

Ю. М. САВЧЕНКО, Ю. А. СЕМЕНОВ, Г. Ю. САВЧЕНКО

НЕЛІНІЙНІ ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ У ПОТОЦІ РІДИНИ В КАНАЛІ ІЗ СКЛАДНОЮ ГЕОМЕТРІЮ ДНА, ВКРИТОГО БИТИМ ЛЬОДОМ

Розглянуто двовимірну нелінійну задачу про сталу течію в каналі, вкритому битим льодом з довільним рельєфом дна. Для розв'язання задачі використано метод інтегрального годографа, який зводиться до системи нелінійних рівнянь у модулі швидкості на вільній поверхні. Ці рівняння отримано з динамічної граничної умови. Результати, що показують вплив гравітації на геометрію вільної поверхні, представлені для широкого прямокутника і траншеї в широкому діапазоні чисел Фруда, включаючи як докритичні, так і надкритичні течії. Для надкритичних течій відтворено дві сім'ї розв'язків для довільної форми дна. Показано, що додаткова умова, яка вимагає, щоб вільна поверхня була плоскою на скінченній відстані від перешкоди, вибирає єдиний розв'язок для заданої висоти дна і ширини прямокутника для надкритичних течій. Це рішення є неперервним при переході від докритичного до надкритичного режиму течії. Розглядаються приклади для широкої прямокутної перешкоди і траншеї на дні каналу. Розглянуто два режими течії. Перший – докритичний режим, для якого хвиля, генерована профілем дна, поширюється тільки вниз за течією до нескінченності. Другий – надкритичний режим, для якого можуть існувати два різних типи розв'язків: один з меншою висотою гребеня хвилі, відомий як «збурена» хвиля, і інший з більшою висотою гребеня хвилі, названий «солітонною» хвилею. «Збурена» хвиля належить до сімейства стійких розв'язків, які відмежовуються від рівномірного потоку, коли висота перешкоди зростає від нуля. На противагу цьому, «солітонна» хвиля виникає з одиночного хвильового рішення, коли висота перешкоди зростає від нуля. Ці два сімейства розв'язків зливаються в точці згину, що характеризується мінімальним числом Фруда, $F_{\min}$. В діапазоні чисел Фруда $1 < F < F_{\min}$ не існує розв'язків. Прикметно, що як «збурені», так і «солітонні» розв'язки мають безхвилясті поверхні.

Ключові слова: течія в каналі, вільна поверхня, солітон, інтегральний метод годографа, комплексний потенціал.

YU. M. SAVCHENKO, YU. A. SEMENOV, G. YU. SAVCHENKO

NONLINEAR GRAVITY WAVES IN THE WATER STREAM IN THE CHANNEL WITH COMPLEX GEOMETRY OF THE BOTTOM COVERED BY BROKEN ICE

The two-dimensional nonlinear problem of a steady flow in a channel covered by broken ice with an arbitrary bottom topography is considered. An integral hodograph method is employed for solving the problem, which is reduced to a system of nonlinear equations in the velocity modulus on the free surface. These equations are obtained from the dynamic boundary condition. Results showing the effect of gravity on the geometry of the free surface are presented for a wide rectangle and a trench over a wide range of Froude numbers, including both subcritical and supercritical flows. For supercritical flows, two families of solutions for an arbitrary bottom shape are reproduced. It is shown that the additional condition requiring the free surface to be flat at a finite distance from the obstruction selects a unique solution for a given bottom height and width of the rectangle for supercritical flows. This solution is continuous in going from the subcritical to the supercritical flow regime. Case studies are carried out for a wide rectangular obstruction and a trench on the bottom of the channel. Two flow regimes are studied. The first is a subcritical regime, for which the wave generated by the bottom profile extends only downstream to infinity. The second is supercritical regime, for which two distinct types of solutions may exist: one with a smaller wave crest height, known as the 'perturbed' wave, and another with a larger wave crest height, termed the 'soliton' wave. The 'perturbed' wave belongs to a family of steady solutions that bifurcate from a uniform flow as the obstruction height increases from zero. In contrast, the 'soliton' wave emerges from a solitary wave solution as the obstruction height grows from zero. These two families of solutions merge at a fold point characterized by a minimum Froude number $F_{\min}$. No solutions exist within the Froude number range $1 < F < F_{\min}$. Notably, both the 'perturbed' and 'soliton' solutions exhibit wavy-free surfaces.

Key words: flow in the channel, free surface, soliton, integral hodograph method, complex potential.

Вступ. Межа між водами відкритого океану та щільними дрейфуючими льодами є особливо вразливою до фрагментації, спричиненої штормами та хвилями, що зароджуються у відкритому морі. Цей динамічний регіон відомий у науковій літературі як *зона маргінального льоду (ЗМЛ)*, названа так через його постійні зміни під впливом вітрів, океанічних течій, танення льоду та хвильової активності, що проникають углиб суцільних льодових масивів. Цікаво, що, незважаючи на помітне зменшення щільних льодових регіонів за останні чотири десятиліття, супутникові спостереження показують, що протяжність ЗМЛ залишається відносно постійною. Це явище виникає тому, що хвилі, які наближаються з відкритого океану, послідовно руйнують лід на передбачуваних відстанях, що значною мірою залежить від висоти хвиль, які надходять, та швидкості розсіювання їхньої енергії.

Аналіз останніх досліджень. Розуміння взаємодії хвиль і льоду в МІЗ має вирішальне значення для різних галузей, включаючи морський транспорт, рибальство, видобуток ресурсів і розвиток прибережної інфраструктури. Сучасні обчислювальні інструменти, такі як *WAVEWATCH III® (WW3)* [1], ефективно прогнозують глобальну і регіональну динаміку хвиль з надзвичайною точністю. Однак, як показують нещодавні дослідження, точність прогнозування значно знижується в межах ЗМЛ. Основний виклик для покращення цих прогнозів полягає у глибшому розумінні механізмів, що керують ослабленням енергії хвиль у *ЗМЛ-механізмах*, які залишаються лише частково зрозумілими.

Взаємодія між хвилями і фрагментованим льодом почала привертати значну увагу дослідників у 1960-х роках, що значною мірою було зумовлено розвитком *Північного морського шляху*. Хейсін [2] провів систематичний аналіз взаємодії льоду і хвиль у різних сценаріях, включаючи гравітаційні хвилі під фрагментованим льодом, згинально-гравітаційні хвилі в суцільних крижаних покривах, хвилі, викликані рухомими вантажами, і розсію-

вання хвиль через неоднорідність властивостей льоду і топографії морського дна. Тим не менш, точне прогнозування розповсюдження хвиль через ЗМЛ, що характеризується множинними тріщинами, крижинами і ополонками, вимагає передових математичних моделей динаміки льоду в поєднанні з нелінійними моделями взаємодії льоду і хвиль.

Значна частина досліджень минулого століття була присвячена вивченню реакції крижаного покриву на рухомі навантаження, що було зумовлено практичними потребами сезонних транспортних шляхів і злітно-посадкових смуг у полярних регіонах. Важливе експериментальне дослідження *згинально-гравітаційних хвиль*, що виникають під дією рухомих навантажень, було проведене *Сквайром* та ін. У наступних всебічних оглядах *Сквайра* та ін. детально обговорюються фундаментальні внески, включаючи піонерську роботу *Грінфілла* [3] в 1886 році, а також більш ранні експериментальні дослідження і математичне моделювання згинально-гравітаційних хвильових явищ.

Існує дві основні категорії моделей, що використовуються для вивчення взаємодії льодового покриву з хвилями: **1** – *моделі поодиноких крижин*, які розглядають розбитий лід як окремі крижини, що взаємодіють з хвилями і одна з одною, і **2** – *моделі суцільного льоду*, які представляють фізичні характеристики льодового покриву за допомогою *емпіричних реологічних параметрів*. Моделі суцільного льоду включають *моделі масового навантаження*, *моделі тонких пружних пластин* і *моделі в'язкого шару*, кожна з яких має свої переваги і недоліки. Часто необхідні додаткові припущення, щоб врахувати розсіювання енергії і загасання хвиль. Модель масового навантаження [4] розглядає лід як невазємодіючі точкові маси, в той час як модель пружної пластини представляє льодовий покрив як тонку, нескінченну пружну пластину, але за своєю суттю не має здатності до затухання хвиль, якщо не зробити додаткових припущень. Моделі в'язкого шару припускають наявність в'язкого шару льоду над невазкою водою, що включає механізми розсіювання енергії. Наприклад, *Хейсін* [2] представив в'язку модель, в якій основним механізмом дисипації є пластична деформація, тоді як *Вебер* [5] і *Келлер* [6] розробили моделі, що враховують пружні ефекти. Подальші вдосконалення *Ванга* і *Шена* [7] розширили початкові концепції Келлера.

Враховуючи неоднорідну природу морського льоду, визнано, що різні формулювання моделей ефективно застосовуються до різних льодових умов. Численні дослідження з використанням лінійної гравітаційної та згинально-гравітаційної хвильових теорій вивчали поширення хвиль у неоднорідних крижаних покритвах, що включають тріщини, крижини і ополонки. *Стурова* [8], яка проаналізувала нестаціонарну поведінку плаваючого льоду на мілководді зі змінною глибиною з використанням модальних функцій; *Кармакара* та ін. [9], які застосували широкомасштабні апроксимації для оцінки трансформації хвиль, спричинених донними сходінками та блоками.

Деякі автори також застосовували лінійну теорію для дослідження взаємодії між льодовиковим покривом, водою і зануреними тілами. Однак лінійні припущення часто не можуть повністю врахувати практичні сценарії через нелінійні ефекти, особливо щодо обмежень глибини занурення, нижче якої рішення може не існувати.

Основи *нелінійної теорії* взаємодії льоду з водою беруть свій початок у роботах *Форбса* [10, 11], який використовував розкладання в ряди високого порядку і *методи рядів Фур'є*. *Парау* і *Діаш* [12] передбачили депресійні гідропружні поодинокі хвилі, що характеризуються затухаючими хвостовими коливаннями, особливо коли швидкість навантаження наближається до критичних порогів. *Ванден-Брок* і *Парау* [13] отримали розв'язки для узагальнених поодиноких хвиль, а *Мілевські*, *Ванден-Брок* і *Вонг* [14] досліджували гідропружні поодинокі хвилі в глибоководних сценаріях. Також досліджувалися сильно нелінійні явища, такі як вплив водяних струменів на крижаний покрив і взаємодія льоду з бульбашками.

У цій роботі ми зосереджуємо увагу на поширенні хвиль у МІЗ. Ми використовуємо модель масового навантаження разом з моделлю в'язкого шару, що забезпечує затухання хвиль. Модель льоду поєднується з повністю нелінійним розв'язком для течії під шаром льоду. Модель масового навантаження *Пітерса* [4] та модель в'язкого шару *Хейсіна* [2] поєднані з повним розв'язком *Юна* та *Семенова* [15] повністю нелінійним розв'язком для течії у вільному поверхневому каналі. Потенціал течії визначається за допомогою *методу інтегрального годографа*, який дозволяє отримати вираз для потенціалу течії який включає величину швидкості на межі розділу фаз уявно. Це дозволяє нам легко пов'язати модель льоду з потенціалом течії за допомогою *рівняння Бернуллі*. Зв'язок базується на умові однакового тиску на межі розділу фаз: один з динаміки течії, а інший – з рівноваги льодового покриву.

Хвильові профілі представлені для різних товщин шару льоду і різних значень коефіцієнта в'язкості. Випадки, що відповідають найбільшій висоті перешкоди, для яких отримано збіжність чисельного методу, для яких отримано збіжність. Показано, що коефіцієнт тиску вздовж поверхні розділу стає від'ємним поблизу гребеня хвилі і демонструє сильно нелінійну поведінку, особливо при відносно малих товщини шару льоду. Для надкритичних течій розв'язок пророкує як збурену хвилю, так і солітонну хвилю, подібно до випадку вільної поверхні. Шар льоду зменшує амплітуду збуреної хвилі, але майже не впливає на амплітуду солітонної хвилі.

Постановка крайової задачі. Зазвичай поширення хвиль розглядають у спокійній воді. Однак, у випадку прогресуючих хвиль, що рухаються зі швидкістю U , зручніше використовувати систему координат, що рухається з гребенем хвилі. У системі координат такого типу межа розділу лід-вода не змінюється в часі, а вся рідина рухається зі швидкістю U у протилежному напрямку. Схему визначення показано на рис. 1.

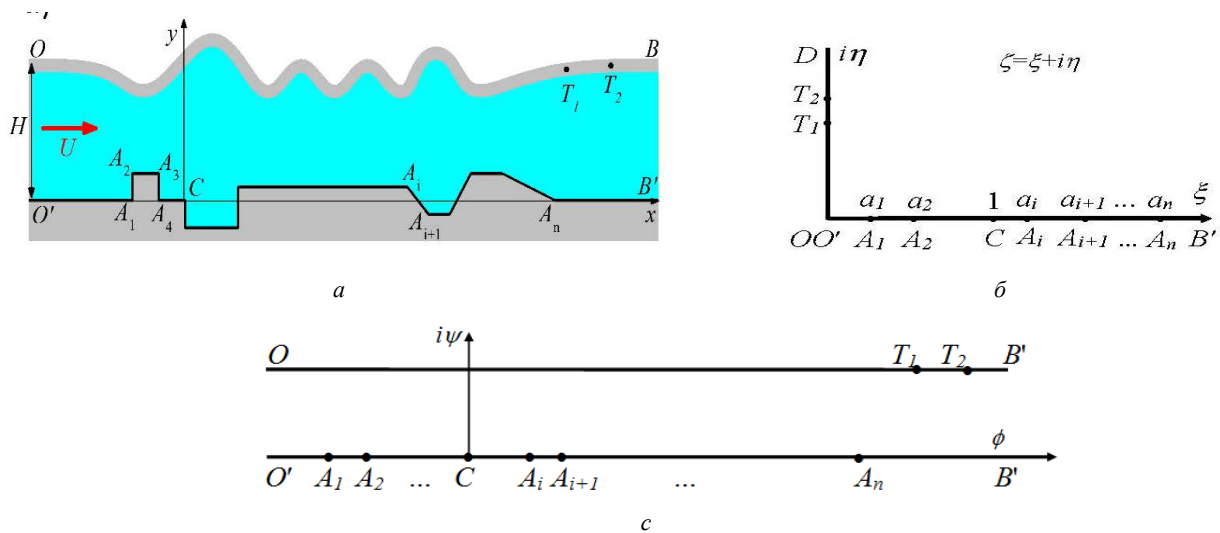


Рис. 1 – Схема визначення: *a* – фізична площа; *b* – площа параметра або ξ – plane; *c* – площа комплексного потенціалу.

Льодовий покрив (показано на рис. 1, *a* сірим кольором) має постійну товщину Δ . Вводиться декартова система координат XY , початок якої знаходиться на дні русла. Вісь X суміщена з напрямком течії, підтримуючи рівномірну швидкість U на нескінченності, в той час як вісь Y простягається вертикально вгору. Схему такої конфігурації показано на рис. 1, *a*.

Вважається, що рідина нев'язка і нестислива, на неї діє гравітаційне прискорення g . Течія є обертальною, що дозволяє застосувати теорію потенціальної течії. Дно каналу складається з прямих відрізків $A_i A_{i+1}$, кожен з яких утворює кут β_i з віссю X .

Шукається розв'язок, що задовольняє асимптотичну умову: $Y(X) \rightarrow H$ при $Y \rightarrow -\infty$, де H – глибина каналу. Ми вводимо комплексний потенціал швидкості потоку, $W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$, де $\Phi(X, Y)$ – потенціал швидкості, а $\Psi(X, Y)$ – функція потоку, причому $Z = X + iY$.

Керуюча крайова задача для потенціалу швидкості формулюється таким чином:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0. \quad (1)$$

Гранична умова на дні каналу, $Y = b = Y_b(X)$, забезпечує непроникність:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial Y_b}{\partial X}, \quad \Psi = 0. \quad (2)$$

Динамічна гранична умова на межі льоду і рідини, $Y = Y(X)$, задається рівнянням Бернуллі:

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho g Y + p_{ice} + p_{ext} = \rho \frac{U^2}{2} + \rho g H + p_{\infty}, \quad (3)$$

де $V = |\nabla \Phi|$ – величина швидкості; $p_{ice}(X)$ – тиск на межі розділу льоду та рідини (тиск, викликаний згином льодового покриву, дорівнює гідродинамічному тиску); $p_{\infty} = p_a + \rho_i g \Delta$ – його значення на нескінченності. Тут p_a – атмосферний тиск, ρ_i – густина льоду, Δ – товщина льодового покриву, а g – прискорення сили тяжіння. Зовнішній тиск $p_{ext}(X)$ прикладається на інтервалі $X_{T1} < X < X_{T2}$ для забезпечення безхвильової межі далеко вниз за течією.

Оскільки течія стала, функція течії на межі льоду та рідини залишається постійною і дорівнює витраті рідини через канал:

$$\Psi = UH. \quad (4)$$

Умова на нескінченності має вигляд:

$$\Phi \rightarrow U \quad \text{при} \quad X \rightarrow -\infty, \quad 0 \leq Y \leq H \quad (5)$$

Математична модель розбитої криги. Елемент льодового мату $dm = \rho_i h dx$, що рухається разом із рідиною вздовж межі поділу, зазнає вертикального прискорення, викликаного різницею тиску на верхній та нижній сторонах льоду. В'язкі сили виникають унаслідок деформації льодового покриву:

$$\rho_i \Delta(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu \Delta(x) \frac{\partial k}{\partial t} = p - p_{\infty}, \quad (6)$$

де ν – коефіцієнт в'язкості; k – кривина межі поділу; p – гідродинамічний тиск уздовж межі.

Існують два граничні випадки структури льодового мату. Перший випадок спостерігається при відносно великій товщині льоду, коли частинки льоду знаходяться в контакті одна з одною. У такому разі мат рухається як нерозтяжний шар із сталою швидкістю U ; тоді $\partial/\partial t = U\partial/\partial s$. Другий випадок є протилежним – середня товщина льоду є відносно малою, або частинки льоду плавають у рідині без контакту між собою. У цьому випадку вважається, що $\partial/\partial t = V\partial/\partial s$, де V – швидкість рідини на межі поділу.

Для полегшення розв'язання задачі вводиться безрозмірне представлення змінних, використовуючи швидкість U та глибину каналу H як еталонні величини. Безрозмірні координати визначаються як $x = X/H$, $y = Y/H$, $s = S/H$, а товщина льодовикового шару виражається як $\delta = \Delta/H$. Профілі дна та вільної поверхні описуються як $y_b(x) = Y_b(X)/H$ і $y(x) = Y(X)/H$ відповідно. Подібним чином, потенціал швидкості Φ та функція течії Ψ нормуються за характеристичною величиною UH , що дає безрозмірні змінні $\phi = \Phi/UH$ та $\psi = \Psi/UH$. У цьому нормованому вигляді функція течії набуває значень вздовж дна каналу та на межі під-рідини.

У безрозмірному вигляді рівняння Бернуллі можна записати так:

$$v^2 = 1 - \frac{2(y-1)}{F^2} - 2\frac{\rho_i}{\rho}\delta\frac{d^2y}{ds^2} - 2\nu\frac{\nu}{\rho UH}\delta\frac{d^3y}{ds^3}, \quad (7)$$

де $\nu = V/U$ – це безрозмірна швидкість і число Фруда визначається як

$$F = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

і характеризує режим течії залежно від глибини каналу.

Дисперсійне співвідношення. Розглядається стаціонарна хвилеподібна межа з малою амплітудою. Величину швидкості та вертикальну координату можна записати у вигляді:

$$v(s) = 1 + \Delta v e^{ikHs + i\varphi}, \quad y(s) = 1 + \Delta y e^{ikHs}, \quad (8)$$

де k – хвильове число, а φ – фазова різниця між швидкістю та вертикальним відхиленням. Диференціюючи рівняння (7) за довжиною дуги та нехтуючи величинами другого порядку малости, отримаємо:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{F^2} - \frac{\rho_i}{\rho}\delta\frac{d^3y}{ds^3} - \frac{\nu}{\rho UH}\delta\frac{d^4y}{ds^4}. \quad (9)$$

Згідно з лінійною теорією гравітаційних хвиль на вільній поверхні в каналі глибиною H , маємо [16]:

$$\frac{1}{F^2} = \frac{kH}{\tanh \tanh kH}. \quad (10)$$

Поклавши товщину льодового мату у рівнянні (9) рівною нулю, отримаємо:

$$\Delta v = \frac{kH}{\tanh kH} \Delta y,$$

а використовуючи це рівняння при $\delta \neq 0$, отримаємо співвідношення між числом Фруда та хвильовим числом у присутності льодового мату:

$$\frac{i\eta}{\rho UH}\delta(kH)^3 F^2 + 1 - \frac{\rho_i}{\rho}\delta(kH)^2 F^2 - F^2 \frac{kH}{\tanh kH}. \quad (11)$$

Підставивши у рівняння (11) співвідношення між частотою хвилі та хвильовим числом для монохроматичної хвилі, що рухається в нерухомій воді:

$$\omega^2 = k^2 U^2 = k^2 F^2 gH,$$

ми отримуємо дисперсійне співвідношення, виведене у Хейсіна [2]:

$$\frac{i\eta\Delta\omega}{\rho g}k^2 + 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 - \frac{\omega^2}{kH} = 0, \quad (12)$$

де $\omega_b^2 = \rho g / \rho_i \Delta$ – власна частота поплавка.

Значення хвильових чисел, визначені з рівняння (12), є комплексними. Припускаючи, що для низьких частот ($\omega \ll \omega_b$) коефіцієнт загасання малий, хвильове число можна подати у вигляді:

$$k = k_0(1 + i\varepsilon), \quad (13)$$

де k_0 – хвильове число у випадку без загасання, а ε – мала величина.

З наведених рівнянь випливає, що загасання хвиль у зоні зламаного льоду зростає зі збільшенням середньої товщини льоду, а також зі збільшенням частоти хвилі. Залежність хвильового числа від числа Фруда, отримана з

розв'язку рівняння (12), показана на рис. 2 для різних товщин льодового покриття. Видно, що розв'язок дисперсійного рівняння існує лише для докритичних течій ($F < 1$), і кожному значенню числа Фруда відповідає одне значення хвильового числа. Хвильове число зменшується зі збільшенням товщини льодового покриття. Для надкритичних течій профіль вільної поверхні буде отримано далі з використанням повністю нелінійної постановки задачі.

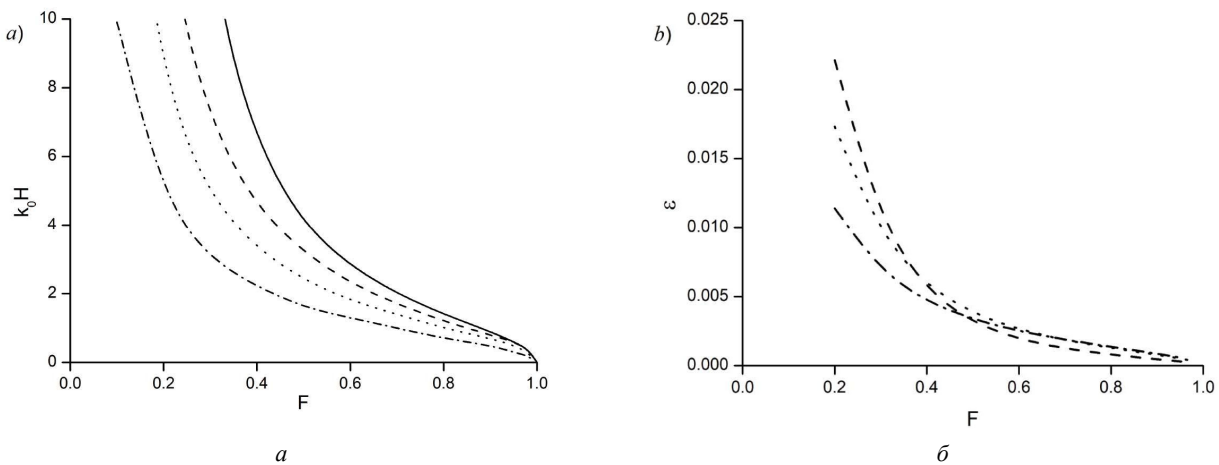


Рис. 2 – Розв'язок дисперсійного рівняння (11): а – хвильове число; б – коефіцієнт загасання $\varepsilon = \text{Im}(k)/\text{Re}(k)$ у залежності від числа Фруда: $\delta = 0$ – суцільна лінія, $\delta = 0.1$ – штрихова лінія, $\delta = 0.3$ – пунктирна лінія, $\delta = 1.0$ – штрих-пунктирна лінія. Значення параметра $\eta/(\rho UH) = 0.005$.

Коефіцієнт загасання ε , показаний на рис. 2, б, зменшується зі збільшенням числа Фруда. Оскільки довжина хвилі збільшується, а кривина, очевидно, зменшується, в'язка сила зменшується (рівняння (6)). Із рис. 2, б видно, що вплив товщини на коефіцієнт загасання є відносно слабким. Це пояснюється тим, що, з одного боку, збільшення товщини льоду призводить до збільшення ε . З іншого боку, збільшення товщини льоду викликає зменшення/збільшення хвильового числа/довжини хвилі, як видно з рис. 2, а. Це зменшує кривину та в'язку силу. Ці ефекти урівноважують один одного.

Інтегральний метод годографа для течії в каналі. Метод інтегрального годографа застосовується для аналітичного розв'язання задач про встановлену нелінійну течію в каналі зі змінною вільною поверхнею. Він базується на переході від фізичних координат до площини комплексного потенціалу потоку $w = \phi + i\psi$, що значно спрощує постановку задачі. У цій площині лінії струму і потенціалу є прямими, а профіль вільної поверхні перетворюється у лінію з відомими граничними умовами. Завдяки цьому метод дає змогу сформулювати задачу у вигляді інтегрального рівняння для функції, яка описує геометрію поверхні розділу.

Комплексний потенціал. Класичний метод годограми був розроблений Жуковським (1890) [17] і Мітчеллом (1890) [18]. Вони запропонували ввести допоміжну параметричну площину, або ζ – площину, яка зазвичай вибирається як верхня півплощина. Далі розглядалися дві функції: комплексний потенціал $w(\zeta)$ і функція

$$\omega(\zeta) = -\ln \frac{dw}{v_0 dz} = -\ln \frac{v}{v_0} + i\beta. \quad (14)$$

Тут v та β – це відповідно модуль і напрямок швидкості; v_0 – модуль швидкості на вільній поверхні, який вважається сталим. Коли ці функції відомі, швидкість і область течії можуть бути визначені в параметричній формі так:

$$\frac{dw}{dz} = \exp[-\omega(\zeta)], \quad z(\zeta) = z_0 + \int_0^\zeta \frac{dw}{d\zeta'} / \frac{dw}{dz} d\zeta', \quad (15)$$

функція $z(\zeta)$ називається *функцією відображення*.

Підхід Жуковського – Мітчелла дозволяє розв'язувати задачі про течію з вільною поверхнею навколо тіл з полігональними контурами за умови сталої швидкості вздовж вільної поверхні/границі (тобто без врахування гравітації, поверхневого натягу або інших зовнішніх сил). У таких випадках функції $\omega(\zeta)$ і $w(\zeta)$ визначають полігональні області. Конформне відображення верхньої півплощини на ці області може бути отримане за допомогою *інтеграла Шварца – Кристоффеля*.

Однак значні труднощі виникають, коли нахил контуру тіла змінюється або коли швидкість на вільній поверхні/границі залежить від гравітації, поверхневого натягу або інших сил. У цих випадках граничні умови для

комплексної швидкості змінюються: уздовж твердого контуру напрямок швидкості визначається нахилом тіла, тоді як на вільній поверхні/границі модуль швидкості визначається з рівняння Бернуллі. Це призводить до змішаної крайової задачі для функції комплексної швидкості.

У цій роботі ми застосовуємо *інтегральну формулу* [19, 20], яка дозволяє визначити комплексну функцію за її аргументом уздовж дійсної осі та модулем уздовж уявної осі в першому квадранті. Таким чином, ми вибираємо перший квадрант як область параметричної змінної $\varsigma = \xi + i\eta$ замість півплощини, як показано на рис. 1, *b*. У фізичній площині $z = x + iy$ (рис. 1, *a*) ця параметрична область відповідає рідинній області: дійсна вісь представляє дно каналу, а уявна вісь – межу. Теорема про конформне відображення дозволяє зафіксувати положення трьох точок: $O(O')$ при $\varsigma = 0$, C при $\varsigma = 1$, та $B(B')$ при $\varsigma = \infty$, як показано на рис. 1, *b*. Проте положення точок A_i , $i = 1, n$ (при $\varsigma = a_i$) залишаються невизначеними й мають бути знайдені за додатковими фізичними умовами. Функція комплексної швидкості має вид:

$$\frac{dw}{dz} = \prod_1^n \left(\frac{a_i - \varsigma}{a_i + \varsigma} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[-\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \ln v}{d\eta} \ln \frac{i\eta - \varsigma}{i\eta + \varsigma} d\eta \right], \quad (16)$$

де $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1}$ – зміна напрямку швидкості при проходженні кута в точці A_i , $i = 1, \dots, n$, причому β_0 .

На дні каналу функція течії $\psi \equiv 0$, а на межі $\psi \equiv 1$, як впливає з граничних умов (2) та (4), тоді як потенціал змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином, область комплексного потенціалу $w = \phi + i\psi$ – це нескінченна смуга одиничної ширини: $-\infty < \phi < \infty$, $0 \leq \psi \leq 1$. Через просту геометрію області w ми можемо використати конформне відображення, щоб негайно записати комплексний потенціал w як функцію параметричної змінної ς :

$$a : w(\varsigma) = \frac{2}{\pi} \ln \varsigma; \quad b : \frac{dw}{d\varsigma} = \frac{2}{\pi \varsigma}. \quad (17)$$

Комплексний потенціал (17a) є логарифмічною функцією змінної ς , тобто ς експоненційно залежить від комплексного потенціалу $w = \phi + i\psi$. Координати довжини дуги $s_b \sim \phi$ та $s \sim \psi$ уздовж дна та межі відповідно. Це означає, що ς експоненційно залежить від s . Тому виникають труднощі при обчисленнях на довжині області більше ніж $5H$. Ми можемо усунути логарифмічну особливість, якщо виключимо параметричні змінні ς , ξ , η з рівняння (16) за допомогою (17a). Підставляючи дійсну частину (17a) у (16), отримуємо комплексну швидкість як функцію комплексного потенціалу w , зворотна до якої є похідною функції відображення $z = z(w)$:

$$\frac{dz}{dw} = \prod_1^n \left(\frac{a_i + e^{w'}}{a_i - e^{w'}} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi'} \ln \left(\frac{ie^{\phi'} - e^{w'}}{ie^{\phi'} + e^{w'}} \right) d\phi' \right], \quad (18)$$

де $w' = \pi w / 2$, $\phi' = \pi \phi / 2$, $a_i = e^{\phi_{A_i}}$, а ϕ_{A_i} – потенціал у кутовій точці A_i . Ядро інтегралу в (18) експоненційно спадає зі зростанням різниці $|\phi' - w'|$. Інтегрування (18) уздовж $-\infty < \phi < \infty$, $\psi = 1$, у w – площині дає межу OB ; інтегрування уздовж $-\infty < \phi < \infty$, $\psi = 0$ дає дно каналу.

Потенціали ϕ_{A_i} є невідомими і мають бути визначені з довжини сегментів $|A_i - 1, A_i| = s_{bi}$:

$$s_{bi} = \int_{\phi_{A_{i-1}}}^{\phi_{A_i}} \frac{ds_b}{d\phi'} d\phi', \quad (19)$$

де

$$\frac{ds_b}{d\phi'} = \left| \frac{dz}{dw} \right|_{w=\phi'} = \prod_1^n \left| \frac{a_i + e^{\phi'}}{a_i - e^{\phi'}} \right|^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi''} \left[\pi - 2 \arctan(e^{\phi''} - e^{\phi'}) \right] d\phi'' \right]. \quad (20)$$

Модуль швидкості вздовж межі визначається з динамічної граничної умови (7), яка залежить від форми межі $y(s)$, її кривини та похідних вищих порядків. Форма межі лід/рідина визначається інтегруванням похідної функції відображення (18) вздовж верхньої межі смуги у w – площині:

$$y(\phi) = y(-\phi^*) + \text{Im} \left\{ \int_{-\phi^* + i}^{\phi + i} \prod_1^n \left(\frac{a_i + e^{w'}}{a_i - e^{w'}} \right)^{\frac{\alpha_i}{\pi}} \exp \left[\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d \ln v}{d\phi'} \ln \left(\frac{ie^{\phi'} - e^{w'}}{ie^{\phi'} + e^{w'}} \right) d\phi' \right] dw' \right\}, \quad (21)$$

де $y(-\phi^*) = H$. Тут $-\phi^*$ та ϕ^* – нижня і верхня межа обчислювальної області; канал у фізичній площині усічений, і вважається, що течія за межами області $|\phi| > \phi^*$ є сталою.

Координата дуги вздовж межі:

$$s(\phi) = s_0 + \int_0^\phi \frac{d\phi'}{v(\phi')}, \quad (22)$$

де $s_0 = 0$ обрано при $\phi = 0$. Далі кривина та її похідні визначаються з використанням сплайнової апроксимації межі $[x(s), y(s)]$.

Чисельне визначення функції $v(\phi)$. У дискретному вигляді розв'язок шукається в заданих точках $-\phi^* < \phi_j < \phi^*$, $j = 1, \dots, N$, що лежать на верхній стороні смуги (рис. 1, c). Інтеграли, що входять до рівняння (16), обчислюються аналітично з використанням точок дискретизації уявної осі першого квадранта в ζ – площині, $\eta_j = \exp \pi \phi_j / 2$, і лінійної інтерполяції функції на інтервалах:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \frac{d \ln v}{d \eta} \ln \frac{i\eta - \zeta}{i\eta + \zeta} d\eta = \Delta(\ln v)_j c_j(\zeta), \quad (23)$$

де

$$\Delta(\ln v)_j = \ln v_j - \ln v_{j-1} = \ln \frac{v_j}{v_{j-1}}, \quad (24)$$

$$c_j(\zeta) = \frac{1}{\pi \Delta \eta_j} \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} \ln \frac{i\eta - \zeta}{i\eta + \zeta} d\eta. \quad (25)$$

Інтеграл у виразі вище легко обчислюється, і результатом є неособливий вираз для функцій $c_j(\zeta)$. Підставляючи (25) в (16), можна обчислити інтеграли у формулі (18).

Кривина та її похідні визначаються з використанням сплайнової інтерполяції вузлів $y_m = y(\bar{\phi}_m)$ та $s_m = s(\bar{\phi}_m)$, отриманих з рівнянь (21) та (22). Вузли вибираються як кожна четверта точка з множини дискретних точок $\bar{\phi}_m = \phi_{4m}$, $m = 1, \dots, M$, $M = N/4$. Обрано сплайн п'ятого порядку, який забезпечує безперервність похідних до четвертого порядку включно:

$$y(s) = y_m + a_{1,m}(s - s_{\eta m-1}) + \dots + a_{n,m}(s - s_{\eta m-1})^n, \quad s_{\eta m-1} < s < s_{\eta m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 5. \quad (26)$$

Кривина та її похідні отримуються шляхом диференціювання (26)

Застосовуючи динамічну граничну умову (7) у формі коефіцієнтів тиску у вузлах $\bar{\phi}_m$, отримуємо таку систему нелінійних рівнянь:

$$G_m(\bar{V}) = c_{pm}(\bar{V}) - c_{pm}^{ice}(\bar{V}) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (27)$$

де $\bar{V} = (v_1, \dots, v_M)^T$ вектор невідомих швидкостей $v_m = v(\bar{\phi}_m)$,

$$c_{pm}(\bar{V}) = 1 - v_m^2 - \frac{2[y_m(\bar{V}) - 1]}{F^2} - C_d v_m^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (28)$$

коефіцієнт тиску через течію, а

$$c_{pm}^{ice}(\bar{V}) = 2 \frac{\rho_i \delta}{\rho} \frac{d^2 y}{ds^2} - 2v \frac{v \delta}{\rho UH} \frac{d^3 y}{ds^3} \quad (29)$$

коефіцієнт тиску через згин льоду.

Система рівнянь (27) розв'язується *методом Ньютона*. Якобіан цієї системи обчислюється чисельно з використанням центральної різниці при $\Delta v = 10^{-8}$. При кожному обчисленні функції $G(V)$, система нелінійних рівнянь (19) розв'язується також методом Ньютона в рамках внутрішньої ітераційної процедури. Значення швидкостей v_j , $j = 4m-3, 4m-2, 4m-1$, між вузлами s_{m-1} та s_m , визначаються лінійною інтерполяцією значень $\ln v_m$, отриманих із розв'язку системи рівнянь (27), для $m = 1, \dots, M$.

Результат розрахунків. Для моделювання прямокутної перешкоди кути в вершинах задаються як $\alpha_1 = \alpha_4 = 0.5\pi$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -0.5\pi$. Параметри ϕ_{A_i} , $i = 1, \dots, 4$, визначаються з рівняння (19) з урахуванням висоти $a = 0.12$ та ширини $b = 3$ прямокутника. Перешкода призводить до утворення хвиль, які поширюються вниз по потоку так само, як і в разі гравітаційних хвиль за відсутності льоду. Профілі межі для різної товщини льоду показано на рис. 3, a. Видно, що товщина льоду впливає на амплітуду хвилі, а також суттєво збільшує її довжину.

Така поведінка перебуває в повній відповідності з дисперсійним співвідношенням на рис. 2 (зі збільшенням товщини льодового мату, хвильове число зменшується). Із зростанням товщини льоду форма хвилі наближається до синусоїдальної. Це свідчить про те, що льодовий мат перешкоджає утворенню загострення у випадку вільної поверхні, і розв'язок може існувати для більшої висоти перешкоди. Коефіцієнт тиску вздовж межі показано на рис. 3, *b* для різних товщин льоду. Чим більша товщина льоду, тим більшою є амплітуда коефіцієнта тиску вздовж межі. Це відповідає тому, що товстіший (інерційний) шар льоду чинить більше навантаження на рідину.

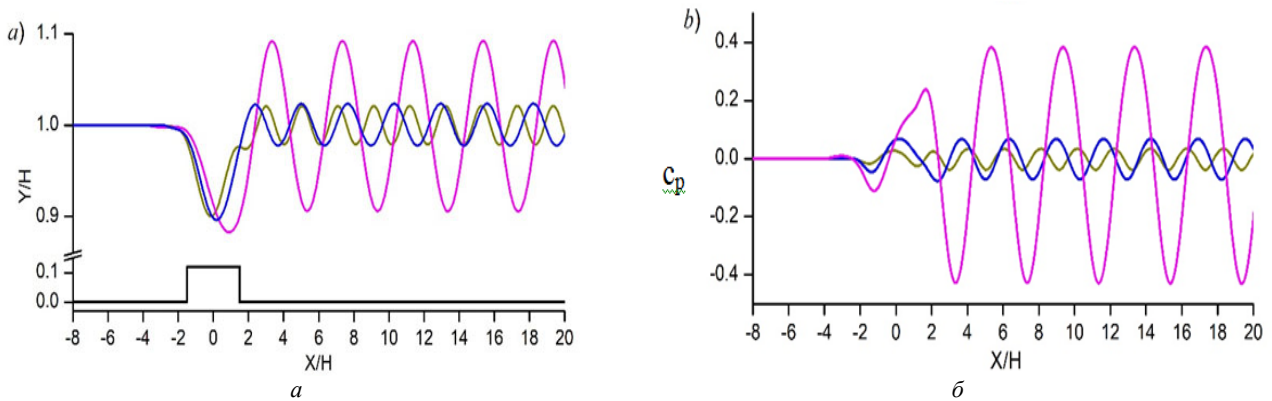


Рис. 3 – *a* – вплив товщини льоду на форму межі при висоті прямокутника $a = 0.12$, ширині $b = 3.0$ та *b* – коефіцієнт тиску вздовж межі: $\delta = 0.1$ – темно-жовтий, $\delta = 0.3$ – синій, $\delta = 1.0$ – пурпурний. Коефіцієнт в'язкості $\nu = 0$.

На рис. 4 показано профілі межі для числа Фруда $F = 0.5$, товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різної ширини перешкоди. Зі зміною ширини перешкоди амплітуда хвилі після перешкоди демонструють осцилюючу поведінку.

Червона ($b = 3.0$) і пурпурна лінія ($b = 6.0$) відповідають випадкам, за яких над прямокутником розташовується ціла кількість хвиль: для червоної – одна хвиля і для пурпурової – дві. При цьому течія симетрична щодо центральної лінії. За ширини перешкоди $b = 4.5$ течія несиметрична й амплітуда хвилі за перешкодою досягає максимального значення (рис. 5).

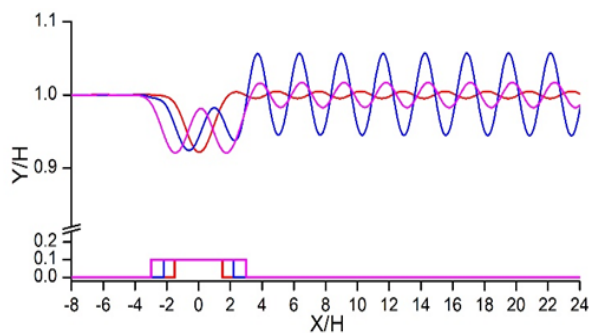


Рис. 4 – Профілі межі для числа Фруда $F = 0.5$, товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різної ширини прямокутника: $b = 3.0$ – червоний, 4.5 – синій, 6.0 – пурпурний. Коефіцієнт в'язкості $\nu = 0$.

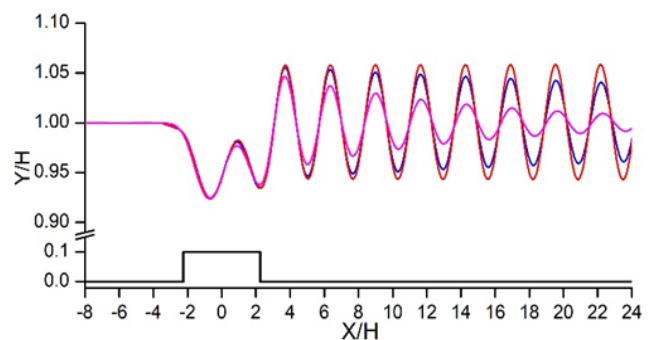


Рис. 5 – Профілі хвиль для числа Фруда $F = 0.5$, $a = 0.1$, $b = 4.5$ та товщини льодового шару $\delta = 0.3$ і різних значень коефіцієнта в'язкості: $\nu = 0$ – червона лінія, 0.01 – синя лінія та 0.05 – пурпурна лінія.

Висновки. Поточне дослідження присвячене нелінійній взаємодії між гравітаційними хвилями на поверхні та зламанним льодом. Для аналізу поведінки монохроматичної хвилі, що породжується перешкодою на дні, використано модель масового навантаження з в'язким шаром. Нелінійну задачу для рідини розв'язано за допомогою інтегрального методу годографа через побудову комплексного потенціалу потоку, що повністю задовольняє нелінійні граничні умови на дні каналу та на межі лід-рідина. Виведено та чисельно розв'язано систему нелінійних та інтегральних рівнянь. Метод розроблено для довільної форми дна, але результати подано для півциліндричної перешкоди на плоскому дні. Модель в'язкого шару Хейсина [2] для нееластичної взаємодії між льодовими частинками використано для передбачення загасання хвилі. Узгодження між потоком і льодовим покривом базується на однаковому розподілі тиску вздовж межі: один отримується з розв'язку задачі для рідини, інший забез-

печує рівновагу льодового покриву. Такий загальний підхід до узгодження дозволяє враховувати інші моделі льодового покриву та інші механізми загасання хвилі. При зміні ширини перешкоди амплітуда хвилі над нею залишається практично сталою, тоді як амплітуди хвиль за перешкодою демонструють осцилюючу поведінку. Реальні значення коефіцієнта демпфування мають визначатися на основі експериментальних досліджень або натурних спостережень загасання хвиль.

Список літератури

1. WW3DG – The WAVEWATCH III® Development Group. User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 5.16 (Tech. Note No. 329. – 2016).
2. Kheisin D. E. Dynamics of Floating Ice Cover. – 1967. – 215 p. [in Russian. Technical English Translation in: Tech. Rep. FSTC-HT-23-485-69, U.S. Army Foreign Science and Technology Center, 1969, Washington DC].
3. Greenhill A. G. Wave motion in hydrodynamics // *Am. J. Math.* – 1886. – № 9(1). – P. 62 – 96.
4. Peters A. S. The effect of a floating mat on water waves // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1950. – vol. 3. – pp. 319 – 354. DOI: 10.1002/cpa.3160030402.
5. Weber J. E. Wave attenuation and wave drift in the marginal ice zone // *J. Phys. Oceanogr.* – 1987. – vol. 17(12). – pp. 2351 – 2361. DOI: 10.1175/1520-0485(1987)017<2351:WAAWDI>2.0.CO;2.
6. Keller J. B. Gravity waves on ice-covered water // *J. Geophys. Res.* – 1998. – vol. 103(C4). – pp. 7663 – 7669. DOI: 10.1029/97JC02966.
7. Wang R., Shen H. H. Gravity waves propagating into an ice-covered ocean: A viscoelastic model // *Journal of Geophysical Research*. – 2010. – vol. 115(C6). DOI: 10.1029/2009JC005591.
8. Sturova I. V. Time-dependent response of a heterogeneous elastic plate floating on shallow water of variable depth // *J. Fluid Mech.* – 2009. – vol. 637. – pp. 305 – 325. DOI: 10.1017/S0022112009990504.
9. Karmakar D., Bhattacharjee J., Sahoo T. Oblique flexural gravity-wave scattering due to changes in bottom topography // *J. Engng Maths.* – 2010. – vol. 66. – pp. 325 – 341. DOI: 10.1007/s10665-009-9297-8.
10. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution // *J. Fluid Mech.* – 1986. – vol. 169. – pp. 409 – 428. DOI: 10.1017/S0022112086000708.
11. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solution // *J. Fluid Mech.* – 1988. – vol. 188. – pp. 491 – 508. DOI: 10.1017/S0022112088000813.
12. Părău E. I., Dias F. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load // *J. Fluid Mech.* – 2002. – vol. 460. – pp. 281 – 305. DOI: 10.1017/S0022112002008236.
13. Vanden-Broeck J.-M., Părău E. I. Two-dimensional generalized solitary waves and periodic waves under an ice sheet. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2011, vol. 369, pp. 2957–2972. DOI: 10.1098/rsta.2011.0108.
14. Milewski P. A., Vanden-Broeck J.M., Wang Z. Hydroelastic solitary waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 679, pp. 628–640. DOI: 10.1017/jfm.2011.163.
15. Yoon B.-S., Semenov Y. A. Separated Inviscid Sheet Flows // *J. Fluid Mech.* – 2011. – vol. 678. – pp. 511 – 534. DOI: 10.1017/jfm.2011.123.
16. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. Theoretical Hydromechanics. – Wiley Interscience, 1964. – 577 p.
17. Joukowski N. E. Modification of Kirchhoff's method for determination of a fluid motion in two directions at a fixed velocity given on the unknown streamline // *Math. Sbornik*. – 1890. – vol. 15 (1). – pp. 121 – 278.
18. Michell J. H. On the theory of free streamlines // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. – 1890. – vol. 181. – pp. 389 – 431.
19. Semenov Y. A., Iafrazi A. On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges // *J. Fluid Mech.* – 2006. – vol. 547. – pp. 231 – 256. DOI: 10.1017/S0022112005007329.
20. Semenov Y. A., Yoon B.-S. Onset of flow separation at oblique water impact of a wedge // *Phys. Fluids*. – 2009. – vol. 21. – pp. 112103 – 112111. DOI: 10.1063/1.3261805.

References (transliterated)

1. WW3DG – The WAVEWATCH III® Development Group. User manual and system documentation of WAVEWATCH III® version 5.16 (Tech. Note No. 329. – 2016).
2. Kheisin D. E. Dynamics of Floating Ice Cover. 1967. 215 p. [in Russian. Technical English Translation in: Tech. Rep. FSTC-HT-23-485-69, U.S. Army Foreign Science and Technology Center, 1969, Washington DC].
3. Greenhill A. G. Wave motion in hydrodynamics. *Am. J. Math.* 1886, Vol. 9(1), pp. 62–96.
4. Peters A. S. The effect of a floating mat on water waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950, vol. 3, pp. 319–354. DOI: 10.1002/cpa.3160030402.
5. Weber J. E. Wave attenuation and wave drift in the marginal ice zone. *J. Phys. Oceanogr.* 1987, vol. 17(12), pp. 2351–2361. DOI: 10.1175/1520-0485(1987)017<2351:WAAWDI>2.0.CO;2.
6. Keller J. B. Gravity waves on ice-covered water. *J. Geophys. Res.* 1998, vol. 103(C4), pp. 7663–7669. DOI: 10.1029/97JC02966.
7. Wang R., Shen H. H. Gravity waves propagating into an ice-covered ocean: A viscoelastic model. *Journal of Geophysical Research*. 2010, vol. 115(C6). DOI: 10.1029/2009JC005591.
8. Sturova I. V. Time-dependent response of a heterogeneous elastic plate floating on shallow water of variable depth. *J. Fluid Mech.* 2009, vol. 637. pp. 305–325. DOI: 10.1017/S0022112009990504.
9. Karmakar D., Bhattacharjee J., Sahoo T. Oblique flexural gravity-wave scattering due to changes in bottom topography. *J. Engng Maths.* 2010, vol. 66, pp. 325–341. DOI: 10.1007/s10665-009-9297-8.
10. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution. *J. Fluid Mech.* 1986, vol. 169, pp. 409–428. DOI: 10.1017/S0022112086000708.
11. Forbes L. K. Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solution. *J. Fluid Mech.* 1988, vol. 188, pp. 491–508. DOI: 10.1017/S0022112088000813.
12. Părău E. I., Dias F. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load. *J. Fluid Mech.* 2002, vol. 460, pp. 281–305. DOI: 10.1017/S0022112002008236.

13. Vanden-Broeck J.-M., Părău E. I. Two-dimensional generalized solitary waves and periodic waves under an ice sheet. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2011, vol. 369, pp. 2957–2972. DOI: 10.1098/rsta.2011.0108.
14. Milewski P. A., Vanden-Broeck J.M., Wang Z. Hydroelastic solitary waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 679, pp. 628–640. DOI: 10.1017/jfm.2011.163.
15. Yoon B.-S., Semenov Y. A. Separated Inviscid Sheet Flows. *J. Fluid Mech.* 2011, vol. 678, pp. 511–534. DOI: 10.1017/jfm.2011.123.
16. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics*. Wiley Interscience, 1964. 577 p.
17. Joukowski N. E. Modification of Kirchhoff's method for determination of a fluid motion in two directions at a fixed velocity given on the unknown streamline. *Math. Sbornik*. 1890, vol. 15 (1), pp. 121–278.
18. Michell J. H. On the theory of free streamlines. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1890, vol. 181, pp. 389–431.
19. Semenov Y. A., Iafrati A. On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges. *J. Fluid Mech.* 2006, vol. 547, pp. 231–256. DOI: 10.1017/S00222112005007329.
20. Semenov Y. A., Yoon B.-S. Onset of flow separation at oblique water impact of a wedge. *Phys. Fluids*. 2009, vol. 21, pp. 112103–112111. DOI: 10.1063/1.3261805.

Надійшла (received) 31.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Савченко Юрій Миколайович – член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, завідувач відділу Течій з вільними межами Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3435-9316>; e-mail: : SavchenkoYu@nas.gov.ua.

Savchenko Yuriy Mykolaiiovych – Corresponding member of the NAS of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Head of the department of Free Boundary Flows at the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3435-9316>; e-mail: : SavchenkoYu@nas.gov.ua.

Семенов Юрій Асафійович – доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу Течій з вільними межами Інституту гідромеханіки НАНУ, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1228-9097>; e-mail: yuriy.a.semenov@gmail.com.

Semenov Yuriy Asaphiiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientist at the Department of Free Boundary Flows, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1228-9097>; e-mail: yuriy.a.semenov@gmail.com.

Савченко Георгій Юрійович – кандидат технічних наук, завідувач лабораторії Сучасної гідромеханіки Інституту гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7177-3228>; e-mail: georgiy.savchenko@yahoo.com.

Savchenko Georgiy Yuriiovych – Candidate of Technical Sciences, Head of the laboratory of Modern Hydro-mechanics at the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 453-20-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7177-3228>; e-mail: georgiy.savchenko@yahoo.com.