slice of the triple diagram. For $Fe-Me-O$ type systems, which form a stoichiometric compound $Me_{\omega_2}O_{\omega_1}$, the solubility line equation is as follows:

$$\Phi(\mu_1^\rho, \mu_2^\rho) = \ln \left\{ (a_1^\rho)^{\omega_1} (a_2^\rho)^{\omega_2} \right\} = \frac{\Delta G}{kT}, \quad (7)$$

where a_i^ρ and ω_i ($i=1,2$) respectively are thermodynamic activities for components at the solubility lines and stoichiometric coefficients; ΔG is the free energy from $Me_{\omega_2}O_{\omega_1}$ formation.

Using Wagner's decomposition for thermodynamic activities

$$a_i = C_i \exp(\varepsilon_{ii}C_i + \varepsilon_{ij}C_j + \dots), \quad (i, j = 1, 2) \quad (8)$$

and considering the smallness of C_i and ε_{22} we get:

$$\Phi(\mu_1^\rho, \mu_2^\rho) = \ln \left\{ (C_1^\rho)^{\omega_1} e^{-|\varepsilon_{12}|C_2^\rho \omega_1} (C_2^\rho)^{\omega_2} \right\} = \frac{\Delta G}{kT}. \quad (9)$$

The function $\Phi(\mu_1, \mu_2)$ describes an arbitrary virtual diffusion path, which a figurative point follows through the condition diagram during changes in the alloy's composition in the diffusion zone (Fig. 1). If the diffusion path crosses a two-phase path, then $L(\xi) > 0$, and this corresponds to the presence of hard mix oversaturation.

If we consider the smallness of concentration changes in components within the diffusion zone, we can consider $C_1^\rho(\xi) = C_1^\rho(0) = C_1^1$ and $\frac{dC_1^\rho}{dC_2^\rho} = \text{const}$. Then, considering (4) and (5) the oversaturation function can be written as:

$$L(\xi) = \left\{ \omega_1 (C_2^0 - C_2^1) |\varepsilon_{12}| \left[1 - \frac{dC_1^\rho}{dC_2^\rho} \frac{1}{C_1^1 |\varepsilon_{12}|} \right] \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{D_{22}}} - \left[1 - \frac{C_1^0}{C_1^1} + |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1) \right] \operatorname{erf} \frac{\xi}{2\sqrt{D_{11}}} \right\}. \quad (10)$$

From (10) we see that the maximum of $L(\xi)$ is at the coordinate

$$\xi_m = 2 \sqrt{D_{22} \ln \left\{ \frac{(C_2^0 - C_2^1) |\varepsilon_{12}| \left[1 - \frac{dC_1^\rho}{dC_2^\rho} \frac{1}{C_1^1 |\varepsilon_{12}|} \right] \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}}{1 - \frac{C_1^0}{C_1^1} + |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1)} \right\}} \quad (11)$$

Under the conditions of

$$(C_2^0 - C_2^1) |\varepsilon_{12}| \left[1 - \frac{dC_1^\rho}{dC_2^\rho} \frac{1}{C_1^1 |\varepsilon_{12}|} \right] > 0; \quad (12)$$

$$C_1^1 - C_1^0 + C_1^1 |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1) > 0 \quad (13)$$

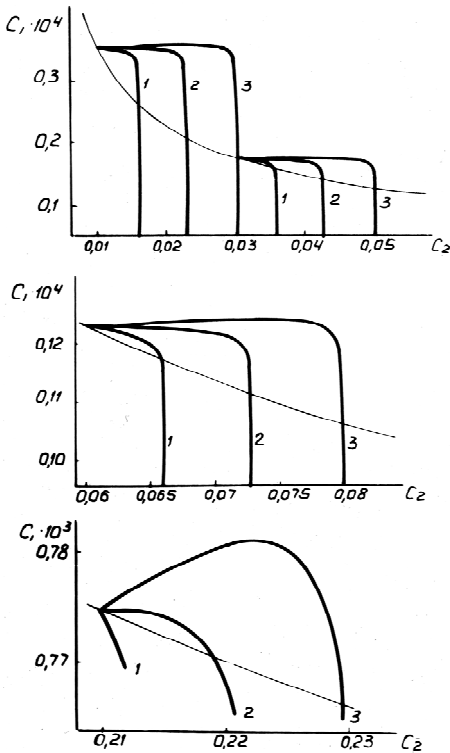


Fig. 1 – Virtual diffusion paths, calculated based on (4) and (5) for various sections of the

solubility line: $\frac{\Delta G}{RT} = -40$, $\varepsilon_{12} = -2,5$;

$D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{s}$; $D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-8} \frac{cm^2}{s}$;

$$1. |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1) < \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}};$$

$$2. |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1) = \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}};$$

$$3. |\varepsilon_{12}| (C_2^0 - C_2^1) > \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}}.$$

The kinetics of two-phase area formation in the process of internal oxidation is considered. A mathematical model was formulated for the internal oxidation process, as well as computer modeling of the two-phase area formation process in a plate of a binary alloy during diffuse oxygen saturation was carried out. The modeling results and the experimental results were compared. Below is the system of equations which was used to describe this process.

In three-component systems, which consist of a hard mix and new phase particles $Me_{\omega_2} O_{\omega_1}$, diffusion equations in the hard mix are as follows:

the maximum lies within the interval of $(0, \xi_{bound})$ and $L(\xi_m) \geq 0$. Conditions (12) and (13) hold for $C_2^0 > C_2^1$. Thus, with $C_1^\rho(0) = C_1^1$ and $C_2^\rho(0) = C_2^1$, i.e. even without oversaturation on the outer surface ($L(0) = 0$), nuclei of the new phase can form within the diffusion zone, if the initial concentration of the alloying element exceeds its balance concentration, which is established during the saturation process. Analysis shows that the conditions for formation of the two-phase zone are more permitting as the difference of $(C_2^0 - C_2^1)$ increases, as the concentration C_2^0 of the alloying element in the initial binary alloy decreases (at a constant value of $(C_2^0 - C_2^1)$), as the absolute interaction parameter value $|\varepsilon_{12}|$ increases, and as the ratio of the diffusion coefficients D_{11} / D_{22} increases (Fig. 1).

The work considers the possibility of two-phase area formation within an undersaturated hard mix on the surface ($L(0) < 0$). It is demonstrated that due to the presence of a maximum on the $L(\xi)$ curve, an event could occur where at some distance from the surface a part of the oversaturation function around the maximum coordinate will be in the positive area. With this, the two-phase area should be preceded by an area that starts from the surface, free of second phase emissions (Fig. 2).

The existence of the near-surface area that is free of second-stage particles is verified experimentally, under surface conditions that correspond to an undersaturated hard mix.

The two-phase area's boundary blurring, which depends on the gradient of the oversaturation function in the intersection point of $L(\xi)$ with the zero ordinate (Fig. 2), is theoretically analysed. An expression is obtained for correlating the boundary blurring values in two-phase areas, which correspond to the rising and falling branches of the oversaturation function. Based on this analysis, a method is proposed for evaluating the diffusion coefficient of the alloying element D_{22} according to the data on two-phase area boundary blurring from an experiment on the internal oxidation in surface undersaturation conditions.

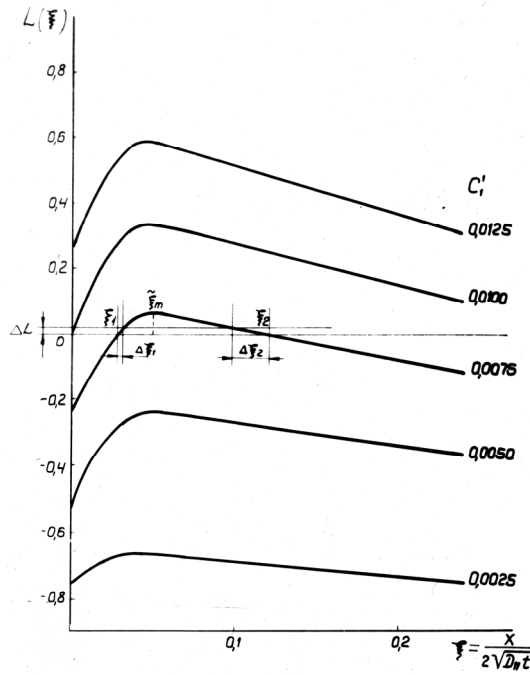


Fig. 2 – Distribution of oversaturation function $L(\xi)$ in accordance to the oxygen concentration at the surface of the sample C_1^1 .

$$C_2^0 = 0,12; C_2^1 = 0,10; C_2^2 = 0,10;$$

$$C_1^0 = 0,0; C_1^1 = 0,01; \varepsilon_{12} = -2,5;$$

$$D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{s}; D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-8} \frac{cm^2}{s}.$$

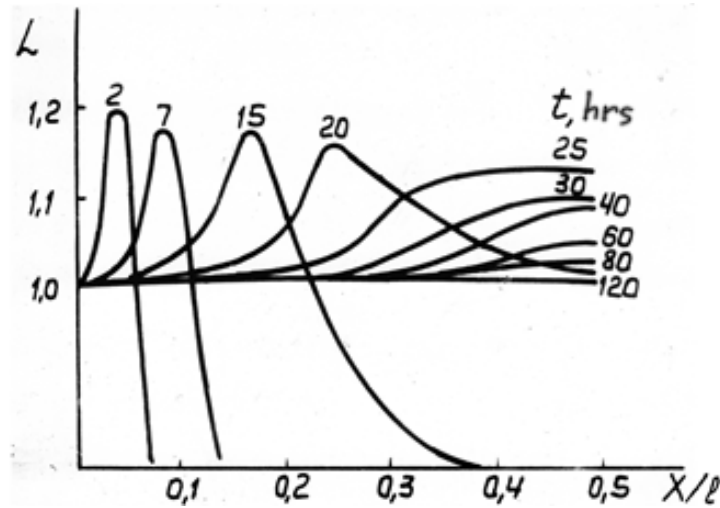


Fig. 3 – Distribution of the oversaturation function throughout the plate's depth $C_1^0 = 0,0; C_1^1 = 0,01; C_2^0 = 0,12; C_2^1 = 0,10;$

$$D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{s}; D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-9} \frac{cm^2}{s}; D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-11} \frac{cm^2}{s};$$

$$\alpha = 0,1 \cdot 10^{-17} \frac{cm^3}{s}; \mu_0 = 0,1 \cdot 10^{16} s^{-1}; \chi = 0,35 \cdot 10^{14} cm^{-2};$$

$$\omega_1 = 3; \omega_2 = 2; l = 600 \mu m.$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + D_{ii} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_i}{\partial x} + D_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} + C_{io} \frac{\partial Q}{\partial t},$$

$$(i, j = 1, 2; i \neq j);$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + D_{ij} \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} + D_{ii} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_i}{\partial x} + D_{ij} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} + C_{io} \frac{\partial Q}{\partial t},$$

$$(i, j = 1, 2; i \neq j), \quad (14)$$

where $Q = \ln(1 - V_\phi)$; $V_\phi = \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty R^3 f(R) dR$ is the new phase particle volume; C_{io} is the concentration of the i -th component in the phase.

The distribution function for second stage particles in sizes $f(R, t)$ for each section of x (x is the coordinate in the direction that is perpendicular to the diffusion front) is determined from the continuity equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial v_R f}{\partial R} = \mu(R, t'), \quad (15)$$

where R is the particle radius, t' is the relative time, counting from the t_1 moment of first nucleus formation in the current section, $\mu(R, t')$ is the rate of second stage nuclei formation in the current

section. The nuclei growth rate $v_R = \frac{dR}{dt}$ is determined from the substance mass balance at the nucleus boundary and in a quasi-stationary approximation (considering the weak dependence of the critical nuclei radius on the time for the times which slightly exceed t_1) already looks as follows:

$$v_R = \frac{a}{R^2} \left(\frac{R}{R_k} - 1 \right), \quad a = const. \quad (16)$$

The inception function $\mu(R, t')$ shall be defined as follows:

$$\mu(R, t') = \mu_0 \exp(-\chi R_k^2) \delta[R - R_k(t)], \quad (17)$$

where $\chi = \frac{8\pi}{3kT} \gamma^2 V_m$, δ is the delta-function.

Equations (14) – (17) form a closed system, solving which allows finding the value of $f(R, t)$ in each section, and accordingly determine the number of particles N , the average radius \bar{R} and the sum volume of the second phase V_ϕ .

The numerical solution was done with the sample plate using a grid built in the space of $\mathbf{R}, \mathbf{x}, \mathbf{t}$. An implicit difference scheme was used. For each new time step, an iterative process between equations (14) and (15) was done until a high-precision correlation was reached.

The modeling results show that hard mix oversaturation reaches a maximum point on the surface, which moves towards the middle of the plate over time (Fig. 3). With large times, the middle of the plate forms a slowly relaxing area with the maximum oversaturation of the hard mix. The

relaxation speed of the oversaturation in each of the deeper sections of the plate decreases. The kinetics of oversaturation in each section of the plate (Fig. 4) has the following stages: growth of the oversaturation until some maximum value, the stage of a rapid decrease in oversaturation, and a long stage of an asymptotic tendency towards a balanced state.

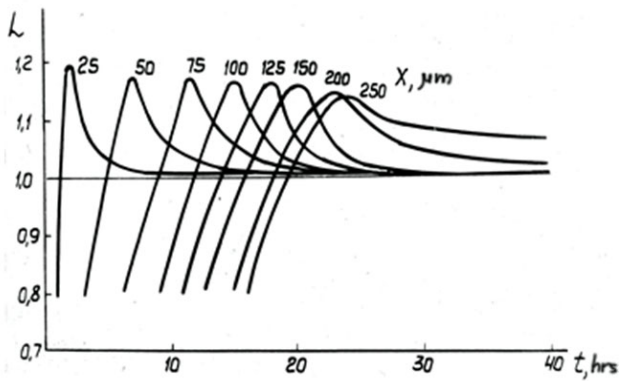


Fig. 4 – Kinetics of the oversaturation function in various sections of the plate. Here the oversaturation functions is normalised according to its value at the balance: $L/L_p(x, t)$;

$$L = a_1^{\omega_1} a_2^{\omega_2} = C_1^{\omega_1} e^{-|k_{12}| C_2^{\omega_2}} C_2^{\omega_2};$$

$$L_p = a_{1p}^{\omega_1} a_{2p}^{\omega_2} = (C_1^p)^{\omega_1} e^{-|k_{12}| C_2^p \omega_1} (C_2^p)^{\omega_2}.$$

ly increases, which is due to the influence of diffusion tensions from the opposite surfaces of the plate. The time until

Correspondingly, we can distinguish the stages of two-phase area formation: the turbulent formation and growth of particle, the intense growth of particles as formation of new particles fades, formation is absent at the asymptotic stage (oversaturation tends towards zero), and the growth of new stage particles with the hard mix material gradually gives way to coalescence growth.

The distribution of particle number N , average radius \bar{R} and sum value of the second phase V_ϕ across the plate's thickness is non-monotonous (Fig. 5, 6). The curves $N(x)$, $\bar{R}(x)$ and $V_\phi(x)$ reach a maximum, which tends towards the centre of the plate over time. It is shown that the dependence $N(x)$ cannot be described with an $N \sim x^n$ type expression, as the n parameter also depends on the coordinate x and the duration of the process t.

The kinetics of the internal oxidation front in the plate has the following quality: as it tends towards the centre of the plate, the speed of internal oxidation zone quick-

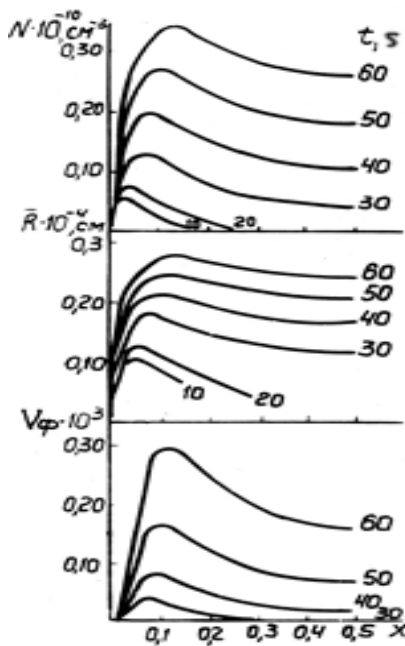


Fig. 5 – Distribution of N , \bar{R} and V_ϕ in plate sections for different times in the process of internal oxidation.

$$C_1^0 = 0,0; C_1^1 = 0,01; C_2^0 = 0,12; C_2^1 = 0,10;$$

$$D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-5} \frac{cm^2}{s}; D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{s};$$

$$D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{s};$$

$$\mu_0 = 0,1 \cdot 10^{16} s^{-1}; \chi = 0,35 \cdot 10^{14} cm^{-2};$$

$$\omega_1 = 3; \omega_2 = 2; l = 100 \mu m.$$

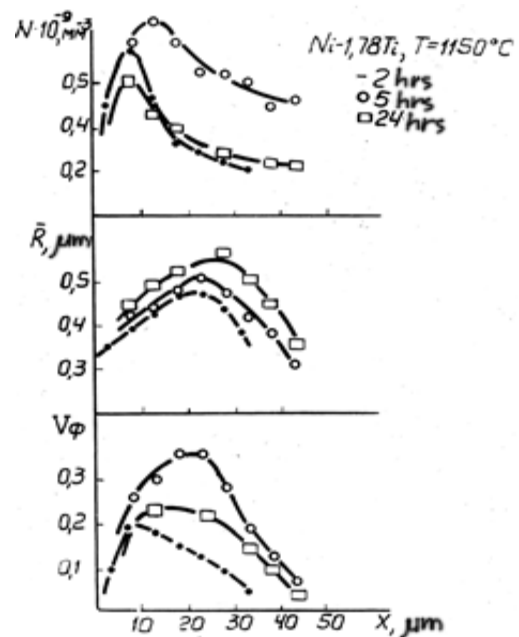


Fig 6 – Distribution of particle number N , their average radius \bar{R} and phase volume V_ϕ across the thickness of alloy $Ni - 1,78\% Ti$ $l = 100 \mu m, T = 1150^\circ C$.

From a numerical experiment with different initial values of C_2^0 for alloying elements we can determine that the number of particles N , their average radius \bar{R} and phase volume V_ϕ in the plate increases as the content of the alloying element increases, since with the increase in the initial concentration of C_2^0 with a constant level of C_2^1 the oversaturation level of the hard mix increases.

complete internal oxidation is sped up several times. Under the negligible influence of runoffs (the phase volume is small) on the diffusion of the components in the hard mix, the times for full internal oxidation t_1 , and t_2 for the plates of varying thickness l_1 , и l_2 correspond as the square of their thickness ratios: $t_2 / t_1 = (l_2 / l_1)^2$.

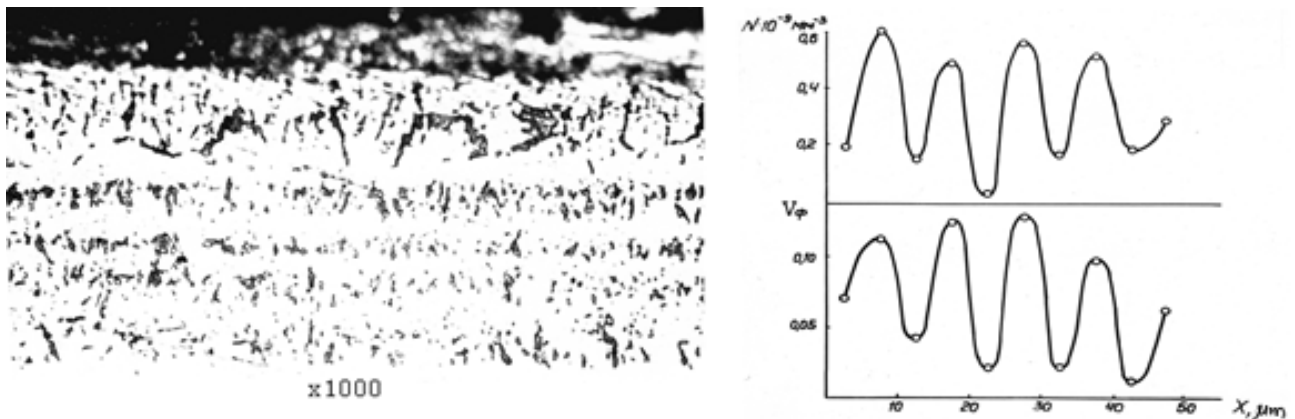


Fig. 7 – Distribution of particle number N and phase volume V_ϕ in a sample section of $Ni - 2,5\%Al - 1,5\%Hf$, internally oxidized using thermal cycling.

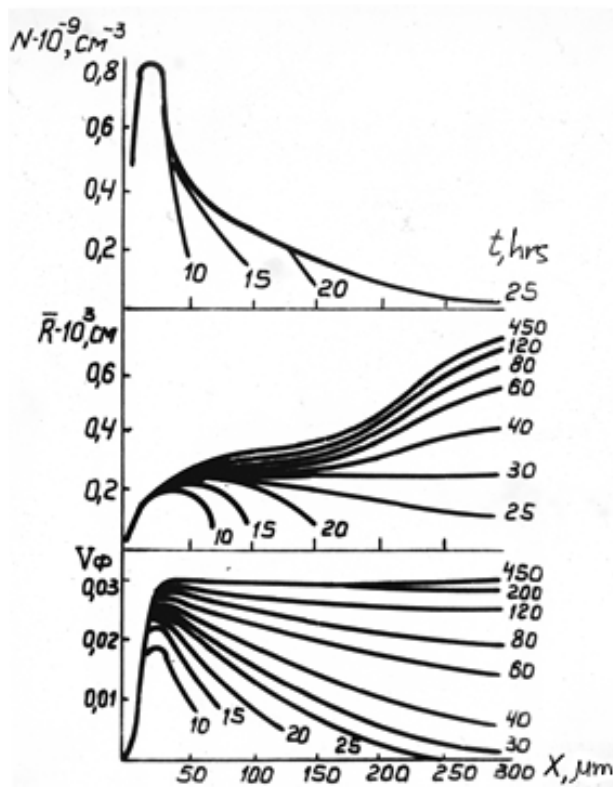


Fig. 8 – Distributions of N , \bar{R} , and V_ϕ across the thickness of the plate for various times of the internal oxidation process. $C_1^0 = 0,0$; $C_1^1 = 0,01$; $C_2^0 = 0,12$;

$$C_2^1 = 0,10; D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{s}; D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-9} \frac{cm^2}{s};$$

$$D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-11} \frac{cm^2}{s}; \frac{2\gamma V_m}{kT} = 0,7 \cdot 10^{-7} cm;$$

$$\alpha = 0,1 \cdot 10^{-17} \frac{cm^3}{s}; \mu_0 = 0,1 \cdot 10^{16} s^{-1};$$

$$\chi = 0,35 \cdot 10^{14} cm^{-2}; \omega_1 = 3; \omega_2 = 2; l = 600 \mu m.$$

The comparison of internal oxidation processes at different thicknesses of plates under equal values of relative time t/l^2 shows that the number of particles N , the average radius \bar{R} and sum volume of the phase V_ϕ in each section of the plate increase with increasing the plate thickness.

Based on the modeling results for internal oxidation processes under a constant temperatures, the possibility to get a "striped" internal oxidized zone structure using thermal cycling is demonstrated, where the two-phase area stripes alternate with second-phase emission free stripes. The width of two-phase stripes, their number and intervals in between can be regulated by the thermal cycling parameters.

Experiments with the $Ni - 2,5\%Al - 1,5\%Hf$ alloy, as well as $Ni - Ti$ alloys have resulted in the striped internal oxidation zone pattern (Fig. 7).

A material with such a striped structure in the internal oxidation zone is in essence a composite, and thus the programmed oxidation of diluted alloys can be considered a promising method of manufacturing such composites.

The asymptotic of the internal oxidation processes in binary alloys was studied. For a sample binary alloy plate the theoretical aspect of the asymptotic stage of the internal oxidation is considered, the internal oxidation process in the plate is modeled up to and including the asymptotic stage, and the late stage of the internal oxidation in an $Ni - 1\%Cr$ alloy is experimentally proven.

It is shown theoretically and using modeling that at the asymptotic stage of the internal oxidation process the number of particles N and phase volume V_ϕ across the thickness of the plate vary only slight over time (Fig. 8, 9); the distribution of the average particle radius \bar{R} throughout the section of the plate is leveled out, and over long process times \bar{R} doesn't depend on the coordinate.

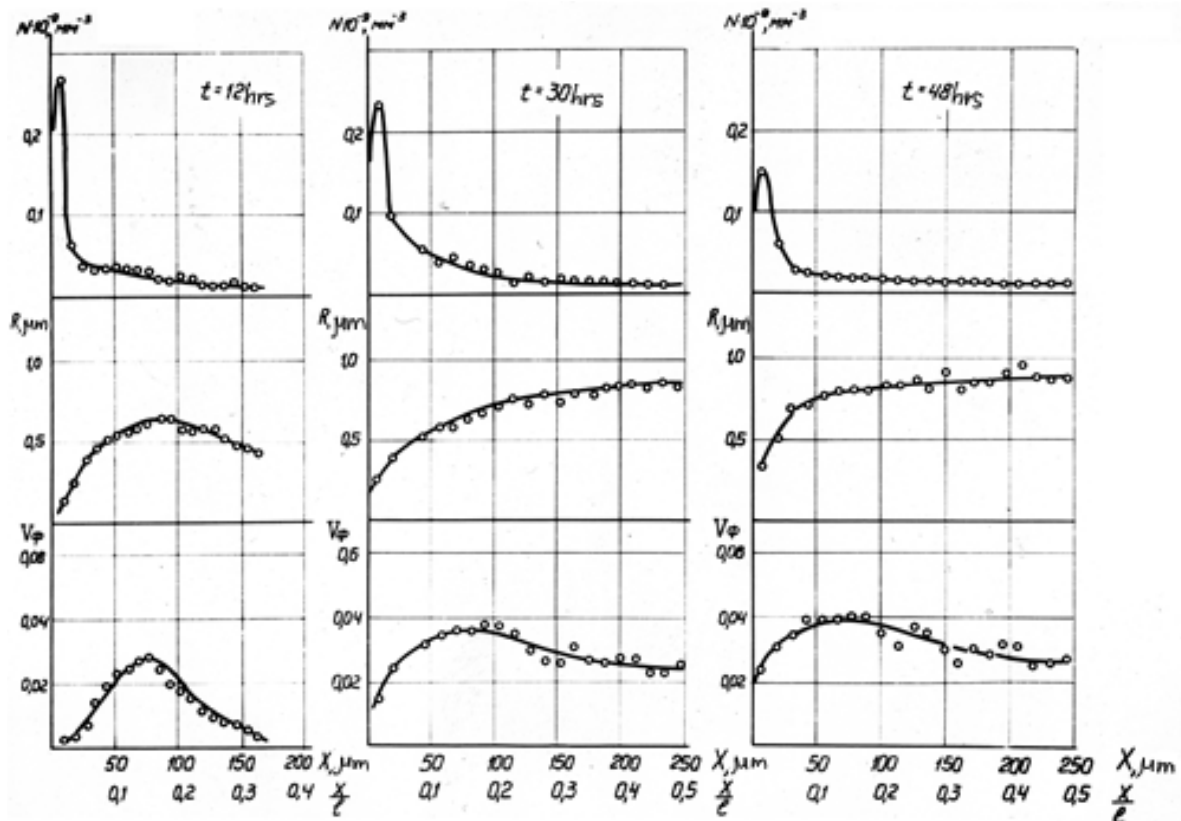


Fig. 9 – Distributions of N , \bar{R} , and V_ϕ across sections of an $Ni-1\%Cr$ alloy plate depending on internal oxidation times.
 $l = 500 \mu m$; $T = 1150^\circ C$.

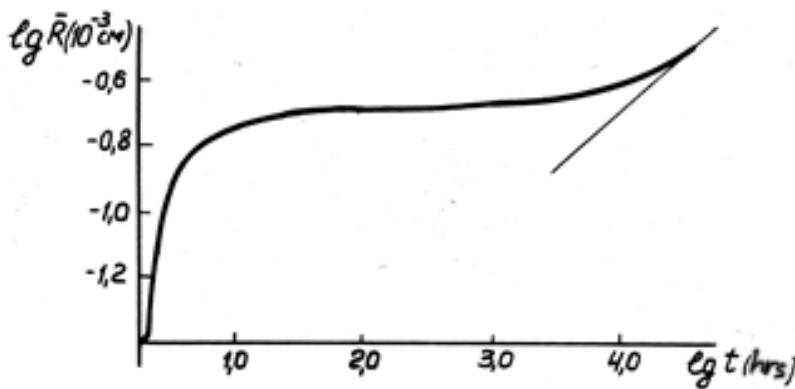


Fig. 10 – Kinetics of \bar{R} at the asymptotic stage of the internal oxidation process in the plate. $l = 600 \mu m$; $x = 25 \mu m$;

$$C_1^0 = 0,0; C_1^1 = 0,01; C_2^0 = 0,12; C_2^1 = 0,10;$$

$$D_{11} = 0,1 \cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{s}; D_{12} = -0,5 \cdot 10^{-9} \frac{cm^2}{s}; D_{22} = 0,1 \cdot 10^{-11} \frac{cm^2}{s};$$

$$\alpha = 0,1 \cdot 10^{-17} \frac{cm^3}{s}; \mu_0 = 0,1 \cdot 10^{16} s^{-1};$$

$$\chi = 0,35 \cdot 10^{14} cm^{-2}; \omega_1 = 3; \omega_2 = 2.$$

presence of a diffuse substance flow towards the free surfaces of the plate (due to the system not being closed): the substance of diluting small particles doesn't completely contribute to the growth of larger ones.

As the oversaturation gradient for the hard mix in the plate decreases, the role of the diffuse streams towards free surfaces recedes, the system becomes progressively more closed and the asymptotic stage of the process comes to fruition as the Livshitz – Slezov coalescence with a kinetic law of $\bar{R}^3 \sim t$. The results explain the deviations from a cubical growth of \bar{R} towards $n > 3$ at later stages of disperse two-phase system evolutions, which have been frequently ob-

Modeling shows that with the increase of the average size of second stage particles over long times the variation in particle sizes in the given section also increases – the function of particle distribution across sizes is blurred. In each section of the internal oxidation zone there is over time an asymptotic tendency of the critical particle radius R_k towards \bar{R} . The right end of the distribution function tends towards the point with the abscissa $R/R_k = 3/2$, however a small "tail" of the distribution function remains at the ordinate of $R/R_k = 3/2$.

The growth of the average radius of particles $\bar{R}^n \sim t$ was studied using modeling and experiments. It was found (Fig. 10) that after the stage of rapid particle growth with the kinetic law characterised as $n \leq 2$, there is a stage of slow growth with $n \gg 3$, which can be established by the

served by numerous authors.

The coalescence processes in an internally-oxidized plate is unique for each section of the plate; at the same time, different sections of the internal oxidation zone could be in different stages of the two-phase zone's evolution – inception, growth, unstable and static coalescence. Plate sections, depending on the oversaturation gradient between them, interact diffusely as well. The oversaturation maximum at the asymptotic stage appears once again next to the plate's surface, however its value is small and is defined by (according to the Gibbs-Thompson law) a difference in \bar{R} for various sections of the plate. Diffusion processes linked to the oversaturation gradient which emerges across the thickness of the plate, define the process of evening out of \bar{R} across the plate's section.

The asymptotic tendency towards a constant phase volume happens from above, on the side of large value, which makes evident the existence of some comprehensive "sub-dilution" of second-phase particles during the transition into a stable coalescence. This process is also associated with the diffuse flow of substance into the surrounding environment.

The results of the theoretical study and modeling of the asymptotic stage of the internal oxidation process correspond well to the experimental data from the internal oxidation in a sample of $Ni-1\%Cr$ alloy.

Conclusions and prospects of future study. A physical model for the process of internal oxidation is considered, which is described by a system of equations for diffusion in three-component system of hard mixes containing second-phase particles and a continuity equation for the particle size distribution function. Numerical modeling was carried out for the internal oxidation process in a binary alloy plate for various values of kinetic and thermodynamic parameters.

It is shown that the oversaturation maximum tends towards the centre of the plate over time, where a slowly relaxing area is formed with maximum oversaturation. The kinetics of oversaturation in each section has the following stages: growth towards a certain maximum value, a rapid decrease in oversaturation and a lengthy asymptotic tendency towards balance. Correspondingly, we could define the stages of two-phase stage formation: emergence, particle growth, which gives way slowly to coalescence growth due to the oversaturation of the hard mix at the asymptotic stage.

The internal oxidation model developed in the paper allows looking into the patterns of two-phase area formation and expanding our understanding of the process' physics. This provides an opportunity to effectively control the internal oxidation process by changing the space-time parameters and the composition of the environment. The results of the work could be used to develop new industrial technologies in industrial hardening of materials via internal oxidation, in creation of new heat-resistant alloys, disperse-hardened magnetic materials and electrotechnical alloys. In particular, technologies in programmed internal oxidation are the most interesting, as they could allow for the manufacture of disperse-hardened materials with a layered composite structure.

Bibliography

1. Кипарисов С. С., Левинский Ю. В. Внутреннее окисление и азотирование сплавов. – М. : Metallurgiya, 1979. – 200 с.
2. Дaneliya Е. П., Розенберг В. М. Внутреннеокисленные сплавы. – М. : Metallurgiya, 1978. – 232 с.
3. Wagner C. Reactionstypen bei der Oxydation von Legierungen // Z. Electrochem. – 1959. – Bd. 63. – P. 772 – 790.
4. Kirkaldy J. S. On the theory of internal oxidation and sulphation of alloys // Canad. Metal. Quarterly. – 1969. – v. 8. – P. 35 – 38.
5. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г., Бардачѳв Ю. Н. Распределение числа частиц в зоне внутреннего окисления // Физико-технические и технологические приложения математического моделирования. Сб. научных трудов НАН Украины. Институт математики. – Киев, 1998. – С. 9 – 12.
6. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Моделирование перехода от внутреннего окисления к внешнему // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». МДОЗМФ – 2011. – 2011. – С. 15 – 20.
7. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Формирование зоны внутреннего окисления при малой свободной энергии формирования окислов // Вестник ХНТУ. – 2011. – № 3 (42). – С. 14 – 20.
8. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Математическое моделирование процесса внутреннего окисления в бинарных сплавах // Труды научно-технической конференции «Компьютерное моделирование в наукоѳмких технологиях». КМНТ – 2012. – 2012. – С. 13 – 16.
9. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Моделирование процесса формирования структуры диффузионной зоны при одновременном поверхностном и внутреннем окислении сплавов // Вестник ХНТУ. – 2012. – №1 (44). – С. 268 – 273.
10. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Формирование двухфазной области при большой свободной энергии формирования окисла легирующих элементов // Вестник ХНТУ. – 2012. – № 2 (45). – С. 12 – 16.
11. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г. Моделирование процесса внутреннего окисления в бинарных сплавах на основе никеля // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». МДОЗМФ – 2013. – 2013. – С.
12. Абрамов Г. С., Абрамов М. Г., Бардачѳв Ю. Н. Влияние циклического изменения температуры на структуру внутреннеокисленной зоны // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2 (47). – С. 6 – 12.

References (transliterated)

1. Kiparisov S. S., Levinskiy Yu. V. *Vnutrennee okislenie i azotirovanie splavov* [Internal oxidation and nitriding of alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1979. 200 p.
2. Daneliya E. P., Rozenberg V. M. *Vnutrenneokislennyye splavy* [Internally oxidized alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1978. 232 p.
3. Wagner C. Reactionstypen bei der Oxydation von Legierungen. *Z. Electrochem.* 1959, Bd. 63, pp. 772–790.
4. Kirkaldy J. S. On the theory of internal oxidation and sulphation of alloys. *Canad. Metal. Quarterly.* 1969, vol. 8, pp. 35–38.
5. Abramov G. S., Abramov M. G., Bardachov Yu. N. Raspredelenie chisla chastits v zone vnutrennego okisleniya [Distribution of particle number

- in internal oxidation zone]. *Fiziko-tehnicheskie i tekhnologicheskie prilozheniya matematicheskogo modelirovaniya. : Sb. nauchnykh trudov NAN Ukrainy. Institut matematiki* [Physical and technical and technological applications of mathematical modeling : Collection of scientifically papers of the National Academy of science of Ukraine. Institute of Mathematics]. Kiev, 1998, pp. 9–12.
6. Abramov G. S., Abramov M. G. Modelirovanie perekhoda ot vnutrennego okisleniya k vneshnemu [Modeling the transfer from internal to external oxidation]. *Trudy XV Mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobenostey v zadachakh matematicheskoy fiziki". MDOZMF – 2011* [Proceedings of the XV International Symposium "Methods of Discrete Singularities in Mathematical Physics" MDSMP – 2011]. 2011, pp. 15–20.
 7. Abramov G. S., Abramov M. G. Formirovanie zony vnutrennego okisleniya pri maloy svobodnoy energii formirovaniya okislov [Formation of internal oxidation zone by low free energy of oxide formation]. *Vestnik HNTU* [Bulletin of the KhNTU]. 2011, no. 3 (42), pp. 14–20.
 8. Abramov G. S., Abramov M. G. Matematicheskoe modelirovanie protsessa vnutrennego okisleniya v binarnykh splavakh [Mathematical modeling of the process of internal oxidation in binary alloys]. *Trudy nauchno–tekhnicheskoy konferentsii «Komp'yuternoe modelirovanie v naukoymkikh tekhnologiyakh» KMNT–2012* [Proceedings of the scientific and technical conference "Computer modeling in knowledge-intensive technologies" KMNT–2012], 2012, pp.13–16.
 9. Abramov G. S., Abramov M. G. Modelirovanie protsessa formirovaniya struktury diffuzionnoy zony pri odnorenennom poverkhnostnom i vnutrennem okislenii splavov [Modeling of the process of the formation of the structure of diffuse zone under the simultaneous surface and internal oxidation of alloys]. *Vestnik HNTU* [Bulletin of the KhNTU]. 2012, no. 1 (44), pp. 268–273.
 10. Abramov G. S., Abramov M. G. Formirovanie dvukhfaznoy oblasti pri bol'shoy svobodnoy energii formirovaniya okisla legiruyuschikh elementov [Formation of two-phase region under high free energy of alloy element oxide formation]. *Vestnik HNTU* [Bulletin of the KhNTU]. 2012, no. 2 (45), pp. 12–16.
 11. Abramov G. S., Abramov M. G. Modelirovanie protsessa vnutrennego okisleniya v binarnykh splavakh na osnove nikelya [Modeling of the process of internal oxidation of the nickel-based alloys]; *Trudy XVI Mezhdunarodnogo simpoziuma «Metody diskretnykh osobenostey v zadachakh matematicheskoy fiziki» MDOZMF –2013* [Proceedings of the XVI International Symposium "Methods of Discrete Singularities in Mathematical Physics" MDSMP – 2013]. 2013, pp.
 12. Abramov G. S., Abramov M. G., Bardachov Yu. N. Vliyaniye tsiklicheskogo izmeneniya temperatury na strukturu vnutrenneokislennoy zony [Influence of temperature cycling on the structure of internally oxidized zone]. *Vestnik HNTU* [Bulletin of the KhNTU]. 2013, no. 2 (47), pp. 6–12.

Received (надійшла) 18.09.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Абрамов Геннадій Серафимович – кандидат фізико-математичних наук, доцент факультету судноводіння, Херсонська державна морська академія, м. Херсон; тел.: (067) 789-10-01; e-mail: gennadabra@gmail.com.

Абрамов Геннадий Серафимович – кандидат физико-математических наук, доцент факультета судовождения, Херсонская государственная морская академия, г. Херсон; тел.: (067) 789-10-01; e-mail: gennadabra@gmail.com.

Abramov Gennady Serafimovich – PhD in Physics and Mathematics, Docent at the Navigation Faculty of the Kherson State Maritime Academy, Kherson; tel.: (067) 789-10-01; e-mail: gennadabra@gmail.com.

Абрамов Михайло Геннадійович – викладач факультету інформаційних технологій і фізико-математичних наук, Херсонська філія національного університету суднобудування ім. Адмірала Макарова, м. Херсон; тел.: (096) 713-49-20; e-mail: mike_a@ukr.net.

Абрамов Михаил Геннадиевич – преподаватель факультета информационных технологий и физико-математических наук, Херсонский филиал национального университета судостроения им. Адмирала Макарова, г. Херсон; тел.: (096) 713-49-20; e-mail: mike_a@ukr.net.

Abramov Mikhail Gennadievich – Professor at the Department of IT and Physical and Mathematical Sciences of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Kherson Branch, Kherson; tel.: (096) 713-49-20; e-mail: mike_a@ukr.net.

Ю. М. АНДРЕЄВ, Г. В. ШАБАНОВ

РЕАЛІЗАЦІЯ В ССКА КІДИМ ПРОГРАМНОГО ВИЗНАЧЕННЯ РОЗМІРНОСТЕЙ НЕВІДОМИХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ НА ПІДСТАВІ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

У роботі представлені результати досліджень реалізованого в спеціальній системі комп'ютерної алгебри (ССКА) КіДиМ алгоритму опрацювання одиниць виміру фізичних і геометричних величин задач механіки. Програмний комплекс КіДиМ служить для розв'язання задач механіки дискретних механічних систем будь-якої складності інженерної та наукової спрямованості. Для завершеності процесу підготовки вихідних даних для таких завдань суттєве значення має використання в вихідних і результуючих даних одиниць виміру. Вихідні дані завдань КіДиМ завдяки їх аналітичній формі можуть бути записані в будь-якому порядку. Для надання допомоги користувачеві в складі програм КіДиМ є спеціальний діагностичний блок вихідних даних. Тому реалізація використання розмірностей в даних КіДиМ переслідує додаткову мету підвищення діагностичних можливостей системи. Формули розмірностей реалізуються тут як звичайні аналітичні вирази, що дає змогу вбудованій системі комп'ютерної алгебри формувати вирази одиниць виміру даних при їх комп'ютерних аналітичних перетвореннях в процесі розв'язання завдань динаміки, статички і кінематики. Таким чином, постановка задачі опрацювання одиниць виміру в ССКА КіДиМ включає читання в початкових даних значень змінних з вказаними у формульному вигляді розмірностями, діагностику правильності їх завдань і відповідності цим даним, запам'ятовування їх в екземплярах класів «змінна» та «елемент», обчислення розмірностей відповідно формулам перетворення даних для отримання результатів розрахунків. У статті показано, як за допомогою енергетичних співвідношень між координатами і характеристиками елементів механічної моделі вдається ефективно встановлювати розмірності геометричних і фізичних величин завдань. Для демонстрації логіки роботи реалізованого алгоритму наведено прості компактні приклади з навчальних задач кінематики, статички, динаміки плоских і просторових систем. Показано, як в КіДиМ будуються необхідні для розв'язання задач рівняння, як можна отримати одиниці виміру складових рівнянь і їх рішень. Завдяки тому, що розмірності тут представляються як формули, то відносно просто реалізуються їх спрощення – скорочення і заміна похідними одиницями. Крім того, так як змінні, що входять в формули розмірностей і змінні самої задачі, розташовуються в різних просторах даних КіДиМ, вони можуть мати однакові найменування і ніяк не змішуються.

Ключові слова: одиниці виміру, завдання механіки, автоматичне будовання рівнянь механіки, комп'ютерна алгебра, механічні та математичні моделі, енергетичні співвідношення в задачах механіки.

Ю. М. АНДРЕЄВ, Г. В. ШАБАНОВ

РЕАЛІЗАЦІЯ В ССКА КИДИМ ПРОГРАМНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕИЗВЕСТНЫХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

В работе представлены алгоритмы преобразований и диагностики размерностей переменных задач механики, реализованные на основе формульного представления в специальной системе компьютерной алгебры (ССКА) КиДиМ. Благодаря тому, что КиДиМ является специальной системой для проведения инженерных и научных расчетов задач механики, использование размерностей величин исходных и результирующих данных позволяет, кроме получения их завершенности, глубже проводить диагностику и безошибочное преобразование единиц. В статье показано, как посредством энергетических соотношений между координатами и характеристиками элементов механической модели удастся эффективно устанавливать размерность геометрических и физических получаемых величин при решении задач. Благодаря формульному представлению размерностей, относительно просто реализуется их упрощение и допускается использование одинаковых имен переменных задач и единиц размерностей.

Ключевые слова: единицы измерения, задачи механики, автоматическое построение уравнений механики, компьютерная алгебра, механические и математические модели, энергетические соотношения в задачах механики.

YU. M. ANDRIEIEV, H. V. SHABANOV

IMPLEMENTATION IN SCAS KIDYM OF SOFTWARE DETERMINATION OF DIMENSIONS OF UNKNOWN IN PROBLEMS OF MECHANICS BASED ON ENERGY RELATIONS

The paper presents the results of the study of an algorithm for processing measurement units of physical and geometric quantities in the problems of mechanics implemented in the specialized computer algebra system (SCAS) KiDyM. The KiDyM software complex is used for solving problems of mechanics of engineering and scientific orientation of any complexity. For the completeness of the initial data preparation process for such tasks, the use of measurement units in the initial and resulting data is essential. The output data of KiDyM tasks have a rather slow appearance due to their analytical form. To provide assistance to the user, KiDyM programs have a special diagnostic block of output data. Therefore, the implementation of the dimensions used in KiDyM data pursues the additional goal of increasing the diagnostic capabilities of the system. Dimensional formulas are implemented here as ordinary analytical expressions, which enables the built-in computer algebra system to form expressions of data measurement units during their computer analytical transformations in the process of solving problems of dynamics, statics and kinematics. Thus, working out the measurement units in the SCAS KiDyM includes reading the values of the variables with the dimensions specified in formula form the initial data, diagnosing the correctness of dimensioning and compliance of the dimensions with the data, storing them in instances of the "variable" and "element" classes, calculating the dimensions according to data conversion formulas to obtain calculation results. The paper demonstrates how to efficiently establish dimensions of geometrical and physical quantities using energy relations between coordinates and characteristics of elements of the mechanical model. For the demonstration of the logic of the implemented algorithm, simple compact examples from educational problems of kinematics, statics, and dynamics of flat and spatial systems are provided. The article shows how KiDyM constructs the necessary equations for solving tasks, and how units of measurement for equation components and their solutions can be obtained. Since dimensions are represented as formulas here, their simplification – reduction and substitution with derivative units – can be easily implemented. Moreover, since the variables involved in dimension formulas and the variables of the task itself, within KiDyM, are situated in different data spaces, they can have the same names without any confusion.

Key words: measurement units, problems of mechanics, automatic equation generation in mechanics, computer algebra, mechanical and mathematical models, energy relations in the problems of mechanics.

Вступ. У наукових та інженерних розрахунках обов'язково використовуються *фізичні величини та одиниці виміру* [1]. Програми таких напрямків повинні коректно працювати з фізичними та геометричними одиницями.

Більшість таких існуючих програм або потребує приводити значення параметрів задачі до оговореної сис-

теми одиниць (найчастіше до системи СИ), або перекладає відповідальність за використання одиниць виміру параметрів завдання на користувача. Самі одиниці в вихідних даних не вказуються, тому проконтролювати це не видається можливим. Це – не сучасний підхід.

Серед показників якості таких програм повинна бути можливість введення *розмірних* вихідних даних та формування результатів в аналітичній, числовій, графічній, анімаційній формі з урахуванням обраних користувачем одиниць виміру. Для цілей *комп'ютерного математичного моделювання* розв'язання технічних задач інтерес представляють *алгоритми формування розмірностей результатів* по заданим у вихідних даних, а також використання їх для діагностики таких даних та формул їх перетворення, що реалізовані в програмі.

Одним із представників пакетів програм для проведення інженерних розрахунків є розроблена в НТУ «ХПІ» спеціальна система комп'ютерної алгебри для розрахунків кінематики і динаміки машин КіДиМ (ССКА КіДиМ, далі КіДиМ) [2 – 5]. Програмний комплекс КіДиМ служить для розв'язання задач механіки дискретних механічних систем будь-якої складності інженерної та наукової спрямованості. Для завершеності процесу підготовки вихідних даних для таких завдань суттєве значення має використання в вихідних і результуючих даних одиниць виміру.

Треба сказати, що найбільш зручно для інженера і науковця працювати при обчисленні поведінки механічних систем в натуральних одиницях, часто в похідних від основних систем одиниць, а не використовувати безрозмірні підходи.

КіДиМ на базі даних, що представляють собою сукупність записів аналітичного опису механічної моделі системи, дозволяє провести комп'ютерне моделювання кінематичної, статичної або динамічної поведінки заданої механічної системи. Всі необхідні аналітичні перетворення для отримання рівнянь, що розв'язують задачу, проводить програма. Тому логічно було побудувати паралельно з цим формування і виразів розмірностей результуючих величин з необхідним їх спрощенням за необхідністю. Таким чином, в даній роботі розроблено *функціонал*, що розширює можливості КіДиМ в роботі з розмірностями даних. Це підвищує якість і безпомилковість рішень задач кінематики, динаміки, статички, кінетостатички, теорії коливань та дає додаткову інформацію діагностичним програмам КіДиМ, підвищує інформативність результатів та розрахунків.

Метою статті є розкриття алгоритмів комп'ютерного математичного моделювання перетворення одиниць виміру механічних та геометричних вихідних величин в одиниці виміру результуючих величин в процесі комп'ютерного розв'язання задач динаміки, кінематики, статички складних дискретних технічних систем (наприклад, робототехнічних), використання їх для глибшої діагностики вихідних аналітичних даних.

Аналіз останніх досліджень. Сьогодні базовою системою одиниць в світі є система СИ. Основними документами, на базі яких потрібно розробляти в програмах можливість праці з розмірностями є брошура [6] та стандарти країн (в Україні – це [7]). За програмної реалізації роботи з одиницями треба мати на увазі, що практично не існує мов і систем програмування, в яких би була зашита така можливість [8]. Тому цьому питанню присвячено достатньо багато зусиль програмістів – розроблено приблизно 82 бібліотеки для 30 мов програмування, 38 з яких оновлено за останні роки [8].

Відома простіша, але дуже ефективна діагностика формул, які виражають співвідношення матеріального світу – це перевірка розмірностей правої та лівої частини, перевірка однаковості одиниць виміру доданків. Порушення таких постулатів є типовою помилкою програмістів і користувачів програм [8].

Робота [9] присвячена розробці *idei XeLda*, яка дозволяє перевіряти коректність величин у *Excel* файлах. У статті [10] показано, як модулі перевірки типів у *компіляторі Glasgow Haskell Compiler* дозволяють користувачам реалізувати одиниці вимірювання як розширення системи типів без перебудови компілятора. Взагалі, ідея використання власних типів даних, в склад яких входять одиниці виміру дуже продуктивна і використовується в багатьох роботах. Так, у статті [11] розглядається підхід до вирішення цієї проблеми, щоб об'єднувати числа з одиницями у складові структури даних, а потім динамічно перевіряти, чи мають сенс арифметичні операції перед їх виконанням.

Таким чином, використання власних типів та наявність можливості аналітичних перетворень в КіДиМ органічно потребує розширення їх можливостей для відображення одиниць виміру. Зокрема, це торкається типу «змінна» – класу, якій *інкапсулює* ім'я змінної, формулу її обчислення і числове значення. Логічно додати в цей клас формулу розмірності.

Постановка задачі. Усі популярні програмні пакети – *універсальні* (*MathCAD* [12 – 14], *MatLab* [15 – 16], *Maple*) та *спеціальні інженерні* (*SolidWorks*, наприклад) мають можливість вводити початкові величини з розмірностями і отримати результати в тих чи інших одиницях. Але універсальні програми не мають можливості урахування специфіки конкретної задачі, а спеціальні інженерні, як правило, не мають можливості працювати з аналітичними викладками, прикладом яких і є формули розмірностей. Тому останні вимагають від користувача слідувати за вірністю підготовки числових даних в обумовленій системі одиниць.

Для реалізації роботи в КіДиМ зі зручними для користувача розмірностями фізичних та геометричних величин, з урахуванням специфіки конкретної задачі механіки, ставиться завдання на базі введення до класів «змінна» та «елемент» формул їх розмірностей:

- 1) надати можливості обирати користувачу систему одиниць вимірювання вихідних і результуючих величин;
- 2) автоматично отримувати формули розмірностей в результаті внутрішніх аналітичних перетворень Кі-

- ДиМ, виходячи з одиниць вхідних даних шляхом побудови і скорочення їх формул у відповідності з класом завдання, що вирішується;
- 3) використати для спрощення і представлення формул розмірностей особливості цих виразів – застосування лише *бінарних операцій множення, ділення, зведення в ступінь, без додавання і віднімання* [1];
 - 4) отримати на цій підставі повне розв'язання задачі спрощення і перепозначення об'єднуючих величин (наприклад, $H = \kappa g \cdot m / c^2$);
 - 5) надати можливості використання без обмежень однакових позначень змінних задачі та основних розмірностей і не стежити за цим, виділяючи величини в формулі розмірності, наприклад, іншим шрифтом (як це зроблено в MathCAD);
 - 6) автоматично програмно розв'язувати спеціальні рівняння відносно розмірностей, що складаються на основі енергетичних фізичних співвідношень.

Таким чином, ставиться завдання включення можливостей використання в КіДиМ одиниць виміру змінних при розв'язанні задач механіки. Це повинно дати змогу вводити в вихідних даних розмірності в системах, що обрані користувачем, програмно діагностувати їх наявність, перевіряти їх безпомилковість, обчислювати розмірності для змінних, які повинні їх мати, виводити відповідну інформацію в файли звіту, діагностики, помилок, та готувати вихідні дані у вигляді формул, графіків, таблиць, анімацій з включенням одиниць виміру, що суттєво підвищує якість програмного продукту.

Аналітичне представлення механічної моделі в КіДиМ. Однією з ключових переваг способу отримання рівнянь механіки (динаміки, статички, кінематики, кінетостатички, коливань), реалізованого за допомогою вбудованої системи комп'ютерної алгебри в КіДиМ, є представлення *механічної моделі* процесу сукупності елементів – *силових, інерційних, пружних та дисипативних* [2, 3]. З них КіДиМ автоматично збирає *математичну модель* процесу. Динамічні рівняння, що отримуються у КіДиМ для *голономних або неголономних дискретних механічних систем* n твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки, можна представити у вигляді [4, 5]:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\vec{r}_i}^T m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\vec{M}_i}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\vec{\omega}}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (1)$$

де $\mathbf{W}_{\vec{r}_i}^T, \mathbf{W}_{\vec{M}_i}^T, \mathbf{W}_D^T, \mathbf{W}_C^T, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції i – го тіла ($i = 1, 2, \dots, n$), дисипативних, пружних та інших активних сил системи відповідно; $\vec{r}_{C_i}, \vec{\omega}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас та кутова швидкість i – го тіла (радіус-вектор центру мас задається як функція узагальнених координат в абсолютній системі координат (СК), а кутова швидкість – як функція узагальнених координат та узагальнених швидкостей – у зв'язаній головній центральній СК i – го тіла; m_i, \mathbf{J}_{C_i} – маса та діагональний тензор інерції i – го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $[\mathbf{D}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами дисипації; $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – матричний вектор, що об'єднує швидкості (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти в'язкого тертя; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами жорсткості; $\boldsymbol{\gamma}$ – матричний вектор, що об'єднує деформації (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти пружності; \mathbf{P} – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проекції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Аналітичні вирази структурних матриць програмно будуються аналітичним диференціюванням: для сил інерції – декартових координат радіус-вектора центра мас i – го тіла \vec{r}_{C_i} по вектору узагальнених координат, або

$$\text{– вектора швидкості центра мас } i \text{ – го тіла по вектору узагальнених швидкостей } \mathbf{W}_{\vec{r}_i} = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{v}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \left[\frac{\partial \dot{\vec{r}}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right];$$

для моментів сил інерції – вектора кутової швидкості i – го тіла $\vec{\omega}_i^{(i)}$ по вектору узагальнених швидкостей

$$\mathbf{W}_{\vec{M}_i} = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]; \text{ для дисипативних сил – вектора } \dot{\boldsymbol{\beta}} \text{ по вектору узагальнених швидкостей } \mathbf{W}_D = \left[\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]; \text{ пруж-$$

них сил – вектора $\boldsymbol{\gamma}$ по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_C = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \right];$ активних сил системи – вектора координат

$$\text{силових елементів } \mathbf{p} \text{ по вектору узагальнених координат } \mathbf{W}_P = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right].$$

У підсумку, дані задач динаміки, що розв'язуються програмами КіДиМ, – це списки елементів: *інерційних, дисипативних, пружних та силових*. Кожний з них – це об'єкт, що інкапсулює *значення (характеристику) та координату*. *Характеристиками* інерційних елементів будуть маси і головні центральні моменти інерції тіл, дисипативних елементів – коефіцієнти дисипації, пружних – коефіцієнти жорсткості, силових – проекції сил і моментів. Відповідно, *координатами* таких елементів будуть: для інерційних елементів – декартові координати центрів мас і проекції кутових швидкостей тіл, для дисипативних – швидкості точок та тіл, для пружних – вели-

чини деформацій, для силових – лінійні та кутові переміщення точок та тіл прикладання сил і моментів. Для можливості побудови структурних матриць потрібно задати ще *структури: геометричні* – для координат елементів, що представляють лінійні і кутові переміщення, і *диференційні* – для координат елементів, що представляють швидкості.

Таким чином, в залежності від задачі динаміки, з рівнянь (1) програма КіДиМ отримує невідомі сили і моменти за заданими законами зміни узагальнених координат (*перша задача динаміки*), або навпаки, закони зміни узагальнених координат моделі за заданими законами зміни діючих сил і моментів (*друга задача динаміки*).

З описаної методики отримання рівнянь і розв'язань задач динаміки можна побачити і спосіб вирішення завдань статичної і кінематики. Для завдань статичної з пошуку сил і моментів сил в положенні рівноваги не треба задавати інерційні і дисипативні елементи, а в якості узагальнених координат і координат елементів треба використовувати віртуальні переміщення. Для завдань пошуку положень рівноваги інерційні і дисипативні елементи теж зайві, а в якості узагальнених координат і координат елементів треба брати кінцеві переміщення. Для завдань кінематики зайві всі елементи, а треба мати тільки структури, з виразів яких і отримуються закони руху ланок механізмів за заданими законами зміни узагальнених координат (*пряма задача кінематики*) та закони зміни узагальнених координат за заданими законами руху вихідних ланок. Нижче дано приклади описів деяких простих задач динаміки, статичної та кінематики.

Позначення координат, сил і моментів, параметрів, змінних і констант, що використовуються в описі механічних моделей, обираються самим користувачем і ніяк не нав'язуються програмою. Тому для отримання результатів з розмірностями користувачеві треба вказати одиниці виміру (*в вигляді формул розмірностей*) відомих в задачі числових параметрів, що входять в координати, характеристики елементів і вирази структур.

В статті наводяться алгоритми отримання всіх розмірностей результуючих величин в задачах механіки, що можуть бути розв'язані за допомогою ССКА КіДиМ, шляхом задавання розмірностей *тільки звісних числових параметрів*. Для цього формулюються основні властивості входження розмірностей в формули структур, змінних, елементів завдань. Залучаються енергетичні залежності механіки. Отримані результати використовуються для додаткової діагностики введеної користувачем аналітичної інформації.

Визначення одиниць виміру в завданнях кінематики. Відповідно з вищесказаним, можна переформулювати завдання кінематики наступним чином і вказати їх загальне розв'язання.

Основне завдання кінематики – це визначення положення, швидкостей та прискорень точок та тіл механічної системи у разі задавання руху точок та тіл. Таке завдання практично завжди в цьому випадку є завданням узагальнених координат або узагальнених швидкостей, як функцій часу. Тоді розв'язання основного завдання полягає в використанні *структур (диференціальних структур)* та їх похідних. Таким чином, задавання розмірностей узагальнених координат дозволяє тривіально визначити розмірності шуканих параметрів положення, швидкостей та прискорень, бо розмірність похідної – це розмірність функції поділеної на розмірність часу.

Обернене завдання кінематики, що характерно для завдань робототехніки, – це визначення параметрів руху ланок механізмів за заданим рухом вихідних ланок. Тобто, це визначення узагальнених координат механічної системи. Таким чином, розв'язання такої задачі зводиться до обертання виразів структур механізму, а значить, розмірність шуканих узагальнених координат встановлюється теж шляхом використання розмірностей заданих законів руху вихідних ланок і заданими *структурами*.

Приклад 1. В якості прикладу розглянемо опис основного завдання кінематики точки в позначеннях КіДиМ (рис. 1). Незважаючи на простоту задачі, можна побачити запропонований підхід і деякі проблеми, що виникають.

```

#      Вихідні дані:      #
x = 3 * sin(pi * t / 3), см;      y = -2 * cos(pi * t / 3), см;
#      Рішення:          #
vx = x' t;      vy = y' t;      #      Проекції швидкості т.М на координатні осі:      #
ax = vx' t;      ay = vy' t;      #      Проекції прискорення т.М на осі координат:      #
# Кінематичні параметри: #
v = sqrt(vx^2 + vy^2);      #      модуль швидкості т.М      #
a = sqrt(ax^2 + ay^2);      #      прискорення т.М      #
at = (vx * ax + vy * ay) / v;      #      тангенціальне прискорення т.М      #
an = sqrt(a^2 - at^2);      #      нормальне прискорення т.М      #
ro = v^2 / an;      #      радіус кривизни траєкторії т.М      #
# Інструкції #
ЧАС := t, 0, tk; tk = 6, с;
ПОКАЗАТИ = y(x), vx, vy, v, ax, ay, a, at, an, ro;
РОЗРАХУНОК := КІНЕМАТИКА;
КІНЕЦЬ;

```

Рис. 1 – Приклад розв'язання основного завдання кінематики точки.

На рис. 1 можна побачити, що вихідними даними є залежності декартових координат точки (її узагальнених координат) від часу, що даються в рядку 2, та діапазон зміни часу в інструкції **ЧАС**. Тому вказано тільки розмірність декартових координат (см, див. рядок 2) і часу (виразом $tk=6, c;$).

Таким чином, видно, що розмірність величин вказується після числового або формульного виразу змінної, після коми. Також можна побачити, що отримати розмірність результуючих величин нескладно з урахуванням того, що аргумент синуса не повинен мати розмірність (точніше, повинен мати розмірність *radian*) при зведенні у ступінь, у такий самий ступінь зводиться розмірність основи, при вилученні кореня треба вилучати корінь з вираження розмірності. Такі зауваження дозволяють сформулювати діагностичні правила використання розмірностей в будь-яких завданнях механіки:

- 1) розмірність можуть мати лише змінні, константи можуть приймати будь-яку розмірність в залежності від виразу, куди вони входять, тому розмірність їх не задається (наприклад, константа π в другому рядку має розмірність, що обернена часу, константа 3 повинна мати розмірність перед синусом см, а під синусом – не мати її!);
- 2) при бінарній формулі додавання, віднімання та залишку від ділення ('%') розмірність аргументів та результату повинна бути однакою;
- 3) при бінарній формулі добутку або ділення одиниця виміру результату отримується відповідним множенням або діленням розмірностей аргументів;
- 4) при бінарній формулі зведення в ступінь розмірність першого аргументу може бути будь-якою, другий аргумент не повинен мати розмірність, розмірність результату визначається зведенням в той же ступінь розмірності першого аргументу;
- 5) при виявленні в імені змінної значка «'» або конструкції « $\partial \dots | \partial \dots$ » (означення диференціювання), розмірність будується як дріб, у чисельнику якого береться розмірність змінної до знаку «'» (після знаку « ∂ » до знаку « ∂ »), а в знаменнику – після знаку «'» (після знаку « ∂ »);
- 6) обробка унарних операцій та функцій:
 - a) **sqrt** – аргумент має квадрат розмірності, результат має відповідну розмірність;
 - b) **sin, cos, tg** – аргумент в радіанах, результат – безрозмірна величина;
 - c) **arcsin, arctg, arccos** – аргумент безрозмірна величина, результат – радіани;
 - d) **exp, ln, sh, ch, arsh, rand** (генератор випадкових чисел), **!** (факторіал) – аргумент і результат – безрозмірні величини;
 - e) – (унарний мінус), **abs, ceil, floor** – аргумент і результат мають однакою розмірність;
 - f) **summ, intg, root** – сума, інтеграл і корінь функції – формули функцій, як і змінна, і межі інтегрування і значення кореня, можуть мати будь-яку розмірність, індекси і межі підсумовування – безрозмірні, результат має розмірність для суми, яка збігається з розмірністю функції суми, для інтеграла розмірність дорівнює добутку розмірності підінтегральної функції на розмірність змінної інтегрування;
 - g) **ipl, spln** – лінійна і сплайнова інтерполяція – масиви аргументів та значень функції (числові або формульні) можуть мати будь-яку розмірність (передбачається, що розмірність всіх елементів масиву аргументів або функції однакою), розмірність результату збігається з розмірністю елементів масиву функцій;
- 7) при обчисленні розмірності формули, що містить константи, змінні, унарні і бінарні операції, одиниця виміру результату обчислюється за алгоритмом:
 - a) розкриваються згорнуті розмірності $\left(\text{наприклад, } Дж = H \cdot m = \frac{кг \cdot м^2}{с^2} \right);$
 - b) розмірності зі ступенями та коренями представляються відповідними добутками і дробом;
 - c) вся формула розмірності представляється одним дробом з добутком множників в чисельнику і добутком множників в знаменнику, розташованих, наприклад, за абеткою;
 - d) це дає змогу видалити з упорядкованих списків чисельника і знаменника однакові множники і тим самим спростити отриманий вираз;
 - e) отримані вирази розмірності згортаються, якщо можна, в похідні інтегровані одиниці $\left(\text{наприклад, } \frac{кг \cdot м^2}{с^2} = H \cdot m = Дж \right);$
- 8) вказану роботу слід проводити програмі, коли знайдеться хоча б у одній змінній позначення формули розмірності.

Продемонструємо обчислення розмірності тангенціального прискорення і радіусу кривизни в наведеному прикладі:

$$[at] = \frac{см / c \cdot см / c^2}{см / c} \rightarrow \frac{c \cdot см \cdot см}{c \cdot c \cdot c \cdot см} \rightarrow \frac{см}{c \cdot c} = см / c^2, \quad [ro] = \frac{(см / c)^2}{см / c^2} \rightarrow \frac{c \cdot c \cdot см \cdot см}{c \cdot c \cdot см} = см.$$

Визначення одиниць виміру в завданнях статки. Рівняння статки отримуються в КіДиМ з рівнянь (1) виключенням інерційних складових лівої частини і урахуванням (при наявності) серед активних сил пружних сил:

$$\mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (2)$$

де $\mathbf{W}_C = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{q}} \right]$ – структурна матриця сил пружності, що визначається через структури координат пружних елементів $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q})$; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з характеристик пружних елементів – коефіцієнтів жорсткостей.

Ці рівняння дають змогу або визначити невідомі сили (частіше всього реакції в'язів), що врівноважують інші сили, або знайти положення рівноваги – компоненти вектору $\boldsymbol{\gamma}$ (в таких випадках вони можуть входити в ліву частину нелінійно).

Приклад 2. Розглянемо для демонстрації завдань визначення розмірностей в таких задачах просту задачу розрахунку реакцій закладення (рис. 2), де показані відомі навантаження – два розподілені інтенсивністю q_1 і q_2 , сила \vec{P} , момент пари M , та невідомі – силові компоненти закладення \vec{X}_A , \vec{Y}_A та момент пари M_A .

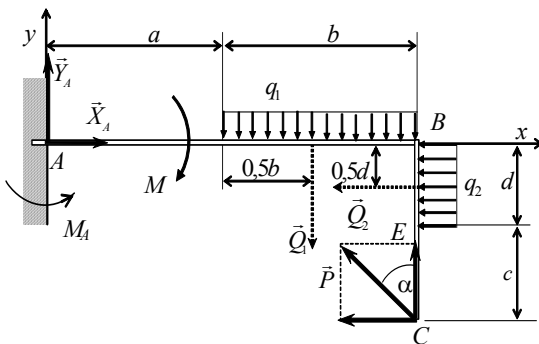


Рис. 2 – Сили, що діють на балку.

Для переведення реакцій \vec{X}_A , \vec{Y}_A , M_A ідеальної в'язі – закладення – в розряд активних сил, за принципом звільнення від в'язей балка «звільняється» і тоді може рухатися в площині рисунка, тим самим може здійснювати плоско-паралельний рух.

Оберемо для нього узагальнені координати δx_A , δy_A , $\delta \varphi_A$. Тоді переміщення точок прикладання сил \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \vec{P} (структури) становлять:

$$\begin{aligned} \delta x_C &= \delta x_A + BC \cdot \delta \varphi_A, & \delta y_C &= \delta y_A + AB \cdot \delta \varphi_A, \\ \delta y_{Q1} &= \delta y_A + (a + 0.5b) \delta \varphi_A, & \delta x_{Q2} &= \delta x_A + 0.5d \cdot \delta \varphi_A. \end{aligned} \quad (3)$$

Тоді у згоді з методикою КіДиМ треба задати початкові дані і силові елементи:

Дані: # $q_1=3$, Н/м; $q_2=6$, Н/м; $P=2$, Н; $M=10$, Н·м; $a=1$, м; $b=1$, м; $c=0.5$, м; $d=0.5$, м; $Q_1=q_1 \cdot b$; $Q_2=q_2 \cdot d$; $\alpha=\pi \text{ } ^\circ/180$;

Силові елементи:

$\mathbf{P} \mathbf{X}_A \cdot \delta x_A = X_A$; $\mathbf{P} \mathbf{Y}_A \cdot \delta y_A = Y_A$; $\mathbf{P} \mathbf{M}_A \cdot \delta \varphi_A = M_A$; $\mathbf{P} \mathbf{M} \cdot \delta \varphi_A = -M$; $\mathbf{P} \mathbf{Q}_1 \cdot \delta y_{Q1} = -Q_1$; $\mathbf{P} \mathbf{Q}_2 \cdot \delta x_{Q2} = -Q_2$; $\mathbf{P} \cdot \delta x_C = -P \cdot \sin(\alpha)$; $\mathbf{P} \cdot \delta y_C = P \cdot \cos(\alpha)$;

Для того, щоб встановити розмірності узагальнених координат і невідомих задачі X_A , Y_A , M_A спочатку з даних встановлюємо $[Q_1] = [Q_2] = H$, $[\alpha] = \text{рад}$. Потім треба залучити енергетичний сенс силових елементів, бо безпосередньо з них встановити розмірності правих і лівих частин їх запису неможливо (вони можуть описувати силу або момент, або будь-що). З енергетичної точки зору силовий елемент задає роботу (точніше, віртуальну роботу) сили або пари, або чогось іншого. Добуток характеристики (правої частини) силового елементу на варіацію його координати дає віртуальну роботу. Запишемо це так:

$$[\mathbf{P}] \cdot [\boldsymbol{\rho}] = [\mathbf{E}], \quad (4)$$

де позначено одиниці: $[\mathbf{E}]$ – роботи (енергії); $[\mathbf{P}]$ – характеристики; $[\boldsymbol{\rho}]$ – координати силового елементу.

Виходячи з цього, п'ять останніх силових елементів дають:

$$[\delta y_{Q1}] = [\delta x_{Q2}] = [\delta x_C] = [\delta y_C] = m, \quad [\delta \varphi_A] = \text{рад}.$$

Після чого, з виразів для (3) відповідно до властивості 1) встановлюємо: $[\delta y_A] = [\delta x_A] = m$. Тоді перші три елементи дають розмірності невідомим:

$$[X_A] = [Y_A] = H, \quad [M_A] = H \cdot m.$$

Зрозуміло, що описане розв'язання задачі можна отримати шляхом декількох переглядів даних і силових елементів, зменшуючи на кожному перегляді число невідомих розмірностей визначенням їх з рівнянь з одним невідомим, поки їх не стане зовсім.

Поряд з цим є ще один алгоритм визначення одиниць виміру невідомих в задачах статки. Для цього слід скористатися *рівнянням рівноваги*, що отримує КіДиМ. В даному випадку це рівняння:

$$X_A - Q_2 - P \sin \alpha = 0, Y_A - Q_1 + P \cos \alpha = 0, M_A - M - Q_1 \left(a + \frac{b}{2} \right) - Q_2 \frac{d}{2} + P \cos \alpha (a + b) - P \sin \alpha (d + c) = 0.$$

Звідки, за властивістю 1), відразу отримаємо: $[X_A] = [Y_A] = H$, $[M_A] = H \cdot m$. Але для встановлення розмірностей узагальнених координат слід також звернутися до виразів силових елементів. При такому підході все робиться за один прохід.

Визначення одиниць виміру в завданнях динаміки. В завданнях динаміки зустрічаються всі можливі в описах механічних моделей елементи – силові, інерційні, пружні і дисипативні. Тому зразу отримаємо формули, що зв'язують координати і характеристики елементів.

Між розмірностями характеристик і розмірностями координат елементів механічної моделі КіДиМ існують залежності, обумовлені тим, що з них можна збирати енергетичні характеристики системи. З інерційних елементів легко збирається кінетична енергія, з пружних – потенціальна, з силових – теж потенціальна, а також активна віртуальна робота, з дисипативних – швидкість розсіювання повної енергії системи. Символічно запишемо зазначені елементи в випадках користування лише геометричними структурами (нижче, окремо, буде розглянуто випадок з диференціальними структурами):

$$J \cdot \alpha = m; D \cdot \beta = d; C \cdot \gamma = c; P \cdot \psi = p,$$

де m, d, c, p – характеристики; $\alpha, \beta, \gamma, \psi$ – координати, відповідно, інерційного, дисипативного, пружного і силового елементів.

Оскільки кінетична енергія інерційного елемента, функція дисипації дисипативного елемента, потенційна енергія пружного елемента і віртуальна робота силового елемента обчислюються за формулами:

$$T = 0.5m \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, F = 0.5d \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2, \Pi = 0.5c\gamma^2, \delta A = p\delta\psi,$$

то отримаємо відповідні співвідношення для розмірностей:

$$[M] \cdot \left(\frac{[A]}{[T]} \right)^2 = [E], [D] \cdot \left(\frac{[B]}{[T]} \right)^2 = \frac{[E]}{[T]}, [C] \cdot [\Gamma]^2 = [E], [F] \cdot [\Psi] = [E],$$

де в квадратних дужках вказані розмірності: $[E]$ – енергії, $[T]$ – часу, $[A]$ і $[M]$, $[B]$ і $[D]$, $[\Gamma]$ і $[C]$, $[\Psi]$ і $[F]$ – координат і характеристик інерційного, дисипативного, пружного і силового елемента відповідно.

Розмірність часу в знаменнику з'являється через диференціювання за часом. Запишемо прямі і обернені формули зв'язку розмірностей координат і характеристик з відповідних елементів у вигляді:

$$[M] = \frac{[E] \cdot [T]^2}{[A]^2}, [D] = \frac{[E] \cdot [T]}{[B]^2}, [C] = \frac{[E]}{[\Gamma]^2}, [F] = \frac{[E]}{[\Psi]}, \quad (5)$$

$$[A] = [T] \sqrt{\frac{[E]}{[M]}}, [B] = \sqrt{\frac{[E] \cdot [T]}{[D]}}, [\Gamma] = \sqrt{\frac{[E]}{[C]}}, [\Psi] = \frac{[E]}{[F]}. \quad (6)$$

Наприклад, якщо $[E] = Дж = \frac{\kappa \cdot m^2}{c^2}$, $[A] = m$, $[T] = c$, то $[M] = \kappa$, тобто отримаємо розмірність маси;

якщо $[E] = Дж = \frac{\kappa \cdot m^2}{c^2}$, $[A] = рад$, $[T] = c$, то $[M] = \kappa \cdot m^2$, тобто виходить розмірність моменту інерції і так далі.

Зведемо до таблиці (табл. 1) розмірності координат і характеристик елементів в системі одиниць СІ.

Таблиця 1 – Співвідношення одиниць виміру координат і значень елементів механічних моделей

Елемент	Координата	Характеристика	Елемент	Координата	Характеристика
Інерційний	m	κ	Пружний	m	$H / m = \kappa / c^2$
	$рад$	κm^2		$рад$	$H_m = \kappa m^2 / c^2$
Дисипативний	m	κ / c	Силовий	m	H
	$рад$	$\kappa m^2 / c$		$рад$	$H_m = \kappa m^2 / c^2$

Приклад 3. Розглянемо приклад розрахунку закону руху механічної системи на рис. 3.

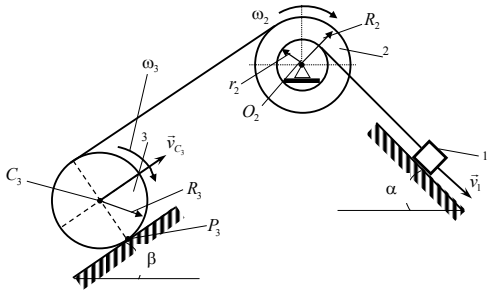


Рис. 3 – Схема механічної системи.

Задано маси тіл $m_1 = 200 \text{ кг}$, $m_2 = 20 \text{ кг}$, $m_3 = 40 \text{ кг}$, їх радіуси $r_2 = 0,35 \text{ м}$, $R_2 = 0,5 \text{ м}$, $R_3 = 0,4 \text{ м}$, коефіцієнт тертя $f_1 = 0,1$, тіло 3 передбачається круговим циліндром, для тіла 2 задано радіус інерції $\rho_2 = 0,3 \text{ м}$. Тоді оберемо за узагальнену координату переміщення тіла 1 – x_1 , задамо 4 інерційних елемента (для плоскопаралельного руху тіла 3 потрібно 2 елементи) і 3 – силових – для сили ваги і сили тертя тіла 1 та сили ваги тіла 3:

$$\begin{aligned} J.x_1 &= m_1; & J.\varphi_2 &= J_2; & J.x_{C3} &= m_3; & J.\varphi_3 &= J_3; \\ P.x_1 &= m_1 * g * \sin \alpha; & Pmp.x_1 &= -f_1 * m_1 * g * \cos \alpha; \\ P.x_{C3} &= -m_3 * g * \sin \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Додамо формули для структур:

$$\varphi_2 = x_1 / r_2; \quad \varphi_3 = 0.5 * \varphi_2 * R_2 / R_3; \quad x_{C3} = \varphi_3 * R_3; \quad (8)$$

та моментів інерції:

$$J_2 = m_2 * \rho_2^2; \quad J_3 = 0.5 * m_3 * R_3^2.$$

За логікою запропонованого методу визначення розмірностей координат і характеристик елементів через енергетичні співвідношення відразу отримаємо:

$$[J_2] = [J_3] = \text{кг} \cdot \text{м}^2, \quad [x_1] = [x_{C3}] = \text{м}, \quad [\varphi_2] = [\varphi_3] = \text{рад}.$$

Також тривіально встановити ці розмірності через динамічне рівняння, яке тут одне, оскільки число степенів свободи дорівнює одному:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} J_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} J_3 \ddot{\varphi}_3 + \frac{\partial x_{C3}}{\partial x_1} m_3 \ddot{x}_{C3} = m_1 g \sin \alpha - \frac{\partial x_{C3}}{\partial x_1} m_3 g \sin \beta - f_1 m_1 g \cos \alpha.$$

Оскільки праворуч стоять складові з розмірністю сили, узагальнена координата x_1 повинна мати розмірність довжини, і з формул для структур (8) встановлюємо одиниці для координат φ_2 , φ_3 та x_{C3} .

Дещо складніше буде ситуація, коли в задачі будуть використовуватись псевдокоординати (точніше, псевдошвидкості, бо псевдокоординати безпосередньо в рівняння не входять). Це характерно для розв'язання неголономних систем або просторових систем.

Приклад 4. Розглянемо опис задачі про рух гіроскопу, випадок Ейлера. Тут зовнішні сили і моменти не впливають на його рух, не входять до динамічних рівнянь, тому з динамічних рівнянь встановити одиниці виміру змінних не вдається, що ускладнює наше завдання. Приведемо опис моделі гіроскопа. За узагальнені координати обрано кути Ейлера – φ , ψ , θ . Гіроскоп представимо диском радіуса R , масою m .

$$\# \text{Інерційні елементи:} \# \quad J.\omega_x = J_x; \quad J.\omega_y = J_y; \quad J.\omega_z = J_z; \quad (9)$$

$\# \omega_x, \omega_y, \omega_z$ – псевдошвидкості, для яких задано диференціальні структури – кінематичні рівняння Ейлера: $\#$

$$\omega_x = \psi' \sin(\theta) \sin(\varphi) + \theta' \cos(\varphi); \quad \omega_y = \psi' \sin(\theta) \cos(\varphi) - \theta' \sin(\varphi); \quad \omega_z = \varphi' + \psi' \cos(\theta); \quad (10)$$

$\#$ Інерційні і геометричні параметри: $\# \quad m=10, \text{ кг}; R=0,1, \text{ м}; \quad J_x=J_y=0,25 * m * R^2; \quad J_z=0,5 * m * R^2;$

Використання формул (6) для виразів (9) приведе до помилки. Суть в тому, що параметри ω_x , ω_y , ω_z виражаються через похідні узагальнених координат, тому це диференціальні структури і це свідчить про те, що треба використовувати замість формул (6) для інерційних та дисипативних параметрів інші формули, а саме:

$$[A] = \sqrt{\frac{[E]}{[M]}}, \quad [B] = \sqrt{\frac{[E]}{[D] \cdot [T]}}.$$

Тоді за першою формулою отримаємо розмірність для ω_x , ω_y , ω_z , а для кутів Ейлера – з формул (10):

$$[\omega_x] = \sqrt{\frac{[E]}{[J_x]}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кгм}^2}} = \sqrt{\frac{\text{кгм}^2}{\text{с}^2 \text{кгм}^2}} = \text{рад} / \text{с}; \quad [\psi] = [\theta] = [\varphi] = [\omega_x] \cdot [T] = \text{рад}.$$

На закінчення треба підкреслити, що позначення розмірності – це формула, тому оперувати з ними потрібно як з формулами, а не з рядками і числами, як реалізовано в деяких програмах. Крім того, важливо забезпечити можливість позначення змінних задачі незалежно від позначень змінних в розмірностях – вони повинні розміщуватись в різних просторах даних.

Перспективи подальших досліджень. Треба поширювати використання одиниць виміру при розв'язанні задач в КіДиМ, тоді можна ще краще налагодити описаний тут алгоритм. Тут є тонкі місця, пов'язані, перш за все, з використанням одиниць виміру кутів, бо дуже складно розділяти градусну і радіанну міри. Тому для уточнення програма в безвихідних ситуаціях звертається до користувача. Також потребує налагодження алгоритму використання користувачем будь-якої системи одиниць, аж до своєї власної. Така можливість є і тепер шляхом використання спеціальної інструкції РОЗМІРНОСТІ, в якій вказуються позначення трьох основних механічних одиниць – маси, довжини, та часу. Обговорити тут таку можливість через обмеженість об'єму статті не видається можливим. Також для завершення такої роботи потрібна можливість мовної локалізації.

Висновки. У роботі представлено результати досліджень реалізації в програмному коді спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ, розробленого алгоритму використання розмірностей геометричних та фізичних величин в початкових даних і розрахунків їх для отриманих результатів. Показано, що найбільш результативно представляти розмірності формулами, що спрощує їх читання, перетворення (скорочення, перепозначення інтегрованими величинами, тощо), розрахунок одиниць для нових отриманих в результаті роботи обчислювальних алгоритмів формул задачі. Сформульовано діагностичні правила використання розмірностей в будь-яких завданнях механіки, що дозволяє обчислювати розмірності невідомих задачі і діагностувати помилки в початкових даних. Тут повністю реалізовано відомий принцип, що розв'язання задачі міститься в її початковому формулюванні. Від користувача тут потрібно вказати тільки розмірності величин, які задаються з числовими значеннями.

Список літератури

1. Седов Л. И. Методы теории размерностей и теории подобия в механике. – М., Л. : Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1944. – 136 с.
2. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – №7. – С. 130 – 138.
3. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера – Лагранжа // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42. – № 9. – С. 106 – 115.
4. Андреев Ю. М. Аналитическое компьютерное построение первых интегралов движения дискретных механических систем // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2017. – № 30(1252). – С. 5 – 12.
5. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений : междунар. науч.-техн. сбор. НАН Украины. – К. : ИПП им. Писаренко Г. С., Ассоциация «Надежность машин и сооружений». – 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
6. Брошура SI Міжнародного бюро з мір та ваг. – Режим доступу : http://www.bipm.fr/en/si/si_brochure/. – Дата звертання : 5 вересня 2023.
7. ДСТУ ISO 80000-1:2016. Величини та одиниці. Частина 1. Загальні положення (ISO 80000-1:2009; ISO 80000-1:2009/Cor.1:2011, IDT). – К. : Національний науковий центр «Інститут метрології», 2016. – 41 с.
8. Bennich-Bjorkman O., McKeever S. The next 700 unit of measurement checkers // SLE 2018: Proceedings of the 11th ACM SIGPLAN International Conference on Software Language Engineering – October, 2018. – pp. 121 – 132. DOI: 10.1145/3276604.3276613.
9. Tudor Antoniu, Paul A. Steckler, Shriram Krishnamurthi, Erich Neuwirth, Matthias Felleisen. Validating the Unit Correctness of Spreadsheet Programs // In Proceedings of the 26th International Conference on Software Engineering (ICSE '04). IEEE Computer Society. – Washington, DC, USA, 2004. – P. 439 – 448 (<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=998675.999448>).
10. Gundry A. A typechecker plugin for units of measure : Domain-specific constraint solving in GHC Haskell // Haskell '15: Proceedings of the 2015 ACM SIGPLAN Symposium on Haskell. – August 2015. – pp. 11–22. DOI: 10.1145/2804302.2804305.
11. McBride Conor, Nordvall-Forsberg Fredrik. Type systems for programs respecting dimensions // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XII. Advances in Mathematics for Applied Sciences. – World Scientific, 2022. – pp. 331 – 345. DOI: 10.1142/9789811242380_0020.
12. Бертяев В. Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. – СПб : БХВ–Петербург, 2005. – 752 с.
13. Глушаков С. В., Жакин И. А., Хачиров Т. С. Математическое моделирование : Учебный курс. – Харьков : Фолио, 2001. – 524 с.
14. Доев В. С., Доронин Ф. А. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad. – СПб. : Лань, 2021. – 586 с.
15. Ефремов Л. В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. – СПб. : Наука, 2008. – 276 с.
16. Griffioen P. (2019). A unit-aware matrix language and its application in control and auditing (PDF) (Thesis). Archived (PDF) from the original on 21 February 2020. – University of Amsterdam, 2020. – Режим доступу : [hdl:11245.1/fd7be191-700f-4468-a329-4c8ecd9007ba](https://hdl.handle.net/11245.1/fd7be191-700f-4468-a329-4c8ecd9007ba). – Дата звертання : 6 вересня 2023.

References (transliterated)

1. Sedov L. I. *Metody teorii razmernostey i teorii podobiya v mekhanike* [Methods of dimension and simmlarity theories in mechanics]. Moscow, Leningrad, Gos. izd-vo tekhniko-teoreticheskoy lit-ry Publ., 1944. 136 p.
2. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh sistem tverdykh tel [On dynamics of holonom solid systems]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2005, vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
3. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Komp'yuternoe modelirovanie negolonomnykh sistem tverdykh tel na osnove printsipa Da-lamberta – Lagranzha [Computer mideling of holonom solid systems based on the d'Alamber–Lagrange principle]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 106–115.
4. Andreev Yu. M. Analiticheskoe komp'yuternoe postroenie pervykh integralov dvizheniya diskretnykh mekhanicheskikh sistem [Analytical computer construction of the first integrals of the equations of motion of discrete mechanical systems]. *Visnik NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 30 (1252), pp. 5–12.
5. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebrы dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [New computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonom and non-holonom

- systems of solids]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy : mezhdunar. nauch.-tekh. sbor. NAN Ukrainy* [Reliability and durability of machines and structures : international scientific and technical digest of the National Academy of Science of Ukraine]. Kyiv, IPP im. Pisarenko G. S., Assotsiatsiya «Nadezhnost' mashin i sooruzheniy» Publ., 2006, vol. 26, pp. 11–18.
6. *Broshura SI Mizhnarodnogo byuro z mir ta vag* [SI Brochure of the International Bureau of Weights and Measures]. Available at : http://www.bipm.fr/en/si/si_brochure/ (accessed 5 September 2023).
 7. *DSTU ISO 80000-1:2016. Velychyny ta odynytsi. Chastyna 1. Zagal'ni polozhennya (ISO 80000-1:2009; ISO 80000-1:2009/Cor.1:2011, IDT)* [Quantities and units. Part 1. General provisions (ISO 80000-1:2009; ISO 80000-1:2009/Cor.1:2011, IDT)]. Kyiv, Natsional'nyy naukovyy tsentr "Instytut metrologiyi" Publ., 2016. 41 p.
 8. Bennich-Bjorkman O., McKeever S. The next 700 unit of measurement checkers. *SLE 2018: Proceedings of the 11th ACM SIGPLAN International Conference on Software Language Engineering*, October, 2018, pp. 121 – 132. DOI: 10.1145/3276604.3276613.
 9. Tudor Antoniu, Paul A. Steckler, Shriram Krishnamurthi, Erich Neuwirth, Matthias Felleisen. Validating the Unit Correctness of Spreadsheet Programs. In *Proceedings of the 26th International Conference on Software Engineering (ICSE '04)*. IEEE Computer Society. Washington, DC, USA, 2004. pp. 439–448 (<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=998675.999448>).
 10. Gundry A. A typechecker plugin for units of measure : Domain-specific constraint solving in GHC Haskell. *Haskell '15: Proceedings of the 2015 ACM SIGPLAN Symposium on Haskell*, August 2015, pp. 11–22. DOI: 10.1145/2804302.2804305.
 11. McBride Conor, Nordvall-Forsberg Fredrik. Type systems for programs respecting dimensions. *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XII. Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, 2022, pp. 331–345. DOI: 10.1142/9789811242380_0020.
 12. Bertyaev V. D. *Teoreticheskaya mekhanika na baze Mathcad. Praktikum* [MathCad based theoretical mechanics. Practicum]. Sankt-Petersburg, BKhV–Petersburg Publ., 2005. 752 p.
 13. Glushakov S. V., Zhakin I. A., Khachirow T. S. *Matematicheskoe modelirovanie : Uchebnyy kurs* [Mathematical modeling : Taught course]. Kharkov, Folio Publ., 2001. 524 p.
 14. Doev V. S., Doronin F. A. *Sbornik zadaniy po teoreticheskoy mekhanike na baze Mathcad* [Collectio of tasks in MathCad based thworetical mechanics]. Sankt-Petersburg, Lan' Publ., 2021. 586 p.
 15. Efremov L. V. *Teoriya i praktika issledovaniy krutil'nykh kolebaniy silovykh ustanovok s primeneniem kompyuternykh tekhnologiy* [Theory and practics in the study of torcional oscillations of installations using computer technologies]. Sankt-Petersburg, Nauka Publ., 2008. 276 p.
 16. Griffioen P. (2019). *A unit-aware matrix language and its application in control and auditing* (PDF) (Thesis). Archived (PDF) from the original on 21 February 2020. University of Amsterdam, 2020. Available at : [hdl:11245.1/fd7be191-700f-4468-a329-4c8ecd9007ba](https://hdl.handle.net/11245.1/fd7be191-700f-4468-a329-4c8ecd9007ba) (accessed 6 September 2023).

Надійшла (received) 19.08.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Андреев Юрий Михайлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерного моделирования процессов и систем, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Шабанов Геннадій Вікторович – магістрант, студент кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 596-88-86; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

Шабанов Геннадий Викторович – магистрант, студент кафедры компьютерного моделирования процессов и систем, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 596-88-86; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

Shabanov Hennadii Viktorovich – Master Student, student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (050) 596-88-86; e-mail: gennady.shabanov@gmail.com.

А. Я. БОМБА, І. П. МОРОЗ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У P-I-N-ДІОДІ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

Робота присвячена розробці математичної моделі динамічного процесу формування електронно-діркової плазми активної області (i -області) напівпровідникового $p-i-n$ -діода у режимі прямого включення із поданням на діод гармонічного сигналу. Основою моделі є нелінійна нестационарна сингулярно збурена крайова задача для системи рівнянь неперервності електронно-діркових струмів та рівняння Пуассона. Алгоритм пошуку розподілів концентрації носіїв заряду у плазмі та потенціалу будується на основі асимптотичного методу приміжових поправок та методу Фур'є. У ході виконання досліджень запропоновано методику проведення декомпозиції нелінійної задачі, що ґрунтується на розвитку методів теорії збурень. Вихідна нелінійна задача приводиться до рекурентної послідовності лінійних стаціонарних крайових задач, які розв'язуються класичними і частково оригінальними аналітико-числовими методами. Виділення приміжових поправок у розв'язку задачі забезпечує, зокрема, на відміну від класичного наближення амбіполярної дифузії, адекватний опис поведінки напруженості електричного поля в активній області $p-i-n$ -діодів. Отримані результати досліджень надають можливість висвітлити особливості формування імпедансних характеристик $p-i-n$ -структур. Результати роботи глибше розкривають природу фізичних процесів у досліджуваній технічній системі та спрямовані на удосконалення методики моделювання і проектування відповідних керуючих пристроїв напівпровідникової електроніки.

Ключові слова: метод збурень, сингулярно збурена нестационарна крайова задача, асимптотичний ряд, приміжова функція, напівпровідниковий $p-i-n$ -діод, електронно-діркова плазма.

А. Я. БОМБА, И. П. МОРОЗ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В P-I-N-ДИОДЕ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Работа посвящена разработке математической модели динамического процесса формирования электронно-дырочной плазмы в активной области (i -области) полупроводникового $p-i-n$ -диода в режиме прямого смещения с подачей на диод гармонического сигнала. Основой модели является нелинейная нестационарная сингулярно возмущенная крайовая задача для системы уравнений непрерывности электронно-дырочных токов и уравнения Пуассона. Алгоритм поиска распределений концентрации носителей заряда в плазме и потенциала строится на основе асимптотического метода пограничных функций и метода Фурье. В ходе выполнения исследований предложена методика проведения декомпозиции нелинейной задачи, которая основывается на развитии методов теории возмущений. Исходная нелинейная задача приводится к рекуррентной последовательности линейных стационарных краевых задач, решаемых классическими и частично оригинальными аналитико-числовыми методами. Выделение пограничных поправок в решении задачи обеспечивает, в частности, в отличие от классического приближения амбиполярной диффузии, адекватное описание поведения напряженности электрического поля в активной области $p-i-n$ -диодов. Полученные результаты исследований позволяют выявить особенности формирования импедансных характеристик $p-i-n$ -структур. Результаты работы глубже раскрывают природу физических процессов в исследуемой технической системе и направлены на усовершенствование методики моделирования и проектирования соответствующих управляющих полупроводниковых устройств.

Ключевые слова: метод возмущений, сингулярно возмущенная нестационарная крайовая задача, асимптотический ряд, пограничная функция, полупроводниковый $p-i-n$ -диод, электронно-дырочная плазма.

A. YA. BOMBA, I. P. MOROZ

SIMULATION OF DYNAMIC PROCESSES IN A P-I-N DIODE BY THE METHODS OF PERTURBATION THEORY

In the paper a mathematical model of the dynamic process of the electron-hole plasma formation in the active region (i -region) of a semiconductor $p-i-n$ -diode in the direct bias mode with a harmonic signal fed on the diode is developed. The basis of the model is a nonlinear nonstationary singularly perturbed boundary value problem for a system of continuity equations of electron-hole currents and Poisson's equation. The algorithm for searching the charge carrier concentration distributions and the potential distribution is based on the asymptotic method of boundary functions and the Fourier method. In the course of the research, a technique for decomposing a nonlinear problem based on the development of perturbation theory methods was proposed. The initial nonlinear problem is reduced to a recurrent sequence of linear stationary boundary value problems, solved by classical and partially original analytical-numerical methods. The identification of the boundary functions in the solution of the problem provides, in particular, in contrast to the classical approximation of ambipolar diffusion, an adequate description of the electric field strength behavior in the active region of $p-i-n$ -diodes. The obtained research results shed light on the peculiarities of the formation of the impedance characteristics of $p-i-n$ -structures. The results of the work reveal more deeply the nature of the physical processes in the studied technical system and are aimed at improving the methodology for modeling and designing control semiconductor devices.

Key words: perturbation method, singularly perturbed nonstationary boundary value problem, asymptotic series, boundary function, semiconductor $p-i-n$ -diode, electron-hole plasma.

Вступ і загальна постановка задачі. В основу принципу роботи напівпровідникового $p-i-n$ -діода покладено можливість управління провідністю електронно-діркової плазми, яка формується в активній області (i -області) діода. Для дослідження електропровідних характеристик i -області $p-i-n$ -діодів широко використовується дифузійно-дрейфова модель [1–4], яку формують рівняння неперервності електронного та діркового струмів та рівняння Пуассона з відповідними граничними умовами. Для одновимірного випадку ($\Omega = \{(x) :$

$0 < x < w$), доцільність розгляду якого обумовлена особливостями геометричної будови пристрою, постановка модельної задачі має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \mu^2 \frac{\partial E}{\partial x} = (p - n + N_d); \\ B_n \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x} E + n \frac{\partial E}{\partial x} - A_n n; \\ B_p \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} E - p \frac{\partial E}{\partial x} - A_p p. \end{cases} \quad (1)$$

В (1) використано позначення: $E(x, t)$, $n(x, t)$, $p(x, t)$ – шукані функції напруженості електричного поля, розподілів концентрацій електронів і дірок в активній області $p-i-n$ -діода відповідно (використовується нормування $\tilde{x} = \frac{x}{w}$, $\tilde{E} = \frac{Eew}{kT}$, $\tilde{n} = \frac{n}{N_i}$, $\tilde{p} = \frac{p}{N_i}$; у викладках символ « \sim » опускається); $\mu^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 w^2 N_i}$ (малий параметр $\mu \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$); ε – відносна діелектрична стала; ε_0 – діелектрична стала; w – характерний розмір активної області діода; e – заряд електрона; N_i – концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику; k – стала Больцмана; T – температура ($^{\circ}K$); $A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}$, $A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}$, $B_n = \frac{w^2}{D_n}$, $B_p = \frac{w^2}{D_p}$, D_n , D_p – коефіцієнти дифузії дірок та електронів відповідно; τ_n^* , τ_p^* – характерні часи рекомбінації носіїв заряду в об'ємі активної області (у даній математичній моделі є сталими, які залежать, як і коефіцієнти дифузії, від обраного матеріалу напівпровідника); $N_d(x)$ – профіль легування.

На межах активної області під дією струму прямого зміщення J (J – густина струму), прикладеної різниці потенціалів U та нестационарного сигналу (змінюється за гармонічним законом: $J^{\sim}(t) = J_m e^{j\omega t}$, $U^{\sim}(t) = U_m e^{j\omega t}$, де J_m , U_m – амплітуди коливань відповідно струму і напруги, ω – кругова частота коливань, $j^2 = -1$) відбувається інжекція носіїв заряду в активну область [1, 2]. При цьому потоки носіїв заряду мають дифузійні та рекомбінаційні компоненти. Відповідно, використовуємо граничні умови наступного виду:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial n}{\partial x} - \gamma_n n \right|_{x=0} &= \frac{(J + J^{\sim}(t)) w}{e D_n N_i}, \quad \left. -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_p p \right|_{x=0} = 0; \\ \left. \frac{\partial n}{\partial x} - \gamma_n n \right|_{x=1} &= 0, \quad \left. -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma_p p \right|_{x=1} = \frac{(J + J^{\sim}(t)) w}{e D_p N_i}, \\ E|_{x=0} &= 0, \quad E|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E dx = U + U^{\sim}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де γ_n , γ_p – коефіцієнти рекомбінації носіїв заряду на інжекційних контактах.

Розглядається процес на великих проміжках часу ($-\infty < t < \infty$) без початкових умов.

У літературних джерелах зустрічаються постановки задач, аналогічні до (1) – (3) (наприклад, [2]). Зазвичай у процесі аналізу таких задач з системи рівнянь вилучають нелінійні члени (наближення амбіполярної дифузії). Внаслідок цього втрачається частина інформації про властивості досліджуваної системи. У постановці (1) – (3) задача є сингулярно збуреною, і це є підставою для застосування методів теорії збурень для її розв'язання [5 – 12]. Зазначимо також, що раніше виконувались дослідження математичних моделей подібних технічних систем, зокрема $p-n$ -діодів [11], які відрізняються від (1) – (3) постановками задач.

Мета дослідження полягає у аналізі моделі нестационарного процесу формування електронно-діркової плазми в активній області $p-i-n$ -діодів під дією гармонічного сигналу методами теорії збурень, а також у виявленні основних складових цього процесу.

Схема декомпозиції розв'язку. Розв'язок задачі (1) – (3) зручно шукати у наступному вигляді:

$$E = E(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} E_s(x) e^{js\omega t}, \quad n = n(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} n_s(x) e^{js\omega t}, \quad p = p(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s(x) e^{js\omega t}. \quad (4)$$

Після підстановки (4) в (1) – (3) отримуємо задачу для пошуку стаціонарних компонент розв'язків (при

$N_d(x) = 0$:

$$\begin{cases} \mu^2 \frac{dE_0}{dx} = (p_0 - n_0), \\ \frac{d^2 n_0}{dx^2} + \frac{dn_0}{dx} E_0 + n_0 \frac{dE_0}{dx} - A_n n_0 = 0, \\ \frac{d^2 p_0}{dx^2} - \frac{dp_0}{dx} E_0 - p_0 \frac{dE_0}{dx} - A_p p_0 = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\left. \frac{dn_0}{dx} - \gamma_n w n_0 \right|_{x=0} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left. -\frac{dp_0}{dx} - \gamma_p w p_0 \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dn_0}{dx} - \gamma_n w n_0 \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{dp_0}{dx} - \gamma_p w p_0 \right|_{x=1} = -\frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$E_0|_{x=0} = 0, \quad E_0|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E_0 dx = U \quad (6)$$

та задачу для пошуку компонент розв'язку, що відповідають основній коливальній гармоніці (слабкий ефект, як показують експериментальні дані [2], породжений другою та вищими гармоніками, у досліджуваній системі розглядатись не буде):

$$\begin{cases} \mu^2 \frac{dE_1}{dx} = (p_1 - n_1), \\ \frac{d^2 n_1}{dx^2} + \frac{dn_0}{dx} E_1 + n_0 \frac{dE_1}{dx} + \frac{dn_1}{dx} E_0 + n_1 \frac{dE_0}{dx} - A_n n_1 - B_n j \omega n_1 = 0, \\ \frac{d^2 p_1}{dx^2} - \frac{dp_0}{dx} E_1 - p_0 \frac{dE_1}{dx} - \frac{dp_1}{dx} E_0 - p_1 \frac{dE_0}{dx} - A_p p_1 - B_p j \omega p_1 = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\left. \frac{dn_1}{dx} - \gamma_n w n_1 \right|_{x=0} = \frac{J_m}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left. -\frac{dp_1}{dx} - \gamma_p w p_1 \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dn_1}{dx} - \gamma_n w n_1 \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{dp_1}{dx} - \gamma_p w p_1 \right|_{x=1} = -\frac{J_m}{eD_p} \frac{w}{N_i},$$

$$E_1|_{x=0} = 0, \quad E_1|_{x=1} = 0, \quad \int_0^1 E_1 dx = U_m. \quad (8)$$

Сингулярно збурені задачі (5) – (6) та (7) – (8) пропонуємо розв'язувати методом примежових поправок [8]. Системи рівнянь (5), (7) (аналогічно до [8]) подамо у наступному вигляді:

$$\mu^2 \frac{dE_0}{dx} = F_{E_0}(p_0(x), n_0(x)), \quad \frac{d^2 n_0}{dx^2} - A_n n_0 = F_{n_0}(n_0(x), E_0(x)), \quad \frac{d^2 p_0}{dx^2} - A_p p_0 = F_{p_0}(p_0(x), E_0(x)); \quad (9)$$

$$\mu^2 \frac{dE_1}{dx} = F_{E_1}(p_1(x), n_1(x)), \quad \frac{d^2 n_1}{dx^2} - A_n^* n_1 = F_{n_1}(n_0(x), E_0(x), n_1(x), E_1(x)),$$

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} - A_p^* p_1 = F_{p_1}(p_0(x), E_0(x), p_1(x), E_1(x)), \quad (10)$$

де $A_n^* = A_n + j\omega B_n$, $A_p^* = A_p + j\omega B_p$.

За аналогією із [5 – 8] розв'язки задач (5) – (6) та (7) – (8) пропонуємо шукати у наступному вигляді:

$$n_l(x) = N_l(x) + \underline{N}_l(\underline{\xi}) + \overline{N}_l(\overline{\xi}); \quad p_l(x) = P_l(x) + \underline{P}_l(\underline{\xi}) + \overline{P}_l(\overline{\xi});$$

$$E_l(x) = \tilde{E}_l(x) + \underline{E}_l(\underline{\xi}) + \overline{E}_l(\overline{\xi}), \quad (11)$$

де $N_l(x)$, $P_l(x)$, $\tilde{E}_l(x)$ – регулярні компоненти розв'язків; $\underline{N}_l(\underline{\xi})$, $\underline{P}_l(\underline{\xi})$, $\underline{E}_l(\underline{\xi})$, $\overline{N}_l(\overline{\xi})$, $\overline{P}_l(\overline{\xi})$, $\overline{E}_l(\overline{\xi})$ – примежові поправки відповідно в околах точок $x=0$ та $x=1$ ($\underline{\xi} = \frac{x}{\mu}$, $\overline{\xi} = \frac{1-x}{\mu}$ – регуляризуючі розтяги); $l = 0, 1$.

Підстановка (11) у (9), (10) та виділення регулярних складових рівнянь і примежових поправок способом, аналогічним викладеному у [13], дозволяє переписати системи рівнянь (9), (10) так, що, зокрема, рівняння Пуассона для стаціонарних і нестаціонарних компонент набувають вигляду:

$$\mu^2 \frac{d(\tilde{E}_l(x) + \underline{E}_l(\underline{\xi}) + \overline{E}_l(\overline{\xi}))}{dx} = F_{E_l}(P_l(x) + \underline{P}_l(\underline{\xi}) + \overline{P}_l(\overline{\xi}), N_l(x) + \underline{N}_l(\underline{\xi}) + \overline{N}_l(\overline{\xi})) =$$

$$= \tilde{F}_{El}(x) + \underline{F}_{El}(\underline{\xi}) + \overline{F}_{El}(\overline{\xi}), \quad l = 0, 1, \quad (12.1)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{El}(x) &= F_{El}(P_l(x), N(x)) = P_l(x) - N_l(x); \\ \underline{F}_{El}(\underline{\xi}) &= F_{El}(P_l(\underline{\mu\xi}) + \underline{P}_l(\underline{\xi}), N_l(\underline{\mu\xi}) + \underline{N}_l(\underline{\xi})) - F_{El}(P_l(\underline{\mu\xi}), N_l(\underline{\mu\xi})) = \underline{P}_l(\underline{\xi}) - \underline{N}_l(\underline{\xi}), \\ \overline{F}_{El}(\overline{\xi}) &= F_{El}(P_l(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{P}_l(\overline{\xi}), N_l(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{N}_l(\overline{\xi})) - F_{El}(P_l(1 - \underline{\mu\xi}), N_l(1 - \underline{\mu\xi})) = \overline{P}_l(\overline{\xi}) - \overline{N}_l(\overline{\xi}). \end{aligned}$$

Відповідно, рівняння неперервності стаціонарного струму електронів має наступну структуру:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(N_0(x) + \underline{N}_0(\underline{\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi}))}{dx^2} - A_n(N_0(x) + \underline{N}_0(\underline{\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi})) = \\ & = F_{n0}(N_0(x) + \underline{N}_0(\underline{\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi}), \tilde{E}_0(x) + \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi})) = \tilde{F}_{n0}(x) + \underline{F}_{n0}(\underline{\xi}) + \overline{F}_{n0}(\overline{\xi}), \end{aligned} \quad (12.2)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n0}(x) &= F_{n0}(N_0(x), E_0(x)) = -\frac{d}{dx}(N_0(x)\tilde{E}_0(x)); \\ \underline{F}_{n0}(\underline{\xi}) &= F_{n0}(N_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{N}_0(\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi})) - F_{n0}(N_0(\underline{\mu\xi}), \tilde{E}_0(\underline{\mu\xi})) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}((N_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{N}_0(\underline{\xi}))(\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi}))) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(N_0(\underline{\mu\xi})\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi})) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(\underline{N}_0(\underline{\xi})\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + N_0(\underline{\mu\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi}) + \underline{N}_0(\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})); \\ \overline{F}_{n0}(\overline{\xi}) &= F_{n0}(N_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi}), \tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi})) - F_{n0}(N_0(1 - \underline{\mu\xi}), \tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi})) = \\ & = \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}((N_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi}))(\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi}))) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(N_0(1 - \underline{\mu\xi})\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi})) = \\ & = \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(\overline{N}_0(\overline{\xi})\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + N_0(1 - \underline{\mu\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi}) + \overline{N}_0(\overline{\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi})). \end{aligned}$$

Аналогічно до (12.2) подаємо рівняння неперервності стаціонарного струму дірок:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(P_0(x) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi}))}{dx^2} - A_p(P_0(x) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi})) = \\ & = F_{p0}(P_0(x) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi}), \tilde{E}_0(x) + \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi})) = \tilde{F}_{p0}(x) + \underline{F}_{p0}(\underline{\xi}) + \overline{F}_{p0}(\overline{\xi}), \end{aligned} \quad (12.3)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{p0}(x) &= F_{p0}(P_0(x), E_0(x)) = \frac{d}{dx}(P_0(x)\tilde{E}_0(x)); \\ \underline{F}_{p0}(\underline{\xi}) &= F_{p0}(P_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi})) - F_{p0}(P_0(\underline{\mu\xi}), \tilde{E}_0(\underline{\mu\xi})) = \\ & = \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}((P_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi}))(\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi}))) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(P_0(\underline{\mu\xi})\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi})) = \\ & = \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(\underline{P}_0(\underline{\xi})\tilde{E}_0(\underline{\mu\xi}) + P_0(\underline{\mu\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi})\underline{E}_0(\underline{\xi})); \\ \overline{F}_{p0}(\overline{\xi}) &= F_{p0}(P_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi}), \tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi})) - F_{p0}(P_0(1 - \underline{\mu\xi}), \tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi})) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}((P_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi}))(\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + \overline{E}_0(\overline{\xi}))) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(P_0(1 - \underline{\mu\xi})\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi})) = \\ & = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}}(\overline{P}_0(\overline{\xi})\tilde{E}_0(1 - \underline{\mu\xi}) + P_0(1 - \underline{\mu\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi}) + \overline{P}_0(\overline{\xi})\overline{E}_0(\overline{\xi})). \end{aligned}$$

Рівняння неперервності змінного струму електронів і дірок запишемо у наступному вигляді:

$$\frac{d^2(N_1(x) + \underline{N}_1(\underline{\xi}) + \overline{N}_1(\overline{\xi}))}{dx^2} - A_n^*(N_1(x) + \underline{N}_1(\underline{\xi}) + \overline{N}_1(\overline{\xi})) =$$

$$\begin{aligned}
&= F_{n1} \left(N_0(x) + \underline{N}_0(\underline{\xi}) + \bar{N}_0(\bar{\xi}), \tilde{E}_0(x) + \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \bar{E}_0(\bar{\xi}), N_1(x) + \underline{N}_1(\underline{\xi}) + \bar{N}_1(\bar{\xi}), \tilde{E}_1(x) + \underline{E}_1(\underline{\xi}) + \bar{E}_1(\bar{\xi}) \right) = \\
&= \tilde{F}_{n1}(x) + \underline{F}_{n1}(\underline{\xi}) + \bar{F}_{n1}(\bar{\xi}), \tag{12.4}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{n1}(x) &= F_{n1}(N_0(x), E_0(x), N_1(x), E_1(x)) = -\frac{d}{dx}(N_0(x)\tilde{E}_1(x)) - \frac{d}{dx}(N_1(x)\tilde{E}_0(x)), \\
\underline{F}_{n1}(\underline{\xi}) &= F_{n1}(N_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{N}_0(\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi}), N_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{N}_1(\underline{\xi}), \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_1(\underline{\xi})) - \\
&\quad - F_{n0}(N_0(\mu\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}), N_1(\mu\underline{\xi}), \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})) = \\
&= -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} \left((N_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{N}_0(\underline{\xi})) (\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_1(\underline{\xi})) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (N_0(\mu\underline{\xi}) \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})) - \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} \left((N_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{N}_1(\underline{\xi})) (\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi})) \right) + \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (N_1(\mu\underline{\xi}) \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})) = \\
&\quad = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (N_0(\underline{\xi}) \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + N_0(\mu\underline{\xi}) \underline{E}_1(\underline{\xi}) + N_0(\underline{\xi}) \underline{E}_1(\underline{\xi})) - \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (\underline{N}_1(\underline{\xi}) \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + N_1(\mu\underline{\xi}) \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \underline{N}_1(\underline{\xi}) \underline{E}_0(\underline{\xi})), \\
\bar{F}_{n1}(\bar{\xi}) &= F_{n1}(N_0(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{N}_0(\bar{\xi}), \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{E}_0(\bar{\xi}), N_1(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{N}_1(\bar{\xi}), \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{E}_1(\bar{\xi})) - \\
&\quad - F_{n1}(N_0(1-\mu\bar{\xi}), \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi}), N_1(1-\mu\bar{\xi}), \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})) = \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} \left((N_0(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{N}_0(\bar{\xi})) (\tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{E}_1(\bar{\xi})) \right) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} (N_0(1-\mu\bar{\xi}) \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} \left((N_1(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{N}_1(\bar{\xi})) (\tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi}) + \bar{E}_0(\bar{\xi})) \right) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} (N_1(1-\mu\bar{\xi}) \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi})) = \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} (\bar{N}_0(\bar{\xi}) \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi}) + N_0(1-\mu\bar{\xi}) \bar{E}_1(\bar{\xi}) + \bar{N}_0(\bar{\xi}) \bar{E}_1(\bar{\xi})) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}} (\bar{N}_1(\bar{\xi}) \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi}) + N_1(1-\mu\bar{\xi}) \bar{E}_0(\bar{\xi}) + \bar{N}_1(\bar{\xi}) \bar{E}_0(\bar{\xi})); \\
&\quad \frac{d^2(P_1(x) + \underline{P}_1(\underline{\xi}) + \bar{P}_1(\bar{\xi}))}{dx^2} - A_p^*(P_1(x) + \underline{P}_1(\underline{\xi}) + \bar{P}_1(\bar{\xi})) = \\
&= F_{p0}(P_0(x) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) + \bar{P}_0(\bar{\xi}), \tilde{E}_0(x) + \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \bar{E}_0(\bar{\xi}), P_1(x) + \underline{P}_1(\underline{\xi}) + \bar{P}_1(\bar{\xi}), \tilde{E}_1(x) + \underline{E}_1(\underline{\xi}) + \bar{E}_1(\bar{\xi})) = \\
&= \tilde{F}_{p1}(x) + \underline{F}_{p1}(\underline{\xi}) + \bar{F}_{p1}(\bar{\xi}), \tag{12.5}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{p1}(x) &= F_{p1}(P_0(x), E_0(x), P_1(x), E_1(x)) = \frac{d}{dx}(P_0(x)\tilde{E}_1(x)) + \frac{d}{dx}(P_1(x)\tilde{E}_0(x)); \\
\underline{F}_{p1}(\underline{\xi}) &= F_{p1}(P_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi}), P_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{P}_1(\underline{\xi}), \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_1(\underline{\xi})) - \\
&\quad - F_{p0}(P_0(\mu\underline{\xi}), \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}), P_1(\mu\underline{\xi}), \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})) = \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} \left((P_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi})) (\tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_1(\underline{\xi})) \right) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (P_0(\mu\underline{\xi}) \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi})) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} \left((P_1(\mu\underline{\xi}) + \underline{P}_1(\underline{\xi})) (\tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + \underline{E}_0(\underline{\xi})) \right) - \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (P_1(\mu\underline{\xi}) \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi})) = \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (\underline{P}_0(\underline{\xi}) \tilde{E}_1(\mu\underline{\xi}) + P_0(\mu\underline{\xi}) \underline{E}_1(\underline{\xi}) + \underline{P}_0(\underline{\xi}) \underline{E}_1(\underline{\xi})) + \\
&+ \frac{1}{\mu} \frac{d}{d\underline{\xi}} (\underline{P}_1(\underline{\xi}) \tilde{E}_0(\mu\underline{\xi}) + P_1(\mu\underline{\xi}) \underline{E}_0(\underline{\xi}) + \underline{P}_1(\underline{\xi}) \underline{E}_0(\underline{\xi}));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{p1}(\bar{\xi}) &= F_{p1}\left(P_0(1-\mu\bar{\xi})+\bar{P}_0(\bar{\xi}), \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi})+\bar{E}_0(\bar{\xi}), P_1(1-\mu\bar{\xi})+\bar{P}_1(\bar{\xi}), \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})+\bar{E}_1(\bar{\xi})\right)- \\
&\quad -F_{p1}\left(P_0(1-\mu\bar{\xi}), \tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi}), P_1(1-\mu\bar{\xi}), \tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})\right)= \\
&= -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(\left(P_0(1-\mu\bar{\xi})+\bar{P}_0(\bar{\xi})\right)\left(\tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})+\bar{E}_1(\bar{\xi})\right)\right)+\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(P_0(1-\mu\bar{\xi})\tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})\right)- \\
&\quad -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(\left(P_1(1-\mu\bar{\xi})+\bar{P}_1(\bar{\xi})\right)\left(\tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi})+\bar{E}_0(\bar{\xi})\right)\right)+\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(P_1(1-\mu\bar{\xi})\tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi})\right)= \\
&= -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(\bar{P}_0(\bar{\xi})\tilde{E}_1(1-\mu\bar{\xi})+P_0(1-\mu\bar{\xi})\bar{E}_1(\bar{\xi})+\bar{P}_0(\bar{\xi})\bar{E}_1(\bar{\xi})\right)- \\
&\quad -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\bar{\xi}}\left(\bar{P}_1(\bar{\xi})\tilde{E}_0(1-\mu\bar{\xi})+P_1(1-\mu\bar{\xi})\bar{E}_0(\bar{\xi})+\bar{P}_1(\bar{\xi})\bar{E}_0(\bar{\xi})\right).
\end{aligned}$$

Невідомі $N_l(x)$, $P_l(x)$, $\tilde{E}_l(x)$, $\underline{N}_l(\underline{\xi})$, $\underline{P}_l(\underline{\xi})$, $\underline{E}_l(\underline{\xi})$, $\bar{N}_l(\bar{\xi})$, $\bar{P}_l(\bar{\xi})$, $\bar{E}_l(\bar{\xi})$ пропонуємо шукати у вигляді асимптотичних рядів:

$$\begin{pmatrix} n_l(x, \mu) \\ p_l(x, \mu) \\ E_l(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i n_{li}(x) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i p_{li}(x) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i E_{li}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{N}_{li}(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{P}_{li}(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{E}_{li}(\underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i \bar{N}_{li}(\bar{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \bar{P}_{li}(\bar{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \bar{E}_{li}(\bar{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{ln(m)}(x, \mu) \\ R_{lp(m)}(x, \mu) \\ R_{lE(m)}(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де $R_{lE(m)}(x, \mu)$, $R_{ln(m)}(x, \mu)$, $R_{lp(m)}(x, \mu)$ – залишкові члени.

Виконаємо підстановку (13) у (12.1 – 12.5) та відповідні граничні умови з наступним розкладом отриманих рівнянь за степенями малого параметра μ . Аналогічний алгоритм перетворень застосовуємо до граничних умов (6), (8). В результаті прирівнювання членів рівняння з однаковими степенями малого параметра отримаємо наступну послідовність задач для визначення головних членів асимптотики:

$$\begin{cases} p_{0,0}(x) - n_{0,0}(x) = 0, \\ \frac{d^2 n_{0,0}(x)}{dx^2} - A_n n_{0,0}(x) = -\frac{d}{dx} (n_{0,0}(x) E_{0,0}(x)), \\ \frac{d^2 p_{0,0}(x)}{dx^2} - A_p p_{0,0}(x) = \frac{d}{dx} (p_{0,0}(x) E_{0,0}(x)); \end{cases}$$

$$\left. \frac{dn_{0,0}(x)}{dx} - \gamma_n w n_{0,0}(x) \right|_{x=0} = \frac{J}{eD_n} \frac{w}{N_i}, \quad \left. -\frac{dp_{0,0}(x)}{dx} - \gamma_p w p_{0,0}(x) \right|_{x=1} = \frac{J}{eD_p} \frac{w}{N_i}; \quad (14.1)$$

$$\begin{cases} \frac{d\underline{E}_{0,-1}(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} = \underline{P}_{0,0}(\underline{\xi}) - \underline{N}_{0,0}(\underline{\xi}), \\ \frac{d^2 \underline{N}_{0,0}(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = -\frac{d}{d\underline{\xi}} \left((n_{0,0}(0) + \underline{N}_{0,0}(\underline{\xi})) \underline{E}_{0,-1}(\underline{\xi}) \right), \\ \frac{d^2 \underline{P}_{0,0}(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}^2} = \frac{d}{d\underline{\xi}} \left((p_{0,0}(0) + \underline{P}_{0,0}(\underline{\xi})) \underline{E}_{0,-1}(\underline{\xi}) \right); \end{cases}$$

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{E}_{0,-1}(\underline{\xi}) = E_0^*(U), \quad \left. \frac{d\underline{N}_{0,0}(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_{0,0}(\underline{\xi}) = 0, \quad \left. \frac{d\underline{P}_{0,0}(\underline{\xi})}{d\underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{P}_{0,0}(\underline{\xi}) = 0; \quad (14.2)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{E}_{0,-1}(\xi) = E_0^*(U), \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\bar{E}_{0,-1}(\xi)}{d\xi} = \bar{P}_{0,0}(\xi) - \bar{N}_{0,0}(\xi), \\ \frac{d^2\bar{N}_{0,0}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left((n_{0,0}(1) + \bar{N}_{0,0}(\xi)) \bar{E}_{0,-1}(\xi) \right), \\ \frac{d^2\bar{P}_{0,0}(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\xi} \left((p_{0,0}(1) + \bar{P}_{0,0}(\xi)) \bar{E}_{0,-1}(\xi) \right); \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{d\bar{N}_{0,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{N}_{0,0}(\xi) = 0, \quad \left. \frac{d\bar{P}_{0,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{P}_{0,0}(\xi) = 0; \quad (14.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1,0}(x) - n_{1,0}(x) = 0, \\ \frac{d^2 n_{1,0}(x)}{dx^2} - A_n^* n_{1,0}(x) = -\frac{d}{dx} (n_{0,0}(x) E_{1,0}(x) + n_{1,0}(x) E_{0,0}(x)), \\ \frac{d^2 p_{1,0}(x)}{dx^2} - A_p^* p_{1,0}(x) = \frac{d}{dx} (p_{0,0}(x) E_{1,0}(x) + p_{1,0}(x) E_{0,0}(x)); \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{dn_{1,0}(x)}{dx} - \gamma_n w n_{1,0}(x) \right|_{x=0} = \frac{J_m w}{eD_n N_i}, \quad \left. \frac{dp_{1,0}(x)}{dx} - \gamma_p w p_{1,0}(x) \right|_{x=1} = \frac{J_m w}{eD_p N_i}; \quad (14.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{E}_{1,-1}(\xi)}{d\xi} = \underline{P}_{1,0}(\xi) - \underline{N}_{1,0}(\xi), \\ \frac{d^2 \underline{N}_{1,0}(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\xi} \left((n_{0,0}(0) + \underline{N}_{0,0}(\xi)) \underline{E}_{1,-1}(\xi) + (n_{1,0}(0) + \underline{N}_{1,0}(\xi)) \underline{E}_{0,-1}(\xi) \right), \\ \frac{d^2 \underline{P}_{1,0}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left((p_{0,0}(0) + \underline{P}_{0,0}(\xi)) \underline{E}_{1,-1}(\xi) + (p_{1,0}(0) + \underline{P}_{1,0}(\xi)) \underline{E}_{0,-1}(\xi) \right); \end{array} \right.$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{E}_{1,-1}(\xi) = E_1^*(U_m), \quad \left. \frac{d\underline{N}_{1,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{N}_{1,0}(\xi) = 0, \quad \left. \frac{d\underline{P}_{1,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underline{P}_{1,0}(\xi) = 0; \quad (14.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\bar{E}_{1,-1}(\xi)}{d\xi} = \bar{P}_{1,0}(\xi) - \bar{N}_{1,0}(\xi), \\ \frac{d^2 \bar{N}_{1,0}(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left((n_{0,0}(1) + \bar{N}_{0,0}(\xi)) \bar{E}_{1,-1}(\xi) + (n_{1,0}(1) + \bar{N}_{1,0}(\xi)) \bar{E}_{0,-1}(\xi) \right), \\ \frac{d^2 \bar{P}_{1,0}(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{d}{d\xi} \left((p_{0,0}(1) + \bar{P}_{0,0}(\xi)) \bar{E}_{1,-1}(\xi) + (p_{1,0}(1) + \bar{P}_{1,0}(\xi)) \bar{E}_{0,-1}(\xi) \right); \end{array} \right.$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{E}_{1,-1}(\xi) = E_1^*(U_m), \quad \left. \frac{d\bar{N}_{1,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{N}_{1,0}(\xi) = 0, \quad \left. \frac{d\bar{P}_{1,0}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{P}_{1,0}(\xi) = 0. \quad (14.6)$$

Крайові задачі (14.1) – (14.6) утворюють рекурентну послідовність для визначення розподілів концентрації носіїв заряду та напруженості електричного поля в активній області $p-i-n$ -діода у вигляді асимптотичних рядів (13). Аналогічну форму мають постановки задач для пошуку 1-го і наступних членів асимптотики. У результаті приходимо до розщеплення вихідної задачі, що забезпечує можливість проведення розпаралелювання обчислювального процесу.

Аналіз результатів. Аналіз отриманої послідовності задач показує, що природу процесів в i -області

$p-i-n$ -діода в основному описують головні члени асимптотики (як і в [9, 14]). Причому регулярні складові відображають поведінку дифузійно-дрейфових потоків носіїв заряду в об'ємі i -області структури, їх рекомбінацію та формування електронно-діркової плазми, а прилежові поправки – формування області просторового заряду в зонах $p-i$ - та $i-n$ -контактів, які, фактично, визначають розподіл електростатичного поля в активній області $p-i-n$ -діодів та поверхневі рекомбінаційні процеси.

Розв'язки задач (14.1) – (14.6), як показано у роботі [14], можна знайти в аналітичному вигляді у випадку, коли спостерігається низький рівень інжекції. Відповідні співвідношення мають наступний вигляд:

$$p_{0,0}(x) = n_{0,0}(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{L}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L}\right),$$

де

$$C_2 = \frac{B(1+\gamma_n wL) - A(1+\gamma_p wL)e^{\frac{1}{L}}}{(1+\gamma_n wL)(1+\gamma_p wL)e^{\frac{1}{L}} - (1-\gamma_n wL)(1+\gamma_p wL)e^{-\frac{1}{L}}}, \quad C_1 = \frac{-A(1+\gamma_n wL) + (1-\gamma_n wL)C_2}{(1+\gamma_n wL)}, \quad A = \frac{J}{2eD_n} \frac{wL}{N_i},$$

$$B = -\frac{J}{eD_p} \frac{wL}{N_i}, \quad \frac{1}{L^2} = \frac{1}{2}(A_n + A_p);$$

$$\underline{E}_{0,-1}(x) = -E_{0\infty} th\left(\frac{E_{0\infty} x}{2\mu}\right), \quad \underline{N}_{0,0}(x) = \frac{E_{0\infty}^2}{2} \left(1 - th^2\left(\frac{E_{0\infty} x}{2\mu}\right)\right), \quad \underline{P}_{0,0} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$\bar{E}_{0,-1}(x) = -E_{0\infty} th\left(\frac{E_{20\infty}(1-x)}{2\mu}\right), \quad \bar{P}_{0,0}(x) = \frac{E_{0\infty}^2}{2} \left(1 - th^2\left(\frac{E_{0\infty}(1-x)}{2\mu}\right)\right), \quad \bar{N}_{0,0} = 0 \quad \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1;$$

$E_{20\infty}$ – стала, яка має зміст напруженості силового поля в об'ємі активної області і визначається з умови:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} E_{20\infty} th\left(\frac{E_{20\infty} x}{2\mu}\right) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 E_{20\infty} th\left(\frac{E_{20\infty}(x-1)}{2\mu}\right) dx = U.$$

Відмітимо, що постановка задачі (14.1) та її розв'язок повністю співпадають з відповідними даними моделі амбіполярної дифузії [1, 2]. Результати розв'язання задач (14.1) – (14.3), які детально викладені у [14], підтверджуються даними якісного аналізу досліджуваної технічної системи та даними експериментальних досліджень [15].

Задача (14.4), що описує поведінку амплітуд коливань концентрацій носіїв заряду і напруженості електростатичного поля, такого ж типу, як і (14.1). Відмінність полягає у тому, що коефіцієнти рівняння A_n^* , A_p^* – комплексні. Відповідно, шукана функція буде також визначена на множині комплексних чисел:

$$p_{0,0}^*(x) = n_{0,0}^*(x) = C_1^* \exp\left(-\frac{x}{L^*}\right) + C_2^* \exp\left(\frac{x}{L^*}\right),$$

де

$$C_2^* = \frac{B^*(1+\gamma_n wL^*) - A^*(1+\gamma_p wL^*)e^{\frac{1}{L^*}}}{(1+\gamma_n wL^*)(1+\gamma_p wL^*)e^{\frac{1}{L^*}} - (1-\gamma_n wL^*)(1+\gamma_p wL^*)e^{-\frac{1}{L^*}}}; \quad C_1^* = \frac{-A^*(1+\gamma_n wL^*) + (1-\gamma_n wL^*)C_2^*}{(1+\gamma_n wL^*)};$$

$$A^* = \frac{J_m}{2eD_n} \frac{wL^*}{N_i}; \quad B^* = -\frac{J_m}{eD_p} \frac{wL^*}{N_i}; \quad \frac{1}{L^*} = \frac{1}{2}\sqrt{(A_n^* + A_p^*)}.$$

Відмітимо, що фізичний зміст процесу (традиційний), зокрема, наявність просторових осциляцій у структурі розв'язку (що обумовлено інерційними процесами у електронно-дірковій плазмі) забезпечується дійсною складовою отриманого розв'язку. Характер осциляцій залежить від параметрів прикладеного гармонічного сигналу (частоти коливань, амплітудами прикладених струму і напруги). За низькочастотного гармонічного сигналу

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_n^*}, \frac{1}{\tau_p^*}$$

просторові осциляції плазми незначні.

Процедура розв'язання задачі (14.5) (аналогічно (14.6)) у режимі низького рівня інжекції приводить до розгляду крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку з змінними коефіцієнтами наступного виду:

$$\frac{d^2 E_{1,-1}(\xi)}{d\xi^2} + E_{0,-1}(\xi) \frac{dE_{1,-1}(\xi)}{d\xi} - N_{0,0}(\xi) E_{1,-1}(\xi) = 0, \quad E_{1,-1}|_{x=0} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{1,-1}(\xi) = E_1^*(U_m),$$

структура якої вказує на осцилюючий у просторі характер її розв'язку.

Висновки. У результаті виконаних досліджень запропоновано методику проведення декомпозиції нелінійної задачі формування електронно-діркової плазми, що ґрунтується на розвитку методів теорії збурень. Вихідна нелінійна нестационарна сингулярно збурена крайова задача для системи рівнянь неперервності електронного і діркового струмів та рівняння Пуассона приводиться до рекурентної послідовності лінійних стаціонарних крайових задач, які розв'язуються аналітико-числовими методами. Виділення приміжових поправок у розв'язку задачі забезпечує, зокрема, на відміну від класичного наближення амбіполярної дифузії, більш адекватний опис поведінки напруженості електричного поля в активній області $p-i-n$ -діодів. Отримані результати досліджень проливають світло на особливості формування імпедансних характеристик $p-i-n$ -структур, глибше розкривають природу фізичних процесів у досліджуваній технічній системі та спрямовані на подальше удосконалення методики моделювання та проектування відповідних керуючих пристроїв напівпровідникової електроніки.

Список літератури

1. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. – New York : Wiley-Interscience, 2006. – 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
2. Адирович Э. И., Карагеоргиев-Алкалаев П. М., Лейдерман А. Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках. Под ред. Гальперина. – М. : Советское радио, 1978. – 320 с.
3. Bomba A. Ya., Moroz I. P., Bojchura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n$ -structures on the base of using the conformal mapping method // *Radio Electronics, Computer Science, Control*. – 2021. – № 1. – pp. 14–27.
4. Kumar M. J., Hahmady S., Gale R., Bayne S. Charge Plasma High Voltage PIN Diode Investigation, 2018 // *IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC)*. – Jackson, WY, USA, 2018. – pp. 117–121. DOI: 10.1109/IPMHVC.2018.8936701.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН*. – 1957. – № 12(5). – С. 3–122.
6. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction // *Computers in Biology and Medicine*. – 2022. – Vol. 146. – pp. 55–61. DOI: 10.1016/j.combiomed.2022.105561.
7. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. – 520 p.
8. Vasil'eva A. B., Butusov V. F., Kalachev L. V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. – SIAM, Philadelphia, 1995. – 212 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611970784>.
9. Белянин М. П. Об асимптотическом решении одной модели $p-n$ -перехода // *Вычислительная математика и математическая физика*. – 1986. – Т. 26. – № 2. – С. 306–311.
10. Васильева А. Б., Стельмах В. Г. Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов // *Вычислительная математика и математическая физика*. – 1977. – Т. 17. – № 2. – С. 339–348.
11. Белянин М. П. О численно-аналитическом решении одной нестационарной сингулярно возмущенной задачи из теории полупроводниковых диодов // *Дифференциальные уравнения*. – 1985. – Вып. 21 (8). – С. 1436–1440.
12. Bambusi D. Perturbation Theory for PDEs. In: Gaeta, G. (eds) *Perturbation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series*. – Springer, New York, NY, 2009. – pp. 229–246. DOI: 10.1007/978-1-0716-2621-4_401.
13. Bomba A., Moroz I. Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods // *13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT-2023*. – Wroclaw, Poland, 2023. – pp. 117–120.
14. Бомба А. Я., Мороз І. П. Чисельно-асимптотичний метод розв'язання сингулярно збурених модельних задач про стаціонарний розподіл носіїв заряду в активній області P-I-N-діодів // *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. – Рівне. – 2022. – Вип. 1(97). – С. 291–306.
15. Усанов Д. А., Горбатов С. С., Кваско В. Ю., Фадеев А. В., Калямин А. А. Пространственные осцилляции электрического поля и плотности заряда в кремниевом $p-i-n$ -диоде // *Письма в ЖТФ*. – 2014. – Том 40. – Вып. 21. – С. 104–110.

References (transliterated)

1. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. New York, Wiley-Interscience, 2006. 815 p. DOI: 10.1002/0470068329.
2. Adirovich E. I., Karageorgii-Alkalaev P. M., Leiderman A. Iu. *Toki dvoynoy inzhetskii v poluprovodnikakh* [Double injection currents in semiconductors]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1978. 320 p.
3. Bomba A. Ya., Moroz I. P., Bojchura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated $p-i-n$ -structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2021, no. 1, pp. 14–27.
4. Kumar M. J., Hahmady S., Gale R., Bayne S. Charge Plasma High Voltage PIN Diode Investigation, 2018. *IEEE International Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC)*. Jackson, WY, USA, 2018, pp. 117–121. DOI: 10.1109/IPMHVC.2018.8936701.
5. Vishik M. I., Lusternik L. A. Reguljarnoe vyrodenie i pogranychni sloi dlya linejnyh differentsjal'nyh uravnenii s malym parametro [Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter]. *UMN* [Successes in mathematical sciences]. 1957, Vol. 12, issue 5 (77), pp. 3–122.
6. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction. *Computers in Biology and Medicine*. 2022, vol. 146, pp. 55–61. DOI: 10.1016/j.combiomed.2022.105561.
7. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.

8. Vasil'eva A. B., Butusov V. F., Kalachev L. V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. SIAM, Philadelphia, 1995. 212 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611970784>.
9. Belyanin M. P. Ob asimptoticheskom reshenii odnoy modeli $p-n$ -perekhoda [On the asymptotic solution of a $p-n$ -junction model]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational mathematics and mathematical physics]. 1986, no. 26 (2), pp. 306 – 311.
10. Vasil'eva A. B., Stel'makh V. G. Singulyarno vozmushhennyye sistemy teorii poluprovodnikovyykh priborov [Singularly perturbed systems in the theory of semiconductors]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational mathematics and mathematical physics]. 1977, no. 17(2), pp. 339–348.
11. Belyanin M. P. O chislenno-asimptoticheskom reshenii odnoy nestatsyonarnoy singulyarno vozmushhennoy zadachi iz teorii poluprovodnikovyykh priborov [On the numerical-asymptotic solution of a non-stationary singularly perturbate problem from the theory of semiconductor devices]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 1985, no. 21 (8), pp. 1436–1440.
12. Bambusi D. *Perturbation Theory for PDEs*. In: Gaeta, G. (eds) *Perturbation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series*. Springer, New York, NY, 2009. pp. 229–246. DOI: 10.1007/978-1-0716-2621-4_401.
13. Bomba A., Moroz I. Analysis of Nonlinear Processes in the P-I-N Diodes Plasma by the Perturbation Theory Methods. *2023 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT-2023*. Wroclaw, Poland. 2023, pp. 117–120.
14. Bomba A., Moroz I. Chysel'no-asimptotichnyy metod rozv'yazannya syngulyarno zburonykh model'nykh zadach pro statsionarnyy rozpodil nosiyiv zaryadu v aktyvniy oblasti P-I-N-diodiv [The numerical-asymptotic method for solving singularly perturbed model problems on the stationary distribution of charge carriers in the active region of $p-i-n$ -diodes]. *Visnyk Natsional'nogo universytetu vodnogo gospodarstva ta pryrodokorystuvannya. Seriya : Tekhnichni nauky* [Bulletin of the National University of Water and Environmental Engineering. Technical Sciences]. 2022, issue. 1(97), pp. 291–306.
15. Usanov D. A., Gorbатов S. S., Kvasko V. Yu., Fadeev A. V., Kalyamin A. A. Prostranstvennyye ostslyatsii elektricheskogo polya i plotnosti zaryada v kremnievom $p-i-n$ -diode [Spatial oscillations of the electric field and charge density in a silicon $p-i-n$ -diode]. *Pis'ma v ZhTF* [Technical Physics Letters]. 2014, vol. 40, issue. 21, pp. 104–110.

Надійшла (received) 20.09.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Бомба Андрей Ярославович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных наук и прикладной математики, Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Bomba Andrii Yaroslavovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Мороз Ігор Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Мороз Игорь Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры компьютерных наук и прикладной математики, Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно; тел.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

Moroz Igor Petrovych – PhD, As. Professor, Doctoral Student of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (096) 721-91-24; e-mail: igor_moroz@yahoo.com.

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАННЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Сучасна наука і техніка під час досліджень і виконання технологічних процесів часто вимагає зниження коливань для кращої роботи чутливого обладнання і точних приладів. У даній роботі представлено дослідження з демпфування коливань балки, викликаних дією динамічного навантаження. Рух ізотропної пружної балки описується з використанням моделі С. П. Тимошенка. Балка закріплена по краях за допомогою шарнірно-нерухомих опор. Для демпфування коливань використовують демпфувальні моменти, які розташовані і діють у точках закріплення балки. Під час руху балки в шарнірах виникає момент тертя з лінійним в'язким демпфуванням, що пропорційний коефіцієнту демпфування та кутовій швидкості балки в шарнірі. Для оцінки демпфування коливань розглянуто розв'язання прямої задачі з моделювання руху балки С. П. Тимошенка за нульових початкових умов. Для розв'язання задачі моделювання руху балки використовується система диференціальних рівнянь згідно з моделлю С. П. Тимошенка. Шукані функції задаються у вигляді рядів Фур'є. Використовується інтегральне перетворення Лапласа. Особливістю розв'язування прямої задачі є те, що на цьому етапі нам не відомі моменти тертя в шарнірах і вони підлягають визначенню за допомогою розв'язування відповідної оберненої задачі із залученням теорії інтегральних рівнянь Вольтерра. Отримано аналітичний і чисельний розв'язок практичної задачі. Чисельні результати у вигляді графіків переміщень точок балки і моментів тертя отримано для різних коефіцієнтів демпфування. Проведено порівняльну оцінку зниження коливань для різних параметрів демпфування. Результати досліджень добре збігаються з результатами інших авторів.

Ключові слова: балка Тимошенка, нестационарні коливання, інтегральні рівняння Вольтерра, ряди Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, інтеграл Дюамеля.

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ, С. И. ПОВАЛЯЕВ, А. С. ШАРАПАТА МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ В ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Современная наука и техника при исследованиях и выполнении технологических процессов часто требует подавления или снижения колебаний для лучшей работы чувствительного оборудования и точных приборов. В данной работе представлено исследование по демпфированию колебаний балки, вызванных действием динамической нагрузки. Движение изотропной упругой балки описывается с использованием модели С. П. Тимошенка. Балка закреплена по краям при помощи шарнирно-неподвижных опор. Для демпфирования колебаний используются демпфирующие моменты, которые расположены и действуют в точках закрепления балки. При движении балки в шарнирах возникает момент трения с линейным вязким демпфированием, который пропорционален коэффициенту демпфирования и угловой скорости балки в шарнире. Для оценки демпфирования колебаний рассмотрено решение прямой задачи по моделированию движения балки С. П. Тимошенка при нулевых начальных условиях. Для решения задачи о моделировании движения балки используется система дифференциальных уравнений согласно модели С. П. Тимошенка. Искомые функции задаются в виде рядов Фурье. Используется интегральное преобразование Лапласа. Особенностью решения прямой задачи является то, что на этапе её решения нам не известны моменты трения в шарнирах и они подлежат определению при помощи решения соответствующей обратной задачи с привлечением теории интегральных уравнений Вольтерра. Получено аналитическое и численное решение практической задачи. Численные результаты в виде графиков перемещений точек балки и моментов трения получены для разных коэффициентов демпфирования. Проведена сравнительная оценка снижения колебаний для разных параметров демпфирования. Результаты исследований хорошо сопоставляются с результатами других авторов.

Ключевые слова: балка Тимошенка, нестационарные колебания, интегральные уравнения Вольтерра, ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа, интеграл Дюамеля.

A. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, P. A. YEGOROV, A. S. SHARAPATA SIMULATION OF FRICTION IN HINGED SUPPORTS DURING NON-STATIONARY VIBRATIONS OF A TIMOSHENKO BEAM

When carrying out research and technological processes in modern science and technology, the suppression or reduction of vibrations is often required for better operation of sensitive equipment and precision instruments. This paper presents a study on the damping of vibrations of a beam caused by the action of a dynamic load. The motion of an isotropic elastic beam is described using the model of S. P. Timoshenko. The beam has hinged supports at the edges. Damping moments located and acting at the anchoring points of the beam are used to damp the vibrations. As the beam moves in the hinges, a frictional moment with linear viscous damping occurs, which is proportional to the damping coefficient and the angular velocity of the beam in the hinge. In order to estimate the vibration damping, the solution of the direct problem of modeling the motion of the Timoshenko beam at zero initial conditions is considered. The beam motion is modeled by a system of differential equations according to the model of S. P. Timoshenko. The required functions are set in the form of Fourier series. Laplace integral transformation is used. The peculiarity of solution of a direct problem is that at this stage the friction moments in joints are unknown and are defined by solving corresponding inverse problem using Volterra integral equation theory. An analytical and numerical solution of the practical problem is obtained. Numerical results have been obtained in the form of graphs of beam point displacements and friction moments for different damping coefficients. A comparative evaluation of vibration reduction for different damping parameters has been carried out. The research results compare well with the results obtained by other authors.

Key words: Timoshenko beam, unsteady oscillations, Volterra integral equations, Fourier series, Laplace integral transformation, Duhamel integrals.

Вступ та аналіз літератури. Елементи конструкцій, що застосовуються в аерокосмічній техніці, машинобудуванні, дорожньому будівництві, часто можна розглядати як балки. Різні динамічні впливи на балки можуть викликати небажану інтенсивність коливань. Тому задачі з демпфування коливань є актуальними.

У роботі [1] досліджується коливання неоднорідної балки з періодично безперервними змінними поперечними перерізами та шарнірними опорами. Виконано підтвердження для підтвердження точності та ефективності запропонованого методу розв'язання задачі. Приділено увагу обговоренню переваг запропонованої механі-

ної конструкції балки, досліджено вплив структури конструкції та параметрів матеріалу елементів конструкції на властивості балки.

Демпфування коливань багатопрогонових балок під час дії рухомих навантажень розглянуто у роботі [2]. Порівнюється керування коливаннями в однопрогонових і багатопрогонових балках, а також застосовуються різні типи настроєваних мас. Надано рекомендації щодо вибору ефективної системи налаштування.

У роботі [3] досліджуються динамічні реакції двоколіїних і багатопрогонових залізничних мостів різними способами. Приділяється увага управлінню явищами резонансу. Автори використовують чисельне скінченноелементне моделювання на основі *балочного елемента Тимошенка* для проведення зіставлення отриманих результатів. Отримані в даній роботі результати досліджень можуть сприяти підвищенню безпеки перевезень по залізничних мостах і дають можливість виключити перевантаження, збільшуючи тим самим запас міцності елементів мостових конструкцій.

Аналіз вимушених коливань *багатопрогонових балок Тимошенка*, які піддаються широкому діапазону нерухомих і рухомих зовнішніх навантажень, наводиться у роботі [4].

У роботі [5] запропоновано чисельно-символічну процедуру, що застосовується для аналізу вільних коливань узагальненої багатопрогонової балки Тимошенка та розв'язує проблему збільшення часу виконання під час символічного інтегрування в складних задачах вільних коливань ступінчастих балок, сполучених з пружинно-масовими демпферними системами з двома ступенями свободи.

Аналітичний метод розрахунку динамічного відгуку багатопрогонових систем мостових колійних конструкцій під дією серії рухомих навантажень на основі моделей двошарових і чотиришарових балок, що широко використовуються в залізничних мостових конструкціях, запропоновано у роботі [6]. Для верифікації методу проводиться порівняння результатів аналітичного та чисельного підходів. Проаналізовано вплив числа прольотів балок з простими опорами і довжини ділянок на критичні швидкості резонансу і демпфування коливань. Автори рекомендують використання результатів цього дослідження як теоретичної основи в плануванні, проектуванні та експлуатації мостових конструкцій.

В роботі [7] автори розглянули *пряму задачу* про коливання ізотропної пружної балки скінченної довжини під дією рухомого навантаження у вигляді котка, який рухається з постійною швидкістю. Рух балки описується *рівняннями С. П. Тимошенка*. У роботі авторами проведено аналіз диференціальних рівнянь з точки зору впливу їх членів на динамічну поведінку балки. Запропоновано варіант спрощення диференціальних рівнянь. Наведено чисельні результати коливань балки для різних швидкостей руху котка.

У статті [8] представлено динамічний аналіз коливань багатопрогонових балок. Автори пропонують розділити об'єкт дослідження на кілька частин, з'єднавши їх пружиною, що моделює складні межі багатопрогонових балок. Результати розрахунків отримані для різних граничних умов.

Авторами в доповіді [9] розглянуто рухомі точкові навантаження, які діють на однопрогонові та багатопрогонові балки. Точність чисельних результатів досліджень підтверджується порівнянням їх із *кінцево-елементною моделлю*.

В роботі [10] автори проводять дослідження щодо поліпшення ефективності зниження вібрації в багатопрогонній балці з *метаматеріалу*. Точність результатів дослідження перевіряється *методом скінченних елементів та експериментально*.

Геометрично нелінійні вимушені коливання повністю затиснутих багатопрогонових балок, до яких приєднано кілька мас, розглянуто у роботі [11]. Рух балки моделюється *рівняннями Ейлера – Бернуллі*. А в роботі [12] вивчають нелінійну вимушену динамічну реакцію *функціонально-градієнтних балок*, які містять велику кількість крайових тріщин. Рух балки засновано на *теорії балок Ейлера – Бернуллі*. Властивості балки безперервно змінюються по її товщині.

У дослідженні [13] розглядається динамічна поведінка однорідної безперервної багатопрогонової балочної системи, вздовж якої рухається постійна сила або розподілене навантаження.

Авторами [14] розглядається ідентифікація динамічних навантажень, які діють на багатопрогонові пружні системи у вигляді двох балок Ейлера – Бернуллі або двох прямокутних пластин. Матеріал елементів конструкції вважається однорідним та ізотропним. Ідентифікується розподіл навантаження по механічному об'єкту, тоді як закон зміни навантаження в часі відомий.

В роботі [15] автори запропонували новий метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності в ламінованих шаруватих смугах. Зазначимо, що коливання температури і різниці температур між шарами, різниця температур між внутрішньою і зовнішньою поверхнями може робити серйозний внесок у причину руйнування елементів конструкцій.

У роботі [16] представлено аналітичне дослідження коливань пластини, що складається з кількох шарів. Пластина має неканонічну форму в плані. На пластину діє ударне навантаження напівсферичним тілом. Результати розрахунків добре узгоджуються з результатами, отриманими експериментальним шляхом.

Постановка задачі. Механічна система складається з *пружної ізотропної балки середньої товщини Тимошенка*, шарнірно-обпертої по краях (рис. 1). На балку в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання балки. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладення навантаження довільні (будь-які точки, що належать балці і не лежать на її краях), але не зміню-

ються протягом коливального процесу.

Вважається, що в шарнірних опорах відбувається *дисипація енергії*, яка викликана безпосередньо тертям у шарнірах, а момент опору (тертя) лінійно пропорційний кутовій швидкості повороту балки в шарнірі:

$$M_i(t) = \kappa_i \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \quad (1)$$

де κ_i – коефіцієнт демпфування в i -й точці (шарнірі); $d\psi_i(t)/dt$ – кутова швидкість повороту перерізу балки в i -й точці (шарнірі).

Тоді кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz можна знайти як:

$$\psi_i(t) = \frac{1}{\kappa_i} \int M_i(t) dt. \quad (2)$$

Тобто вплив тертя в шарнірах моделюється за допомогою додавання двох додаткових зосереджених моментів $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які прикладені в лівій і правій опорах відповідно. Зазначимо, що моменти $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ додаються у *рівняння деформування*, як зовнішні, але згідно *третього закону Ньютона* їх значення треба брати з протилежним знаком.

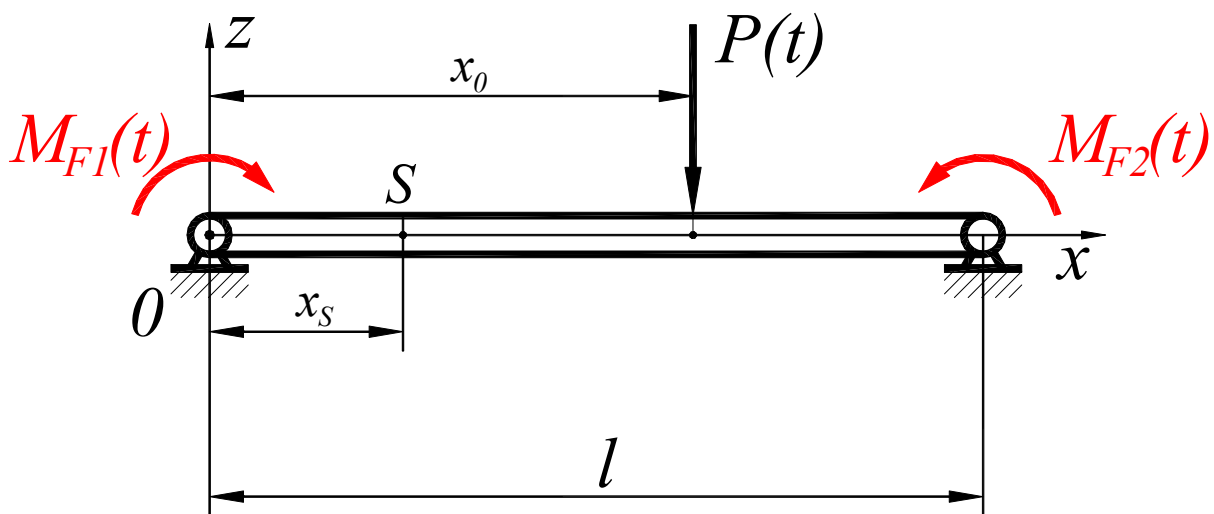


Рис. 1 – Схема навантаження балки.

В даному випадку потрібно визначити переміщення точок балки при одночасному впливі на неї системи з двох зовнішніх сил (відомої $P(t)$ і невідомих зосереджених моментних навантажень $M_i(t)$).

Розташуємо балку в декартових координатах так, що її серединна лінія буде знаходитися в площині xOz паралельно Ox , а напрямок осі Oz буде збігатися з нормаллю до серединної лінії балки.

Вкажемо, що l – довжина балки, а b – ширина. Координата точки прикладення j -го зосередженого навантаження – x_{0j} . Число навантажень, що діють, дорівнює N .

Для розв'язання цієї задачі скористаємося *моделлю балок середньої товщини С. П. Тимошенка*, яка враховує ефекти інерції обертання нормального елемента та поперечного зсуву.

Складові переміщення елемента пластини позначимо u і w . Далі зробимо такі припущення: вважатимемо, що компонент переміщення u лінійно залежить від z , а w від z не залежить [17, 18]. Тоді, виходячи з вищезгаданого, можна записати такі співвідношення:

$$u(x, z, t) = z \cdot \psi(x, t); \quad w(x, z, t) = w(x, t). \quad (3)$$

У цих співвідношеннях x, z – декартові координати, w – нормальні переміщення точок серединної лінії балки (прогини), а ψ – кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz ; $z \in [-h/2; h/2]$, де h – товщина балки.

Задача про нестационарне деформування пружної ізотропної балки з урахуванням відповідних початкових та крайових умов, а також навантаження системи з N сил і моментів зводиться до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь другого порядку.

Математична модель. Відповідно до [19] система диференціальних рівнянь у часткових похідних для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G'F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_{\Sigma}(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G'F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - M_{\Sigma}(x, t), \end{cases} \quad (4)$$

де t – час; h – товщина балки; b – ширина балки; $G' = k' \cdot G$; k' – коефіцієнт зсуву; $F = bh$ – площа поперечного перерізу балки; $I = bh^3 / 12$; w – прогин серединної площини балки; ψ – кут повороту; ρ – густина матеріалу балки; пружні постійні: E – модуль пружності, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Вкажемо, що $P_{\Sigma}(x, t)$ та $M_{\Sigma}(x, t)$ – збурювальне силове та моментне навантаження:

$$P_{\Sigma}(x, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \cdot P_j(t); \quad (5)$$

$$M_{\Sigma}(x, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \cdot M_j(t). \quad (6)$$

Система рівнянь розв'язується за допомогою розкладання невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні ряди Фур'є. Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, *інтегрального перетворення Лапласа* [20]. У цьому випадку, при виконанні обернених перетворень, розв'язки можуть бути представлені у вигляді *інтегралів Дюамеля (типу згортки)*, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь. Докладніше розв'язання подібних систем рівнянь описано в [21 – 24].

Побудова розв'язку прямої задачі у загальному вигляді. При розв'язанні задачі прийемо нульові початкові умови, а саме:

$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad \psi(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Для шарнірно-обпертої балки для задоволення необхідних граничних умов [25] в опорах $x = 0$ та $x = l$:

$$w = 0, \quad M = 0, \quad (M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0). \quad (8)$$

Крайові умови для прогинів стандартні та очевидні. Розглянемо докладніше крайову умову для моментів в «ідеальній» шарнірній опорі. Вираз для згинального моменту для балки теорії Тимошенко: $M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Ос-

кільки жорсткість $EI \neq 0$, то з $M = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$.

Запишемо функції (3) у вигляді розвинень у наступні ряди Фур'є:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l}; \quad (9)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l}. \quad (10)$$

Підставивши розвинення (9) – (10) в систему диференціальних рівнянь з частинними похідними (4) та скориставшись властивістю ортогональності тригонометричних функцій, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь по змінній t . Система диференціальних рівнянь розв'язується так: за нульових початкових умов виконується пряме інтегральне перетворення Лапласа [20]; в просторі зображень на основі розв'язання системи алгебраїчних рівнянь знаходяться шукані коефіцієнти розвинення $w_k^L(s)$, $\psi_k^L(s)$, виконується обернене перетворення Лапласа. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} w_{kj}(t) &= \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \int_0^t \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin \omega_{1k}(t-\tau) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin \omega_{2k}(t-\tau) \right] P_j(\tau) d\tau + \\ &+ c_T^2 \frac{C_{kj}^M \lambda_k}{\Delta_k} \int_0^t \left[\frac{\sin \omega_{1k}(t-\tau)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin \omega_{2k}(t-\tau)}{\omega_{2k}} \right] M_j(\tau) d\tau; \\ \psi_{kj}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{kj}^P \lambda_k}{\Delta_k} \int_0^t \left[\frac{\sin \omega_{1k}(t-\tau)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin \omega_{2k}(t-\tau)}{\omega_{2k}} \right] P_j(\tau) d\tau + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+ \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \int_0^t \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin \omega_{1k}(t-\tau) - \Omega_{2k}^\Psi \sin \omega_{2k}(t-\tau) \right] M_j(\tau) d\tau; \quad (12)$$

В результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (4) за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки можна отримати наступний аналітичний вираз для функції прогинів та кутів повороту:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (13)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^\Psi(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^\Psi(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (14)$$

де $K_i(x, t)$ – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток):

$$\begin{aligned} K_{Pj}^W(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin(\omega_{2k} t) \right]; \\ K_{Mj}^W(x, t) &= c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Pj}^\Psi(x, t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Mj}^\Psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^\Psi \sin(\omega_{2k} t) \right]. \end{aligned}$$

У випадку зосередженого навантаження (силового або моментного) балки в точці з координатою x_j коефіцієнти для навантажень матимуть вигляд:

$$C_{kj}^P = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot b \cdot h} \sin(\lambda_k \cdot x_j); \quad C_{kj}^M = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot I} \cos(\lambda_k \cdot x_j).$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$\begin{aligned} c_T^2 &= \frac{G'}{\rho}, \quad c_b^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \lambda_k = \pi \frac{k}{l}, \quad \Delta_k = \sqrt{\left(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot \lambda_k^4 \cdot c_T^2 \cdot c_b^2}; \\ \Omega_{1k}^W &= \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^W = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2k}}; \quad \Omega_{1k}^\Psi = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^\Psi = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{2k}}. \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12 / h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12 / h^2 - \Delta_k)}.$$

Для функцій деформацій можуть бути отримані аналогічні вирази.

Знаходження невідомих зосереджених моментів тертя в опорах.

Розглянемо конкретний випадок з однією збурювальною силою $P(t)$ (яка відома) і двома додатковими зосередженими моментами (тертя) $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ (які невідомі).

Значимо, що вираз (2) за структурою аналогічний виразу для кута повороту балки (14), якщо у функцію двох змінних $\psi(x, t)$ замість змінної x підставити координату опори. Тоді для точки $x = 0$ можна записати наступні співвідношення для кута повороту з боку балки та з боку першої опори:

$$\begin{cases} \psi(0, t) = \frac{1}{\kappa_1} \int_0^t M_1(\tau) d\tau, \\ \psi(0, t) = \int_0^t K_P^{\Psi 1}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M1}^{\Psi 1}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M2}^{\Psi 1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (15)$$

Виконаємо виключення невідомих функцій кута повороту $\psi(0, t)$ шляхом прирівнювання відповідних виразів для першої опори:

$$\frac{1}{\kappa_1} \int_0^t M_1(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi 1}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M1}^{\Psi 1}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M2}^{\Psi 1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \quad (16)$$

А для точки $x = l$ можна записати наступні співвідношення для кута повороту з боку балки та з боку другої опори:

$$\begin{cases} \psi(l, t) = \frac{1}{\kappa_2} \int_0^t M_2(\tau) d\tau, \\ \psi(l, t) = \int_0^t K_P^{\Psi^2}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_1}^{\Psi^2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_2}^{\Psi^2}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (17)$$

Після виключення $\psi(l, t)$ для точки $x = l$ можна записати (17) для другої опори:

$$\frac{1}{\kappa_2} \int_0^t M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi^2}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_1}^{\Psi^2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_2}^{\Psi^2}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Вирази (16) і (18) після перенесення відомих доданків у праву частину рівняння, а невідомих у ліву будуть мати вигляд системи двох *інтегральних рівнянь Вольтерра I роду* щодо невідомих зосереджених моментів $M_1(t)$ та $M_2(t)$:

$$\begin{cases} \int_0^t \left[K_{M_1}^{\Psi^1}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_1} \right] M_1(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_2}^{\Psi^1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi^1}(t-\tau) P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{M_1}^{\Psi^2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau + \int_0^t \left[K_{M_2}^{\Psi^2}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_1} \right] M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi^2}(t-\tau) P(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (19)$$

Виконаємо дискретизацію системи інтегральних рівнянь (19). Після дискретизації інтегральне рівняння замінюється *системою лінійних рівнянь алгебри (СЛАР)* [26]. Внаслідок чого дискретний аналог (19) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\Psi_1 M_1}^* \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{\Psi_1 M_2} \mathbf{M}_2 = \Psi_1; \\ \mathbf{A}_{\Psi_2 M_1} \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{\Psi_2 M_2}^* \mathbf{M}_2 = \Psi_2, \end{cases} \quad (20)$$

де вектор \mathbf{M}_i відповідає зміні у часі зосередженого реактивного моменту $M_i(t)$; вектор Ψ_i – функція зміни кута повороту у часі в опорі, викликана лише зовнішньою силою $P(t)$, що визначається як:

$$\psi_i = \int_0^t K_{\Psi_i P}(t-\tau) P(\tau) d\tau;$$

матриця $\mathbf{A}_{\Psi_i M_i}^*$ – відповідає дискретному аналогу оператора, що відповідає сумі $K_{\Psi_i M_i}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_i}$.

В результаті розв'язання системи (20) знаходяться зосереджені реактивні моменти в опорах з урахуванням тертя $M_i(t)$, що дозволяє визначати компоненти переміщення у часі у всіх точках балки (як при дії трьох незалежних навантажень: силового $P(t)$ та моментних $M_1(t)$ і $M_2(t)$ на балку з ідеальними шарнірами без тертя в опорах).

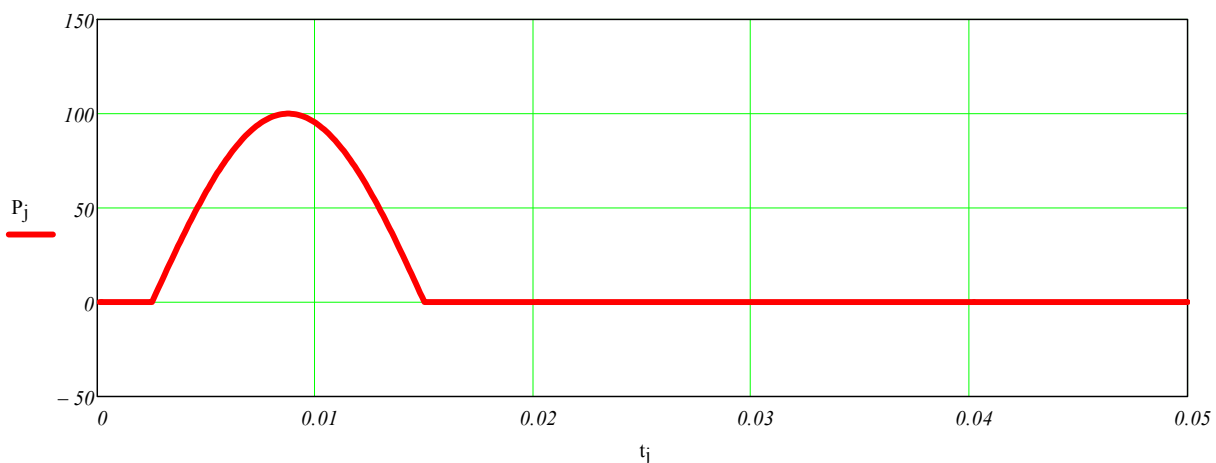


Рис. 2 – Збурююча сила $P(t)$.

Обчислювальний експеримент. У роботі розглядається конкретний приклад моделювання нестационарних поперечних коливань балки з урахуванням тертя в шарнірних опорах (рис. 1).

При розрахунках серединна лінія балки у недеформованому стані збігалася з віссю Ox декартової системи координат. Обчислення проводилися за наступних значень параметрів: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значення механічних констант для балки відповідають легуваній сталі); довжина балки $l = 0.8 \text{ м}$, ширина $b = 0.05 \text{ м}$, товщина $h = 0.0025 \text{ м}$; координати точки прикладення збурюючого навантаження мають значення: $x_0 = 0.4 \text{ м}$ (посередині балки – для простоти та наочності розглядався випадок симетричного навантаження), точка, в якій додатково досліджувалася зміна прогину у часі: $x_S = 0.25 \text{ м}$. Значення коефіцієнта лінійно-в'язкого демпфування $\kappa = 1 \div 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; кількість членів у відповідних рядах Фур'є 100.

Результати чисельних розрахунків наведені на рис. 2 – 12.

На рис. 2 показана зовнішня сила $P(t)$, яка викликає деформування (нестационарні коливання).

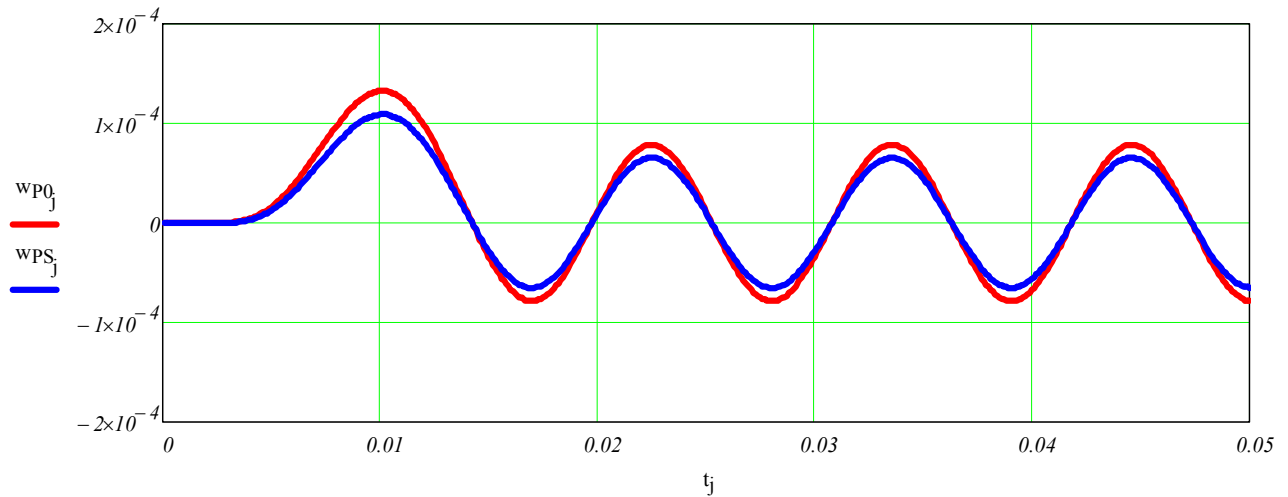


Рис. 3 – Прогин балки у точках x_0 і x_S .

На рис. 3 показані зміни прогину балки у точках x_0 (точка під зосередженим навантаженням) – крива 1, а x_S – крива 2, що викликані лише впливом зовнішньої сили $P(t)$.

На рис. 4 показані зміни кута повороту $\psi(t)$ у лівій (першій) та правій (другій) шарнірних опорах балки. Зазначимо, що оскільки зовнішня сила $P(t)$ прикладена до середини балки, то значення кутів повороту у шарнірах однакові, але протилежні за напрямком, що добре можна побачити на рис. 4.

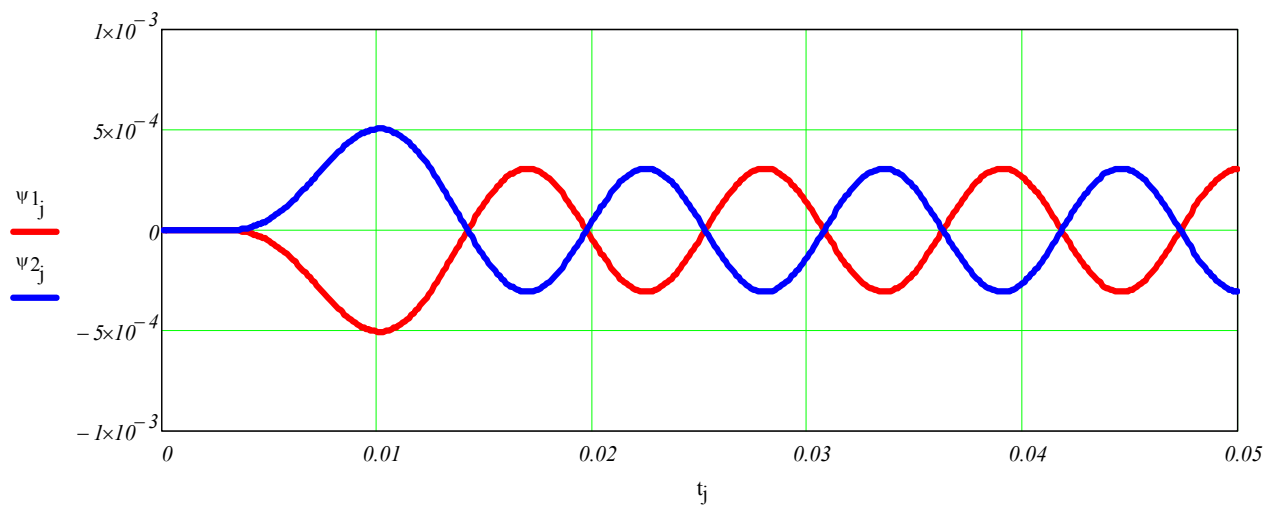


Рис. 4 – Кути повороту в шарнірних опорах балки.

На рис. 5 показані зміни зосереджених моментів тертя $M_1(t)$ і $M_2(t)$ у лівій (першій) та правій (другій) шарнірних опорах балки при значенні коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

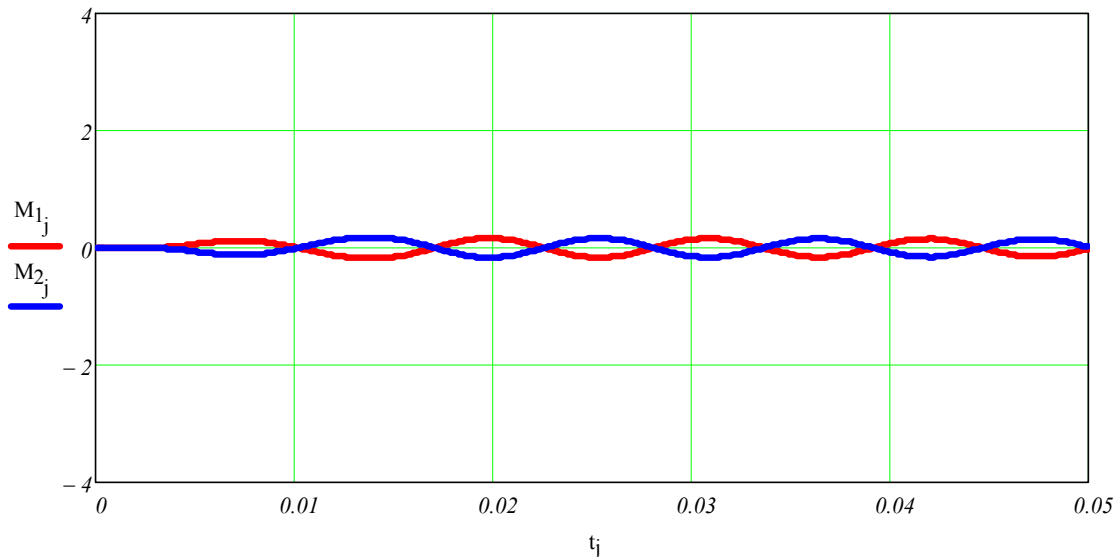


Рис. 5 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 6 показано:

- зміну прогину балки $w_{P0}(t)$, яка викликана дією зосередженого навантаження $P(t)$ (посередині балки) – крива 1;
- зміну прогину балки $w_{0M1}(t)$, яка викликана дією зосередженого моменту тертя в лівій опорі $M_1(t)$ (посередині балки) – крива 2;
- зміну прогину балки $w_{0M2}(t)$, яка викликана дією зосередженого моменту тертя в правій опорі $M_2(t)$ (посередині балки) – крива 3 (крапки);
- реальну зміну прогину балки $w_{P0}(t)$, яка викликана дією зосередженого навантаження $P(t)$ та з урахуванням тертя в опорах (сумарна крива) – крива 4.

Зазначимо, що криві 2 та 3 повністю збігаються (тому одна показана суцільною кривою, а друга крапками), що підтверджує вірогідність отриманих результатів, оскільки зовнішнє навантаження прикладене симетрично, а тертя в лівій та правій опорах однакове.

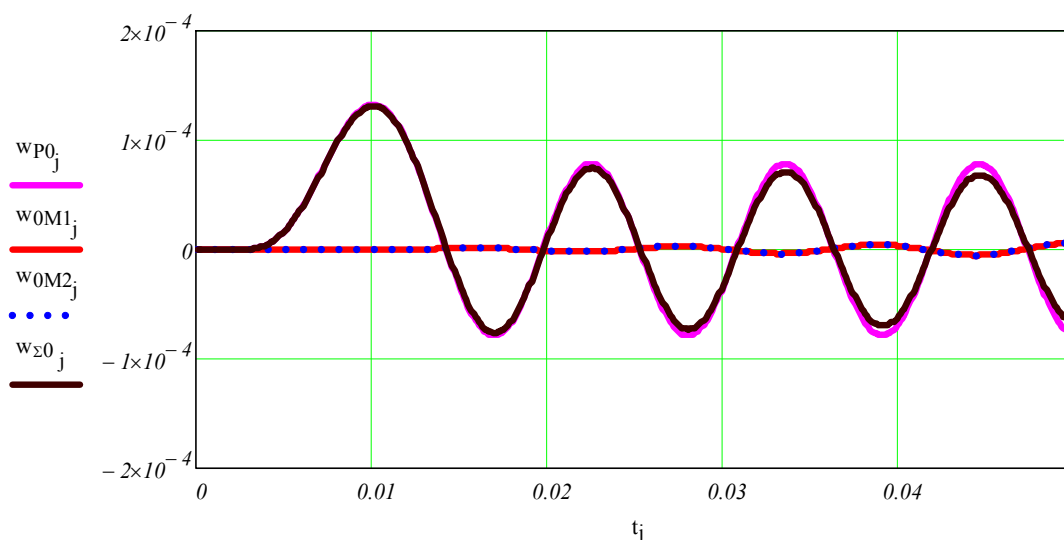


Рис. 6 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 6 можна помітити, що крива 1 (зумовлена лише дією зовнішнього навантаження) та крива 4 (прогин з урахуванням тертя в опорах) подібні, але крива 4 відповідає незначному затуханню (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 7 – 8 аналогічний опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

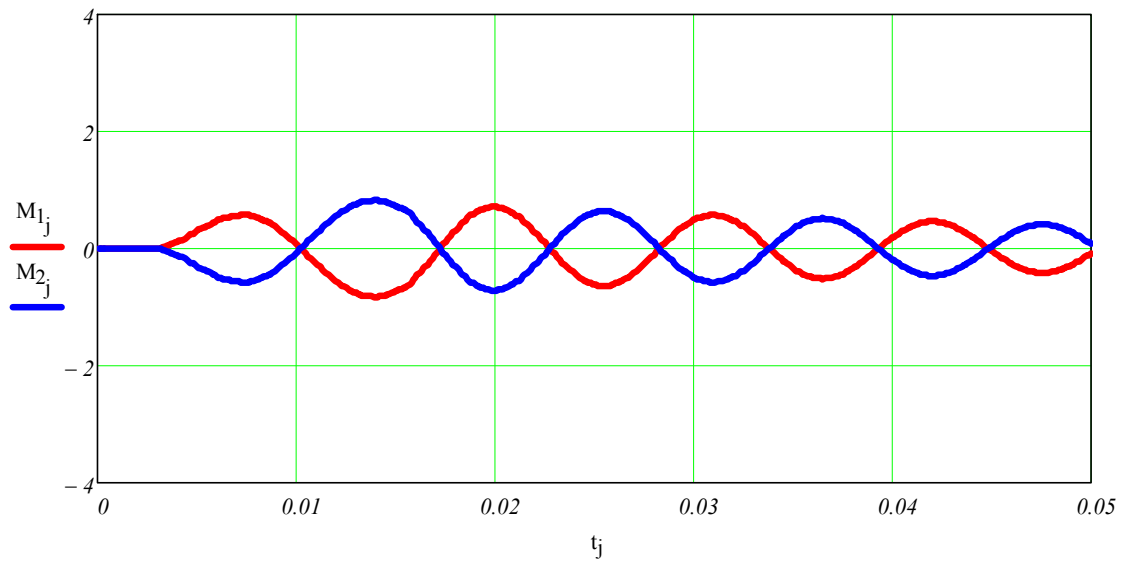


Рис. 7 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

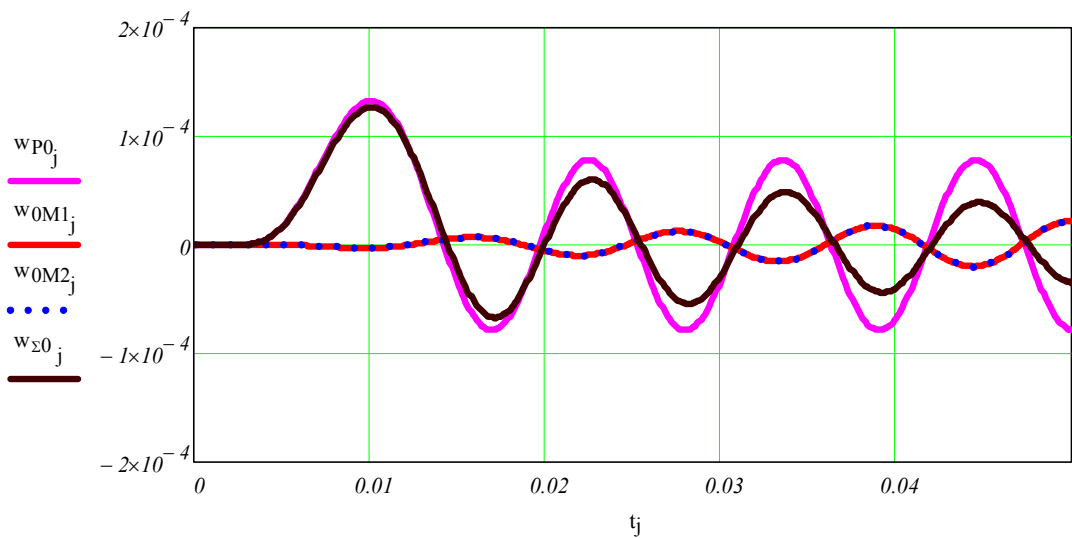


Рис. 8 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

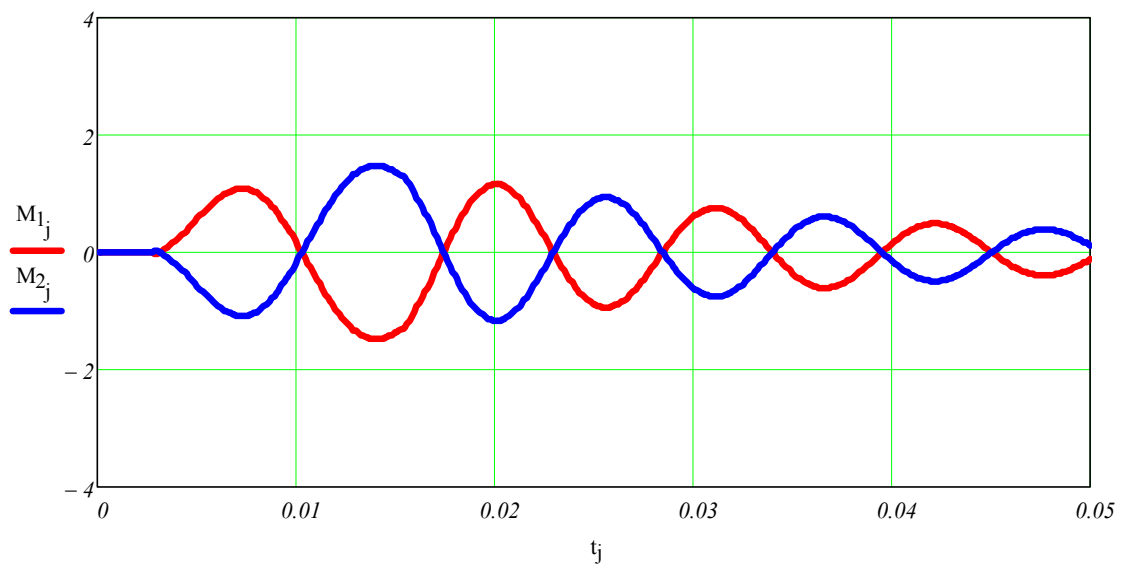


Рис. 9 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 8 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно істотне затухання (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 9 – 10 також аналогічний опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

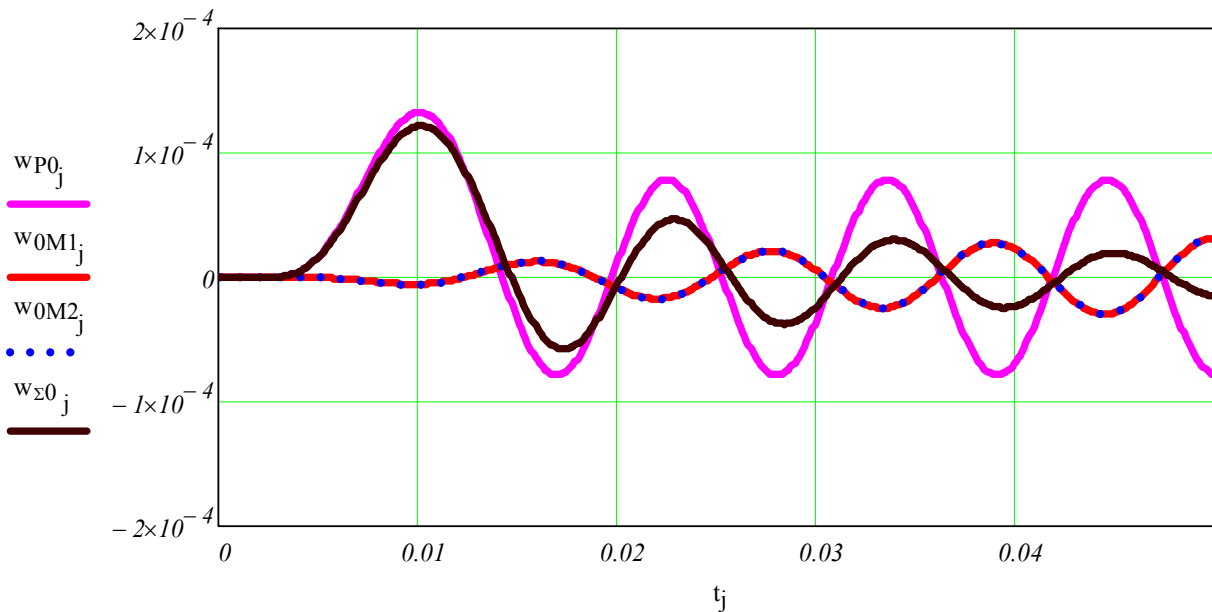


Рис. 10 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

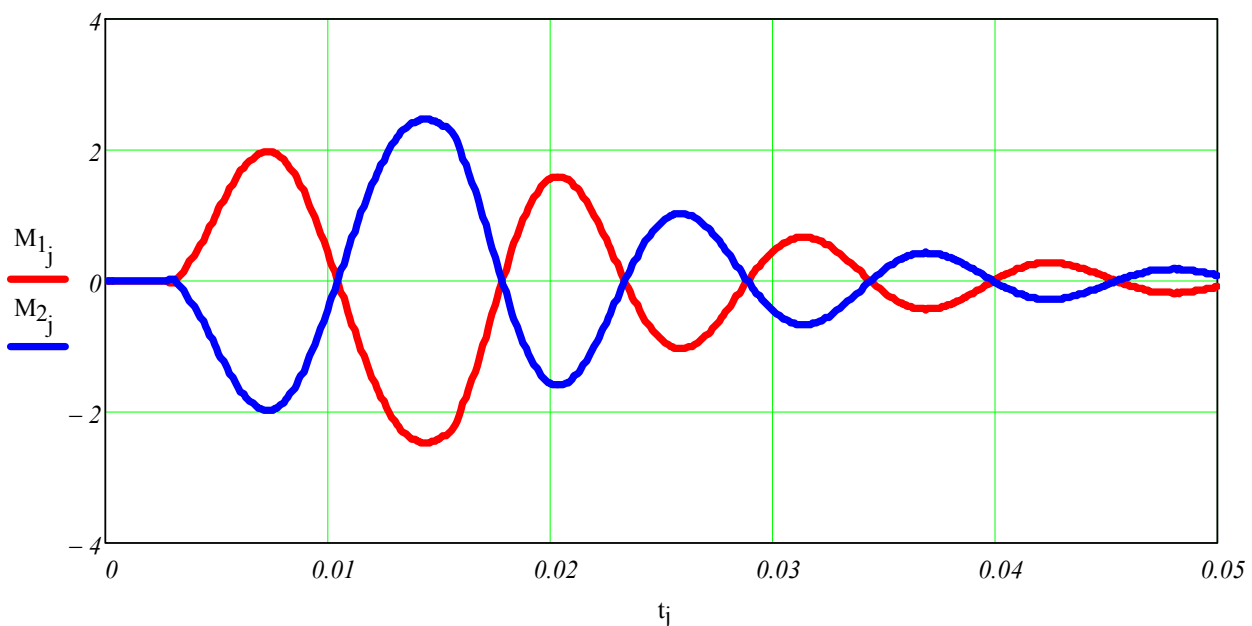


Рис. 11 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 10 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно сильне затухання (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 11 – 12 аналогічний наведеному вище опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

На рис. 12 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно дуже сильне затухання – коливання майже повністю затухають за 5 періодів (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Результати роботи. Результати, отримані в даній роботі, можуть бути використані як при моделюванні тертя в шарнірних опорах для балкових елементів конструкцій, так і в задачах демпфування вимушених коливань механічних систем.

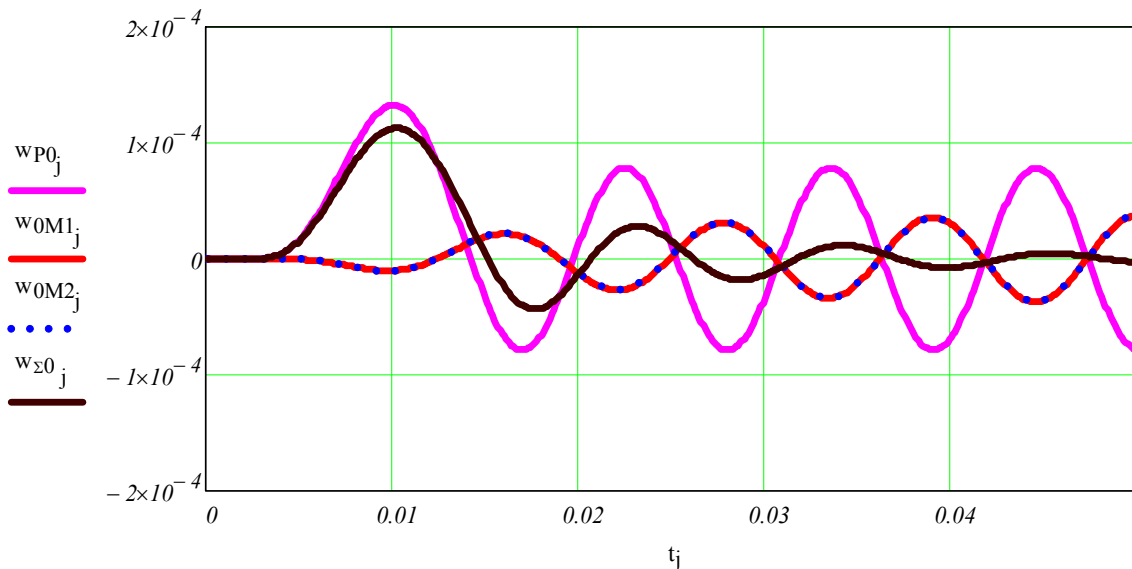


Рис. 12 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток даного дослідження при моделюванні більш складних механічних балкових систем та більш складних елементів конструкцій (пластини, оболонки, тощо).

Висновки. У роботі представлено розв’язання задачі з демпфування коливань балки. Отримано і перевірено математичну модель, яка дозволяє розрахувати більш точний динамічний рух балки під дією навантажень. Проведено розрахунки конкретних практичних задач. Результати досліджень показали вплив коефіцієнта демпфування на затухання коливань. Виявлено, що малий коефіцієнт демпфування викликає мале затухання коливань, середній коефіцієнт демпфування викликає збільшення затухання, а значний коефіцієнт демпфування викликає значне збільшення затухання. Також запропоновано підхід до розв’язання оберненої задачі з визначення моментів тертя в опорах балки. Отримані математичні моделі, розв’язки, результати, а також запропоновані методи і підходи можна використовувати в задачах віброзахисту.

Список літератури

1. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections // Acta Mechanica. – 2023. – Vol. 234. – No. 4. – P. 1451 – 1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
2. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems // Engineering Structures. – 2023. – Vol. 275. – P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
3. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2023. – P. 1 – 16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
4. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol. 92. – No. 4. – P. 1247 – 1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
5. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam // Journal of Vibration and Control. – 2022. – Vol. 28. – No 7 – 8. – P. 799 – 811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
6. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2021. – P. 1 – 19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
7. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines. – 2022. – No. 1. – P. 15 – 20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
8. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method // Shock and Vibration. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1 – 18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
9. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin’s method // XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020. – Athens, Greece, 2020. – P. 2621 – 2630.
10. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383. – No. 36. – P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
11. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
12. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
13. Szytko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2019. – Vol. 121. – P. 777 – 90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.

14. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates // *European Journal of Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 30. – No. 1. – P. 176 – 195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
15. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – No. 48 – 49. – P. 8673 – 8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
16. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – No. 5. – P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
17. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method // *Computers & Structures*. – 2017. – Vol. 192. – P. 181 – 195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
18. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // *Archive of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 88. – No. 7. – P. 1213 – 1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
19. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
20. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. – Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. – 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.
21. Кохманюк С. С., Филипов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
22. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с.
23. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. О., Гришакин В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
24. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязкоупругих балок // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. 36. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
25. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 87. – P. 152 – 170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
26. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2022. – Vol. 5. – No. 7 (119). – P. 21 – 34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

References (transliterated)

1. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections. *Acta Mechanica*. 2023, Vol. 234, No. 4, pp. 1451–1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
2. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems. *Engineering Structures*. 2023, Vol. 275, pp. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
3. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
4. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, Vol. 92, No. 4, pp. 1247–1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
5. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric–symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*. 2022, Vol. 28, No. 7–8, pp. 799–811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
6. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021, pp. 1–19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
7. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines*. 2022, No. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
8. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method. *Shock and Vibration*. 2021, Vol. 2021, pp. 1–18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
9. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method. *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020*. Athens, Greece, 2020, pp. 2621–2630.
10. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. *Physics Letters A*. 2019, Vol. 383, No. 36, pp. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
11. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, pp. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
12. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
13. Szyłko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019, Vol. 121, pp. 777–90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
14. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates. *European Journal of Applied Mathematics*. 2019, Vol. 30, No. 1, pp. 176–195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
15. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001, Vol. 38, No. 48–49, pp. 8673–8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
16. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment. *Journal of Applied Mechanics*. 2008, Vol. 75, No. 5, pp. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
17. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. *Computers & Structures*. 2017, Vol. 192, pp. 181–195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
18. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method. *Archive of Applied Mechanics*. 2018, Vol. 88, No. 7, pp. 1213–1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
19. Grygolyuk E. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. Vol. 5. Neklassicheskie teorii kolebaniy stержney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5, Non-classical vibration theory of beams, plates and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
20. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.

21. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. Kolebaniya mnogoproprietykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke [Vibrations of multi-span beams on elastic supports under moving load]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
22. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh I podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
23. Yanyutin E. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernykh zadach dlya balok z pruzhnyim do-datkovym spyrannyam [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
24. Yanyutin E. G., Grishakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya vyazkouprugikh balok [Identification of moving load for viscoelastic beams]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu "Kharkivs'kyi politekhnichnyi instytut". Zb. naukovykh prats'* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Scientific Digest]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
25. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs. *Applied Mathematical Modelling*. 2020, Vol. 87, pp. 152–170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
26. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, Vol. 5, No. 7 (119), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

Надійшло (received) 27.08.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Поваляев Сергей Иванович – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарпата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Шарпата Андрей Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergeevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

О. І. МАТВІЄНКО, О. О. МИРОШНІЧЕНКО

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ НЕЧІТКОЇ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ДІЄТИ

Метою даної роботи є дослідження одного підходу до розв'язання задачі нечіткої векторної оптимізації на прикладі задачі складання дієти. Потрібно розробити умовний денний пайок, що забезпечує потреби людини в корисних речовинах та енергії і є найкращим за витратами та вагою. Для цього розв'язується задача вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив, при цьому якість альтернативи оцінюється за допомогою кількох частинних критеріїв ефективності. Мета задачі визначена нечітко. Згідно з ідеєю Заде – Беллмана нечітким розв'язком задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив. В роботі розглядається задача нечіткої двокритеріальної оптимізації. Частинними критеріями, що мінімізуються, є вага та вартість денного пайка. Нечіткі потреби в корисних речовинах та кілокалоріях визначаються нечіткими трикутними числами. Для наближеного розв'язання задачі пропонується алгоритм, відповідно до якого розв'язується послідовність задач лінійного програмування. За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica розроблено комп'ютерну програму, яка реалізує розв'язок цієї задачі. Отримано такі результати: для добового раціону було визначено набір продуктів, їхню вагу та вартість. Визначено ступінь впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. На базі запропонованої математичної моделі та методу її розв'язання можна створити програмний додаток, який дозволить розв'язати задачі харчування, вводити необхідні обмеження в зручному для користувача вигляді, а на виході отримувати один або кілька варіантів денного раціону. Такий додаток буде корисним для дієтологів, спортсменів, лікарів та інших людей, які переймаються проблемами здорового харчування.

Ключові слова: нечітка мета, функція приналежності, векторна оптимізація, дієта, нечітка множина альтернатив, частинні критерії ефективності, критерій оптимізації.

О. И. МАТВИЕНКО, А. А. МИРОШНИЧЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕЧЕТКОЙ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ ДИЕТЫ

Целью данной работы является исследование одного подхода к решению задачи нечеткой векторной оптимизации на примере задачи составления диеты. Необходимо разработать условный дневной пайок, обеспечивающий потребности человека в полезных веществах и энергии и оптимальный по затратам и весу. Для этого решается задача выбора наилучшей альтернативы из заданного нечеткого множества альтернатив, при этом качество альтернативы оценивается с помощью нескольких частных критериев эффективности. Цель в задаче определена нечетко. Нечетким решением задачи является пересечение нечеткой цели и нечеткого множества альтернатив. Для её приближённого решения предлагается алгоритм, в соответствии с которым решается последовательность задач линейного программирования. С помощью математического пакета Wolfram Mathematica разработана компьютерная программа, реализующая решение этой задачи. Получены следующие результаты: для суточного рациона были определены набор продуктов, их вес и стоимость. Определена степень уверенности в том, что найденный план оптимален. На базе предлагаемой математической модели и метода её решения можно создать программное приложение, которое позволит выбирать продукты питания, вводит необходимые ограничения в удобном для пользователя виде, а на выходе получать один или несколько вариантов дневного рациона. Такое приложение будет полезно для диетологов, спортсменов, врачей и других людей, заботящихся о проблемах здорового питания.

Ключевые слова: нечеткая цель, функция принадлежности, векторная оптимизация, диета, нечёткое множество альтернатив, частные критерии эффективности, критерий оптимизации.

О. І. МАТВІЄНКО, О. О. МИРОШНІЧЕНКО

APPLICATION OF FUZZY VECTOR OPTIMIZATION METHODS FOR DIET COMPILATION

The purpose of this work is to study an approach to solving the problem of fuzzy vector optimization for compiling a diet. It is necessary to develop a daily ration that provides human needs in nutrients and energy and is the best in terms of costs and weight. For this purpose the problem of choosing the best alternative from a given fuzzy set of alternatives is solved, while the quality of the alternative is evaluated using several partial efficiency criteria. The goal in the task is fuzzily defined. According to the Zadeh – Bellman idea, a fuzzy solution to a problem is the intersection of a fuzzy goal and a fuzzy set of alternatives. The paper considers the problem of fuzzy two-criteria optimization. Partial criteria that are minimized are the weight and cost of the daily ration. Fuzzy needs for nutrients and kilocalories are determined by fuzzy triangular numbers. For an approximate solution of the problem, an algorithm is proposed according to which a sequence of linear programming problems is solved. The computer program was created that implements the solution of this problem in the Wolfram Mathematica package. The following results were obtained: a set of products, their weight and cost were determined for the daily diet. The degree of confidence that the found plan is optimal is determined. On the basis of the proposed mathematical model and the method of its solution, a software application allowing to choose food products, enter the necessary restrictions in a user-friendly form, and receive one or more options for the daily ration at the output was created. Such an application will be useful for nutritionists, athletes, doctors and other people who are concerned with the problems of healthy eating.

Key words: fuzzy goal, membership function, vector optimization, diet, fuzzy alternative set, partial efficiency criterion, optimization criterion.

Вступ. Практично будь-яка *прикладна задача є багатокритеріальною* і, як правило, звести її до одного критерію досить складно, оскільки цілей може бути багато. У цьому випадку *оптимізація* проводиться за декількома *частковими критеріями*, і проблема зводиться до розгляду задачі *багатокритеріальної оптимізації*. У зв'язку з цим особливого значення в даний час набуває *теорія прийняття рішень при наявності багатьох критеріїв*.

Багато людей у своєму харчуванні дотримуються певної *дієти*. Для одних дієти призначаються з медичною метою, інші намагаються схуднути чи, навпаки, набрати вагу або просто підтримувати свій організм в хорошій формі. Також є спеціальні дієти для спортсменів. Раціон харчування повинен бути складений таким чином, щоб забезпечувати людину усіма поживними речовинами, відповідати її фінансовим можливостям, мати адекватну вагу та об'єм.

При складанні раціону треба враховувати кілька чинників, наприклад, вартість продуктів та вагу. Крім то-

го, багато параметрів, що впливають на результат, визначено неточно. Тому для розв'язання цієї задачі будемо використовувати *методи нечіткої векторної оптимізації*.

Необхідним етапом розв'язання будь-якої оптимізаційної задачі є збір вихідної інформації, яка в умовах часових обмежень не є повністю визначеною, а носить приблизний, неточний характер. Наразі для розв'язання задач з нечіткими вихідними даними успішно застосовується *теорія нечітких множин та нечітка логіка*. За допомогою теорії нечітких множин можна апроксимувати будь-яку систему без використання складного математичного апарату, наприклад, *диференціального та інтегрального числення*, які традиційно застосовуються в *теорії управління*. Тому використання математичного апарату, який синтезує *методи дослідження операцій і методи теорії нечітких множин* для прийняття рішень, є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень. Дослідженню та аналізу сучасних методів розв'язання задач векторної оптимізації присвячено багато робіт.

В роботі [1] розглядається *інтелектуальна система* прогнозування потреб людини в корисних речовинах, які представляються нечіткими числами. Для розв'язання задачі складання раціону використовується *нечіткий генетичний алгоритм*.

Метод ранжування п'ятикутних нечітких чисел для складання овочевої дієти розглядається в роботі [2].

Нечітка транспортна задача для складання раціону розв'язується в роботі [3]. В [4] також розв'язується нечітка транспортна задача, в якій вхідні дані представляються у вигляді дев'ятикутних нечітких чисел.

В роботі [5] моделюється система підтримки прийняття рішень на основі нечіткої логіки.

Нечітка задача векторної оптимізації для складання раціону розглядається в роботі [6]. За частинні критерії, які мінімізуються, обрано вартість раціону, кількість насичених жирів та вуглеводів.

У дослідженні [7] для складання дієти застосовується *булеве лінійне програмування*, в якому використовуються логічні змінні та лінійні обмеження для моделювання та розв'язання задач оптимізації. Цільова функція представляється *лінійною комбінацією булевих змінних*.

В роботі [8] *нечітка множина Піфагора* використовується для позначення нечіткості та невизначеності. Пропонується *модель піфагорово нечіткої задачі лінійного програмування* для складання раціону, а також метод її розв'язання.

В даній роботі пропонується новий підхід до розв'язання задачі складання дієти, заснований на використанні моделі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив та нечіткою метою.

Задачі векторної оптимізації. Розглянемо задачу, що часто зустрічається в процесі прийняття рішення про вибір найкращого способу дій у ситуації, коли якість варіанта використання ресурсів оцінюється за допомогою не одного, а кількох кількісних показників – *критеріїв ефективності*. В цьому випадку стає невизначеним саме поняття оптимальності, не зрозуміло, який варіант вважати найкращим. Адже найкращий з погляду деяких з критеріїв спосіб дій може виявитися дуже поганим за іншими критеріям.

Задачі такого типу називаються *векторними задачами (багатокритеріальної) оптимізації*. Багатокритеріальні задачі виникають в економіці, техніці, у військовій справі тощо.

Векторна (багатокритеріальна) задача оптимізації лежить в основі математичної моделі, що описує деяку економічну систему або технічний об'єкт. Розглянемо формальний опис такої математичної моделі.

Нехай $x = \{x_j, j \in N_n\}$ – вектор змінних моделі; N_n – множина індексів вектору змінних, який належить простору n – вимірних векторів $x \in R^n$ (зазвичай передбачається невід'ємність вектору змінних $x \geq 0$); функціональний взаємозв'язок змінних встановлюється визначеними співвідношеннями, на які накладаються обмеження

$$G(x) \leq b, \quad x \geq 0,$$

де $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$ – вектор функцій. Останні нерівності визначають допустиму область X значень змінних x , включену в простір змінних, $X \subset R^n$, $b = \{b_i, i \in N_m\}$ – вектор коефіцієнтів – параметрів моделі, $i \in N_m$, де N_m – множина індексів обмежень $G(x) \leq b$.

Функціонування системи, технічного об'єкта направлено на виконання зазначених цілей – критеріїв, функціонально зв'язаних з вектором змінних $f_k(x)$, $k \in N_l$, де N_l – множина індексів критеріїв. Множину $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)\}$ критеріїв можна представити у вигляді *вектор-функції* $F(x) = \{f_k(x), k \in N_l\}$, який називають *векторним критерієм (векторною цільовою функцією)*. Припускаючи, що кожен компонент векторного критерію спрямований на збільшення (максимізацію) свого значення, задача вибору за багатьма критеріями розв'язується як задача вибору за векторним критерієм $F(x)$ вектору змінних $x \geq 0$ з допустимої області і записується наступним чином:

$$Z(F, G) : \max F(x) = \{f_k(x), k \in N_l\},$$

за умов

$$G(x) \leq b, \quad x \geq 0.$$

Передбачається, що задача $Z(F, G)$ опукла, тобто кожна компонента векторного критерію $F(x)$ – угнута функція, а $g_i(x)$, $i \in N_m$ – опуклі функції.

Множина точок X , що визначають допустиму область вектору змінних, є непорожньою компактною множиною:

$$X = \{x \in R^n \mid x \geq 0, G(x) \leq b\} \neq \emptyset.$$

Звідси випливає, що існує розв'язок задачі $Z(F, G)$ по кожній компоненті векторного критерію $f_k(x)$, $k \in N_l$.

Векторна задача $Z(F, G)$ розглядається для випадку, коли точки оптимуму x^k , $k \in N_l$ отримані при розв'язанні задачі за кожним критерієм $f_k(x)$, $k \in N_l$, окремо, не збігаються (при збігу розв'язок вважається ідеальним). Тому з математичної точки зору векторна задача $Z(F, G)$ є некоректною, тобто якщо один із критеріїв $f_k(x)$, $k \in N_l$, досяг свого оптимуму, то поліпшення інших компонент векторного критерію неможливе.

Тому під розв'язанням векторної задачі $Z(F, G)$ можна розуміти тільки якийсь компромісний розв'язок, що задовольняє в тому чи іншому розумінні усі компоненти векторного критерію. На вирішення цієї проблеми і спрямовані основні *методи розв'язання векторних задач оптимізації*.

Існує досить багато методів розв'язання задач векторної оптимізації, але майже всі вони носять *евристичний характер*. При розробці методів розв'язання векторних задач приходиться вирішувати проблеми, що пов'язані з вибором принципу оптимальності, який визначає оптимальність того чи іншого розв'язку. Розглянемо ці проблеми.

Нормалізація критеріїв. У векторних задачах оптимізації локальні критерії мають різний фізичний зміст і, як наслідок, вимірюються в різних одиницях, масштаби їх не порівнювані, тому неможливе порівняння якості отриманих результатів за кожним критерієм. Операція зведення масштабів локальних критеріїв до єдиного, зазвичай безрозмірного, зветься нормалізацією.

Вибір принципу оптимальності. У задачах векторної оптимізації принцип оптимальності визначає властивості оптимального розв'язку і дає відповідь на головне питання – у якому розумінні оптимальний розв'язок переважає всі інші допустимі розв'язки і дає правило пошуку цього оптимального розв'язку.

Урахування пріоритету критеріїв. Зазвичай з фізичного змісту задачі зрозуміло, що локальні критерії мають різну важливість при розв'язанні задачі, тобто один локальний критерій має деякий пріоритет над іншим локальним критерієм.

Перераховані проблеми так чи інакше зводять багатокритеріальну задачу до однокритеріальної, тобто зводять до проблеми обчислення оптимуму.

Розв'язання перерахованих проблем і розвиток методів розв'язання задач векторної оптимізації відбувається в декількох напрямках. Основні з них:

- методи, що ґрунтуються на згортанні критеріїв у єдиний;
- методи, побудовані на накладенні обмежень на критерії;
- методи цільового програмування;
- методи, засновані на відшуканні компромісного рішення;
- методи, в основі яких лежать людино-машинні процедури прийняття рішень (інтерактивне програмування).

Існують інші класифікації методів розв'язання векторних задач, зокрема в залежності від вигляду наданої інформації про важливість критеріїв та ін.

Широке поширення одержав напрямок, пов'язаний із прийняттям рішень в умовах невизначеності.

Нечіткість у постановці задачі багатокритеріальної оптимізації може бути як в описі множини альтернатив, так і в описі векторної цільової функції. Різні форми опису вихідної інформації обумовлюють існування різних формулювань нечітких задач оптимізації:

- задача досягнення нечітко поставленої мети при нечітких обмеженнях;
- задача нечіткої оптимізації при нечіткій множині допустимих альтернатив;
- нечіткий варіант стандартної задачі оптимізації з «пом'якшенням» критеріїв й/або обмежень, де замість задачі оптимізації розв'язується задача досягнення мети й відповідні нерівності для цільової функції й обмежень можуть порушуватися;
- задача векторної оптимізації з нечіткими коефіцієнтами та ін.

Постановка задачі. Вербальна постановка задачі: розробити денний раціон, що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою.

Вхідними даними є:

- набір продуктів, що використовуються для харчування;
- вміст корисних речовин у 100 г продукту;
- калорійність 100 г продукту (у кілокалоріях);

- вартість продуктів;
 - потреба в корисних речовинах (у грамах) і кілокалоріях.
- Вихідними даними є: набір продуктів та їх вага.

Розглянемо задачу вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив з функцією приналежності, що визначена на універсальній множині. Вважатимемо, що якість альтернативи оцінюється за допомогою частинних критеріїв ефективності. Ціль в цій задачі є визначеною нечітко. Для розв'язання цієї задачі скористаємося ідеєю Заде – Беллмана [9], згідно з якою нечітким розв'язком розглянутої задачі є перетин нечіткої цілі та нечіткої множини альтернатив.

У випадку задачі з критеріями ефективності як нечітку ціль пропонується розглядати перетин нечітких множин – нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності, тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей.

Нечітка задача векторної оптимізації з нечітко визначеною метою. Розглянемо задачу вибору найкращої альтернативи із заданої нечіткої множини альтернатив \hat{C} з функцією приналежності $\mu_{\hat{C}}(x)$, що визначена на універсальній множині X , при цьому будемо виходити з того, що якість альтернативи оцінюється за допомогою n частинних критеріїв ефективності: f_1, f_2, \dots, f_n . Мета в цій задачі є визначеною нечітко. Нечітким рішенням розглянутої задачі є перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив \hat{C} .

У випадку задачі з n критеріями ефективності як нечітку ціль \hat{G} пропонується розглядати перетин нечітких множин $\hat{G}_i, i = 1, 2, \dots, n$ – нечітких частинних цілей, визначених частинними критеріями ефективності f_1, f_2, \dots, f_n , тобто виходити з того, що ціль досягається з потрібною надійністю, якщо з цією надійністю досягається кожна з частинних цілей. Позначимо функцію приналежності нечіткої множини \hat{G}_i через μ_i , тоді отримаємо, що

$$\mu_{\hat{G}}(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x)\}.$$

Під нечітким рішенням розглянутої задачі будемо розуміти перетин нечіткої мети та нечіткої множини альтернатив. Тоді функція приналежності $\mu_{\hat{D}}(x)$ нечіткого рішення \hat{D} задачі матиме вид:

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{G}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\}.$$

Як рішення задачі пропонується обирати альтернативу x , для якої значення функції $\mu_{\hat{D}}(x)$ є максимальним.

Метод розв'язання задачі векторної оптимізації з нечіткими вихідними даними. Нехай частинні критерії ефективності та множина альтернатив задані за допомогою лінійних функцій.

Розглянемо задачу з двома частинними мінімізованими критеріями і з чіткою множиною допустимих планів (з чіткою множиною альтернатив):

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \\ f_2(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j \rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i, c_j, d_j \in R, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Через $\mu_l(x)$ ($l = 1, 2$) позначимо функцію приналежності нечіткої множини, що формалізує частинну нечітку мету задачі, визначену частинним критерієм f_l . Будемо припускати, що функції μ_l є спадними функціями свого аргументу і що мінімальне значення цих функцій дорівнює нулю, а максимальне – одиниці.

Будемо характеризувати ступінь приналежності альтернативи нечіткій меті значенням відповідного нормованого критерію: для критерію $f(x)$, що мінімізується, формула (2), для критерію, що максимізується, формула (3):

$$\mu(x) = \frac{f^{\max} - f(x)}{f^{\max} - f^{\min}}; \quad (2)$$

$$\mu(x) = \frac{f(x) - f^{\min}}{f^{\max} - f^{\min}}, \quad (3)$$

де f^{\max} і f^{\min} – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f , якщо в задачі (1) залишити тільки один цей критерій і прибрати інший (інші).

Будемо припускати, що $d_j \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$, $b_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Розглянемо сімейство задач, що залежать від параметра E , $0 \leq E \leq 1$:

$$\begin{cases} f_2(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j \rightarrow \min, \\ \mu_1(x) \geq E, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

Нехай x^E – оптимальний план задачі (4) при заданому E . План, при якому $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, є допустимим планом задачі (4) при $E = 0$.

З ростом E множина допустимих планів задачі (4) не збільшується і змінюється від множини допустимих планів задачі (1) до множини планів, для яких $\mu_1(x_i) = 1$. Отже, оптимальне значення критерію $f_2(x)$ зі зростанням E не спадає, а отже, функція $\mu_2(f_2(x))$ не може зростати і змінюється від одиниці до нуля.

Нехай

$$W = \max_{0 \leq E \leq 1} \min \left\{ \mu_1(x^E), \mu_2(x^E) \right\} = \min \left\{ \mu_1(x^{E^0}), \mu_2(x^{E^0}) \right\},$$

тоді план x^{E^0} вважається розв'язком задачі (1).

Будуючи за задачею (1) задачу (4), як цільову функцію в (4) узяли другий частинний критерій із (1). Зауважимо, що максимальне значення функції приналежності нечіткого розв'язку задачі (1) однаково вийшло б таким, що дорівнювало б W , якби як цільову функцію взяли перший частинний критерій, а оптимальний план міг би й змінитися.

Для наближеного розв'язання задачі (1) можна запропонувати такий алгоритм.

Нехай похибка у визначенні ступеня нашої впевненості в тому, що альтернатива x є розв'язком сформульованої задачі, не повинна перевищувати Δ .

Розглянемо перший частинний критерій $f_1(x)$ і відповідну йому функцію приналежності $\mu_1(x)$. Будемо розв'язувати послідовність задач такого вигляду:

$$\begin{cases} f_2(x) = \sum_{j=1}^n d_j x_j \rightarrow \min, \\ \mu_1(x) \geq k\Delta, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'яжемо нерівність $\mu_1(x) \geq k\Delta$ відносно $f_1(x)$, $\mu_1(x)$ обчислюємо за формулою (2), отримаємо:

$$f_1(x) \leq f_1^{\max} - (f_1^{\max} - f_1^{\min}) \cdot k\Delta,$$

де f_1^{\max} і f_1^{\min} – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f_1 , якщо в задачі (1) залишити тільки один цей критерій і прибрати інший (інші); аналогічно, f_2^{\max} і f_2^{\min} – відповідно максимальне і мінімальне значення критерію f_2 , якщо в задачі (1) залишити тільки його й прибрати f_1 .

Задача (5) розв'язується для $k = 0, 1, 2, \dots, h$, де $h = \text{int}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$, тобто h – максимально ціле число, що не перевищує $\frac{1}{\Delta}$. Для кожного k знаходимо оптимальний план x^{*k} задачі (5), обчислюємо $\mu_1(x^{*k})$ і $\mu_2(x^{*k})$ і знаходимо $\mu_{\bar{D}}(x^{*k})$:

$$\mu_{\bar{D}}(x^{*k}) = \min \left\{ \mu_1(x^{*k}), \mu_2(x^{*k}) \right\},$$

тобто для x^{*k} визначаємо значення функції приналежності нечіткому розв'язку.

Якщо x^{**} – план, за якого значення $\mu_D(x^{**})$ максимальне, тобто

$$\mu_D(x^{**}) = \max_{1 \leq k \leq n} \mu_D(x^{*k}),$$

то він вважається розв'язком задачі (1).

Обчислювальний експеримент. Розглянемо таку задачу: розробити денний пайок (умовний), що забезпечує потреби в корисних речовинах та енергетиці і є найкращим за витратами та вагою. Продукти, що використовуються:

$p = (\text{хліб, сухофрукти, гречка, яловичина, сир, яйця курячі, капуста, картопля, яблука})$.

Потреби в жирах, білках, вуглеводах та кілокалоріях позначимо b_j ($j = 1, \dots, 4$), $B = (60, 150, 250, 1800)^T$.

Вартість кілограму продуктів d_i ($i = 1, \dots, 9$), $D = (35, 100, 30, 250, 400, 50, 15, 23, 25)^T$. Вміст жирів, білків, вуглеводів, кілокалорій у 100 г продукту позначимо

$$a_{ij}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 16 & 41 & 11 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 5 & 2 & 12 & 19 & 24 & 13 & 1,8 & 2 & 0,5 \\ 46 & 70 & 68 & 0 & 0 & 1 & 6,8 & 18 & 12 \\ 220 & 227 & 335 & 220 & 530 & 144 & 27 & 80 & 45 \end{pmatrix}^T.$$

Побудуємо математичну модель, прийнявши за невідоме кількість відповідного продукту, що використовується в пайці: x_i ($i = 1, \dots, 9$) Щоб гарантувати обмеженість множини допустимих планів, введемо вимогу про те, що сумарна вага продуктів не повинна перевищувати 20 одиниць (2 кг).

Зауважимо, що в цій моделі дві цільові функції – вартість пайка і його вага. Також введемо обмеження на мінімальну кількість обраних продуктів: $x_j \geq 0,1$.

Отримаємо математичну модель:

$$\begin{cases} f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min, \\ f_2(x) = \sum_{i=1}^n d_i x_i \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 20, \\ -\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq -b_j, \quad n=9, \quad j=1, \dots, 4, \\ x_i \geq 0,1. \end{cases}$$

Для наближеного розв'язання задачі (4) будемо з кроком $\Delta = 0,01$ розв'язувати послідовність задач. $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ розраховуються за формулою (2).

Для початку знайдемо f_1^{\max} і f_1^{\min} , для цього розв'яжемо задачу, враховуючи у ній тільки перший критерій f_1 . $f_1^{\max} = 20$, $f_1^{\min} = 8,49$.

Потім розв'яжемо задачу (5) за k , що змінюється від нуля до десяти. Ці задачі розв'язуються симплекс-методом:

$$\begin{cases} f_2(x) = \sum_{i=1}^n d_i x_i \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 20 - (f_1^{\max} - f_1^{\min}) \Delta k, \\ -\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq -b_j, \quad n=9, \quad j=1, \dots, 4, \\ x_i \geq 0,1. \end{cases}$$

Задача розв'язана в системі *Wolfram Mathematica* [10], результати експерименту наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Результати роботи програми

k	План задачі	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
1	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
2	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
3	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
4	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
5	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
6	{0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1}	0,647	1	0,647	12,55	486,78
7	{0,1; 0,1; 3,34; 0,1; 0,26; 7,75; 0,1; 0,1; 0,1}	0,7	0,976	0,700	11,95	634,63
8	{0,1; 0,1; 3,38; 0,1; 1,62; 5,2; 0,1; 0,1; 0,1}	0,8	0,909	0,800	10,79	1053,45
9	{0,1; 0,1; 3,41; 0,1; 2,98; 2,65; 0,1; 0,1; 0,1}	0,9	0,843	0,843	9,64	1472,27
10	{0,1; 0,1; 3,45; 0,1; 4,34; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1}	1	0,776	0,776	8,49	1891,08

Максимальне значення функція $\mu_D(x_k^*)$ набуває за $k=9$. Таким чином, оптимальним є план (0,1; 0,1; 3,41; 0,1; 2,98; 2,65; 0,1; 0,1; 0,1), тобто для пайки слід використати по 10 г хліба, сухофруктів, яловичини, капусти, яблук, картоплі; 341 г гречки; 298 г сиру; 265 г яєць. Його вага дорівнює 964 г, його вартість дорівнює 1472,27 у.о. Ступінь упевненості в тому, що цей план є найкращим, дорівнює 0,843. На рис. 1 наведено графіки функцій приналежності $\mu_1(x_k^*)$ та $\mu_2(x_k^*)$.

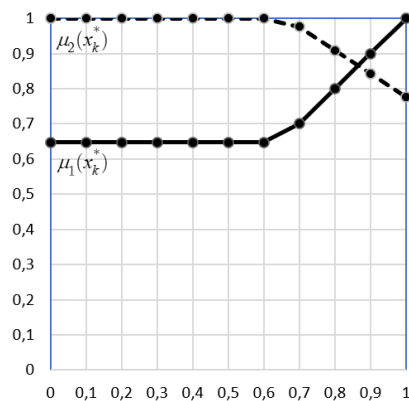


Рис. 1 – Графіки функцій приналежності $\mu_1(x_k^*)$ та $\mu_2(x_k^*)$.

На рис. 1 бачимо графіки функцій приналежності нечіткої мети, визначеної частинними критеріями f_1, f_2 . Функція приналежності $\mu_D(x)$ нечіткого рішення \tilde{D} задачі обчислюється як мінімум цих функцій приналежності. Розв'язком задачі є альтернатива x , для якої значення функції $\mu_D(x)$ є максимальним.

Розглянемо ту ж саме задачу, але додамо нечіткість в параметри задачі. Нехай потреби b_j у корисних речовинах та кілокалоріях задані у вигляді нечітких трикутних чисел $\langle \beta_j, b_j, f_j \rangle$, а саме:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30; 60; 80 \\ 75; 150; 200 \\ 125; 250; 300 \\ 900; 1800; 2100 \end{pmatrix}.$$

Значення потреб змінювались з кроком 10%, що відповідає зміні значень відповідних функцій надійності на 0,2 (табл. 2), оскільки

$$\mu_{b_j}(u) = \begin{cases} \frac{u - (b_j - \beta_j)}{b_j - (b_j - \beta_j)}, & \text{якщо } u \in [(b_j - \beta_j); b_j], \\ 1, & \text{якщо } b_j \leq u \leq f_j, \\ 0, & \text{якщо } 0 \leq u \leq (b_j - \beta_j), \end{cases} \quad \text{а } (b_j - \beta_j) = 0,5 \cdot b_j.$$

Так, рівню надійності 0% відповідає рівень потреб у 50%, рівню надійності 20% відповідає рівень потреб 50% + 10% = 60%, рівню надійності 40% – рівень потреб 50% + 20% = 70% тощо.

Таблиця 2 – Результати розв'язку задачі з нечіткими потребами

k	$\mu_{b_j^k}$	Рів. по- треб, %	Нечіткі потреби b_j	План задачі	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	0	50	30; 75; 125; 900	{0,1;0,1;1,61;0,1;2,13;0,1;0,1;0,1;0,1}	1	0,903	0,903	4,45	953,58
1	0,2	60	36; 90; 150; 1080	{0,1;0,1;1,93;0,1;0,83;3,37;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,958	0,9	6,73	604,49
2	0,4	70	42; 105; 175; 1260	{0,1;0,1;2,30;0,1;1,37;3,18;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,931	0,9	7,46	821,44
3	0,6	80	48; 120; 200; 1440	{0,1;0,1;2,67;0,1;1,91;3,01;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,903	0,9	8,19	1038,38
4	0,8	90	54; 135; 225; 1620	{0,1;0,1;3,04;0,1;2,44;2,83;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,874	0,874	8,92	1255,32
5	1	100	60; 150; 250; 1800	{0,1;0,1;3,41;0,1;2,98;2,65;0,1;0,1;0,1}	0,9	0,842	0,842	9,64	1472,27

У другому стовпці табл. 2 $\mu_{b_j^k}$ – надійність потреб (нечітких чисел b_j^k) або ступінь упевненості в тому, що

план ефективний за рівнем забезпечення потреб. Графік ступеня впевненості в тому, що план ефективний за частинними критеріями ефективності та рівнем забезпечення потреб наведений на рис. 2.

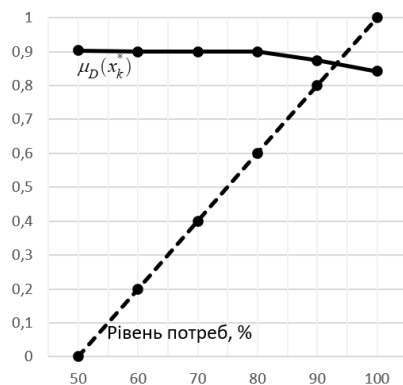


Рис. 2 – Графіки ступеня впевненості в оптимальності плану.

З аналізу представлених на рис. 2 графіків видно, що максимальне значення впевненості в тому, що план ефективний за обома частинними критеріями (за вагою та витратами) та рівнем забезпечення потреб, дорівнює 0,855. При цьому рівень забезпеченості становить 94 %. Тобто оптимальним є план (0,1; 0,1; 3,205; 0,1; 2,71; 2,74; 0,1; 0,1; 0,1), тобто для пайка слід використати по 10 г хліба, сухофруктів, яловичини, капусти, яблук, картоплі; 320 г гречки; 100 г сиру; 556 г яєць. Його вага дорівнює 925,5 г, його вартість дорівнює 1361,95 у.о.

Порівнявши результати розв'язання задачі з урахуванням нечіткості потреб та без нього можемо відмітити незначні зміни в оптимальному плані, але значення цільових функцій відрізняються: вага раціону зменшилася на 4 %, вартість зменшилась на 7,5 %.

Для порівняння ця задача була розв'язана методом послідовних поступок для розв'язання багатокритеріальних оптимізаційних задач.

Δ_1, Δ_2 – величина поступки за відповідним критерієм; $f_1^{\min} = 8,49$, $f_1^{\max} = 20$; $f_2^{\min} = 486,7$, $f_2^{\max} = 6756,4$. Результати обчислень для різних поступок наведено в табл. 3 та табл. 4.

Таблиця 3 – Результати методу послідовних поступок (більш вагомий перший критерій)

Крок	$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 500$	$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 1000$	$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = 2000$	$\Delta_1 = 8, \Delta_2 = 4000$
1	$f_1 = 9,49, f_2 = 1528,78$	$f_1 = 10,49, f_2 = 1164,76$	$f_1 = 12,49, f_2 = 500,3$	$f_1 = 12,55, f_2 = 486,77$
2	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,08$	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$

Таблиця 4 – Результати методу послідовних поступок (більш вагомий другий критерій)

Крок	$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 500$	$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 1000$	$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = 2000$	$\Delta_1 = 8, \Delta_2 = 4000$
1	$f_1 = 10,98, f_2 = 986,49$	$f_1 = 9,61, f_2 = 1486,44$	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$	$f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$
2	$f_1 = 11,98, f_2 = 622,7$	$f_1 = 11,6, f_2 = 758,73$	$f_1 = 12,49, f_2 = 500,3$	$f_1 = 12,55, f_2 = 486,77$

Оптимальним за *Парето* [11] розв'язком можемо вважати $f_1 = 8,49, f_2 = 1891,06$, оптимальний план (0,1; 0,1; 3,45; 0,1; 4,34; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1), якщо більш вагомий перший критерій. Вага раціону дорівнює 849 кг, його вартість дорівнює 1891,06 у.о. Якщо більш вагомий другий критерій, то розв'язком можемо вважати $f_1 = 12,55, f_2 = 486,77$, оптимальний план (0,1; 0,1; 9,54; 0,1; 0,1; 2,32; 0,1; 0,1; 0,1). У порівнянні із результатом попереднього підходу маємо покращення першого критерію, але погіршення другого. Також можна проаналізувати інші допустимі розв'язки, наведені в табл. 3 та табл. 4, обрати як оптимальний інший розв'язок, але відсутність кількісних оцінок пріоритетів критеріїв робить цей процес суб'єктивним.

Висновки. В роботі було досліджено один підхід до розв'язання задачі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив та нечіткою метою на прикладі задачі складання дієти.

Отримано такі результати: для добового раціону було визначено набір продуктів, їхню вагу та вартість. Визначено ступінь впевненості у тому, що знайдений план оптимальний. Цю ж задачу було розв'язано методом послідовних поступок для розв'язання багатокритеріальних оптимізаційних задач. Цей метод дає можливість враховувати пріоритети критеріїв й уникнути підвищення їхніх значень більше деякого допустимого рівня, який визначається суб'єктивно експертами, що ускладнює його застосування. Також необхідно аналізувати різні варіанти розв'язку задачі. Підхід, запропонований в цій роботі, оперує більш точними оцінками та дозволяє врахувати нечіткість даних.

На базі запропонованої математичної моделі та методу її розв'язання можна створити програмний додаток, який дозволить обирати продукти харчування, вводити необхідні обмеження в зручному для користувача вигляді, а на виході отримувати один або кілька варіантів денного раціону. Такий додаток буде корисним для дієтологів, спортсменів, лікарів та інших людей, які переймаються проблемами здорового харчування.

Під час розв'язання задачі за цільову функцію було взято другий частинний критерій. Подальші дослідження в цієї області можна спрямувати на розв'язання задачі, коли за цільову функцію взяти перший частинний критерій. Також можна дослідити різні методи згорток.

Список літератури

1. Moutaouakil K. E., Saliha C., Hicham B. Optimal Fuzzy Deep Daily Nutrients Requirements Representation: Application to optimal Morocco Diet Problem // Mathematical Modeling and Computing. – 2022. – vol. 9. – № 3. – С. 607 – 615. <https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.607>.

2. Venkatesh A., Britto Mano A. A fuzzy mathematical model for vegetable diet plan using ranking of pentagonal fuzzy number // *Malaya Journal of Matematik*. – 2020. – vol. 8. – №4. – С. 1995 – 1999. <https://doi.org/10.26637/MJM0804/0113>.
3. Venkatesh A., Britto Mano A. An Application of Fuzzy Transportation Problem for Diet Control. // *International Journal of Applied Engineering Research*. – 2019. – vol. 14. – №4. – С. 13 – 19.
4. Lakshmi Prasanna M., Surya Narayana G., Radhika Ch. A Mathematical Model for Balanced Diet using Nonagon Fuzzy Number // *International Journal of Enhanced Research in Science, Technology & Engineering*. – 2019. – vol. 8. – № 9. – С. 13 – 20.
5. Marashi-Hosseini L., Jafarirad S., Mohammad Hadianfard A. A Fuzzy Based Dietary Clinical Decision Support System for Patients with Multiple Chronic Conditions // *Scientific reports*. – 2023. – 13:12166. <https://doi.org/10.1038/S41598-023-39371-4>.
6. Mohd Arif Khan, Ahteshamul Haq, Aquil Ahmed. Multi-Objective Model for Daily Diet Planning // *Reliability: Theory & Applications*. – 2021. – vol. 16. – № 1(61). – С. 89 – 97.
7. Harahap L. H., Nasution M. K., Sawaluddin S. A Mathematical Model of Diet Menu Problem Based on Boolean Linear Programming Approach // *Jurnal Dan Penelitian Teknik Informatika*. – 2023. – vol. 8. – № 3. – С. 1453 – 1460. <https://doi.org/10.33395/sinkron.v8i3.12592>.
8. Akram M., Ullah I., Allahviranloo T., Edalatpanah S. A. LR-type fully Pythagorean fuzzy linear programming problems with equality constraints // *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology*. – 2021. – vol. 41. – № 12021. – С. 1975 – 1992. <https://doi.org/10.3233/JIFS-210655>.
9. Bellman R. E., Zadeh L. A. Decision-Making in Fuzzy Environment // *Management Science*. – 1970. – vol. 17. – № 4. – pp. 141 – 160.
10. Собчук В. В., Чичурин О. В., Кальчук І. В., Жигалло Т. В. Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри *Mathematica : підручник*. – Київ : Міленіум. – 2021. – 420 с.
11. Жуковин В. Е. Нечёткие многокритериальные модели принятия решений. – Тбилиси : «Мецниереба». – 1988. – 72 с.

References (transliterated)

1. Moutaouakil K. E., Saliha C., Hicham B. Optimal Fuzzy Deep Daily Nutrients Requirements Representation: Application to optimal Morocco Diet Problem. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022, vol. 9, no. 3, pp. 607–615. <https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.607>.
2. Venkatesh A., Britto Mano A. A fuzzy mathematical model for vegetable diet plan using ranking of pentagonal fuzzy number. *Malaya Journal of Matematik*. 2020, vol. 8, no. 4, pp. 1995–1999. <https://doi.org/10.26637/MJM0804/0113>.
3. Venkatesh A., Britto Mano A. An Application of Fuzzy Transportation Problem for Diet Control. *International Journal of Applied Engineering Research*. 2019, vol. 14, no. 4, pp. 13–19.
4. Lakshmi Prasanna M., Surya Narayana G., Radhika Ch. A Mathematical Model for Balanced Diet using Nonagon Fuzzy Number. *International Journal of Enhanced Research in Science, Technology & Engineering*. 2019, vol. 8, no. 9, pp. 13–20.
5. Marashi-Hosseini L., Jafarirad S., Mohammad Hadianfard A. A Fuzzy Based Dietary Clinical Decision Support System for Patients with Multiple Chronic Conditions. *Scientific reports*. 2023, 13:12166. <https://doi.org/10.1038/S41598-023-39371-4>.
6. Mohd Arif Khan, Ahteshamul Haq, Aquil Ahmed. Multi-Objective Model for Daily Diet Planning. *Reliability: Theory & Applications*. 2021, vol. 16, no. 1(61), pp. 89–97.
7. Harahap L. H., Nasution M. K., Sawaluddin S. A Mathematical Model of Diet Menu Problem Based on Boolean Linear Programming Approach. *Jurnal Dan Penelitian Teknik Informatika*. 2023, vol. 8, no. 3, pp. 1453–1460. <https://doi.org/10.33395/sinkron.v8i3.12592>.
8. Akram M., Ullah I., Allahviranloo T., Edalatpanah S. A. LR-type fully Pythagorean fuzzy linear programming problems with equality constraints. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology*. 2021, vol. 41, no. 12021, pp. 1975–1992. <https://doi.org/10.3233/JIFS-210655>.
9. Bellman R. E., Zadeh L. A. Decision-Making in Fuzzy Environment. *Management Science*. 1970, vol. 17, no. 4, pp. 141–160.
10. Собчук В. В., Чичурин О. В., Кальчук І. В., Жигалло Т. В. *Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри* [Mathematica : a textbook]. Kyiv, Milenium Publ., 2021. 420 p.
11. Zhukovyn V. E. *Nechyetykie mnogokriterial'nye modeli prinyatiya resheniy* [Fuzzy multicriteria decision-making models]. Tbilisi, "Metsniereba" Publ., 1988. 72 p.

Надійшла (received) 27.10.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Матвієнко Ольга Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (097) 715-18-03; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Матвиенко Ольга Ивановна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (097) 715-18-03; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Matviienko Olha Ivanivna – PhD (Engineering Sciences), Kharkiv National University of Radio Electronics, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics, Kharkiv; tel.: (097) 715-18-03; e-mail: olha.matviienko@nure.ua.

Мірошніченко Олександр Олександрович – аспірант кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

Мирошниченко Александр Александрович – аспирант кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

Miroshnichenko Oлександр Oлександрович – postgraduate student at the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (096) 165-84-70; e-mail: oleksandr.miroshnichenko@nure.ua.

О. С. МЕЛЬНИК, В. О. КОЗАРЕВИЧ

МІКРО- ТА НАНОСХЕМИ З ПРОГРАМОВАНИМИ СТРУКТУРАМИ

Поширення та впровадження великих інтегральних мікро- та наносхем (ВІС) в пристроях цифрової і аналогової електроніки суттєво покращує їх експлуатаційні характеристики і параметри, підвищуючи надійність, продуктивність, швидкодію та зменшуючи собівартість, енергоспоживання, вагові та габаритні показники. Водночас, проектування та виготовлення ВІС є довготривалим і дорогим процесом, до того ж економічно і технологічно виправданим за досить великих об'ємів виробництва. Зараз збільшення універсальності ВІС завжди супроводжується зменшенням їх спеціального застосування. Така суперечливість із запровадженням спеціалізованих і водночас універсальних ВІС з'ясовується на початкових етапах автоматизованого ієрархічного проектування. Для підвищення ефективності систем автоматизованого проектування (САПР) в роботі створені універсальні мікро- та наносхеми з програмованими структурами (МНПС). Однією з переваг програмованих логічних інтегральних схем (ПЛІС) перед ВІС є малий час виготовлення з наперед заданими характеристиками. При цьому береться стандартна мікро- або наносхема і за рахунок подання на певні входи спеціальних сигналів або відповідним з'єднанням виводів напрямлено змінюються її параметри. Ця перевага визначає основне призначення таких ПЛІС – заміну груп логічних ІС середнього і великого ступенів інтеграції. В якості простих ПЛІС можуть використовуватися мультиплексори. В статті наведені ефективні методи програмування мультиплексорних МНПС для реалізації функцій булевої та мажоритарної логіки. Отримані результати можна використовувати для репрограмування мультиплексорних функціональних блоків програмованих інтегральних схем. На сучасних САПР виконане співставне моделювання логічних МНПС, яке довело адекватність їх функціонування, переваги частотних і недоліки температурних характеристик наномультіплексорних схем.

Ключові слова: мікро- та наносхеми, цифрова та аналогова електроніка, програмовані логічні структури, автоматизоване проектування, мультиплексори.

А. С. МЕЛЬНИК, В. А. КОЗАРЕВИЧ

МИКРО- И НАНОСХЕМЫ С ПРОГРАММИРУЕМЫМИ СТРУКТУРАМИ

Распространение и внедрение больших интегральных микро- и наносхем (БИС) в устройствах цифровой и аналоговой электроники существенно улучшает их эксплуатационные характеристики и параметры, повышая надежность, производительность, быстродействие и уменьшая себестоимость, энергопотребление, весовые и габаритные показатели. В то же время, проектирование и изготовление БИС является длительным и дорогостоящим процессом, к тому же экономически и технологически оправданными при достаточном количестве больших объемов производства. Сейчас увеличение универсальности БИС всегда сопровождается уменьшением их специального применения. Такая противоречивость с внедрением специализированных и одновременно универсальных БИС выясняется на начальных этапах автоматизированного иєрархического проектирования. Для повышения эффективности систем автоматизированного проектирования (САПР) в работе созданы универсальные микро- и наносхеми с программируемыми структурами (МНПС). Одним из преимуществ программируемых логических интегральных схем (ПЛІС) перед БИС является малое время изготовления с заданными характеристиками. При этом берется стандартная микро- или наносхема и за счёт подавания на определенные входы специальных сигналов или соответствующим соединением выводов направленно изменяются ее параметры. Это преимущество определяет основное предназначение таких ПЛІС – замену групп логических ІС средней и большой степеней интеграции. В качестве простых ПЛІС могут использоваться мультиплексоры. В статье приведены эффективные методы программирования мультиплексорных МНПС для реализации функций булевой и мажоритарной логіки. Полученные результаты можно использовать для репрограммирования мультиплексорных функциональных блоков программируемых интегральных схем. На современных САПР выполнено сопоставимое моделирование логических МНПС, доказавшее адекватность их функционирования, преимущества частотных и недостатки температурных характеристик наномультіплексорных схем.

Ключевые слова: микро- и наносхеми, цифровая и аналогова електроніка, программируемые логические структуры, автоматизированное проектирование, мультиплексоры.

O. S. MELNYK, V. O. KOZAREVYCH

MICRO- AND NANOCIRCUITS WITH PROGRAMMABLE STRUCTURES

In this work, structural programming does not mean the creation of algorithms for processing multi-argument functions by changing the operating programs, as implemented by the microprocessor, but rather technological changes in the large-scale integrated circuits (LSIC) configurations in such a way as to synthesize logical functions at the structural-logical level. During the automated design and manufacture of programmable LSIC (FPGA or CPLD), the same technological cycle is used as for specialized circuits. Obviously, such LSICs are universal for technologists. However, programming of individual LSICs that implement given functions is performed by the user. Thus, the main advantage of universal (FPGA, CPLD) programmable LSIC over specialized ones is low cost, which is fundamentally important for small-scale production.

Currently, the increase in the universality of LSIC is always accompanied by a decrease in their special application. Such inconsistency is revealed in the initial stages of automated hierarchical design. Universal micro- and nanocircuits with programmable structures are used to increase the efficiency of CAD. One of the advantages of programmable logic integrated circuits (PLCs) over LSIC is a short manufacturing time with predetermined characteristics. At the same time, a standard micro- or nanocircuit is taken and its parameters are directly changed by applying special signals to certain inputs or connecting the outputs accordingly. This advantage determines the main purpose of such FPGAs - the replacement of groups of logic ICs of medium and large degrees of integration. Multiplexers can be used as simple FPGAs. The article introduces effective methods of multivariate programming of multiplexer MNPS for reproduction of Boolean and majority logic functions. The obtained results can be used for reprogramming multiplexer functional blocks of programmable integrated circuits. Comparative modeling of logical MNPS was performed on modern CAD systems, which proved the adequacy of their functioning, advantages of frequency and disadvantages of temperature characteristics of nanomultiplexer circuits.

Key words: micro- and nanocircuits, digital and analog electronics, programmable logical structures, computer-aided design, multiplexer.

Вступ. Під конфігуруванням (структурним програмуванням) мікро- та наномультіплексорів розуміють не здатність створювати алгоритми опрацювання вхідних багатаргументних функцій, змінюючи робочі програми, як, зазвичай, це реалізує мікроконтролер, а технологічні зміни внутрішніх конфігурацій електронних кіл таким чином, щоб вони забезпечували синтез необхідних функцій на структурно-логічному рівні.

Під час *автоматизованого проектування* та виготовлення *програмованих логічних інтегральних схем (ПЛІС)* на базі *замовних великих інтегральних схем (ВІС)* використовується той же технологічний цикл, що і для спеціалізованих схем. Вочевидь, для технологів такі ВІС є універсальними. Проте програмування окремих ВІС, які реалізують задані функції, виконує користувач. Таким чином, головною перевагою універсальних *мікро-* та *наносхем з програмованими структурами (МНПС)* перед спеціалізованими є низька собівартість, що принципово важливо при дрібносерійному виробництві [1, 2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковці Харківського університету радіоелектроніки [3] та американського університету Клівленда [4] першими запропонували багатоструктурні мікро- та наносистеми на базі універсальних функціонально повних модулів, як один з найбільш перспективних напрямів розвитку електроніки.

Останнім часом дослідження і результати автоматизованого ієрархічного проектування програмованих мікро- та наносхем достатньо повно описані у вітчизняних та закордонних публікаціях [1 – 14]. В роботі [2] досліджені сучасні напрямки створення і розвитку нанорозмірних репрограмованих пристроїв. Однак ця робота не відповідає на питання автоматизованого моделювання і верифікації проектів. Існує багато технічних задач, в яких в рамках неавтоматизованого програмування мікро- та наносхем [5 – 8] вдається реалізувати 16 дво- та 256 триаргументних функцій на базі мультиплексорів. Проте в якості універсального логічного мікроелемента такі реалізації заздалегідь носять надлишковий характер. Крім того, припускається, що такі схеми є *відмовостійкими*. Вирішенню цих проблем були присвячені роботи авторів цієї статті [1, 9], але практично не була ще досягнута мета автоматизованого проектування МНПС.

В роботах [10 – 12] дослідники запропонували ефективні методи конфігурування мікро- та нанопристроїв для відтворення широкого спектру функцій алгебри логіки комбінаційних та послідовностних пристроїв. В публікації [10] представлено алгоритм автоматизованого програмування мікросхем *великого ступеня інтеграції*, який частково відтворений в даній статті для наноелектронних приладів з програмованими структурами.

В монографіях *Kilts S.* [13] та *Groul I.* [14] обґрунтовуються моделі схем та алгоритми їх програмування, але не доведена можливість багатоваріантних підходів спрощення та адекватних їх реалізацій.

В цій статті запропоновані багатоваріантні процедури контролю результатів програмування мікро- та наносхем. Питання *синхронізації* та *впливу кріотемператури* на працездатність нанопристроїв ще недостатньо досліджені [1, 2, 5], тому вони стимулюють подальший пошук додаткових підходів для підвищення якості МНПС.

Метою роботи є запровадження автоматизованих методів моделювання та проектування мультиплексорних мікро- та наносхем з програмованими структурами для реалізації *логічних функцій булевої та мажоритарної логіки*. Експлуатаційні характеристики МНПС заздалегідь гірші, ніж у стандартних мікросхем.

Програмування мультиплексорних мікро- та наноструктур. Для використання мультиплексорів в якості універсального логічного наноелемента на його адресні входи комутують сигнали деяких аргументів відтвореної функції, а інформаційні входи виконують роль програмованих наноструктур. Для цифрового пристрою з двома вхідними змінними x_1 , x_0 можливі чотири варіанти комбінацій аргументів: 00, 01, 10, 11 і 10 та 16-ть різних вихідних функцій (табл. 1).

Таблиця 1 – Логічні функції двох аргументів

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Кожна функція f_i ($i = 0, \dots, 15$) є результатом виконання однієї з операцій над аргументами x_1 , x_0 і являє собою чотирирозрядні двійкові числа від 0000 до 1111. Зверху в табл. 1 показано мультиплексор ($4 \rightarrow 1$), на входи якого подають сигнали програмування D_3, \dots, D_0 для відтворення відповідної функції f_i [9].

Шість тривіальних функцій, серед яких $f_3 = \overline{x_1}$, $f_5 = \overline{x_0}$, $f_{10} = x_0$, $f_{12} = x_1$ залежать тільки від одного аргументу, а нульова $f_0 = 0$ і одинична $f_{15} = 1$ взагалі є константами. Решта десять функцій $f_i(x_1, x_0)$ є двоаргу-

ментними. Деякі з них мають декілька назв. Наприклад, $f_1 = \overline{x_1 \vee x_0}$ зветься АБО-НІ, додавання (диз'юнкція) із запереченням, *стрілка Пірса*; $f_2 = \overline{x_1}x_0$ чи $f_4 = x_1\overline{x_0}$ – заборона x_1 чи x_0 , $f_3 = \overline{x_1}$ чи $f_5 = \overline{x_0}$ – заперечення x_1 чи x_0 ; $f_6 = x_1x_0 \vee \overline{x_1}\overline{x_0} = x_1 \oplus x_0$ – нерівнозначність, Виключне АБО, додавання за модулем 2; $f_7 = \overline{x_1x_0}$ – І-НІ, заперечення множення (*кон'юнкції*), *итрих Шеффера*; $f_8 = x_1x_0$ – І, множення (добуток, *кон'юнкція*); $f_9 = x_1x_0 \vee \overline{x_1}\overline{x_0} = x_1 \equiv x_0 = \overline{f_6}$ – Виключне АБО-НІ, рівнозначність (еквівалентність); $f_{10} = x_0$ чи $f_{12} = x_1$ – тотожність x_0 чи x_1 ; $f_{11} = \overline{x_1}x_0$ чи $f_{13} = x_1\overline{x_0}$ – пряма чи зворотна (заперечна) *імплікація* та $f_{14} = x_1 \vee x_0$ – АБО, додавання (диз'юнкція).

За потреби реалізації багатоаргументних логічних функцій, зазвичай, використовують структуру мультиплексорного дерева [6]. Однак, якщо число вхідних змінних не суттєво перевищує число адресних входів мікро- чи наномультимплексора, то такі задачі вирішують вибором сигналів репрограмування МНПС не з множини $\{0, 1\}$, як це показано в табл. 1, а з множини $\{x_i, 0, 1\}$, де x_i – один з аргументів відтворюваної функції. В цьому випадку вдається на МНПС без додаткових апаратних витрат реалізувати логічну функцію, число аргументів якої більше числа адресних входів.

На рис. 1 наведені умовне позначення (а) мультиплексора ($2 \rightarrow 1$), його еквівалентні МНПС на базі логічних мікроелементів (б) та наноелектронних мажоритарних елементів [3] (в) і таблиця істинності (г).

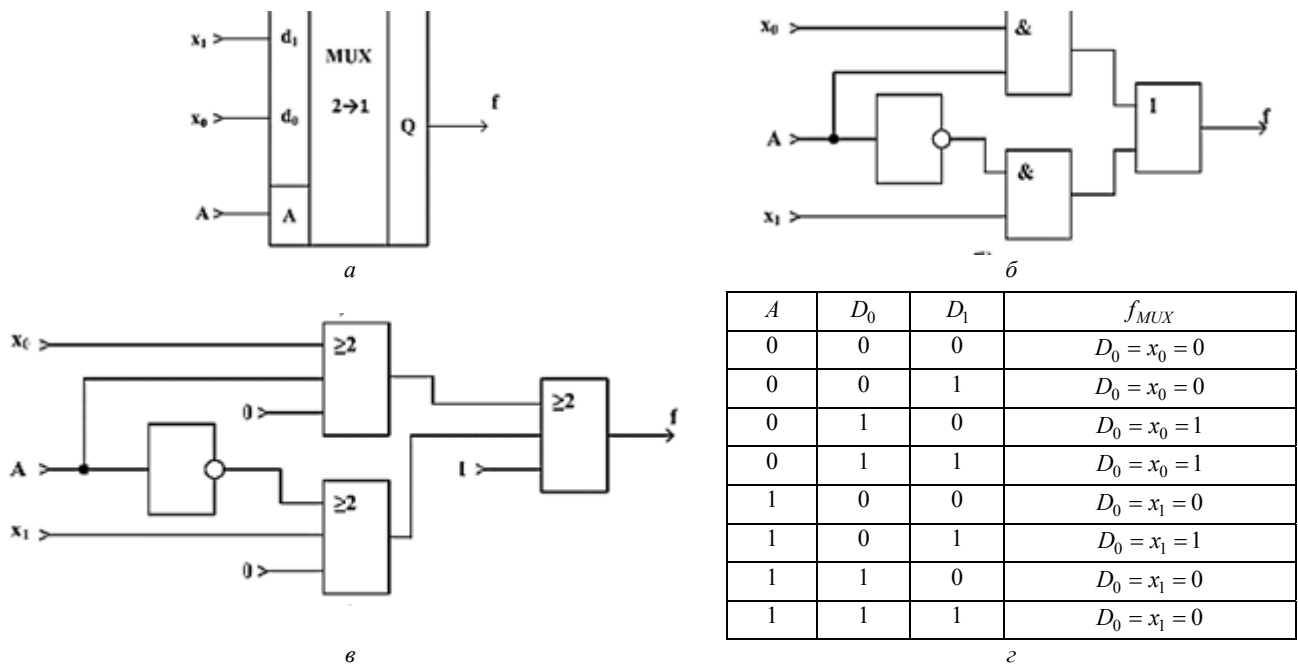


Рис. 1 – а – Двовходовий мультиплексор; б – мікросхема мультиплексора; в – наносхеми мультиплексора; г – таблиця істинності.

З таблиці на рис. 1, г після дужкових перетворень отримують функцію алгебри логіки мультиплексора ($2 \rightarrow 1$):

$$f_{MUX} = \overline{AD_0}D_1 \vee \overline{AD_1}D_0 \vee AD_0D_1 = D_1A \vee D_0\overline{A}. \tag{1}$$

Досить зрозуміло виконується програмування шести тривіальних функцій $f_0, f_3, f_5, f_{10}, f_{12}$ та f_{15} з табл. 1 на одноадресних мультиплексорах ($2 \rightarrow 1$). Наприклад, для реалізації функції заперечення $f_3 = \overline{x_1}$ слід порівняти таблиці істинності самої функції (табл. 1) та мультиплексора (рис. 1, г), з яких створюють тотожність:

$$f_3 = \overline{x_1} = f_{MUX} = D_1A \vee D_0\overline{A}. \tag{2}$$

Згідно цьому рівнянню можливі чотири варіанти програмування адресного входу МНПС $A = \overline{x_1}, x_1, 0, 1$ та відповідно, інформаційних входів D_1 і D_0 : 1) $A = \overline{x_1}$, тоді $\overline{x_1} = D_1\overline{x_1} \vee D_0x$, звідки для виконання цієї тотожності (2) $D_1 = \overline{x_1}$ або 1, а $D_0 = \overline{x_1}$ або 0; 2) $A = x_1, D_1 = \overline{x_1}$ або 0, $D_0 = \overline{x_1}$ або 1; 3) $A = 0, D_1 = \overline{x_1}$ або 1, $D_0 = \overline{x_1}$; 4) $A = 1, D_1 = \overline{x_1}, D_0 = \overline{x_1}$ або 0.

Отже, практичне програмування функції f_3 на базі двовходових МНПС (рис. 1) свідчить, що при будь-якій комбінації адресних аргументів на виході реалізуються однотипні функції програмування. У такий самий спосіб

програмуються наступні одноаргументні функції f_5 , f_{10} та f_{12} .

Для відтворення ще десяти двоаргументних функцій f_1 , f_2 , f_4 , f_6 , f_8 , f_9 , f_{11} , f_{13} та f_{14} з табл. 1 необхідно виконати 4 перетворення, щоб отримати диз'юнктивні нормальні форми (ДНФ). Так, використовуючи закон двойності (інверсії) де Моргана для функції АБО-НІ $f_1 = \overline{x_1 \vee x_0}$, отримують $f_1 = \overline{x_1 x_0}$ та реалізують алгоритм програмування (2):

$$f_1 = \overline{x_1 x_0} = D_1 A \vee D_0 \overline{A}. \quad (3)$$

Тоді при чотириразовому програмуванні єдиного адресного входу константами аргументів $A = \overline{x_1}, x_1, \overline{x_0}, x_0$ слід подати на два інформаційні входи наступні комбінації сигналів:

$$A = \overline{x_1}, D_1 = \overline{x_0}, D_0 = \overline{x_1} \text{ або } 0; A = x_1, D_1 = \overline{x_1} \text{ або } 0, D_0 = x_0;$$

$$A = \overline{x_0}, D_1 = x_1, D_0 = x_0 \text{ або } 0; A = x_0, D_1 = x_0 \text{ або } 0, D_0 = x_1.$$

Далі для отримання ДНФ функції додавання f_{11} , f_{13} та f_{14} (табл. 1) слід помножити неповні доданки на одиночні суми відсутніх аргументів $(x_i \vee \overline{x_i})$ чи $(x_i \vee 1)$. Вочевидь, для реалізації функції додавання АБО $f_{14} = x_1 \vee x_0$ можливі наступні чотири однотипні дужкові перетворення:

$$f_{14} = x_1 (x_0 \vee \overline{x_0}) \vee x_0 (x_1 \vee \overline{x_1}) = \begin{cases} 1) x_1 \overline{x_0} \vee x_0 (x_1 \vee x_1 \vee \overline{x_1}) = x_1 \overline{x_0} \vee x_0, \\ 2) \overline{x_1} x_0 \vee (x_0 \vee x_0 \vee \overline{x_0}) = x_1 x_0 \vee x_1; \\ 3) x_1 (x_0 \vee \overline{x_0}) \vee x_0 (x_1 \vee 1) = 3) x_1 \overline{x_0} \vee x_0 (x_1 \vee x_1 \vee 1) = x_1 \overline{x_0} \vee x_0; \\ 4) x_1 (x_0 \vee 1) \vee x_0 (x_1 \vee \overline{x_1}) = 4) \overline{x_1} x_0 \vee x_1 (x_0 \vee x_0 \vee 1) = \overline{x_1} x_0 \vee x_1. \end{cases} \quad (4)$$

Таким чином, як і два попередні перетворення (2) та (3), реалізується алгоритм чотириваріантного репрограмування МНПС для синтезу функції f_{14} :

$$A = \overline{x_1}, D_1 = x_0, D_0 = \overline{x_1} \text{ або } 1; A = x_1, D_1 = x_1 \text{ або } 1, D_0 = x_0;$$

$$A = \overline{x_0}, D_1 = x_1, D_0 = x_0 \text{ або } 1; A = x_0, D_1 = x_0 \text{ або } 1, D_0 = x_1.$$

Для мультиплексорної реалізації функції І-НІ отримують її ДНФ, виконуючи, по-перше, перетворення де Моргана, а по-друге – дужкові:

$$f_7 = \overline{x_1 x_0} = \overline{x_1} \vee \overline{x_0} = \overline{x_1} (x_0 \vee \overline{x_0}) \vee \overline{x_0} (x_1 \vee \overline{x_1}).$$

Дві функції заборони $f_2 = \overline{x_1} x_0$ та $f_4 = x_1 \overline{x_0}$, одна функція перемноження І $f_8 = x_1 x_0$, як і модулярні функції $f_6 = x_1 \oplus x_0$ та $f_9 = \overline{x_1} \oplus \overline{x_0}$, записані у ДНФ. Тому їх програмування є подібним до попередніх випадків, наприклад, як (3) для f_1 .

Результати і обговорення. З розглянутих вище прикладів отримують підсумкову таблицю програмування МНПС мультиплексорів ($2 \rightarrow 1$) для реалізації 16 двоаргументних функцій (табл. 2). Верхня її частина практично повністю повторює табл. 1, але з адресацією, а в нижній, власне, зібрані 4 варіанти вибору адресних сигналів A з множини $\{\overline{x_1}, x_1, \overline{x_0}, x_0, 0, 1\}$ для кожної з відтворюваних функцій.

Таблиця 2 – Логічні функції двох аргументів для МНПС мультиплексорів ($2 \rightarrow 1$)

$x_1 \backslash x_0$	x_0	A	$f_0 = 0$	$f_1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_0}$	$f_2 = \overline{x_1} x_0$	$f_3 = \overline{x_1}$	$f_4 = x_1 \overline{x_0}$	$f_5 = \overline{x_0}$	$f_6 = x_1 \oplus x_0$	$f_7 = \overline{x_1} \overline{x_0}$	$f_8 = x_1 x_0$	$f_9 = \overline{x_1} \oplus \overline{x_0}$	$f_{10} = x_0$	$f_{11} = \overline{x_1} \vee x_0$	$f_{12} = x_1$	$f_{13} = x_1 \vee \overline{x_0}$	$f_{14} = x_1 \vee x_0$	$f_{15} = 1$
0/0	0/0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0/1	0/1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1/0	1/0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1/1	1/1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Продовження таблиці 2

1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Варіанти програмування	1	D_0	0	$\bar{x}_1(0)$	$\bar{x}_1(0)$	$\bar{x}_1(0)$	x_0	$\bar{x}_1(0)$	$\bar{x}_1(0)$	\bar{x}_0	x_0	x_0	$x_0(1)$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(1)$	$x_1(1)$	1
		D_1	0(1)	\bar{x}_0	x_0	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	$\bar{x}_0(1)$	x_0	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	\bar{x}_0	$x_0(0)$	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	\bar{x}_0	x_0	0(1)
		A	0	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1	\bar{x}_1
	2	D_0	0(1)	\bar{x}_0	x_0	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	$\bar{x}_0(1)$	x_0	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	\bar{x}_0	$x_0(0)$	$\bar{x}_1(1)$	$x_1(0)$	\bar{x}_0	x_0	0(1)
		D_1	0	$\bar{x}_1(0)$	$\bar{x}_1(0)$	$\bar{x}_1(0)$	\bar{x}_0	$\bar{x}_0(0)$	\bar{x}_0	\bar{x}_0	x_0	x_0	$x_0(1)$	x_0	$x_1(1)$	$x_1(1)$	$x_1(1)$	1
		A	1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	x_1	x_1	x_1	x_1	x_0	x_1	x_1	x_1	x_1	1
	3	D_0	$\bar{x}(0)$	$\bar{x}_1(0)$	\bar{x}_1	\bar{x}_1	$\bar{x}_0(0)$	\bar{x}_0	\bar{x}_1	\bar{x}_1	x_1	x_1	x_0	$x_0(1)$	x_1	x_1	$x_0(1)$	$x(1)$
		D_1	$x(0)$	\bar{x}_1	$x_0(0)$	$\bar{x}_1(0)$	x_1	$\bar{x}_0(0)$	x_1	$\bar{x}_0(1)$	$x_0(0)$	\bar{x}_1	$x_0(0)$	\bar{x}_1	$x_1(0)$	$\bar{x}_0(1)$	x_1	$\bar{x}(1)$
		A	\bar{x}	\bar{x}_0	\bar{x}_0	0	\bar{x}_0	0	\bar{x}_0	\bar{x}_0	\bar{x}_0	\bar{x}_0	0	\bar{x}_0	0	\bar{x}_0	\bar{x}_0	\bar{x}
	4	D_0	$x(0)$	\bar{x}_1	$x_0(0)$	$\bar{x}_1(0)$	x_1	$\bar{x}_0(0)$	x_1	$\bar{x}_0(1)$	$x_0(0)$	\bar{x}_1	$x_0(0)$	\bar{x}_1	$x_1(0)$	$x_0(1)$	x_1	$\bar{x}(1)$
		D_1	$\bar{x}(0)$	$\bar{x}_1(0)$	\bar{x}_1	\bar{x}_1	$x_0(0)$	\bar{x}_0	\bar{x}_1	x_1	x_1	x_1	x_0	$x_0(1)$	x_1	x_1	$x_0(1)$	$x(1)$
		A	x	x_0	x_0	1	x_0	1	x_0	x_0	x_0	x_0	1	x_0	1	x_0	x_0	x

Згідно рис. 1, б двохдодова МНПС побудована на площі проектування САПР Мікро-сар 11 [15] (рис. 2) з логічних елементів (а) та з окремого елемента в одному корпусі в макрос (б).

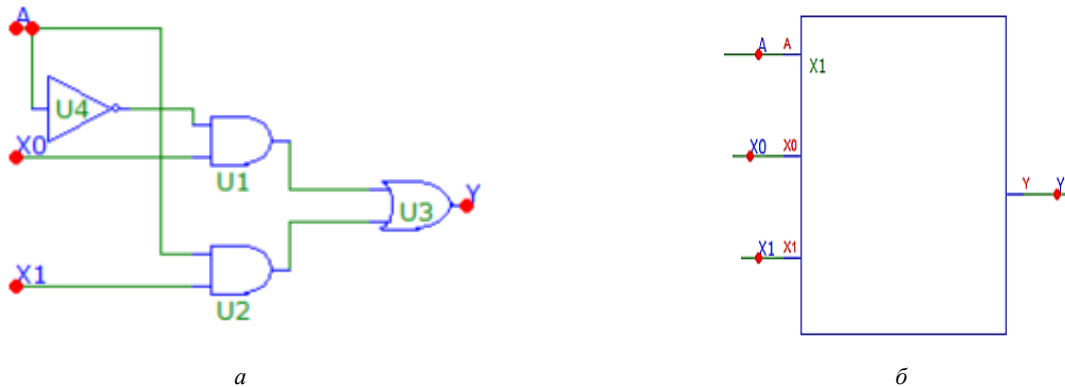


Рис. 2 – Двохдодова МНПС: а – на мікроелементах; б – в корпусі макрос.

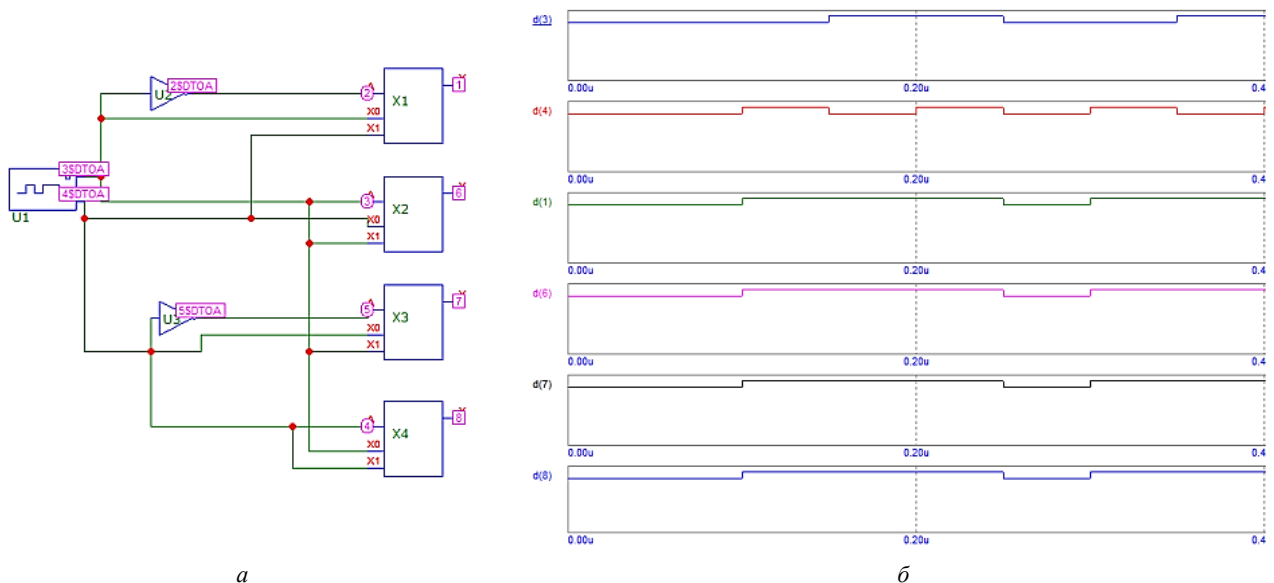


Рис. 3 – а – Автоматизоване програмування МНПС; б – часові реалізації запрограмованої функції АБО.

Рис. 3 ілюструє схему комп'ютерної реалізації функції АБО на чотирьох МНПС (а), які запрограмовані згідно перетворенням (4) і стовпцю f_{14} з табл. 2 та її результати моделювання (б).

Генератор U_1 відтворює *меандри сигналів* двох аргументів x_1, x_0 , які комутують входи кожної мультиплексорної МНПС (x_1, \dots, x_4) для програмування функції f_{14} . На двох верхніх часових діаграмах d_3, d_4 показані сигнали x_1, x_0 , а чотири нижні повністю співпадаючі осцилограми d_1, d_5, d_7 і d_8 підтверджують програмування і реалізації функції АБО на МНПС.

Розвиток наноелектроніки, в свою чергу, йде в бік зменшення розмірів, енерговитрат, підвищення швидкості і ступеня інтеграції. Одноелектронні наносхеми з'явилися за принципових обмежень, що виникли на шляху розвитку мікросхем [5, 6]. Гнучке програмування функцій і наноструктур почало суттєво переважати програмування мікросхем (ПЛІС) за рахунок структурних переваг і меншого надлишка. Тому вкрай необхідним є впровадження нових методів моделювання ПНПС.

Квантові *коміркові автомати (КА)* – це обчислювальна парадигма, згідно з якою інформація представляється певною конфігурацією електронів в комірці КА, що формується з однієї чи двох окремих молекул [16, 17].

Прилади на КА складаються з нанорозмірних комірок-діелектриків, які мають чотири квантові напівпровідникові точки, розташовані у кутках, і два рухомі електрони. Порядок їх розміщення залежить лише від скінченного набору можливих значень в межах певної комірки. Окрема комірка забезпечує тунельний перехід електронів крізь потенціальні бар'єри. Переходи контролюються локальним електричним полем, величина якого збільшується для перешкодження руху електронів, або зменшується для його спонукання. Стани поляризації виникають, коли величина потенціального бар'єру зростає і зберігає свій рівень, щоб мінімізувати енергетичний рівень комірки. Набір станів Q скінченний і типовий: $Q = \{0, 1\}$. Ймовірність перебування комірки в одному із станів поляризації може бути співвіднесена з густиною заряду кожної окремої квантової точки і визначається формулою:

$$P = \frac{(\rho_1 + \rho_3) - (\rho_2 + \rho_4)}{(\rho_1 + \rho_3) + (\rho_2 + \rho_4)} = \pm 1, \quad (5)$$

де ρ_i – густина електричного заряду кожної квантової точки комірки.

На рис. 4 зображена базова комірка КА, два способи її розміщення в просторі і поляризації електронів.

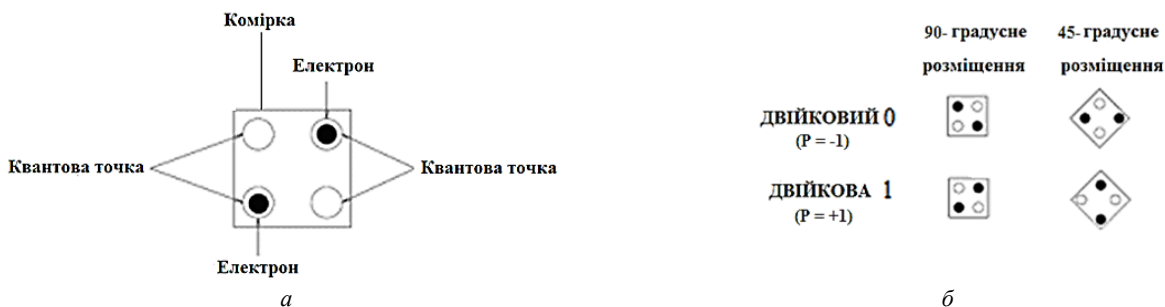


Рис. 4 – *a* – Окрема комірка квантового автомата; *б* – два способи розміщення КА в просторі і поляризації ($P = \pm 1$).

Таким чином, бінарна інформація передається без руху зарядів. Тобто нема протікання струму між комірками. Це основна причина, чому структури КА споживають надмізерну кількість енергії 10^{-23} Дж.

За допомогою КА можуть бути сконструйовані різні елементи для виконання арифметичних і логічних операцій. Базовими логічними елементами в теорії КА є *тривходовий мажоритарний елемент (МЕ)* та *інвертор* (рис. 5).

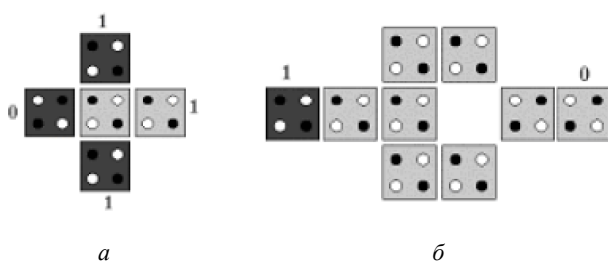


Рис. 5 – *a* – Мажоритарний елемент; *б* – інвертор на базі квантових автоматів.

Вихідна комірка МЕ буде мати поляризацію більшості вхідних комірок. Булевий вираз для мажоритарної функції [3, 16]:

$$maj(x_2, x_1, x_0) = x_2x_1 \vee x_2x_0 \vee x_1x_0, \quad (6)$$

де x_2, x_1 і x_0 – входи. Фіксація поляризації одного з входів МЕ, як логічний 0 чи логічна 1, дає змогу отримати елементи І чи АБО, відповідно (6) отримують $maj(x_2, x_1, 0) = x_2 \cdot x_1$ чи $maj(x_2, x_1, 1) = x_2 \vee x_1$. Такі комірки можуть бути створені в технологічному процесі, що усуває необхідність підтримувати постій-

ний струм через схему.

Створена раніше МНПС двовходового наномультимплексора (рис. 1, *в*) побудована на проектному планшеті САПР одноелектронних наносхем QCADesigner [18] на рис. 6, *a*. Вона складається з інвертора адресного сигналу A , двох вхідних МЕ, структури яких запрограмовані нульовими поляризаціями – 1, 00 для виконання операції кон'юнкції x_1A і $x_0\bar{A}$, та вихідного МЕ, структурно запрограмованого одиночною поляризацією 1, 00 для від-

творення диз'юнктивної вихідної логічної функції $F = f_{MUX}$ МНПС (1). На рис. 6, б наведені результати моделювання її часових діаграм, які повністю співпадають з таблицею істинності (рис. 1, з). Однак на осцилограмі вихідної функції F існує затримка на один такт аргумента x_1 через необхідність використання асинхронних моделей тактових сигналів на МЕ DD_2 (для x_1) та DD_4 (для F), які мають різні кольорові забарвлення.

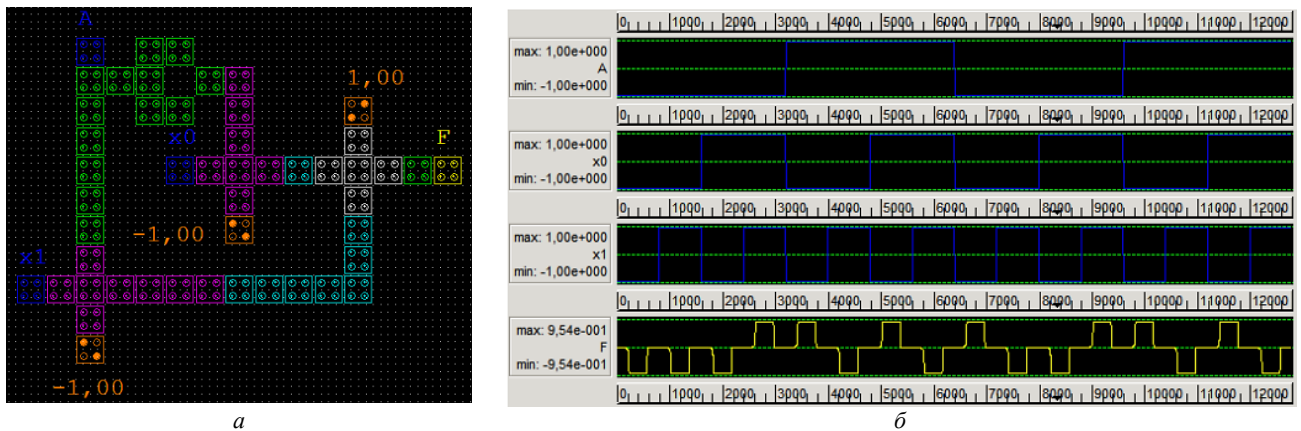


Рис. 6 – а – Автоматизоване програмування наносхеми МНПС; б – відповідні осцилограми.

Автоматизоване проектування одноелектронної МНПС виконується з структурним налаштуванням (рис. 7, а порівняно з рис. 6, а) і обранням програмування за 4-м варіантом для функції f_{14} АБО (табл. 2):

$$A = x_0, x_1(D_1) = x_0 \text{ та } x_0(D_0 = x_1).$$

Верифікація відповідності часового моделювання (рис. 7, б) та таблиць істинності рис. 1, з і 2 підтверджує адекватність налаштованої МНПС.



Рис. 7 – Автоматизоване проектування МНПС на КА: а – одноаргументна наносхема; б – результати часового моделювання.

МНПС збирається з 70 комірок КА розміром (18×18) нм кожна, з 4-ма квантовими точками діаметром 5 нм і відстанню між центрами 20 нм, загальний розмір наносхеми складає (128×212) нм.

Окрім того, порівняння результатів моделювання осцилограм мікро- (рис. 3, б) та нанорозмірних (рис. 7, б) мультиплексорів дозволяє зробити висновок, що вони повністю співпадають і достовірно відтворюють запрограмовану логічну функцію АБО.

Висновки. Оскільки розвиток мікроелектроніки на базі комплементарних транзисторів із структурою метал-окисел-напівпровідник (КМОПТ) лімітований квантово-технологічними і малорозмірними ефектами [5], то в статті надається перевага саме застосуванню наноелектронних програмованих структур для реалізації логічних функцій. Розроблені алгоритми (табл. 2) автоматизованої модифікації МНПС (рис. 3 і 7) підтвердили адекватність розроблених моделей. Проте, недоліком одноелектронних схем є надкритичний температурний діапазон (від 0 до 4 К) працездатності [16, 17], що, ймовірно, пов'язано з впливом явищ термогенерації фонових електронів. Наносхеми мають переваги у швидкодії, продуктивності, відмовостійкості та малорозмірності, тому надалі є найбільш перспективною компонентною базою електроніки.

Список літератури

1. Мельник О. С., Миколушко А. М. Репрограмовані мультиплексорні наносхеми // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 224 – 231.
2. Коротун А. В., Карандась Я. В., Погосов В. В. Нарис сучасних напрямків у нанотехнологіях. – Ужгород : ФОП Сабов А.М., 2019. – 392 с.
3. Пакулов Н. И. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. – М. : Сов. Радио, 1974. – 194 с.
4. Chu P. P. FPGA prototyping by VHDL examples Xilinx SpartanTM-3 Version. – WILEY & SONS, 2008. – 528 p.
5. Etienne Sicard, Sonia Delmas Bendhia. Advanced CMOS cell design. – Компанія McGraw-Hill, 2007. – 385 p.
6. Матвієнко М. П. Проектування цифрових пристроїв. – Київ : Ліра-К., 2018. – 358 с.

7. Roy S. *Advanced Digital System Design: FPGA and ASIC Implementation*. – Ane Books, 2021. – 418 p.
8. Рябенкий В. М., Жушков В. Я., Гулий В. Д. Цифрова схемотехніка: навчальний посібник. – Л.: Новий Світ, 2009. – 736 с.
9. Melnyk O. S., Yurchuk I. I. Nanodevices with Programmable Logic // *International scientific journal «Electronics and control systems»*. – 2019. – v. 4. – № 62. – P. 47–52. DOI:10.18372/1990-5548.62.14383.
10. Harris D., Harris S. *Digital Design and Computer Architecture*. – Morgan K., 2017. – 307 p.
11. Бруно Ф. Программирование FPGA для начинающих // Пер. с англ. под редакцией Романова. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 320 с.
12. Сочков А. Г. *Електроніка і мікросхемотехніка*. – Київ: Каравела, 2009. – 416 с.
13. Kiltz S. *Advanced FPGA Design: Architecture, Implementation, and Optimization*. – Wiley, 2016. – 537 p.
14. Grout Ian. *Digital systems design with FPGAs and CPLDs*. // *Library of Congress Cataloging-in-Publication Data*, 2008. – 763 p.
15. Micro-Cap 11 Full CD Version 11.2.0.3. – Режим доступу: <https://archive.org/details/micro-cap-11-full-cd-version-11.2.0.3>. – Дата звертання: 02 вересня 2023.
16. Lent C. S., Tougaw P. D. A device architecture for computing with quantum dots // *Proc. of the IEEE*. – 1997. – vol. 85. – № 5. – pp. 541–557. DOI: 10.1109/5.573740.
17. Мельник О. С., Козаревич В. О., Пилипенко Р. І. Комп'ютерне проектування арифметичних нанопристроїв // *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 39 (1082). – С. 126–134.
18. Walus K., Dysart T.J., Jullien G.A., Budiman R.A. QCADesiner: A Rapid Design and Simulation Tool for Quantum-Dot Cellular Automata // *IEEE Transactions on Nanotechnology* – 2004. – v. 3. – № 1. – pp. 26–31. DOI:10.1109/TNANO.2003.820815.

References (transliterated)

1. Mel'nyk O. S., Mykolushko A. M. Reprogramovani mul'tipleksorni nanoskhemy [Reprogrammed multiplexer nanocircuits]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 8 (1333), pp. 224–231.
2. Korotun A. B., Karandas' Ya V., Pogosov V. V. *Narys suchasnykh napryamkiv u nanotekhnologiyakh* [Outline of modern trends in nanotechnology]. Uzhgorod, FOP Sabov A.M., 2019. 392 p.
3. Pakulov N. I. *Mazhoritarnyy printsyp postroeniya nadyiozhykhk uzlov i ustroystv TSMV* [The majority principle of building reliable nodes and digital computers]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1974. 194 p.
4. Chu P. P. *FPGA prototyping by VHDL examples Xilinx SpartanTM-3 Version*. WILEY & SONS, 2008. 528 p.
5. Etienne Sicard, Sonia Delmas Bendhia. *Advanced CMOS cell design*. Kompaniua McGraw-Hill, 2007. 385 p.
6. Matviyenko M. P. *Proektuvannya tsyfrovyykh prystroyiv* [Design of digital devices]. Kyiv, Lira-K. Publ., 2018. 358 p.
7. Roy S. *Advanced Digital System Design: FPGA and ASIC Implementation*. Ane Books, 2021. 418 p.
8. Ryaben'kyy V. M., Zhuykov V. Ya., Gulyy V. D. *Tsyfrova skhemotekhnika: navchal'nyy posibnyk* [Digital circuit engineering: Textbook]. Lviv, Novyy Svit Publ., 2009. 736 p.
9. Melnyk O. S., Yurchuk I. I. Nanodevices with Programmable Logic. *International scientific journal «Electronics and control systems»*. 2019, vol. 4, no. 62, pp. 47–52. DOI:10.18372/1990-5548.62.14383.
10. Harris D., Harris S. *Digital Design and Computer Architecture*. Morgan K., 2017. 307 p.
11. Bruno F. *Programmirovaniye FPGA dlya nachinayushshikh* [FPGA programming for beginners]. Per. s angl. Ed. Pomanov. Moscow, DMK Press Publ., 2022. 320 p.
12. Sochkov A. G. *Elektronika i mikroskhemotekhnika* [Electronics and engineering of microcircuits]. Kyiv, Karavela Publ., 2009. 416 p.
13. Kiltz S. *Advanced FPGA Design: Architecture, Implementation, and Optimization*. Wiley, 2016. 537 p.
14. Grout Ian. *Digital systems design with FPGAs and CPLDs*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2008. 763 p.
15. Micro-Cap 11 Full CD Version 11.2.0.3. Available at: <https://archive.org/details/micro-cap-11-full-cd-version-11.2.0.3>. (accessed 2 September 2023).
16. Lent C. S., Tougaw P. D. A device architecture for computing with quantum dots. *Proc. of the IEEE*. 1997, vol. 85, no. 5, pp. 541–557. DOI: 10.1109/5.573740.
17. Mel'nyk O. S., Kozarevych V. O., Pylypenko R. I. Komp'yuternе proektuvannya aryfmetychnykh nanoprystroyiv [Computer design of arithmetic nanodevices]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 39 (1082), pp. 126–134.
18. Walus K., Dysart T.J., Jullien G.A., Budiman R.A. QCADesiner: A Rapid Design and Simulation Tool for Quantum-Dot Cellular Automata. *IEEE Transactions on Nanotechnology*. 2004, vol. 3, no. 1, pp. 26–31. DOI:10.1109/TNANO.2003.820815.

Надійшла (received) 17.09.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Мельник Олександр Степанович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Мельник Александр Степанович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электроники, робототехники и технологий мониторинга и интернета, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (067) 213-03-08; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Melnyk Oleksandr Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (067) 213-03-08; e-mail: oleksandr.melnyk@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Вікторія Олександрівна – старший викладач кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Національний авіаційний університет, м. Київ; тел.: (063) 310-30-41; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Козаревич Викторія Александровна – старший преподаватель кафедры электроники, робототехники и технологий мониторинга и интернета, Национальный авиационный университет, г. Киев; тел.: (063) 310-30-41; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Kozarevych Viktoriia Oleksandrivna – Senior Lecturer at the Department of Electronics, Robotics and Monitoring of Technologies and Internet of Things, National Aviation University, Kyiv; tel.: (063) 310-30-41; e-mail: viktoriia.kozarevych@npp.nau.edu.ua.

Ю. Е. СУРГАНОВА, Ю. В. МИХЛІН

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ МОД КОЛИВАНЬ ДИСИПАТИВНОЇ СИСТЕМИ ПІД ВПЛИВОМ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

У статті проведено дослідження динаміки коливальної системи, що складається з двох маятників, з'єднаних пружним зв'язком і які знаходяться в магнітному полі. Розглядається випадок, коли маси маятників суттєво відрізняються. За наявності різних зовнішніх факторів, таких як магнітні сили та навантаження, які є в інженерних системах, аналіз режимів коливань у нелінійних системах ускладнюється. У цій роботі проведено аналіз пов'язаної нелінійної нормальної моди коливань у системі, що розглядається. Досліджується вплив зміни параметрів системи, як при малих, так і при великих початкових кутах відхилення маятників, на цю моду коливань. Для аналізу коливальних режимів використовувалися як аналітичний метод, а саме метод багатьох масштабів, так і чисельне моделювання на основі методу Рунге-Кутта четвертого порядку. Використовуються такі початкові умови розрахунку коливального режиму, що були визначені аналітично. Моделювання включає побудову фазових діаграм, траєкторій у конфігураційному просторі та спектрів, що дозволяє оцінити динаміку системи, включаючи як регулярні, так і складні режими коливань. Для вивчення стійкості коливального режиму використовується чисельно-аналітичний метод, пов'язаний із критерієм стійкості за Ляпуновим. Стійкість мод коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень стосовно відповідних траєкторій моди у конфігураційному просторі. Отримано області нестійкості на площинах та у просторі параметрів системи.

Ключові слова: динаміка коливальної системи, магнітне поле, пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів, чисельне моделювання на основі методу Рунге – Кутта, стійкість.

Ю. Э. СУРГАНОВА, Ю. В. МИХЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В данной статье проведено исследование динамики колебательной системы, состоящей из двух маятников, связанных упругой связью и находящихся в магнитном поле. Рассматривается случай, когда массы маятников существенно различаются. При наличии различных внешних факторов, таких как магнитные силы и нагрузки, которые присутствуют в инженерных системах, анализ режимов колебаний в нелинейных системах усложняется. В данной работе проведен анализ связанной нелинейной нормальной моды колебаний в рассматриваемой системе. Исследуется влияние изменения параметров системы, как для малых, так и для больших начальных углов отклонения маятников, на этот режим колебаний. Для анализа использовались как аналитический метод, а именно, метод многих масштабов, так и численное моделирование на основе метода Рунге – Кутта четвертого порядка. Используются такие начальные условия для расчета колебательного режима, которые были определены аналитически. Моделирование включает построение фазовых диаграмм, траекторий в конфигурационном пространстве и спектров, что позволяет оценить динамику системы, включая как регулярные, так и сложные режимы колебаний. Для изучения устойчивости колебательных режимов используется численно-аналитический метод, связанный с критерием устойчивости по Ляпунову. Устойчивость моды колебаний определяется путем оценки ортогональных отклонений по отношению к соответствующим траекториям моды в конфигурационном пространстве. Получены области неустойчивости на плоскостях и в пространстве параметров системы.

Ключевые слова: динамика колебательной системы, магнитное поле, связанные маятники, магнитная сила, нелинейные нормальные моды колебаний, метод многих масштабів, численное моделирование на основе метода Рунге – Кутта, устойчивость.

YU. E. SURHANOVA, YU. V. MIKHLIN

INVESTIGATION OF STABILITY OF NONLINEAR NORMAL MODES OF DISSIPATIVE SYSTEM OSCILLATIONS UNDER INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD

In the paper the dynamics of the vibrating system consisting of two pendulums connected by elastic coupling and located in a magnetic field is studied. A case is considered when masses of the pendulums differ significantly. Under the influence of various external factors, such as magnetic forces and loads, which are present in engineering systems, the analysis of vibration regimes in non-linear systems becomes more complex. Here the nonlinear normal connected vibration mode in a system under consideration is analyzed. We have investigated the influence of changes in system parameters on the vibration mode for both small and large initial angles of the pendulum deflection. Both the analytical method, namely, the method of many scales, and numerical simulations based on the fourth order Runge – Kutta method are used to analyze the vibration regimes. The initial conditions used to calculate this mode were determined analytically. The simulation includes construction of phase diagrams, trajectories in configuration space, and spectra, which allows us to evaluate the system dynamics, including both regular and complex regimes of vibrations. To study the stability of the vibration mode, a numerical-analytical method associated with the Lyapunov stability criterion is used. The stability of the mode is determined by assessing orthogonal deviations with respect to the corresponding modal trajectories in the configuration space. Regions of instability on planes and in the space of the system parameters are obtained.

Key words: system oscillation dynamics, magnetic field, coupled pendulums, magnetic forces, nonlinear normal vibration modes, multiple scales method, Runge–Kutta method based numerical modeling, stability.

Вступ. Математичний маятник – це важлива модель, яка часто використовується як в науці, так і в інженерії для вивчення важливих властивостей коливальних рухів, зокрема, в фізиці, теорії керування і робототехніці, розрахунку динаміки конструкцій, а також в інших задачах нелінійної динаміки. Наявність магнітного впливу суттєво ускладнює дослідження маятникових систем. В даній роботі динаміка моделі пов'язаних маятників у полі магнітних сил описується системою двох суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, які досліджуються як аналітичним, так і чисельним методами. Розглядається як побудова нелінійних нормальних мод коливань (ННМ), так і дослідження їх стійкості.

Аналіз останніх досліджень. Теоретичні та експериментальні дослідження, які стосуються динаміки двох поєднаних маятників з рівними масами у магнітному полі, освітлено у статті [1]. Дослідження мод коливань в такій системі без врахування впливу дисипативних сил для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно

© Ю. Е. Сурганова, Ю. В. Міхлін, 2023

розрізняються, виконано в [2, 3]. Зазначимо, що відтепер різноманітні аспекти теорії ННМ та її численні застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [4 – 6] і книзі [7]. Можна також відзначити, що *проблема локалізації коливань* дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, і досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких ми виділяємо публікації [8 – 10].

Суттєва нелінійність, присутня в системі, приводить до необхідності застосування *асимптотичних методів* для аналізу мод коливань. Використано *метод багатьох масштабів*, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також *чисельне моделювання*. Крім побудови пов'язаної моди коливань досліджено її стійкість, а також зроблено висновки про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

Постановка задачі та математична модель. У статті досліджується модель руху пружно пов'язаних маятників (рис. 1, а) під впливом магнітного збудження (рис. 2). Рис. 1, б зображує модель одного маятника. Відповідні рівняння руху представлено у вигляді *системи диференціальних рівнянь (СДР)* (1), де проведено розкладення синусів кутів в ряди зі збереженням перших двох членів.

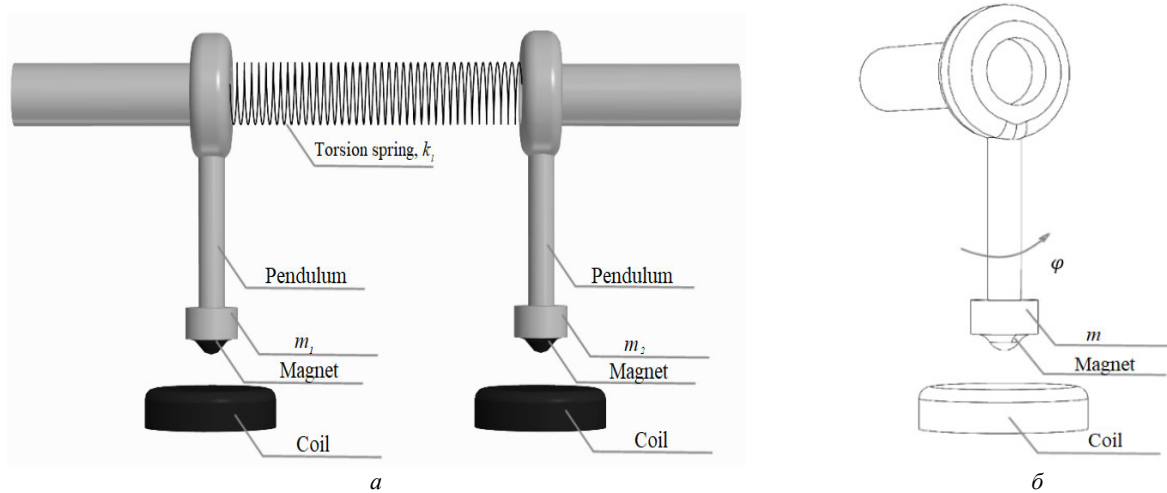


Рис. 1 – Система пов'язаних маятників: а – двох пружно пов'язаних маятників; б – модель одного маятника.

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon \gamma M_{mag1}^*(\varphi_1) - \varepsilon C_1^* \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_1) - \varepsilon C_e^*(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon \mu r^* \left(\varphi_1 - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_1^3 \right) - k_t^*(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon \gamma M_{mag2}^*(\varphi_2) - \varepsilon C_2^* \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}_2) - \varepsilon C_e^*(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \left(\varphi_2 - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_2^3 \right) - k_t^*(\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (1)$$

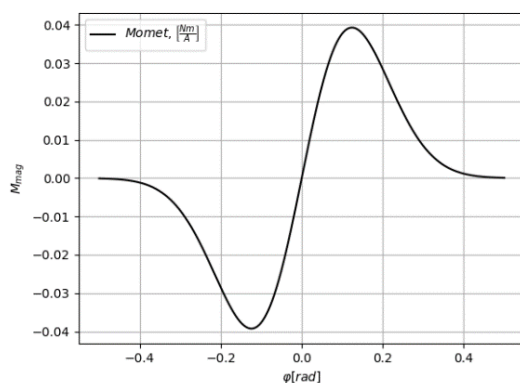


Рис. 2 – Магнітний вплив.

де μ – відношення мас двох маятників; ε – умовний малий параметр; m – маса більшого маятника; $k_t^* = \frac{k_t}{I}$, де k_t – жорсткість зв'язуючого пружного елемента; I – момент інерції більшого маятника; $k_t^*(\varphi_1 - \varphi_2)$ – момент крутильної деформації пружного елемента; γ – коефіцієнт інтенсивності магнітного збудження;

$$M_{mag}^*(\varphi_{1,2}) = \frac{M_{mag}(\varphi_{1,2})}{I}, \quad M_{mag}(\varphi_{1,2}) = \frac{2a}{b} \varphi_{1,2} e^{-\frac{\varphi_{1,2}^2}{b}} -$$

момент магнітних сил; $r^* \left(\varphi_{1,2} - \frac{\varepsilon}{6} \varphi_{2,1}^3 \right)$ – наближений по-

вертаючий момент відповідного маятника; $r^* = \frac{r}{I}$; $C_{1,2}^* =$

$= \frac{C_{1,2}}{I}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнт опору сил в'язкого повітря; $C_e^* = \frac{C_e}{I}$ – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом; ε – умовний малий параметр, що характеризує малість тих складових рівнянь, де він розташований. В подальших чисельних розрахунках прийнято $\varepsilon = 1$.

Параметри СДР (1) наступні: $a = 8.036 \cdot 10^{-3} \text{ (Nm} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{A}^{-1})$, $b = 30.81 \cdot 10^{-3} \text{ (Nm} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{A}^{-1})$, $k_t =$

$= 3.999 \cdot 10^{-3} (Nm \cdot rad^{-1})$, $I = 6.787 \cdot 10^{-4} (kg \cdot m^2)$, $r = 5.84 \cdot 10^{-2} (Nm)$, $C_1 = 2.5 \cdot 10^{-4} (Nm)$, $C_2 = 1.6 \cdot 10^{-4} (Nm)$, $C_e = 9.615 \cdot 10^{-6} (Nm \cdot rad^{-1})$. Задані параметри отримано з роботи [1]. Відмітимо, що в (1) одиниці виміру параметрів такі: φ – в rad , ε та γ – безрозмірні величини. У чисельних розрахунках без втрати загальності використовуємо нульові початкові швидкості: $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Відповідні початкові кути, що відповідають шуканій ННМ, можна отримати після побудови цього періодичного розв'язку в аналітичній формі.

Як у статтях [2 – 4], представимо розв'язок СДР (1) у вигляді:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_2 = \varphi_{20} + \varepsilon \varphi_{21} + O(\varepsilon^2), \quad (2)$$

де φ_{10} , φ_{20} – розв'язок породжувальної лінійної системи; φ_{11} , φ_{21} – розв'язок першого наближення за малим параметром ε . Використовується метод багатьох масштабів [5]. У відповідності до цього методу вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau, \quad T_1 = \varepsilon \tau, \quad \tau = \omega_0 t, \quad (3)$$

де T_0 – швидкий час; T_1 – повільний час; ω_0 – власна частота.

Дослідження синфазної моди коливань. Виконуючи стандартні перетворення методу багатьох масштабів, отримаємо системи рівнянь (4) та (5), відповідні двом першим наближенням за малим параметром ε :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} -k_l^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}) = 0, \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_{20} - k_l^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (4)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = \gamma M_{mag1}^* (\varphi_{10}) - C_1^* \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} \right) - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}); \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag2}^* (\varphi_{20}) - C_2^* \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} \right) - r^* \left(\varphi_{21} - \frac{1}{6} \varphi_{20}^3 \right) - k_l^* (\varphi_{21} - \varphi_{11}). \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язком (4) є $\varphi_{10} = \varphi_{20} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$, що відповідає *синфазній пов'язаній формі коливань*. Відповідно власна частота $\omega_0^2 = r^*$. Щоб запобігти появі *секулярних доданків* у системі рівнянь (5), виключаємо доданки, що містять функції $\cos(T_0 + \nu)$ та $\sin(T_0 + \nu)$ у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо модуляційні рівняння (6) та (7):

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 A_1(T_1) \frac{d\nu(T_1)}{dT_1} + \frac{r^* A_1^3(T_1)}{8} + \mu \omega_0^2 A_1(T_1) - \mu r^* A_1(T_1) = 0; \quad (6)$$

$$\sin(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 \frac{dA_1(T_1)}{dT_1} = 0. \quad (7)$$

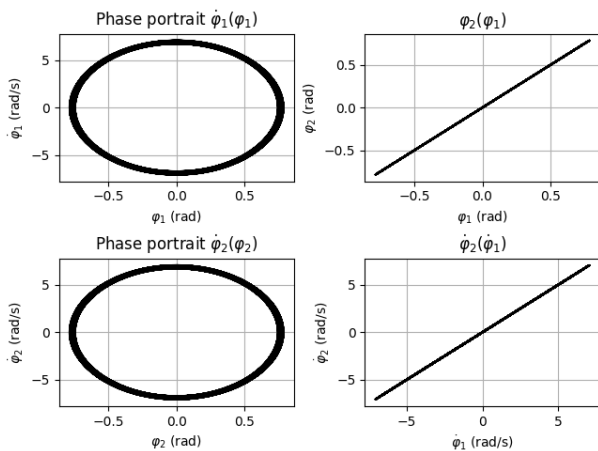


Рис. 3 – Порівняння чисельного та аналітичного розрахунку: а – фазовий портрет та криві у конфігураційному просторі.

Звідси випливає, що $A_1 = const$, $\nu = -\frac{A_1^2}{16} T_1$.

Порівняємо чисельний розрахунок з аналітичним, зафіксувавши параметри наступним чином:

$$\varphi_1(0) = 45^\circ, \quad \varphi_2(0) = 45^\circ, \quad \mu = 0.1, \quad \gamma = 10^{-3},$$

$$k_l = 3.999 \cdot 10^{-3} \left(\frac{Nm}{rad} \right), \quad C_1 = 2.5 \cdot 10^{-6} (Nm),$$

$$C_2 = 1.6 \cdot 10^{-6} (Nm), \quad C_e = 9.615 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Nm}{rad} \right).$$

Результат порівняння зображено на рис. 3 (рис. 3, а: фазовий портрет та криві у конфігураційному просторі, рис. 3, б: порівняння отриманих розрахунків, рис. 3, в: спектр моди коливань).

Досліджуючи стійкість системи (1), окрім вже зазначених параметрів, задаємо $A_1 \in [1, 60]^\circ$, $\gamma \in [10^{-6}, 10^{-2}]$,

$\mu \in [0.01, 0.25]$. В силу симетрії системи ми можемо розглядати лише половину діапазону, тобто додатні значення кутів маятників. Кожний із зазначених інтервалів параметрів містить по 25 рівновіддалених точок. Проведемо аналіз стійкості системи в залежності від параметрів A_1 , μ , γ шляхом чисельно-аналітичного підходу, який відповідає чисельній реалізації *критерію стійкості за Ляпуновим*, що було запропоновано та описано в роботі [5].

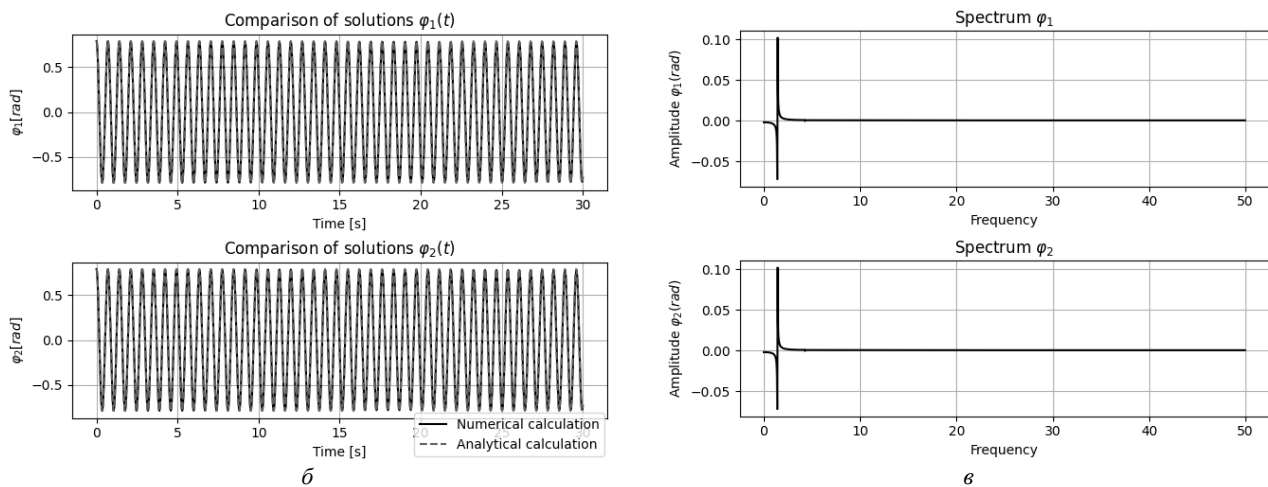


Рис. 3 – Порівняння чисельного та аналітичного розрахунку, амплітудно-частотна характеристика, криві на фазовій площині та у конфігураційному просторі: б – порівняння отриманих розрахунків; в – спектр моди коливань.

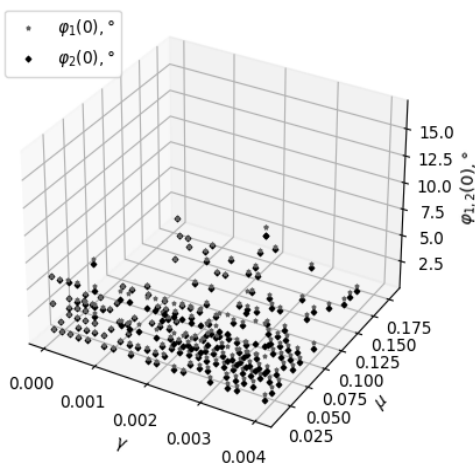


Рис. 4 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_{1,2}(0)$, μ та γ .

Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі. Початкові умови для відхилень від траєкторії визначаються через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як $\tilde{\varphi}_{1,2}(0) = 1.01\varphi_{1,2}(0)$. Потім розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем $|\tilde{\varphi}_{1,2}(t)|$ перевищують значення $\rho|\varphi_{1,2}(0)|$. Як показано в [5], значення ρ можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні чисел, що перевищують 1. В даній роботі прийнято $\rho = 1.1$. Результати розрахунків представлені на рис. 4, де виділено вузли нестійкості у просторі параметрів. Аналіз показав, що час моделювання системи може не перевищувати 1000 секунд. При меншій тривалості моделювання збільшується кількість нестійких вузлів як на площині, так і у просторі досліджуваних параметрів системи. А при більшій тривалості такого збільшення вже немає.

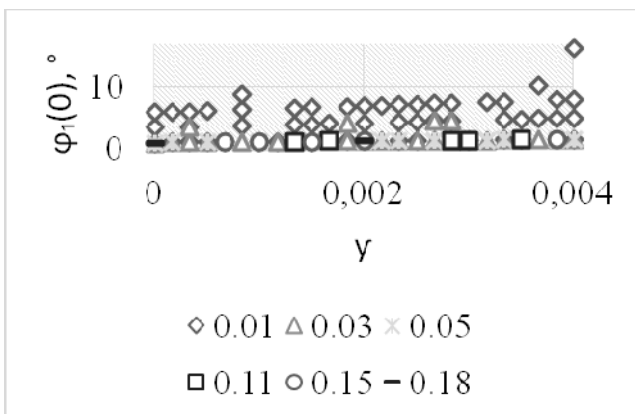


Рис. 5 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_1(0)$, γ .

Розглянемо площину параметрів при сталих значеннях параметра μ (рис. 5). Як бачимо, кількість нестійких вузлів зменшується з ростом μ (це видно як на рис. 4, так і на рис. 5). Значення параметру μ подано у легенді до діаграми на рис. 5. Приклад нестійкості на фазовій площині і у конфігураційному просторі (рис. 6, а), а також амплітудно-частотну характеристику (рис. 6, б – в) зобразимо на рис. 6. Для побудови задаємо:

$$\varphi_1(0) = 16.46^\circ, \quad \varphi_2(0) = 15.75^\circ, \quad \mu = 0.01, \quad \gamma = 0.004.$$

Надавати більше прикладів нестійкості немає сенсу, оскільки, як видно з рис. 4 – 5, коли початкові кути менше за 10° , то вплив магнітного збудження є значним у порівнянні з початковим відхиленням. Розглянемо приклад стійкої моди коливань на рис. 7, що

побудовано при таких значеннях параметрів:

$$\varphi_1(0) = 45^\circ, \varphi_2(0) = 45^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.004.$$

Як бачимо, траєкторія зі збільшенням початкового відхилення і відношення мас маятників стягується, а найбільше відхилення від траєкторії у конфігураційному просторі для даного прикладу не перевищує 0.01274.

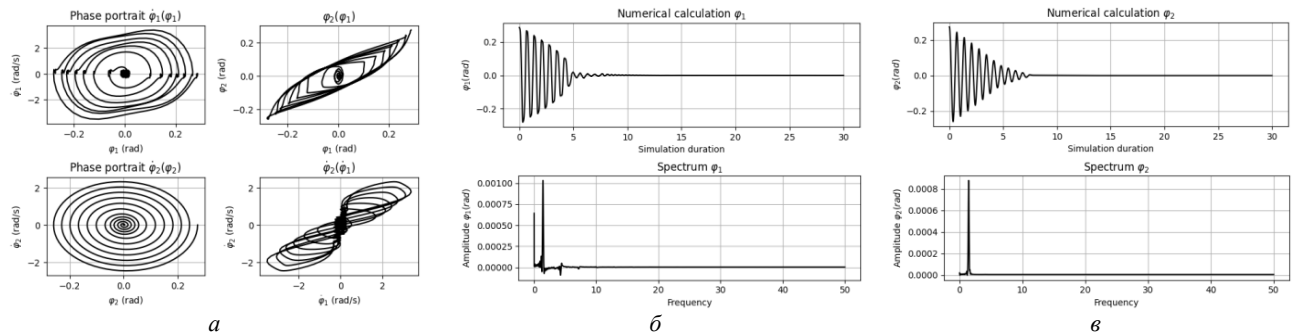


Рис. 6 – Спектри для пов’язаної моди коливань (випадок нестійкої моди):

a – нестійкість на фазовій площині і у конфігураційному просторі; б – в – амплітудно-частотна характеристика.

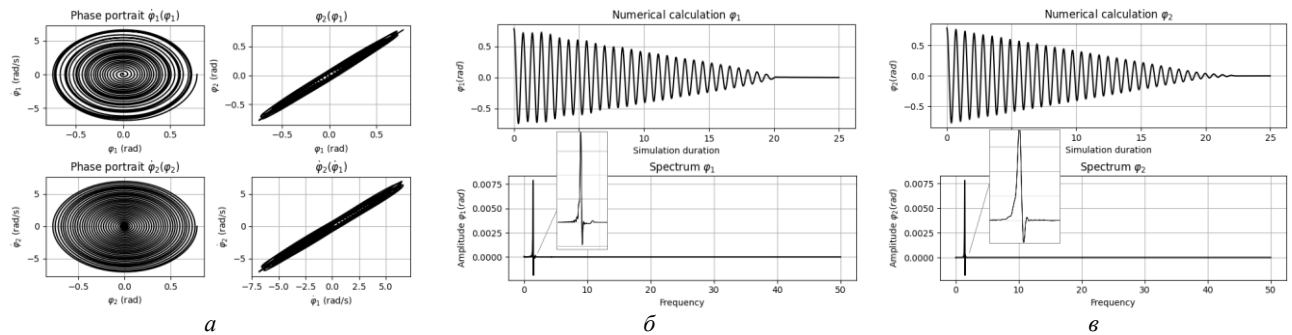


Рис. 7 – Траєкторії та спектри для пов’язаної моди коливань (випадок стійкої моди):

a – стійкість на фазовій площині і у конфігураційному просторі; б – в – амплітудно-частотна характеристика.

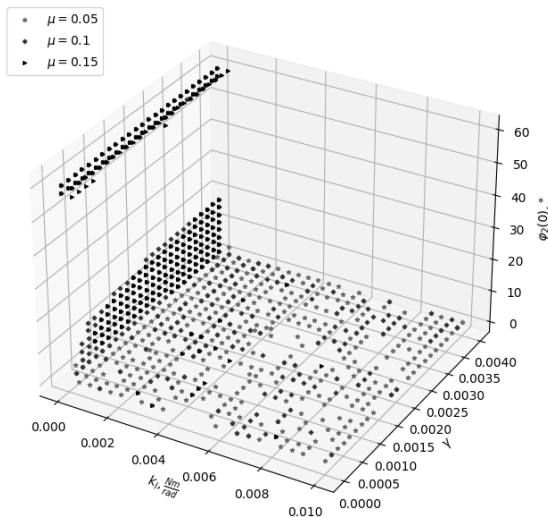


Рис. 8 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0)$, k_l та γ .

Дослідимо стійкість моди у просторі параметрів

$$A_1, \gamma \text{ і } k_l \in [10^{-5}, 0.05] \left[\frac{Nm}{rad} \right] \text{ та при сталому } \mu.$$

Візьмемо декілька значень параметрів з інтервалу

$$\mu = \{0.05, 0.1, 0.15\}.$$

Результат зображено на рис. 8.

Розглядаючи площину при різних $\mu = \{0.05, 0.1, 0.15\}$ та сталих величинах, які вказані у легенді діаграми, отримуємо рис. 9. Зі збільшенням μ кількість нестійких вузлів на площині параметрів $\varphi_2(0), \gamma$ зменшується (рис. 9, а відповідає значенню $\mu = 0.1$, а рис. 9, б – $\mu = 0.15$).

Приклади нестійкої синфазної моди на площині досліджуваних параметрів представлено на рис. 10. Зазначені результати моделювання отримані за допомогою наступних значень параметрів:

$$a - б): \varphi_1(0) = 57.5417^\circ, \varphi_2(0) = 57.5417^\circ, \mu = 0.05, \gamma = 0.001, k_l = 10^{-5};$$

$$в - г): \varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.1, \gamma = 0.001, k_l = 0.00043;$$

$$д - е): \varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.0033, k_l = 0.00043.$$

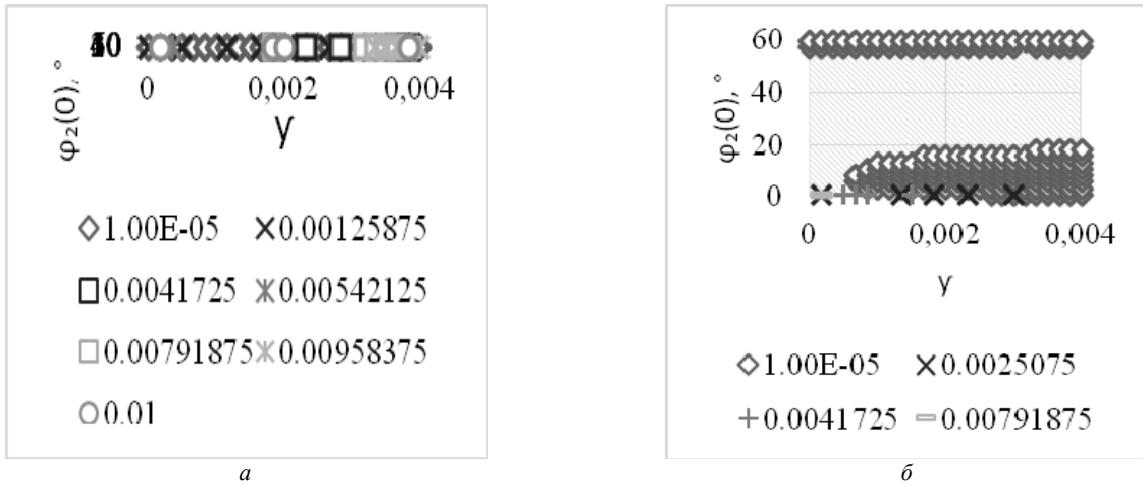


Рис. 9 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0), \gamma$: а – $\mu = 0.1$; б – $\mu = 0.15$.

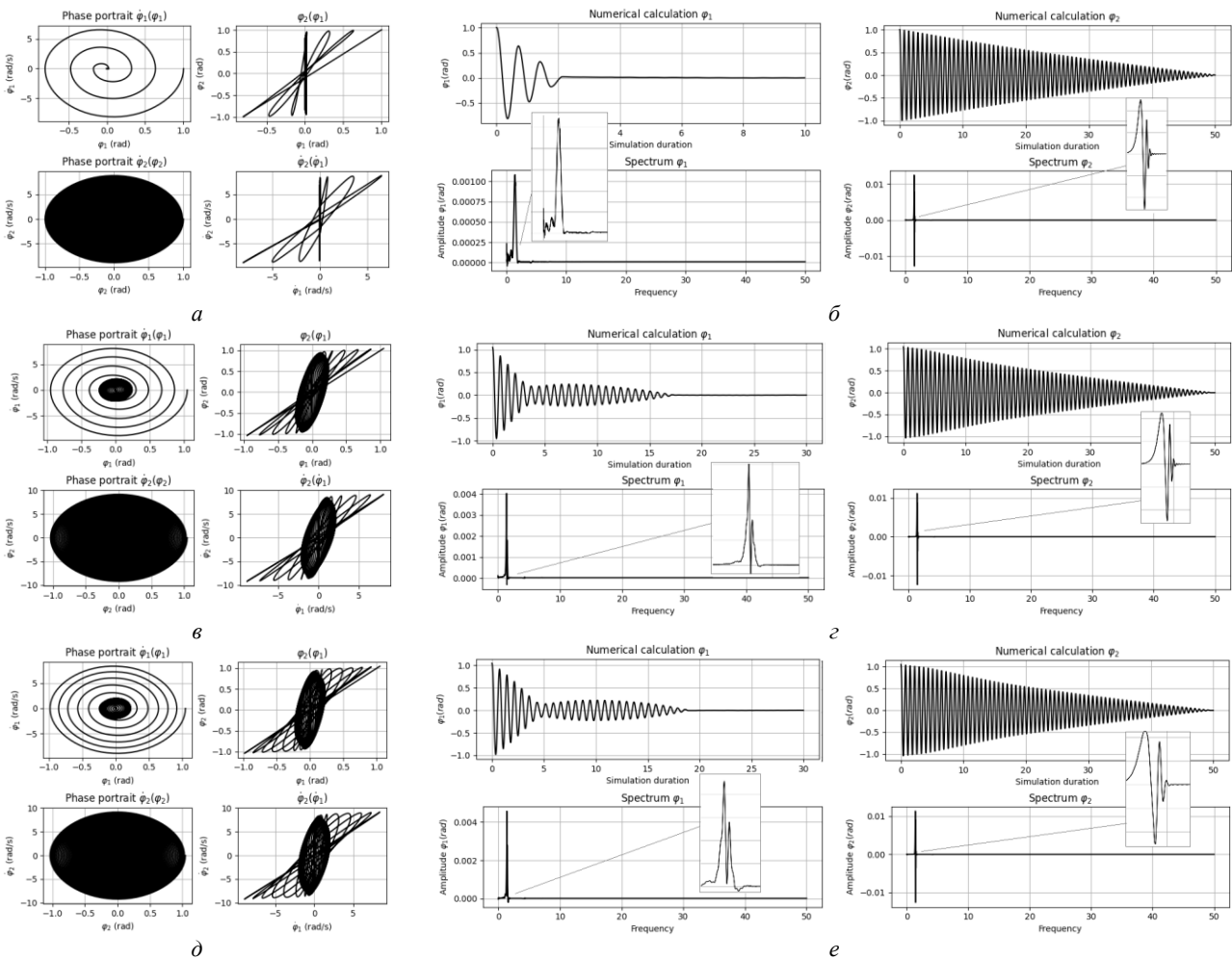


Рис. 10 – Фазові траєкторії, представлення за часом та спектри для пов'язаної моди коливань (випадки нестійкої моди):
 а – б: $\varphi_1(0) = 57.5417^\circ, \varphi_2(0) = 57.5417^\circ, \mu = 0.05, \gamma = 0.001, k_l = 10^{-5}$; в – г: $\varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.1, \gamma = 0.001, k_l = 0.00043$; д – е: $\varphi_1(0) = 60^\circ, \varphi_2(0) = 60^\circ, \mu = 0.15, \gamma = 0.0033, k_l = 0.00043$.

При почерговій зміні величин коефіцієнтів опору сил в'язкого повітря $C_1 \in [4 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}] (Nm)$ та $C_2 \in [3 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}] (Nm)$ у площині параметрів $\varphi_1(0), \gamma$ отримуємо вузли нестійкості, що представлено на рис. 11. Бачимо, що зі зростанням коефіцієнту відношення мас маятників кількість нестійких вузлів знову зменшується.

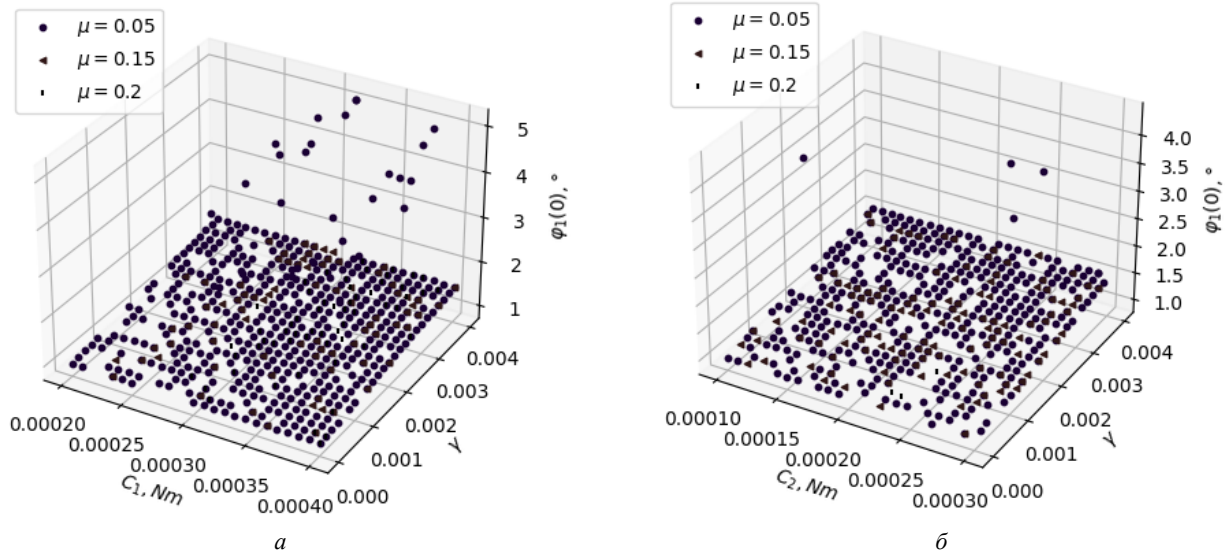


Рис. 11 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_1(0), \gamma$: *a* – змінюється параметр $C_1(Nm)$; *б* – змінюється параметр $C_2(Nm)$.

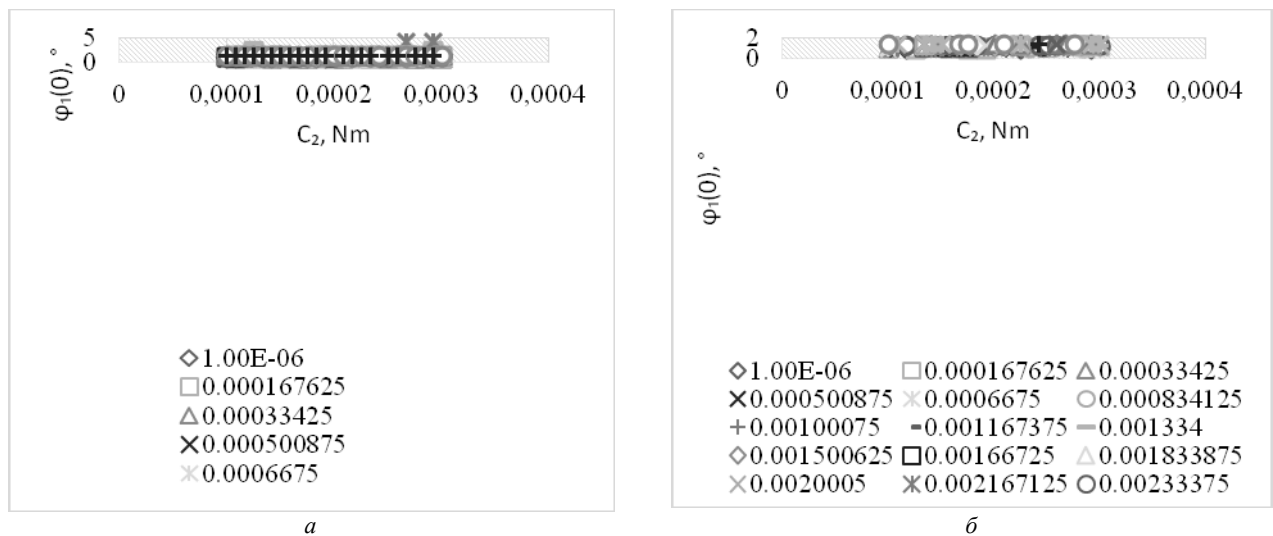


Рис. 12 – Области нестійкості синфазної моди на площині параметрів $\varphi_2(0), C_2(Nm)$: *a* – $\mu = 0.05$; *б* – $\mu = 0.15$.

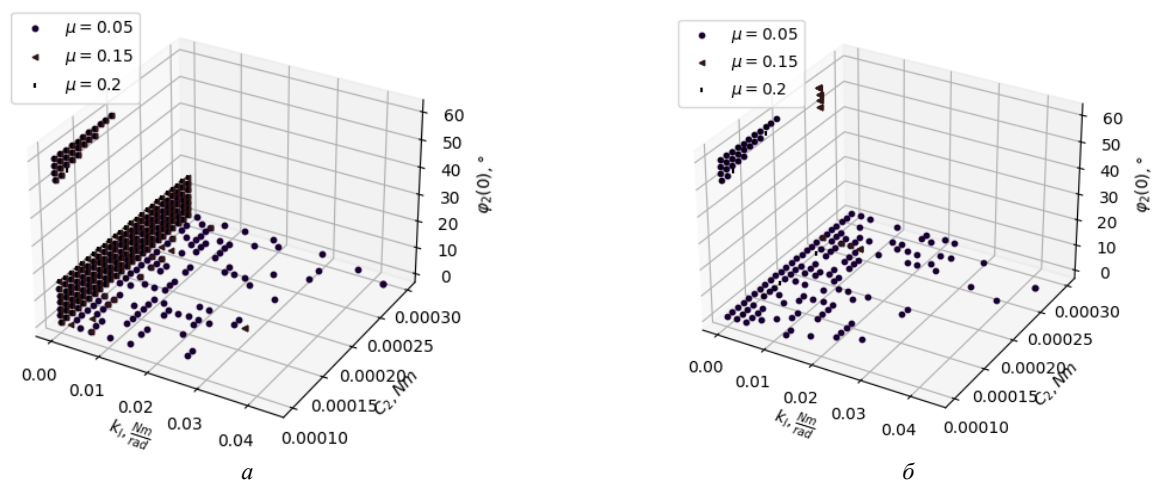


Рис. 13 – Области нестійкості синфазної моди у просторі параметрів $\varphi_2(0), k_1\left(\frac{Nm}{rad}\right), C_2(Nm)$: *a* – $\gamma = 0.001$; *б* – $\gamma = 0.0001$.

Розглянемо тепер результати розрахунків на площині параметрів $\varphi_2(0)$, $C_2(Nm)$, причому значення інтенсивності магнітного впливу відзначається у легенді діаграми (рис. 12, а: $\mu = 0.05$, рис. 12, б: $\mu = 0.15$). За рахунок тертя та опору середовища нестійкість спостерігається лише при малих значеннях початкових кутів маятників.

Для простору параметрів $\varphi_2(0)$, k_l , C_2 при різних μ, γ результат наведено на рис. 13 (рис. 13, а: $\gamma = 0.001$, рис. 13, б: $\gamma = 0.0001$). Діапазон зміни параметрів $\varphi_2(0)$, k_l , C_2 було зазначено раніше. Приклади нестійкості надано на рис. 14: а – б): $\gamma = 0.001$; в – з): $\gamma = 0.1$.

В обох зображених випадках

$$\varphi_1(0) = 52.625^\circ, \varphi_2(0) = 52.6249^\circ, C_2 = 0.0001(Nm), \mu = 0.2, k_l = 10^{-5} \left(\frac{Nm}{rad} \right), C_1 = 2.5 \cdot 10^{-4} (Nm).$$

Отримано, що кількість нестійких вузлів у просторі параметрів на рис. 13 зі зменшенням коефіцієнта інтенсивності магнітного впливу зменшилась.

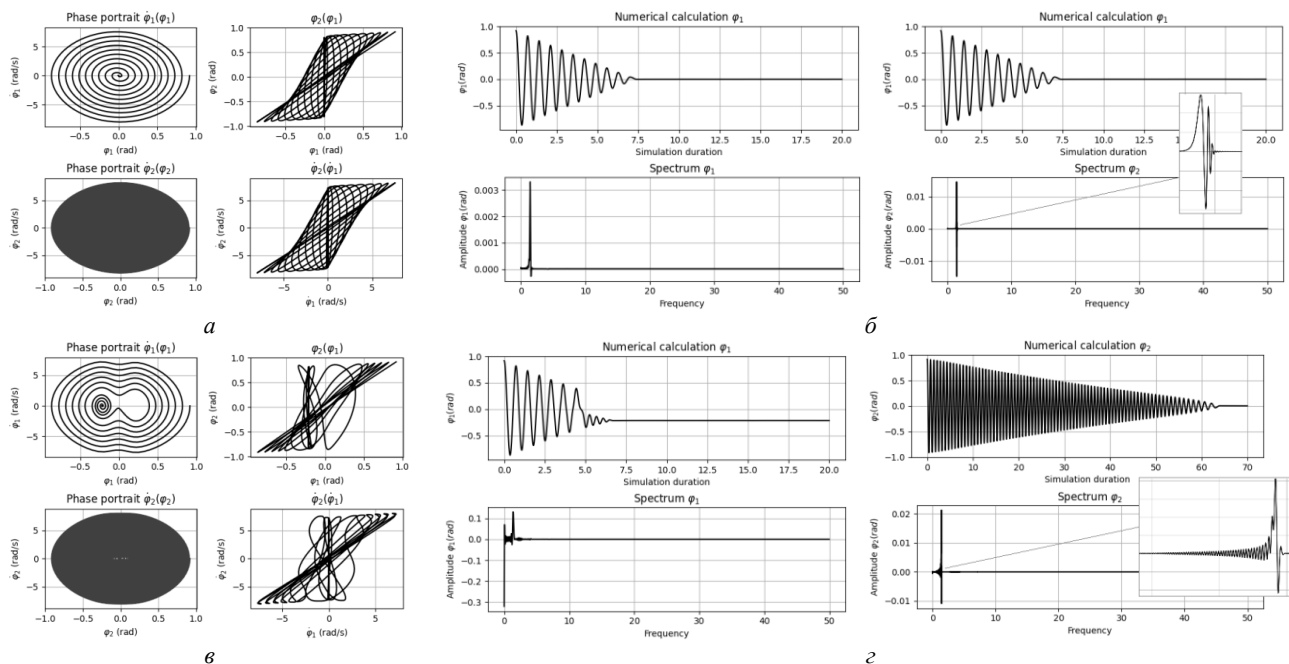


Рис. 14 – Фазові траєкторії, представлення за часом та спектри для пов'язаної моди коливань (випадки нестійкої моди): а – б): $\gamma = 0.001$; в – з): $\gamma = 0.1$.

Висновки. У статті методом багатьох масштабів проведена побудова синфазної (пов'язаної) моди коливань в системі двох пружно зв'язаних маятників під впливом магнітних сил, а також описана та використана чисельно-аналітична процедура дослідження стійкості цієї моди, яка пов'язана з критерієм стійкості за Ляпуновим. Стійкість та нестійкість ННР оцінюється шляхом оцінки ортогональних варіацій щодо прямолинійної модальної лінії в конфігураційному просторі системи.

Підведемо підсумки дослідження стійкості синфазного режиму маятникової системи. Не на всьому діапазоні початкових відхилень маятників існує стійкий пов'язаний режим. Загалом режим не присутній при малих початкових кутах маятників, коли магнітний вплив у порівнянні з початковими умовами є дуже значним. Збільшення величини коефіцієнта відношення мас (малого параметру) робить моду більш вираженою через стягування коливань до моди. У більшості розглянутих випадків нестійка синфазна форма спостерігається при малих коефіцієнтах зв'язку. Зростання коефіцієнтів опору сил в'язкого повітря призводить до швидкого зменшення амплітуди коливань маятників, тобто, до згасання коливань. Нестійкість при дослідженні впливу коефіцієнтів дисипації досягається або при дуже малих, або при дуже великих початкових кутах маятників.

Список літератури

1. *Pilipchuk V. N.* Guidance of the resonance energy flow in the mechanism of coupled magnetic pendulums // Mechanism and Machine Theory. – 2022. – Vol. 176. – 105019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105019.
2. *Surganova Y. E., Mikhlin Y. V.* Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2022. – 104182. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182.

3. Surhanova Y. E., Mikhlin Y. V. Regular and compound behavior of a pendulum system in a magnetic field // *Technical mechanics*. – 2023. – Vol. 2023. – no. 3. – P. 98 – 109. – DOI: 10.15407/itm2023.03.098.
4. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. – Wiley : New York, 1996. DOI:10.1002/9783527617869.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments // *Appl. Mech. Rev.* – 2010. – № 63 (6) (2010). – 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
6. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems // *Appl. Mech. Rev.* – 2013. – № 65 (2) (2013). – 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
7. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. – New York : John Wiley & Sons, 1995. – 720 p.
8. Liapunov A. M. *Stability of motion*. – New York : Academic Press, 1966.
9. Mikhlin Y. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions // *Computers & Structures*. – 2004. – Vol. 82. – No. 31 – 32. – P. 2733 – 2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
10. Mikhlin Yu. V., Manucharyan G. V. Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions // *Meccanica*. – 2006. – № 41. – P. 253 – 267. DOI: 10.1007/s11012-005-5896-2.

References (transliterated)

1. Pilipchuk V. N. Guidance of the resonance energy flow in the mechanism of coupled magnetic pendulums. *Mechanism and Machine Theory*. 2022, Vol. 176, 105019. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105019.
2. Sarganova Y. E., Mikhlin Y. V. Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two coupled pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022, 104182. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104182.
3. Surhanova Y. E., Mikhlin Y. V. Regular and compound behavior of a pendulum system in a magnetic field. *Technical mechanics*. 2023, Vol. 2023, no. 3, pp. 98–109. DOI: 10.15407/itm2023.03.098.
4. Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1996. DOI:10.1002/9783527617869.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010, no. 63 (6) (2010), 060802. DOI: 10.1115/1.4003825.
6. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013, no. 65 (2) (2013), 020801. DOI: 10.1115/1.4023533.
7. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. New York, John Wiley & Sons, 1995. 720 p.
8. Liapunov A. M. *Stability of motion*. New York, Academic Press, 1966.
9. Mikhlin Y. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computers & Structures*. 2004, Vol. 82, No. 31–32, pp. 2733–2742. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.03.082.
10. Mikhlin Yu. V., Manucharyan G. V. Determination of the chaos onset in mechanical systems with several equilibrium positions. *Meccanica*. 2006, no. 41, pp. 253–267. DOI: 10.1007/s11012-005-5896-2.

Надійшла (received) 20.11.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сурганова Юлія Едуардівна – аспірант, асистент кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Сурганова Юлия Эдуардовна – аспирант, ассистент кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Surhanova Yuliia Eduardivna – PhD student, Assistant at the Department of Applied Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (096) 805-66-19; e-mail: yuliia.surhanova@khp.edu.ua.

Міхлін Юрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.

Михлин Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.

Mikhlin Yurii Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (068) 888-95-33; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khp.edu.ua.

О. В. ШЕХОВЦОВ

ВПЛИВ ТВЕРДИХ ГРАНИЦЬ ТА В'ЯЗКОСТІ СЕРЕДОВИЩА НА ВНЕСОК ІНЕРЦІЙНОЇ ТА ВИХРОВОЇ КОМПОНЕНТ НОРМАЛЬНОЇ СИЛИ ПЛАСТИНИ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ. ЧАСТИНА 2

В рамках удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких середовищ, розроблено метод визначення внеску сил інерційної, вихрової та циркуляційної природи в нормальну силу пластини, яка рухається в нерухомому в'язкому безмежному середовищі за довільним законом, у присутності стінки та в каналі. Розроблений метод апробовано для випадку миттєвого кутового старту пластини з подальшою постійною кутовою швидкістю обертання (задача Вагнера) у в'язкому безмежному середовищі, у присутності стінки та в каналі, у ламінарному та турбулентному режимах. Застосування наближених аналітичних формул для компонент індукованої швидкості від дискретного вихору у в'язкому середовищі біля стінки та в каналі дозволило отримати поля швидкостей, які візуалізують два вихори, що зійшли з крайок пластини, та динаміку їх дисперсії при ламінарному та турбулентному режимах обертання пластини біля стінки та в каналі. Підтверджена інерційно-вихрова природа нормальної сили пластини (з домінуванням сил інерційної природи), що обертається після миттєвого старту з відривом потоку з обох її крайок, незалежно від наявності твердих границь та ламінарного чи турбулентного режимів обтікання. З'ясовано, що у випадку ламінарного режиму вплив наявності стінки на приведену інерційну компоненту нормальної сили пластини несуттєвий, проте вплив каналу призводить до більш швидкого відходу ламінарного вихору від рухомої крайки пластини, що призводить до поступового збільшення внеску інерційної компоненти нормальної сили пластини до 100 % та більше при розвороті пластини перпендикулярно стінкам каналу. Приблизно те саме відбувається у випадку відсутності твердих границь, коли вже турбулентний вихор більшого розміру та інтенсивності, ніж відповідний ламінарний, віддаляється від рухомої крайки пластини.

Ключові слова: сили інерційної, циркуляційної та вихрової природи, компоненти нормальної сили пластини, внесок сил, інерційно-вихровий принцип, миттєвий кутовий старт пластини, стінка, канал, ламінарний вихор, турбулентний вихор, режим обтікання.

А. В. ШЕХОВЦОВ

ВЛИЯНИЕ ТВЕРДЫХ ГРАНИЦ И ВЯЗКОСТИ СРЕДЫ НА ВЗНОС ИНЕРЦИОННОЙ И ВИХРОВОЙ КОМПОНЕНТ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ. ЧАСТЬ 2

В рамках усовершенствованного метода дискретных вихрей, обобщенного для вязких сред, разработан метод определения вклада сил инерционной, вихревой и циркуляционной природы в нормальную силу пластины, которая движется в неподвижной вязкой безграничной среде по произвольному закону, в присутствии стенки и канала. Разработанный метод апробирован для случая мгновенного углового старта пластины с последующей постоянной угловой скоростью вращения (задача Вагнера) в вязкой безграничной среде, в присутствии стенки и канала, в ламинарном и турбулентном режимах. Применение приближенных аналитических формул для компонентов индуцированной скорости от дискретного вихря в вязкой среде у стенки и в канале позволило получить поля скоростей, визуализирующих два вихря, сошедших с кромок пластины, и динамику их дисперсии при ламинарном и турбулентном режимах вращения пластины вблизи стенки и в канале. Подтверждена инерционно-вихревая природа нормальной силы пластины (с доминированием сил инерционной природы), вращающейся после мгновенного старта с отрывом потока с обеих кромок, независимо от наличия твердых границ и ламинарного или турбулентного режимов обтекания. Выяснено, что в случае ламинарного режима влияние наличия стенки на приведенную инерционную компоненту нормальной силы пластины незначительно, однако воздействие канала приводит к более быстрому отходу ламинарного вихря от подвижной кромки пластины, что приводит к постепенному увеличению вклада инерционной компоненты нормальной силы пластины до 100 % и более при развороте пластины перпендикулярно стенкам канала. Приблизительно то же происходит в случае отсутствия твердых границ, когда уже турбулентный вихрь большего размера и интенсивности, чем соответствующий ламинарный, удаляется от движущейся кромки пластины.

Ключевые слова: силы инерционной, циркуляционной и вихревой природы, компоненты нормальной силы пластины, вклад сил, инерционно-вихревой принцип, мгновенный угловой старт пластины, стенка, канал, ламинарный вихрь, турбулентный вихрь, режим обтекания.

A. V. SHEKHOVTSOV

IMPACT OF SOLID BOUNDARIES AND VISCOSITY OF THE MEDIUM ON THE CONTRIBUTION OF THE INERTIAL AND VORTEX COMPONENTS OF THE NORMAL FORCE OF A ROTATING PLATE. PART 2

Within the framework of the improved method of discrete vortices, generalized for viscous media, a method has been developed for determining the contribution of forces of inertial, vortex and circulation nature to the normal force of a plate moving in a stationary viscous boundless medium according to an arbitrary law, in the presence of a wall and in a channel. The developed method was tested for the case of instantaneous angular start of the plate and subsequent constant angular speed of rotation (Wagner's problem) in a viscous boundless medium, in the presence of a wall and in a channel, in laminar and turbulent modes. The application of approximate analytical formulas for the components of the induced velocity from a discrete vortex in a viscous medium near the wall and in the channel made it possible to obtain velocity fields that visualize two vortices separated from the edges of the plate and the dynamics of their dispersion in laminar and turbulent regimes of rotation of the plate near the wall and in the channel. The inertial-vortical nature of the normal force of the plate (with the dominance of inertial forces) is confirmed, which rotates after an instantaneous start with the separation of the flow from both its edges, regardless of the presence of solid boundaries and laminar or turbulent flow regimes. It was found that in the case of the laminar regime, the effect of the presence of the wall on the reduced inertial component of the normal force of the plate is insignificant, but the influence of the channel leads to a faster departure of the laminar vortex from the moving edge of the plate, which leads to a gradual increase in the contribution of the inertial component of the normal force of the plate up to 100 % and more when turning the plate perpendicular to the channel walls. Approximately the same happens in the case of the absence of solid boundaries, when a turbulent vortex of a larger size and intensity than the corresponding laminar one moves away from the moving edge of the plate.

Key words: forces of inertial, circulation and vortex nature, components of plate normal force, contribution of forces, inertial-vortex principle, instantaneous angular start of plate, wall, channel, laminar vortex, turbulent vortex, flow regime.

Вступ. Огляд результатів Частини 1. У першій частині даної роботи [1] в рамках удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких середовищ, було розроблено метод визначення внеску сил інер-

ційної, вихрової та циркуляційної природи в нормальну силу пластини, яка рухається в нерухомому в'язкому безмежному середовищі за довільним законом, у присутності стінки та в каналі. Було показано, що застосування узагальненої формули Коші – Лагранжа визначення коефіцієнту тиску в'язкого вихрового середовища для розрахунку перепаду тиску на тонкому крилі з урахуванням властивостей вихрового шару у випадку, коли крило припускається нескінченно тонким, приводить до виразу з першим ступенем при абсолютній швидкості.

Було наведено компоненти індукованих швидкостей від дискретного вихору у необмеженому в'язкому середовищі та компоненти наближених індукованих швидкостей від дискретного вихору при наявності стінки та в каналі. Формули обчислення компонент наближеної індукованої швидкості від дискретних вихорів при наявності стінки та каналу разом з формулами обчислення внеску інерційної, вихрової та циркуляційної компонент нормальній силі тонкого крила, яке нестационарно рухається у в'язкому середовищі, дозволяють зробити наближене чисельно-аналітичне моделювання генерації та дисперсії завихреності у в'язкому середовищі при наявності стінки та в каналі в рамках удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких вихрових середовищ, та з'ясувати природу навантажень, які виникають на крилі.

Оскільки раніше природа аеродинамічних сил на крилах, що махають, вивчалась або для випадку безвідривного ідеального обтікання передніх крайок крил, або для випадку їх відривного в'язкого обтікання, але коли задня крайка крила приєднана до твердої стінки, виникла потреба вивчення внеску сил інерційної та вихрової природи для випадку в'язкого обтікання ізольованого тонкого крила, що обертається, та з'ясувати, як в'язкість та тверді границі (стінка та канал) впливають на перерозподіл внеску сил інерційної та вихрової природи.

Чисельно-аналітичне моделювання генерації та дисперсії ламінарних та турбулентних вихорів у випадку миттєвого кутового старту пластини у безмежному середовищі, при наявності стінки, та в каналі. Чисельно-аналітичне моделювання генерації та дисперсії завихреності після кутового миттєвого старту пластини у безмежному в'язкому нерухомому середовищі, при наявності стінки, та в каналі було здійснено за допомогою удосконаленого методу дискретних вихорів (УМДВ), узагальненого для в'язких вихрових середовищ [2, 3]. При цьому обмеження на числа Рейнольдса, кути атаки та закон кутового руху пластини не накладались.

Розглядався кутовий рух пластини, яка у початковий момент була розташована паралельно стінці, або одній із стінок каналу на відстані $0,2$ хорди b^* від неї ($h^* = 0,2b^*$) при числах Рейнольдса $Re = 100$ та $Re = 10^6$.

Моделювався миттєвий кутовий старт пластини (миттєве прискорення – ривок) з подальшою постійною кутовою швидкістю обертання (так звана задача Вагнера):

$$\begin{cases} \omega = 0, & \tau = 0; \\ \omega = 1, & \tau > 0, \end{cases}$$

де τ – безрозмірний час, а ω – безрозмірна кутова швидкість пластини. Всі параметри знерозмірені по хорді пластини b^* та модулю лінійної швидкості її рухомої крайки $U^* = |\vec{U}^*| = \omega^* b^*$, де ω^* – розмірна кутова швидкість пластини. Число Рейнольдса визначалося, як $Re = \omega^* b^{*2} / \nu$, де ν – кінематична в'язкість середовища.

Застосування формул (9) – (11) роботи [1] дозволило отримати поля швидкостей, які візуалізують два вихори, що зійшли з крайок пластини та динаміку їх дисперсії при $\beta = \pi/2$, $Re = 100$ – для випадку безмежного в'язкого середовища (рис. 1, а), випадку обертання пластини на відстані $h = 0,2$ від стінки (рис. 2, а) та випадку обертання пластини в каналі шириною $H = 1,4$ (рис. 3, а), а при $Re = 10^6$ – для випадку безмежного в'язкого середовища (рис. 1, б), випадку обертання пластини на відстані $h = 0,2$ від стінки (рис. 2, б) та випадку обертання пластини в каналі шириною $H = 1,4$ (рис. 3, б). Наявність стінок показано на рисунках жирними лініями. Чорні вектори полів безрозмірної швидкості мають модулі більше одиниці, сірі – менше.

Результати моделювання показують, що миттєвий кутовий старт пластини з наступним її обертанням з постійною кутовою швидкістю при числі Рейнольдса $Re = 100$ призводить до формування двох ламінарних вихорів, а при числі Рейнольдса $Re = 10^6$ – до формування двох турбулентних вихорів, які сходять з обох крайок пластини. При цьому наявність стінки та каналу збільшує розмір і ламінарних, і турбулентних вихорів та наближає їх один до одного, а у випадку каналу ці вихори витягуються вздовж його стінок.

Миттєвий кутовий старт пластини на відстані $0,2$ хорди від стінки несуттєво збільшує навантаження на пластину при обох числах Рейнольдса в порівнянні з випадком її аналогічного кутового старту у безмежному середовищі. Проте миттєвий кутовий старт пластини у каналі шириною $1,4$ хорди пластини, яка у початковий момент була розташована паралельно каналу на відстані $0,2$ хорди від однієї з його стінок, збільшує нормальну силу на пластині при її розвороті на кут $\pi/2$ в ламінарному режимі у $3,5$ рази у порівнянні з випадком наявності стінки та у 4 рази – у порівнянні з випадком безмежного середовища; в турбулентному режимі – у $2,5$ рази

у порівнянні з випадком наявності стінки та у 3,5 рази – у порівнянні з випадком безмежного середовища.

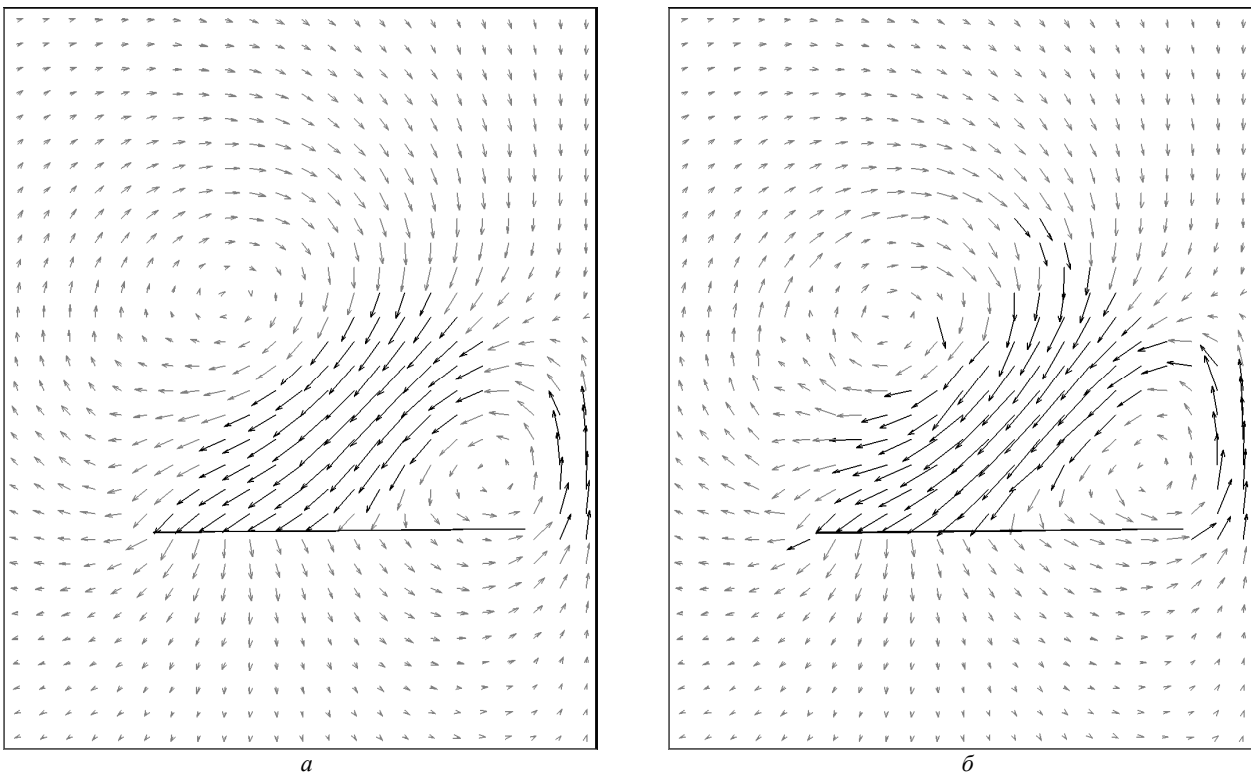


Рис. 1 – Поля швидкостей при обертанні пластини у безмежному в'язкому середовищі: *a* – ламінарний режим при $Re = 100$; *б* – турбулентний режим при $Re = 10^6$.

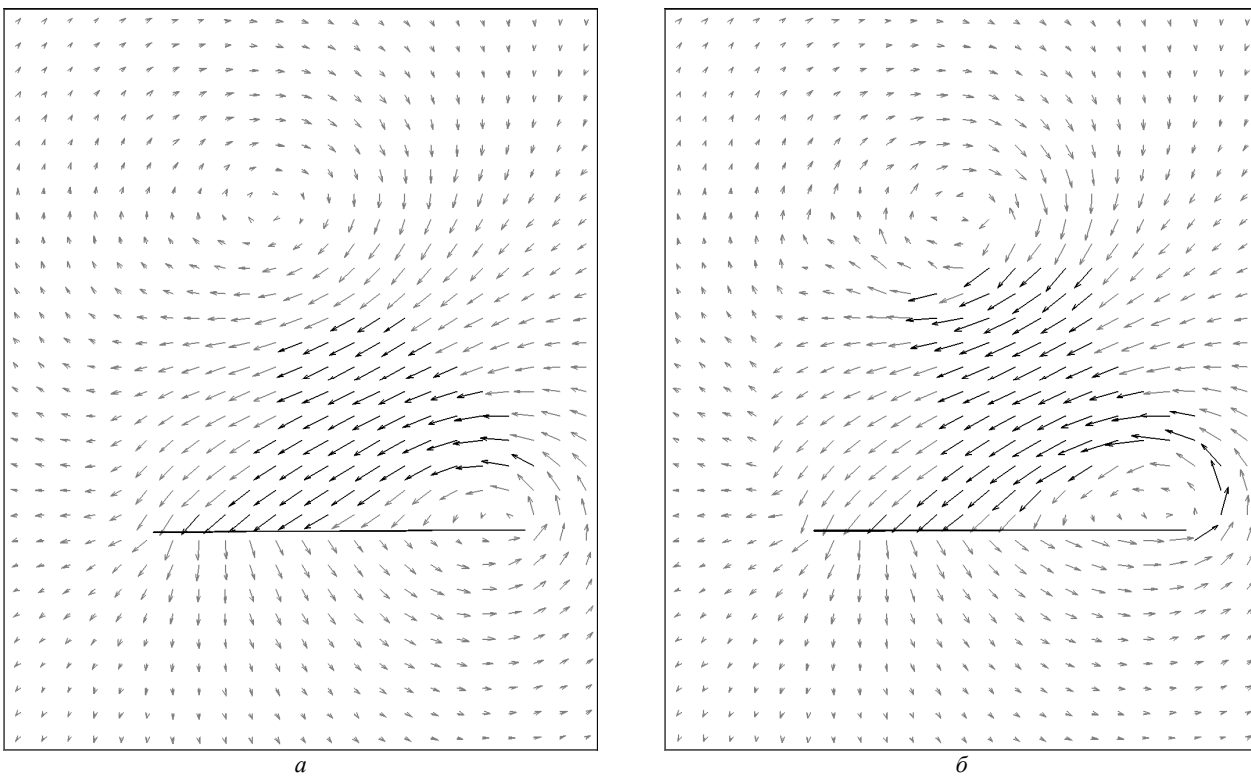


Рис. 2 – Поля швидкостей при обертанні пластини на відстані $h = 0.2$ від стінки: *a* – ламінарний режим при $Re = 100$; *б* – турбулентний режим при $Re = 10^6$.

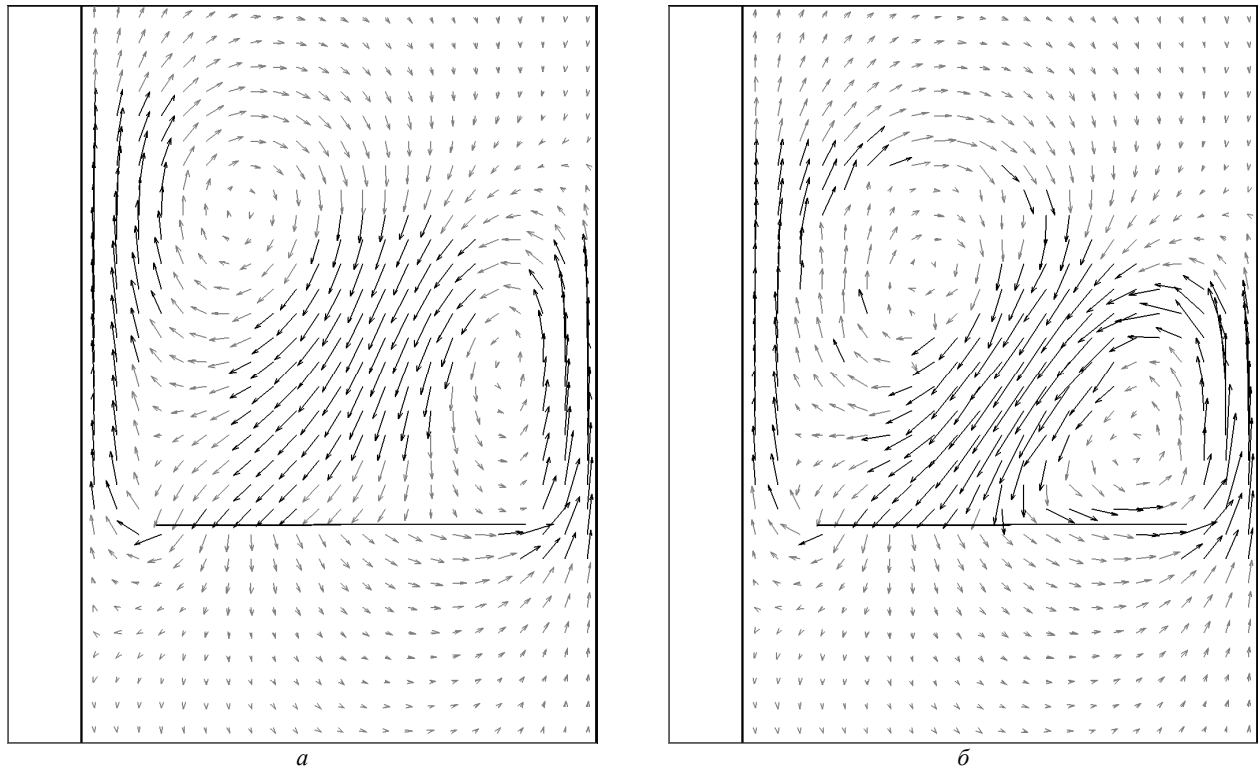


Рис. 3 – Поля швидкостей при обертанні пластини в каналі шириною $H = 1.4$: a – ламінарний режим при $Re = 100$; b – турбулентний режим при $Re = 10^6$.

Аналіз результатів розрахунків внеску інерційної та вихрової компонент нормальної сили пластини, що обертається у ламінарному та турбулентному режимах у безмежному середовищі, поблизу стінки та в каналі. Результати розрахунків внеску миттєвої інерційної $C_{n\,inert}(\beta)$ та вихрової $C_{n\,vortex}(\beta)$ компонент нормальної сили пластини у миттєву нормальну силу пластини $C_n(\beta)$ представлено на рис. 4 – 8 у приведеному вигляді: $C_{n\,inert}(\beta)/C_n(\beta)$ та $C_{n\,vortex}(\beta)/C_n(\beta)$. Позначки «w» означають обертання пластини біля стінки, «ch» – в каналі.

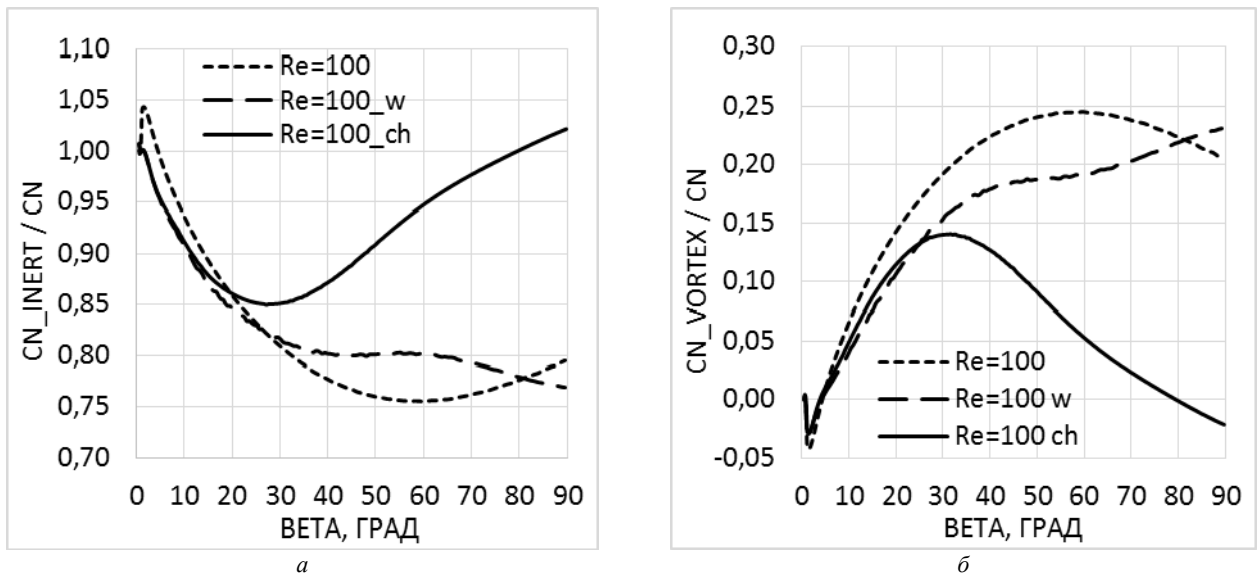


Рис. 4 – Вплив стінки та каналу при ламінарному режимі на внесок: a – інерційної компоненти нормальної сили; b – вихрової компоненти нормальної сили.

З отриманих результатів випливає, що у випадку ламінарних вихорів, які формуються після миттєвого старту пластини та її подальшому обертанні навколо нерухомої крайки (на рис. 1 – 3 вона праворуч), вплив наявності стінки на відстані $h = 0.2$ від нерухомої крайки пластини на приведену інерційну та вихрову компоненти но-

рмальної сили пластини несуттєвий, проте вплив наявності каналу шириною $H = 1.4$ при розташуванні однієї із стінок каналу на відстані $h = 0.2$ від нерухомої крайки пластини призводить до більш швидкого відходу ламінарного вихору від рухомої крайки пластини, що призводить до поступового збільшення внеску інерційної компоненти нормальної сили пластини при $\beta \geq 27^\circ$ до 100% та більше відсотків при розвороті пластини перпендикулярно стінкам каналу. Оскільки ламінарні вихорі при своєму формуванні відходять від пластини вздовж стінок каналу, це зводить нанівещь їх індуктивний вплив на нормальну силу пластини, а отже, і внесок вихрової компоненти у нормальну силу при розвороті пластини перпендикулярно стінкам каналу.

Однак у випадку турбулентних вихорів, які формуються після миттєвого старту пластини та її подальшого обертання навколо нерухомої крайки, наявність стінки та каналу при $\beta \geq 45^\circ$ призводить до поступового зменшення інерційної та збільшення вихрової компоненти у випадку обертання пластини біля стінки на $\approx 13\%$ в момент розвороту пластини перпендикулярно стінці, та припинення росту інерційної компоненти нормальної сили пластини у випадку обертання її у каналі.

У випадку безграничної рідини турбулентний вихор, який сходить з рухомої крайки пластини та віддаляється від неї, має більший розмір та інтенсивність, ніж відповідний ламінарний, що збільшує приведену інерційну компоненту нормальної сили пластини на 20% при $\beta = \pi/2$ і призводить до внеску інерційної компоненти до 100%. Однак турбулізація вихорів у випадку наявності стінки несуттєво змінює інерційну компоненту нормальної сили пластини та, навіть, зменшує її на 12% при $\beta = \pi/2$ у випадку обертання пластини в каналі.

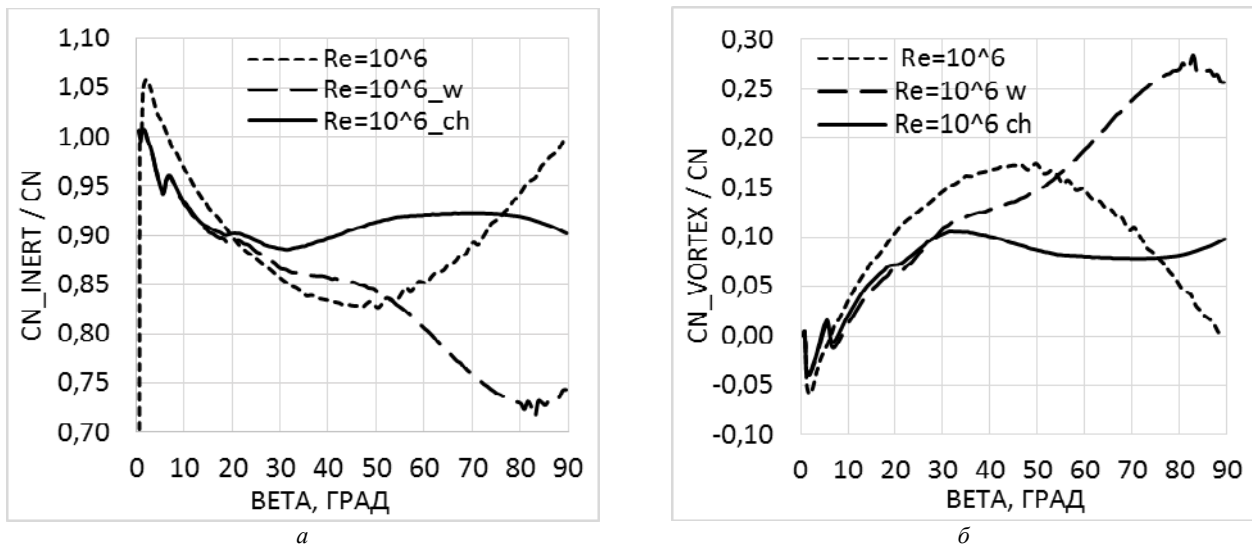


Рис. 5 – Вплив стінки та каналу при турбулентному режимі на внесок: a – інерційної компоненти нормальної сили; b – вихрової компоненти нормальної сили.

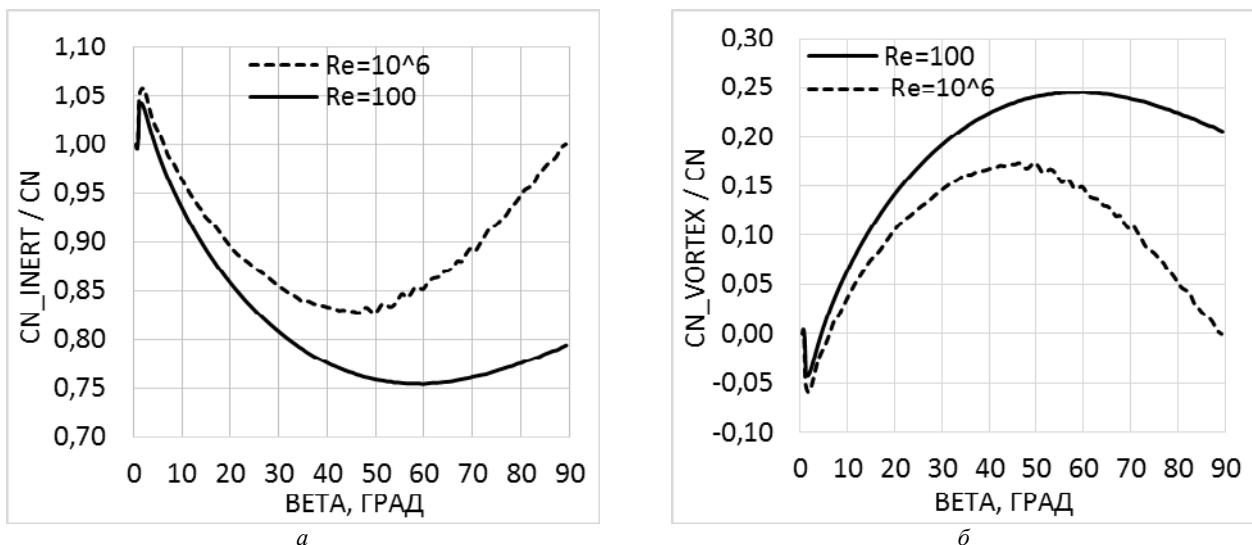


Рис. 6 – Вплив в'язкості при безмежному середовищі на внесок: a – інерційної компоненти нормальної сили; b – вихрової компоненти нормальної сили.

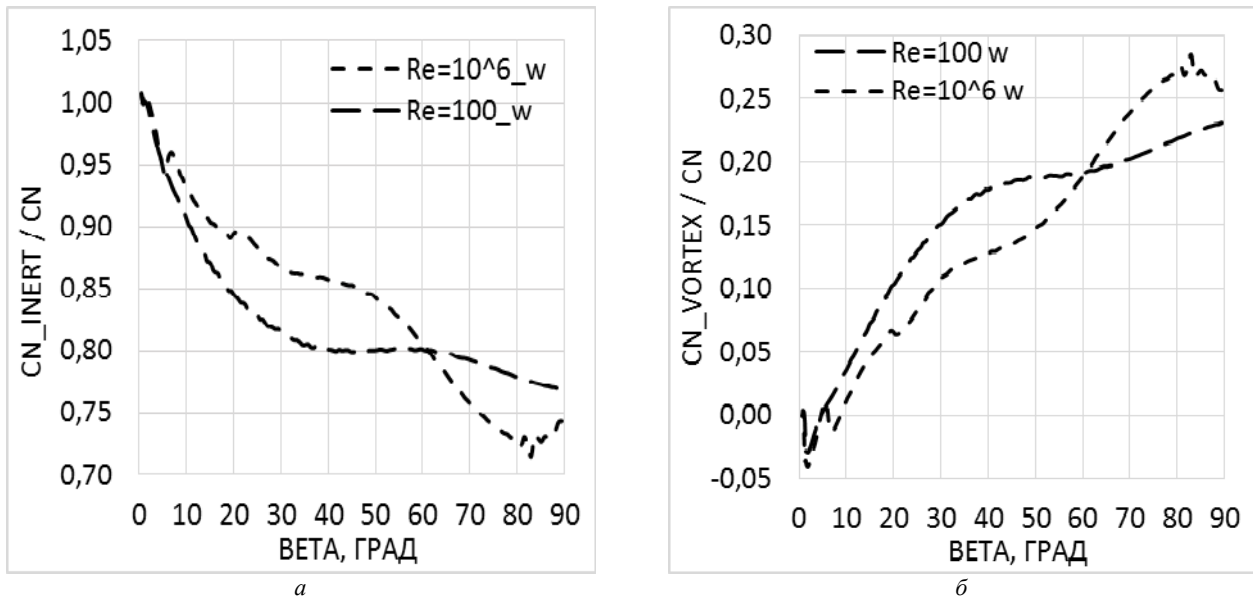


Рис. 7 – Вплив в'язкості (стінка, $h = 0.2$) на внесок: а – інерційної компоненти нормальної сили;
 б – вихрової компоненти нормальної сили.

У той же час, турбулізація вихорів у випадку безграничної рідини зменшує приведену вихрову компоненту нормальної сили пластини з 20% до нуля при $\beta = \pi/2$ через зменшення кінематичної в'язкості, несуттєво змінює її у випадку обертання пластини біля стінки і збільшує її від нуля (при $Re = 100$) до 10% (при $Re = 10^6$) у випадку обертання пластини в каналі через те, що турбулентні вихори в каналі при своєму формуванні вже не відходять так далеко від пластини вздовж стінок каналу, як це відбувається з ламінарними вихорами.

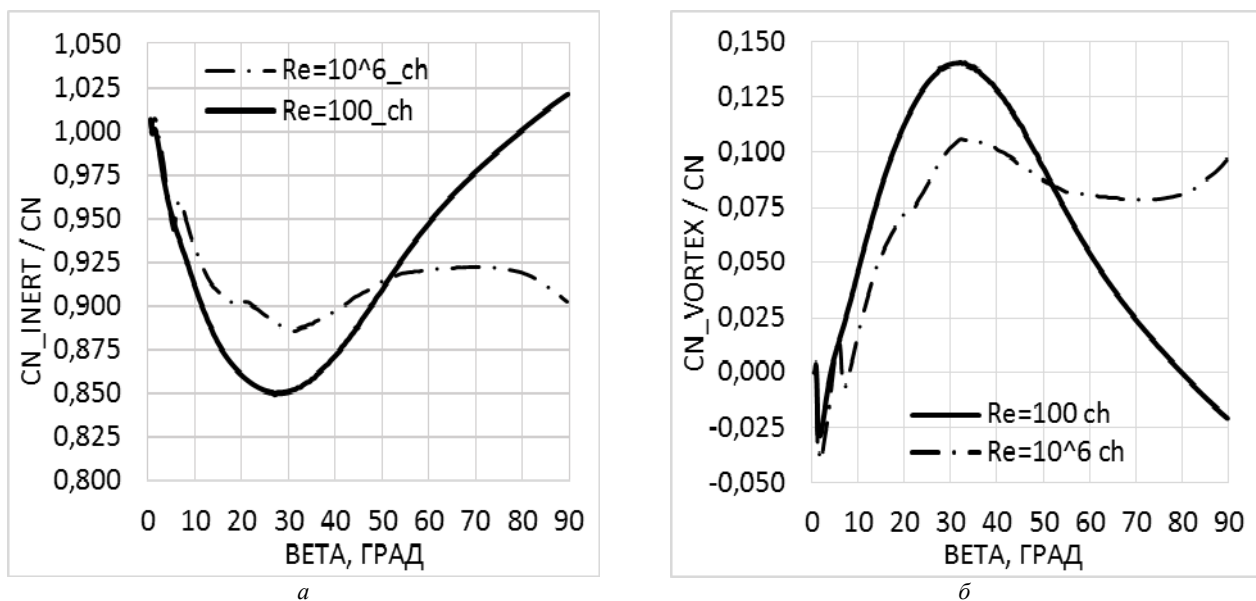


Рис. 8 – Вплив в'язкості (канал, $H = 1.4$) на внесок: а – інерційної компоненти нормальної сили;
 б – вихрової компоненти нормальної сили.

Висновки та перспективи подальших досліджень. З'ясовано, що у випадку миттєвого кутового старту пластини навколо її нерухомої крайки та подальшого рівномірного обертання зі сходом потоку з обох крайок пластини, як для ламінарного, так і для турбулентного режимів обтікання незалежно від наявності стінки чи каналу реалізується інерційно-вихровий принцип з домінуванням сил інерційної природи.

У подальшому доцільно буде дослідити, чи буде цей принцип реалізовуватись для випадку обертально-поступальних махів пластини в каналі, оскільки такі рухи характерні для роботи лопаті насоса у каналі, а від періодичності генерації та сходу вихорів з крайок лопаті, та їх інтенсивності залежать акустичні характеристики.

Список літератури

1. *Шеховцов А. В.* Вплив твердих границь та в'язкості середовища на внесок інерційної та вихрової компонент нормальної сили пластини, що обертається. Частина 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 212 – 217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
2. *Dovgij S. A., Shekhovtsov A. V.* An improved vortex lattice method for nonstationary problems // Journal of mathematical sciences. – 2001. – Vol. 104. – No. 6. – P. 1615 – 1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
3. *Довгий С. А., Шеховцов А. В.* Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // Вісник Харківського національного університету. Серія : математичне моделювання, інформаційні технології, автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2009. – Вип. 12. – № 863. – С. 111 – 128.

References (transliterated)

1. Shekhovtsov A. V. Vplyv tverdykh granits ta v'yazkosti seredovysyha na vnesok inertsynoyi ta vykhrovoyi komponent normal'noyi syly plastyny, shho obertaetsya. Chastyna 1 [Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh.* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, no. 1, pp. 212–217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
2. Dovgij S. A., Shekhovtsov A. V. An improved vortex lattice method for nonstationary problems. *Journal of mathematical sciences.* 2001, vol. 104, no. 6, pp. 1615–1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
3. Dovgij S. A., Shekhovtsov A. V. Aprobatsiya UMDV dlya klassa zadach o kolebaniyakh kryla v vyazkoy srede s ogranichennym resheniyem na kromkakh [Approbation the IMDV for a class of problems about oscillations of a wing in a viscous medium with a restricted solution on edges]. *Visnyk Kharkivskogo natsional'nogo universytetu. Seriya: matematychnye modelyuvannya, informatsiyini tekhnologii, avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2009, issue 12, no. 863, pp. 111–128.

Надійшла (received) 03.06.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Шеховцов Олександр Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.

Шеховцов Александр Владимирович – кандидат фізико-математических наук, старший научный сотрудник Інститута гидромеханики Национальной академии наук Украины, г. Киев; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.

Shekhovtsov Alexander Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Fellow at the Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.

ЗМІСТ

<i>Abramov G. S., Abramov M. G.</i> Formation of two-phase zones during internal oxidation of binary alloys.....	3
<i>Андрєєв Ю. М., Шабанов Г. В.</i> Реалізація в ССКА КіДиМ програмного визначення розмірностей невідомих в задачах механіки на підставі енергетичних співвідношень.....	13
<i>Бомба А. Я., Мороз І. П.</i> Математичне моделювання динамічних процесів у $p-i-n$ -діоді методами теорії збурень.....	23
<i>Воропай О. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шарпата А. С.</i> Моделювання тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях балки Тимошенко.....	33
<i>Матвієнко О. І., Мірошніченко О. О.</i> Застосування методів нечіткої векторної оптимізації для складання дієти.....	46
<i>Мельник О. С., Козаревич В. О.</i> Мікро- та наносхеми з програмованими структурами.....	55
<i>Сурганова Ю. Е., Міхлін Ю. В.</i> Дослідження стійкості нелінійних нормальних мод коливань дисипативної системи під впливом магнітного поля.....	63
<i>Шеховцов О. В.</i> Вплив твердих границь та в'язкості середовища на внесок інерційної та вихрової компонент нормальної сили пластини, що обертається. Частина 2.....	72

CONTENTS

<i>Abramov G. S., Abramov M. G.</i> Formation of two-phase zones during internal oxidation of binary alloys.....	3
<i>Andriev YU. M., Shabanov H. V.</i> Implementation in SCAS KiDyM of software determination of dimensions of unknowns in problems of mechanics based on energy relations.....	13
<i>Bomba A. YA., Moroz I. P.</i> Simulation of Dynamic processes in a $p-i-n$ -diode by the methods of perturbation theory	23
<i>Voropay A. V., Yegorov P. A., Povaliaiev S. I., Sharapata A. S.</i> Simulation of friction in hinged supports during non-stationary vibrations of a Timoshenko beam.....	33
<i>Matviienko O. I., Miroshnichenko O. O.</i> Application of fuzzy vector optimization methods for diet compilation.....	46
<i>Melnyk O. S., Kozarevych V. O.</i> Micro- and nanocircuits with programmable structures.....	55
<i>Surhanova YU. E., Mikhlin YU. V.</i> Investigation of stability of nonlinear normal modes of dissipative system oscillations under influence of magnetic field	63
<i>Shekhovtsov A. V.</i> Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 2	72

ШАНОВНІ АВТОРИ СТАТЕЙ

Вісник Національного технічного університету

«Харківський політехнічний інститут»

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях

- зареєстрований у світовому каталозі періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory** (New Jersey, USA);
- Додано до бази **Index Copernicus International World of Journals**.

До друку приймаються **оригінальні статті**.

Мінімальний об'єм статті становить 5 аркушів формату А4, **максимальний об'єм** не лімітовано.

Кількість авторів статті не може перевершувати 3-ох осіб. В номері збірника не може міститися більше 3-ох статей одного автора або співавтора.

Кожний колектив авторів отримує друковану версію журналу.

Друковані версії журналу надсилаються до основних бібліотек України, а електронний варіант відразу ж після опублікування стає доступний на сайтах: Серії Вісника, Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського та бібліотеки національного технічного університету «ХПІ».

За більш детальною інформацією про умови опублікування статей

та для отримання шаблону оформлення статей звертайтеся:

E-mail: kpi.mmtt@gmail.com

Site: <http://mmtt.khpi.edu.ua>

Адреса: 61002, м. Харків, вул. Кирпичова, 2.

Тел. +38-057-707-60-35

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ».
СЕРІЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Збірник наукових праць

№ 2 (5) ' 2023

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. Ванін В. А.
Технічний редактор Нижник С. Д.
Мовний рецензент англійської мови канд. фіз.-мат. наук Набока О. О.
Мовний рецензент української мови асистент Католик І. М.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ ТА ВИДАВЦЯ: 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com
Сайт: mmtt.khpi.edu.ua

Підп. до друку 25.12.2023 р. Формат 60×84 1/8. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 7,25. Облік.-вид. арк. 8,0.
Тираж 100 пр. Зам. № 22. Ціна договірна.

Видавництво «Стильна типографія»
61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А
Тел.: (057) 754-49-42
e-mail: zebraprint.zakaz@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК №5493 від 22.08.2017 р.