

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, В. В. ІВАНОВ, А. С. ШНИЦАР, О. Р. ГИЩАК, А. В. ЗАБОРНИЙ

ЕФЕКТИВНЕ ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ШВИДКООСЦИЛЬОВАНИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Однією з ключових задач у сучасній прикладній математиці, без якої неможливе моделювання та аналіз складних процесів, зокрема в математичній фізиці, цифровій обробці зображень, є чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Часто аналітичне обчислення багатовимірних інтегралів є неможливим через складність самих функцій або області інтегрування, що зумовлює необхідність застосування ефективних чисельних методів. Основна проблема чисельного інтегрування функцій багатьох змінних полягає в зростанні обчислювальних витрат зі збільшенням розмірності області інтегрування – так зване «прокляття розмірності». Це спонукає до пошуку ефективних методів, які дозволяють зберігати баланс між обчислювальною складністю та точністю результатів. Особливий інтерес становлять методи чисельного інтегрування, розроблені з використанням інформаційних операторів, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних в точках, на лініях, площинах тощо. На основі таких операторів будуються економні схеми інтерполяції функцій двох та трьох змінних. Застосування економних схем в чисельному інтегруванні функцій декількох змінних дозволяє з меншою кількістю даних обчислювати багатовимірні інтеграли із заданою наперед точністю порівняно з класичними методами. Метою даної статті є демонстрація використання економних схем інтерполяції для наближеного обчислення подвійних інтегралів, а також двовимірних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду.

Ключові слова: математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, чисельне інтегрування, швидкоосцильовані функції багатьох змінних, кубатурна формула, інтерполяція функцій.

O. P. NECHUIVITER, V. V. IVANOV, A. S. SHNITSAR, O. R. HISHCHAK, A. V. ZABORNYI EFFICIENT NUMERICAL INTEGRATION OF TWO-DIMENSIONAL HIGHLY OSCILLATING FUNCTIONS OF GENERAL TYPE

One of the key tasks in modern applied mathematics, without which modeling and analysis of complex processes is impossible, in particular in mathematical physics and digital image processing, is the numerical integration of functions of many variables. Often, the analytical calculation of multi-variable integrals is impossible due to the complexity of the functions themselves or the integration domain, which necessitates the use of effective numerical methods. The main problem of numerical integration of functions of many variables is the growth of computational costs with increasing dimension of the integration domain - the so-called "curse of dimension". This leads to the search for efficient methods that allow to maintain a balance between computational complexity and accuracy of results. Of particular interest are numerical integration methods developed using information operators that restore intermediate values of quantities based on a given set of known values of a function of many variables at points, on lines, planes, etc. On the basis of such operators, economical schemes for interpolating functions of two and three variables are built. The use of economical schemes in the numerical integration of functions of several variables allows to calculate multidimensional integrals with a predetermined accuracy with less data compared to classical methods. The purpose of this article is to demonstrate the use of economical interpolation schemes for the approximate calculation of double integrals, as well as two-dimensional integrals of highly oscillating functions of general type.

Key words: mathematical modeling of processes, digital image processing, numerical integration, highly oscillating functions of many variables, cubature formula, function interpolation.

Вступ. У сучасній прикладній математиці чисельне інтегрування функцій багатьох змінних є однією з важливих задач. В математичній фізиці подібні задачі виникають під час моделювання теплопровідності, дифузії, розподілу потенціалів, енергій та інших фізичних величин у континуальних середовищах, а в задачах цифрової обробки сигналів та зображень обчислення багатовимірних інтегралів виникає при фільтрації, реконструкції сигналів, спектральному аналізі, обчисленні кореляційних і статистичних характеристик. Важливо зазначити, що при збільшенні розмірності області інтегрування зростає обчислювальна складність, тому актуальним є пошук ефективних методів чисельного інтегрування функцій багатьох змінних. Наразі існують методи чисельного інтегрування, в тому числі методи чисельного інтегрування швидкоосцильованих функцій декількох змінних, які розроблені з використанням інформаційних операторів, що відновлюють проміжні значення функцій за відомими значеннями функції в точках, на лініях, площинах тощо. До таких інформаційних операторів ми відносимо оператори О. М. Литвина, на основі яких створені економні схеми інтерполяції функцій двох та трьох змінних. Застосування економних схем інтерполяції при побудові кубатурних формул наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох та трьох змінних дозволило робити обчислення з меншою кількістю даних порівняно з класичними методами. В даній статті розглядається використання економних схем інтерполяції для наближеного обчислення подвійних інтегралів, а також двовимірних інтегралів від швидкоосцильованих функцій загального виду.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 4] можна ознайомитися з оглядом алгоритмів та методів, які присвячені чисельному інтегруванню швидкоосцильованих функцій багатьох змінних. Більш детально зупинимося на чисельному інтегруванні швидкоосцильованих функцій у випадку, коли інформація про функції задається значеннями функції на лініях, площинах. До таких методів відносяться кубатурні формули, які будуються з використанням різних інформаційних операторів, зокрема операторів О. М. Литвина (операторів інтерлінації, інтерфлетації) [5, 6]. Дослідження щодо обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів інтерлінації функцій з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів було висвітлено в роботах [7 – 15]. Обчислення інтегралів від швидкоосцильованих функцій трьох змінних, зокрема $3D$ – коефіцієнтів Фур'є, з використанням інформаційних операторів детально розглянуто в роботах [16 – 20]. В монографії

ях [21 – 23] наукові результати узагальнено та викладено з точки зору класифікації кубатурних формул за типом завдання інформації про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Кубатурні формули будуються з використанням інформаційних операторів з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. Важливо зазначити, що в своїй побудові інформаційні оператори використовували сліди функцій на площинах та лініях. Зауважимо, що у випадку, коли інформація про функцію задавалася в точках для обчислення $2D$ -, $3D$ - коефіцієнтів Фур'є використовувалися економні схеми інтерполяції, побудовані на основі операторів інтерлінації, інтерфлетації відповідно.

Наближене обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду розглянуто в статтях [24 – 31]. Метою даної роботи є створення алгоритмів обчислення двовимірних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду з використанням економних схем інтерполяції, побудованих на операторах лінійної сплайн-інтерлінації на класі диференційованих функцій.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy, \quad \omega \gg 2\pi \quad (1)$$

побудувати кубатурну формулу з використанням операторів лінійної сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах лінійної сплайн-інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримати оцінку похибки наближення, порівняти кубатурну формулу з класичними алгоритмами обчислень щодо кількості використаних значень.

Побудова операторів для економних схем лінійної сплайн-інтерполяції на основі операторів лінійної сплайн-інтерлінації. Розглянемо $H^{2,1}(M, \tilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq M$, $|f(x, y)| \leq M$, $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq \tilde{M}$.

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} h_{10}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x-x_1}{-\Delta_1}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} & H_{10}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y-y_1}{-\Delta_1}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases} \\ h_{1k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x-x_{k-1}}{\Delta_1}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \frac{x-x_{k+1}}{-\Delta_1}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} & H_{1j}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y-y_{j-1}}{\Delta_1}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \frac{y-y_{j+1}}{-\Delta_1}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1} \end{cases} & k = \overline{1, \ell_1 - 1}, & j = \overline{1, \ell_1 - 1}, \\ h_{1\ell_1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell_1-1}, \\ \frac{x-x_{\ell_1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1} < x < x_{\ell_1}, \\ 0, & x \geq x_{\ell_1}, \end{cases} & H_{1\ell_1}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell_1-1}, \\ \frac{y-y_{\ell_1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1} < y < y_{\ell_1}, \\ 0, & y \geq y_{\ell_1}, \end{cases} \\ & & x_k &= k\Delta_1, \quad y_j = j\Delta_1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}; \\ \tilde{h}_{10}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_0, \\ \frac{x-\tilde{x}_1}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_0 < x < \tilde{x}_1, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_1, \end{cases} & \tilde{H}_{10}(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_0, \\ \frac{y-\tilde{y}_1}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_0 < y < \tilde{y}_1, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_1, \end{cases} \\ \tilde{h}_{1k}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\tilde{k}-1}, \\ \frac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}-1} < x < \tilde{x}_{\tilde{k}}, \\ \frac{x-\tilde{x}_{\tilde{k}+1}}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}} \leq x < \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \end{cases} & \tilde{k} &= \overline{1, \ell_1^2 - 1}, \end{aligned}$$

$$\tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\tilde{j}-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}-1} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}+1}}{-\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2 - 1},$$

$$\tilde{h}1_{1\ell_1^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\ell_1^2-1}, \\ \frac{x - \tilde{x}_{\ell_1^2-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{x}_{\ell_1^2-1} \leq x < \tilde{x}_{\ell_1^2}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\ell_1^2}, \end{cases} \quad \tilde{H}1_{1\ell_1^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\ell_1^2-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\ell_1^2-1}}{\tilde{\Delta}_1}, & \tilde{y}_{\ell_1^2-1} \leq y < \tilde{y}_{\ell_1^2}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\ell_1^2}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\tilde{\Delta}_1, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\tilde{\Delta}_1, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{0, \ell_1^2}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \frac{1}{\ell_1^2}.$$

Допоміжні функції $h2_{10}(x), H2_{10}(y), h2_{1p}(x), p = \overline{1, \ell_2 - 1}, H2_{1s}(y), s = \overline{1, \ell_2 - 1}, h2_{1\ell_2}(x), H2_{1\ell_2}(y), \tilde{h}2_{10}(x), \tilde{H}2_{10}(y), \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x), \tilde{p} = \overline{1, \ell_2^2 - 1}, \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y), \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2 - 1}, \tilde{h}2_{1\ell_2^2}(x), \tilde{H}2_{1\ell_2^2}(y)$ визначаються аналогічно при $\tilde{x}_{\tilde{p}} = \tilde{p}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \tilde{y}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2/2, \tilde{p}, \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2}, \tilde{\Delta}_2 = 1/\ell_2^2$.

Розглянемо оператори

$$Jf(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{1k}(x) + \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{1j}(y) - \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{1k}(x) H1_{1j}(y);$$

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell_1^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h1_{1k}(x) \tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y) + \sum_{j=0}^{\ell_1} \sum_{\tilde{k}=0}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}1_{1\tilde{k}}(x) H1_{1j}(y) -$$

$$- \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{1k}(x) H1_{1j}(y);$$

$$Og(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{1p}(x) + \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{1s}(y) - \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h2_{1p}(x) H2_{1s}(y);$$

$$\tilde{O}g(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2} g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}}) h2_{1p}(x) \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y) + \sum_{s=0}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_s) \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x) H2_{1s}(y) -$$

$$- \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h2_{1p}(x) H2_{1s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{1k}(x), \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{1j}(y);$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}1_{1\tilde{k}}(x), \quad \tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}1_{1\tilde{j}}(y);$$

$$O_1 g(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{1p}(x), \quad O_2 g(x, y) = \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{1s}(y);$$

$$\tilde{O}_1 g(x, y) = \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y) \tilde{h}2_{1\tilde{p}}(x), \quad \tilde{O}_2 g(x, y) = \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2} g(x, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \tilde{H}2_{1\tilde{s}}(y),$$

тоді для операторів-інтерліантів $Jf(x, y), Og(x, y)$ та операторів-інтерполянтів $\tilde{J}f(x, y), \tilde{O}g(x, y)$ справедливі наступні тотожності:

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f, \quad \tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f;$$

$$Og = (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g, \quad \tilde{O}g = (O_1 \tilde{O}_2 + \tilde{O}_1 O_2 - O_1 O_2) g.$$

На рис. 1 представлено загальний вид сітки, в якій будуть обиратися вузли функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$.

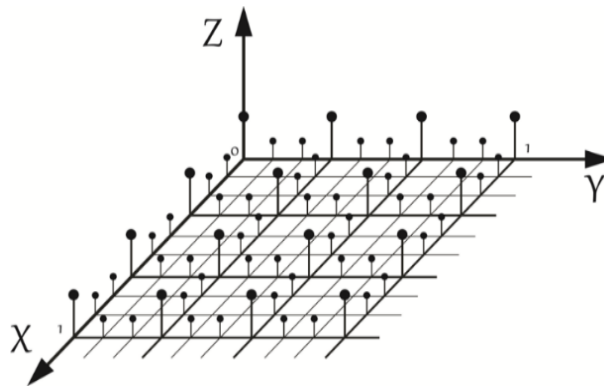


Рис. 1 – Загальний вид сітки в економних схемах лінійної сплайн-інтерполяції для чисельного інтегрування функцій двох змінних.

Кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу з використанням економних схем інтерполяції. Значно менше уваги в дослідженнях приділено питанню чисельного інтегрування подвійних та потрібних інтегралів з використанням інформаційних операторів О. М. Литвина. До таких досліджень можна віднести роботи [32 – 35], де представлено алгоритми побудови кубатурних формул з використанням значень функцій на лініях, а також розглядалося питання наближеного обчислення потрібного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних площинах, лініях.

В даному підрозділі представлена *кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу*, яка використовує економні схеми лінійної сплайн-інтерполяції на основі лінійної сплайн-інтерлінації. Оцінки похибки наближення будуть використані в наступних підрозділах при дослідженні точності обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду на класі диференційованих функцій.

Наступна кубатурна формула

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \quad (2)$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Теорема 1. Нехай $f(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I(\omega), \Phi(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2}.$$

Доведення.

Розглянемо додаткові функції, які будуть використані при доведенні теореми для представлення похибки наближення $f(x, y)$ оператором-інтерлінантом $Jf(x, y)$ через $f^{(1,1)}(x, y)$:

$$K_{1k}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x_k \leq \xi < x, \\ \frac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k}, & x < \xi \leq x_{k+1}, \end{cases} \quad K_{2j}(y, \eta) = \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j}, & y_j \leq \eta < y, \\ \frac{y_j - y}{y_{j+1} - y_j}, & y < \eta \leq y_{j+1}, \end{cases}$$

$$\tilde{K}_{1\tilde{k}}(x, \tilde{\xi}) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - \tilde{x}_{\tilde{k}}}, & \tilde{x}_{\tilde{k}} \leq \tilde{\xi} < x, \\ \frac{\tilde{x}_{\tilde{k}} - x}{\tilde{x}_{\tilde{k}+1} - \tilde{x}_{\tilde{k}}}, & x < \tilde{\xi} \leq \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \end{cases} \quad \tilde{K}_{2\tilde{j}}(y, \tilde{\eta}) = \begin{cases} \frac{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - y}{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - \tilde{y}_{\tilde{j}}}, & \tilde{y}_{\tilde{j}} \leq \tilde{\eta} < y, \\ \frac{\tilde{y}_{\tilde{j}} - y}{\tilde{y}_{\tilde{j}+1} - \tilde{y}_{\tilde{j}}}, & y < \tilde{\eta} \leq \tilde{y}_{\tilde{j}+1}. \end{cases}$$

Знайдемо оцінку $\rho(I(\omega), \Phi(\omega))$:

$$\rho(I(\omega), \Phi(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) dx dy \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y) - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(1,1)}(\xi, \eta) K_{1k}(x, \xi) K_{2j}(y, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy + \\
&+ \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+1}} \left| f^{(1,0)}(\tilde{\xi}, y_j) \right| \left| \tilde{K}_{1\tilde{k}}(x, \tilde{\xi}) \right| d\tilde{\xi} dx \int_{y_j}^{y_{j+1}} dy + \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}} \left| f^{(0,1)}(x_k, \tilde{\eta}) \right| \left| \tilde{K}_{2\tilde{j}}(y, \tilde{\eta}) \right| d\tilde{\eta} dy.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&\int_{x_k}^{x_{k+1}} |K_{1k}(x, \xi)| d\xi = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^x d\xi + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \int_x^{x_{k+1}} d\xi = \\
&= \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (x_{k+1} - x) = \frac{2(x_{k+1} - x)(x - x_k)}{\Delta_1}, \\
&\int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |K_{1k}(x, \xi)| d\xi dx = \frac{2}{\Delta_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k) dx = \frac{2}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1^3}{6} = \frac{\Delta_1^2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \rho(I(\omega), \Phi(\omega)) \leq \tilde{M} \ell_1 \ell_1 \frac{\Delta_1^2}{3} \frac{\Delta_1^2}{3} + 2M \ell_1 \Delta_1 \ell_1^2 \cdot \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} = \frac{\tilde{M}}{9\ell_1^2} + \frac{2M}{3\ell_1^2} = \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2}.$$

Теорема 1 доведена.

Економні схеми лінійної сплайн-інтерполяції в наближеному обчисленні подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду. Наступна кубатурна формула

$$\tilde{\Phi}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \quad (4)$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу (1).

Щоб отримати оцінку похибки наближення інтегралу (1) за формулою (4) на класі диференційованих функцій, отримаємо спочатку оцінку похибки наближення інтегралу

$$\tilde{I}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (5)$$

за кубатурною формулою:

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy. \quad (6)$$

Теорема 2. Нехай $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \min \left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Розглянемо додаткові функції, які будуть використані при доведенні теореми для представлення похибки наближення $g(x, y)$ оператором-інтерліантом $Og(x, y)$ через $g^{(1,1)}(x, y)$:

$$G_{1p}(x, t) = \begin{cases} \frac{x_{p+1} - x}{x_{p+1} - x_p}, & x_p \leq t < x, \\ \frac{x_p - x}{x_{p+1} - x_p}, & x < t \leq x_{p+1}, \end{cases} \quad G_{2,s}(y, \tau) = \begin{cases} \frac{y_{s+1} - y}{y_{s+1} - y_s}, & y_s \leq \tau < y, \\ \frac{y_s - y}{y_{s+1} - y_s}, & y < \tau \leq y_{s+1}. \end{cases}$$

$$\tilde{G}_{1p}(x, \tilde{t}) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - x}{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - \tilde{x}_{\tilde{p}}}, & \tilde{x}_{\tilde{p}} \leq t < x, \\ \frac{\tilde{x}_{\tilde{p}} - x}{\tilde{x}_{\tilde{p}+1} - \tilde{x}_{\tilde{p}}}, & x < t \leq \tilde{x}_{\tilde{p}+1}, \end{cases} \quad \tilde{G}_{2,\tilde{s}}(y, \tau) = \begin{cases} \frac{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - y}{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - \tilde{y}_{\tilde{s}}}, & \tilde{y}_{\tilde{s}} \leq \tau < y, \\ \frac{\tilde{y}_{\tilde{s}} - y}{\tilde{y}_{\tilde{s}+1} - \tilde{y}_{\tilde{s}}}, & y < \tau \leq \tilde{y}_{\tilde{s}+1}. \end{cases}$$

Знайдемо оцінку $\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega))$, використовуючи результати теореми 1:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} dx dy \right| \leq \\ &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega O g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} dx dy \right| \leq \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega O g(x,y)} dx dy \right| + \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega g(x,y)} - e^{i\omega O g(x,y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega O g(x,y)} - e^{i\omega \tilde{O}g(x,y)} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega g(x,y) - \omega O g(x,y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x,y) + O g(x,y))} \right| dx dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega O g(x,y) - \omega \tilde{O}g(x,y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O g(x,y) + \tilde{O}g(x,y))} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega g(x,y) - \omega O g(x,y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega O g(x,y) - \omega \tilde{O}g(x,y)}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x,y) - O g(x,y)|}{2} \right) dx dy + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |(O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x,y) - (O_1 \tilde{O}_2 + O_2 \tilde{O}_1 - O_1 O_2) g(x,y)|}{2} \right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x,y) - O g(x,y)|}{2} \right) dx dy + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega (O_1 - O_1 \tilde{O}_2) g(x,y) + \omega (O_2 - O_2 \tilde{O}_1) g(x,y)}{2} \right) dx dy \leq \\ &\leq 2 \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \left| \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} g^{(1,1)}(t, \tau) G_{1p}(x, t) G_{2s}(y, \tau) dt d\eta \right| \right) dx dy + \\ &+ 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+1}} \left| g^{(0,1)}(x_p, y) \right| \left| \tilde{G}_{2\tilde{s}}(y, \tilde{\tau}) \right| d\tilde{\tau} dy + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{2} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \left| g^{(1,0)}(\tilde{t}, y_s) \right| \left| \tilde{G}_{1\tilde{p}}(x, \tilde{t}) \right| d\tilde{t} dx \int_{y_s}^{y_{s+1}} dy \right) \leq \\ &\leq 2 \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\tilde{M} \omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{3} \frac{\Delta_2^2}{3} \right) + 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M \omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{2 \tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) = \\ &= \min \left(2; \frac{\tilde{M} \omega}{9 \ell_2^2} \right) + \min \left(2; \frac{2 M \omega}{3 \ell_2^2} \right) \leq \min \left(4; \frac{\omega (\tilde{M} + 6 M)}{9 \ell_2^2} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\begin{aligned} \rho\left(\tilde{I}^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{g}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega))$, використовуючи результати теореми 1 та 2:

$$\begin{aligned} \rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{g}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy \right| + \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O(x, y)} dx dy \right| + \\ &\quad + \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega O(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| e^{i\omega \tilde{O}(x, y)} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| |e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega O(x, y)}| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| |e^{i\omega O(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}(x, y)}| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y) + \tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + O(x, y))} \right| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega O(x, y) - \omega \tilde{O}(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O(x, y) + \tilde{O}(x, y))} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x, y)| dx dy + \\ &\quad + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O(x, y)}{2} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega O(x, y) - \omega \tilde{O}(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |(J_1 + J_2 - J_1 J_2) f(x, y) - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f(x, y)| dx dy + \\ &\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega |g(x, y) - (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x, y)|}{2}\right) dx dy + \\ &\quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega |(O_1 + O_2 - O_1 O_2) g(x, y) - (O_1 \tilde{O}_2 + O_2 \tilde{O}_1 - O_1 O_2) g(x, y)|}{2}\right) dx dy \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 6M}{9\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(4; \frac{\omega(\tilde{M} + 6M)}{9\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

Теорема 3 доведена.

Порівняння кубатурних формул, побудованих з використанням економних схем інтерполяції, з класичними. Розглянемо наступну кубатурну формулу

$$\Phi_{cl}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \quad (7)$$

для наближеного обчислення інтегралу (3).

Теорема 4. Нехай $f(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I(\omega), \Phi_{cl}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{2M}{3\ell_1^2}.$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(I(\omega), \Phi(\omega))$:

$$\begin{aligned} \rho(I(\omega), \Phi_{cl}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 f(x, y) + \tilde{J}_1 f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 f(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |\tilde{J}_1 f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_k}^{\tilde{x}_{k+1}} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} |f^{(1,0)}(\tilde{\xi}, y)| |\tilde{K}_{1k}(x, \tilde{\xi})| d\tilde{\xi} dx \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} dy + \sum_{k=0}^{\ell_1^2-1} \sum_{j=0}^{\ell_1^2-1} \int_{\tilde{x}_k}^{\tilde{x}_{k+1}} dx \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} \int_{\tilde{y}_j}^{\tilde{y}_{j+1}} |f^{(0,1)}(\tilde{x}_k, \tilde{\eta})| |\tilde{K}_{2j}(y, \tilde{\eta})| d\tilde{\eta} dy \leq \\ &\leq M \ell_1^2 \ell_1^2 \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} \tilde{\Delta}_1 + M \ell_1^2 \ell_1^2 \frac{\tilde{\Delta}_1^2}{3} \tilde{\Delta}_1 = \frac{2M}{3\ell_1^2}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доведена.

Використовуючи результати теореми 4, маємо оцінку похибки наближення інтегралу (5) за кубатурною формулою

$$\tilde{\Phi}_{cl}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy. \quad (8)$$

Теорема 5. Нехай $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).$$

Доведення.

Знайдемо оцінку $\rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}(\omega))$, використовуючи результати теореми 1:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{I}(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} dx dy \right| + \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)}| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |e^{i\omega \tilde{O}_1 g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}| dx dy \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + \tilde{O}_1 g(x, y))} \right| dx dy + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \left| 2i \sin \frac{\omega \tilde{O}_1 g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(\tilde{O}_1 g(x, y) + \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y))} \right| dx dy \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 g(x, y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left| \sin \frac{\omega \tilde{O}_1 g(x, y) - \omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y) - \tilde{O}_1 g(x, y)|}{2} \right) dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |\tilde{O}_1 g(x, y) - \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)|}{2} \right) dx dy \leq \\
&\leq 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \left| g^{(0,1)}(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y) \right| \left| \tilde{G}_{2_{\tilde{s}}}(y, \tilde{\tau}) \right| d\tilde{\tau} dy \right) + \\
&+ 2 \min \left(\sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{s}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{s=0}^{\ell_2^2-1} \sum_{\tilde{p}=0}^{\ell_2^2-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+1}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} \left| g^{(1,0)}(\tilde{t}, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \right| \left| \tilde{G}_{1_{\tilde{p}}}(\tilde{x}, \tilde{t}) \right| d\tilde{t} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+1}} dy \right) \leq \\
&\leq 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) + 2 \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\tilde{\Delta}_2^2}{3} \right) \leq \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 5 доведена.

Використовуючи результати теореми 4 та 5, отримаємо оцінку похибки наближення інтегралу (1) за кубатурною формулою

$$\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy. \quad (9)$$

Теорема 6. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \frac{2M}{3\ell_1^2} + \tilde{M} \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega))$:

$$\begin{aligned}
\rho(I^2(\omega), \tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| + \\
&+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} dx dy \right| \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| \left| e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y)| dx dy + \tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O}_1 \tilde{O}_2 g(x, y)} \right| dx dy \leq \frac{2M}{3\ell_1^2} + \tilde{M} \min \left(4; \frac{2\omega M}{3\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 6 доведена.

Теорема 7. Нехай $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, тоді для досягнення похибки $O(\ell^{-2})$ кубатурною формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ використовується не $2(\ell^2 + 1)(\ell^2 + 1) = O(\ell^4)$ значень функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$, як в класичній формулі $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$, а $2(\ell^2 + 1)(\ell + 1) + 2(\ell^2 + 1)(\ell + 1) - 2(\ell + 1)(\ell + 1) = O(\ell^3)$.

Доведення.

Твердження теореми випливає з безпосереднього підрахунку кількості значень функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ в формулах $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ та $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$.

Теорема 7 доведена.

Перспективи подальших досліджень. Наступним кроком в дослідженні є проведення тестування кубатурних формул $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ та $\tilde{\Phi}_{cl}^2(\omega)$ для виявлення їх потенційної спроможності на різних класах функцій. Важливо отримати підтвердження теоретичних результатів щодо знаходження оцінок похибок наближення та кількості значень, використаних формулами для досягнення заданої точності.

Висновки. У роботі розглянуто одну з актуальних задач сучасної прикладної математики – чисельне інтегрування функцій багатьох змінних. Основною проблемою при обчисленні багатовимірних інтегралів є стрімке зростання обчислювальних витрат зі збільшенням кількості змінних. Уникнути проблеми дозволяють економні схеми інтерполяції, побудовані на основі інформаційних операторів, запропонованих доктором фізико-математичних наук, професором О. М. Литвиним. Економні схеми інтерполяції застосовані до наближеного обчислення подвійних інтегралів. Показано, що такі схеми у чисельному інтегруванні забезпечують суттєве зменшення кількості необхідних вузлів для досягнення заданої точності, порівняно з класичними методами з використанням білінійної інтерполяції. Особливу увагу приділено інтегруванню двовимірних швидкоосцилюваних функцій загального виду. В статті запропоновано нову кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюваних функцій загального виду. При побудові кубатурної формули використано оператори лінійної сплайн-інтерполяції, побудовані на основі оператора лінійної сплайн-інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюваної функції загального виду. Запропонована кубатурна формула має високу точність наближення, є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності.

Список літератури

1. Iserles A. In the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms : Tech. Reports Numerical Analysis. – DAMPT : University of Cambridge, NA2003/05. – 26 p.
2. Huybrechs D., Olver S. Highly oscillatory quadrature. Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications. – Cambridge : Cambridge University Press, 2008.
3. Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators : Tech. Reports Numerical Analysis. – DAMPT : University of Cambridge, NA2003/09. – 22 p.
4. Milovanovic G. V., Stancic P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions // Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions. – 2014. – pp. 613 – 649. DOI: 10.1007/978-1-4939-0259-3_23.
5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms // Springer Optimization and Its Applications. – 2021. – vol. 188. – pp. 75 – 176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
6. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interflation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms // Springer Optimization and Its Applications. – 2021. – vol. 188, pp. 177 – 251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
7. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
8. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 13 – 17.
9. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
10. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – pp. 90 – 96.
11. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління : зб. наук. пр. – Х., 2010. – № 926. – С. 153 – 160.
12. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації // Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18 – 21 травня 2010 р., Харків. – Х., 2010. – Ч. 2. – С. 211 – 213.
13. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
14. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2011. – № 16. – С. 207 – 214.
15. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
16. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – Том 1. – № 4. – С. 28 – 40.
17. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflation // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 44. – Is. 3. – 2012. – pp. 45 – 56.
18. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є на класі диференційованих функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
19. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційованих функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
20. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
21. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
22. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
23. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих

- функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
24. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталі інтерфлетатії // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.
 25. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення 2D інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталі інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 124 – 131.
 26. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Оптиміальне інтегрування двовимірних швидкоосцилюючих функцій загального вигляду // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2017. – Вип. 15. – С. 139 – 144.
 27. Mezhuhev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // U.P.B. Sci. Bull., Series A. – 2018. – Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.
 28. Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Mezhuhev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 365 – 373. DOI: 10.1007/978-3-319-97885-7_36.
 29. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
 30. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Оптиміальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 68 – 72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.
 31. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2023. – Вип. 37. – С. 37 – 41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.37.037.
 32. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
 33. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies // Information Technologies and Learning Tools. – 2021. – no. 82 (2). – pp. 282 – 296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
 34. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 1031 (1). – 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.
 35. Нечуйвітер О. П., Іванов С. С., Ковальчук К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1. – С. 82 – 91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

References (transliterated)

1. Iserles A. *In the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms* : Tech. Reports Numerical Analysis. DAMPT, University of Cambridge, NA2003/05. 26 p.
2. Huybrechs D., Olver S. *Highly oscillatory quadrature. Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
3. Iserles A. *On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators* : Tech. Reports Numerical Analysis. DAMPT, University of Cambridge, NA2003/09. – 22 p.
4. Milovanovic G. V., Stancic P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions. *Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions*. 2014, pp. 613–649. DOI: 10.1007/978-1-4939-0259-3_23.
5. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer Optimization and Its Applications*. 2021, vol. 188, pp. 75–176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
6. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interflattation of Functions. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. *Springer Optimization and Its Applications*. 2021, vol. 188, pp. 177–251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
8. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za porядkom tochnosti kubaturna formulu obchyslennya podviynnykh integraliv vid shvydkoost-syluuchykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [Optimal cubature formula for calculating double integrals from rapidly oscillating functions and spline interlineation]. *Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2008, no. 2, pp. 13–17.
9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating 2D Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodovnavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.
10. Lytvyn O. N., Nechuiviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk. 2010, pp. 90–96.
11. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturna formulu dlya obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [The cubature formula for calculating 2D – Fourier coefficients using the interlineation of functions]. *Visnyk KhNU Im. V. N. Karazina. Ser. : Matematychnye modelyuvannya. Informatsiyini tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* : zb. nauk. pr. [Bulletin of the Karazin Charkiv National University. Series : Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems : Collection of scientific papers]. Kharkiv., 2010, no. 926, pp. 153–160.
12. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'nyy za porядkom tochnosti metod obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e za dopomogoyu interlinatsiyi [The optimal method of calculating 2D – Fourier coefficients using interlineation]. *Komp'yuterne modelyuvannya v naukotnykh tekhnologiyakh* : pr. nauk-tehn. konf. z mizhnarodnoyu uchastyu, 18–21 travnya 2010r. [Computer modeling in science-intensive technologies: Practical Scientific and Technical Conference with international participation, May 18–21]. Kharkiv., 2010, no. 2, pp. 211–213.
13. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. 2D – koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [2D – Fourier coefficients on the class of differential functions and spline-interlineation]. *Tavriys'kyi visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer

- Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.
14. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Splayn-interlinatsiya ta optymal'ni po tochnosti kubaturni formuly obchyslennya 2D – koefitsientiv Fur'e odnogo klasu funktsiy [Spline interlineation and optimally accurate cubature formulas for computing 2D Fourier coefficients for a class of functions]. *Visnyk Kharkivskogo natsional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya : Matematychno modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2011, no. 16, pp. 207–214.
 15. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from rapidly varying functions using Lagrangian polynomial interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.
 16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi Geldera z vykorystanniam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D Fourier coefficients on the Hölder class using piecewise constant spline interpolation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, vol. 1, no. 4, pp. 28–40.
 17. Lytvyn O. N., Nechuiviter O. P. 3D Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interpolation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012, vol. 44, is. 3, pp. 45–56.
 18. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya 3D – koefitsientiv Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of 3D – Fourier coefficients on a class of differential functions using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrainy. Matematyka. Pryrodosnavstvo. Tekhnichny nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.
 19. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiy tryekh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of the Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differential functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.
 20. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
 21. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 1. Alorytmy : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 1. Algorithms: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kuiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 447 p.
 22. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 2. Zastosuvannya : monografiya. In-t kibernetiky im. V. M. Glushkova NAN Ukrainy* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 2. Applications: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 348 p.
 23. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'ni alorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvanniam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
 24. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interfletatsiyi [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivskyy politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychno modeluvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.
 25. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Obchyslennya 2D integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystanniam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [Calculation of 2D integrals from trigonometric functions using piecewise constant interlineation]. *Matematychno ta kompiuterni modelyuvannya. Seriya : Fiziko-matematychni nauky : zb. nauk. prats.* [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences : coll. of science works]. Kam'yanets'-Podil's'kiy, Kam'yanets'-Podil's'kyy natsional'nyy universytet im. Ivana Ogiienka Publ., 2016, no. 13, pp. 124 – 131.
 26. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Optymal'ne integruvannya dvovymirnykh shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vyglyadu [Optimal integration of two-dimensional rapidly oscillating generic functions]. *Matematychno ta kompiuterni modelyuvannya* [Mathematical and computer modeling]. 2017, vol. 15, pp. 139–144.
 27. Mezhuiev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y., Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.
 28. Shekhovtsov A. V. Vplyv tverdykh granits ta v'yazkosti seredovyshha na vnesok inertsinyoi ta vykhrovoyi komponent normal'noyi syly plastyny, shho obtaet'sya. Chastyna 1 [Impact of solid boundaries and viscosity of the medium on the contribution of the inertial and vortex components of the normal force of a rotating plate. Part 1]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychno modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2023, no. 1, pp. 212–217. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31.
 29. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020, vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.
 30. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Optymal'ne integruvannya shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Optimal integration of rapidly oscillating functions of the general form]. *Fiziko-matematychno modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies]. 2021, no. 33, pp. 68–72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.
 31. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vydu [Approximate computation of double integrals of rapidly oscillating generic functions]. *Fiziko-matematychno modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and mathematical modeling and information technologies]. 2023, vol. 37, pp. 37–41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.37.037.
 32. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystanniam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using Lagrangian polynomial interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.
 33. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021, vol. 82, no. 2 (2021), pp. 282–296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.
 34. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1031 (1), 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.

35. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Novi informatsiyni operatory v zadachakh chysel'nogo integruvannya funktsiyi trokh zminnykh [New information operators in problems of numerical integration of functions of three variables]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 82–91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

Надійшла (received) 03.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2775-8471>; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Іванов Владислав Вікторович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Ivanov Vladyslav Viktorovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 707-40-90; ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5379-9370>; e-mail: vladyslav.ivanov@karazin.ua.

Шніцар Андрій Степанович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Shnitsar Andriy Stepanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 944-99-76; ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-4834-6971>; e-mail: andriy.shnitsar@karazin.ua.

Гіщак Остап Романович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Hishchak Ostap Romanovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (097) 875-98-89; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9362-3647>; e-mail: ostap.hishchak@karazin.ua.

Заборний Антон Віталійович – аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (067) 759-93-27; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.zaborny@karazin.ua.

Zaborny Anton Vitaliiovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (067) 759-93-27; <https://orcid.org/0009-0006-7026-8215>; e-mail: anton.zaborny@karazin.ua.