

В. В. КУЗЬМЕНКО, Я. П. ТРОЦЕНКО**МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ У ПЛОСКОМУ ХВИЛЕВОДІ З ВИГИНАМИ**

У роботі досліджено поширення звукових хвиль у плоскому акустичному хвилеводі, що містить два вигини. Побудовано математичну модель задачі, що дозволяє проаналізувати особливості проходження акустичної хвилі крізь геометричну неоднорідність хвилеводу залежно від його геометричних та фізичних параметрів. Для моделювання акустичного поля застосовано метод часткових областей. Обчислено енергетичні коефіцієнти проникнення хвилі крізь зони неоднорідності для широкого спектру хвильових розмірів та кутів вигинів хвилеводу. Показано, що наявність вигинів призводить до істотної зміни спектральних характеристик. При хвильових розмірах, кратних половині довжини хвилі, відбувається різке зниження коефіцієнта проникнення, що пов'язано зі збудженням вищих нормальних мод у хвилеводі. У випадку, коли кут вигину перевищує 90° , амплітудно-частотна характеристика набуває складної структури з чергуванням зон зростання та спадання коефіцієнта проникнення, що вказує на наявність резонансних явищ у кутовій області хвилеводу. Така область функціонує як резонансна камера, в якій може відбуватися ефективне перетворення енергії між різними модами. Встановлено, що при збільшенні кута вигину від 0° до 90° коефіцієнт проникнення поступово зменшується, однак при подальшому збільшенні кута відзначаються коливання цього коефіцієнта. Проаналізовано зміну домінуючої моди залежно від хвильового розміру та кутів вигину, а також показано можливість ефективного перетворення енергії між нижчими та вищими модами у певних точках частотного діапазону, що має потенційне практичне застосування в задачах акустичного фільтрування, управління напрямком звукової енергії та створення хвильових резонаторів. Отримані результати верифіковані шляхом контролю виконання закону збереження енергії, умов спряження підобластей та крайових умов на поверхні хвилеводу.

Ключові слова: акустична хвиля, хвилевід, хвильове число, звукове поле, однорідні моди, неоднорідні моди, амплітудно-частотна характеристика, енергетичні коефіцієнти, метод часткових областей.

V. V. KUZMENKO, YA. P. TROTSSENKO**MODELING OF ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN A PLANAR WAVEGUIDE WITH BENDS**

The study investigates the propagation of sound waves in a planar acoustic waveguide containing two bends. A mathematical model of the problem was developed, allowing for the analysis of wave transmission through the geometric inhomogeneity of the waveguide depending on its geometric and physical parameters. The method of partial domains was employed to simulate the acoustic field. Energy transmission coefficients of the wave through the inhomogeneous regions were calculated for a wide range of waveguide dimensions and bend angles. It was shown that the presence of bends leads to significant changes in the spectral characteristics. For waveguide sizes that are multiples of half the wavelength, a sharp decrease in the transmission coefficient is observed, which is associated with the excitation of higher-order normal modes in the waveguide. In cases where the bend angle exceeds 90° , the amplitude-frequency response acquires a complex structure with alternating zones of increasing and decreasing transmission coefficient, indicating the presence of resonant phenomena in the corner region of the waveguide. This region functions as a resonant chamber where efficient energy conversion between different modes may occur. It was established that as the bend angle increases from 0° to 90° , the transmission coefficient gradually decreases, but further angle increases lead to oscillations in this coefficient. The change in the dominant mode depending on the waveguide size and bend angles was analyzed, and the possibility of efficient energy conversion between lower and higher modes at certain points in the frequency range was demonstrated, which has potential practical applications in acoustic filtering, sound energy direction control, and the design of waveguide resonators. The obtained results were verified by checking the fulfillment of the energy conservation law, the continuity conditions between subdomains, and the boundary conditions on the waveguide surface.

Key words: acoustic wave, waveguide, wave number, sound field, homogeneous modes, inhomogeneous modes, amplitude-frequency response, energy coefficients, partial domain method.

Вступ. Сучасна акустика є однією з важливих галузей фізики, що вивчає закономірності генерації, поширення, перетворення та реєстрації звукових хвиль у різних середовищах. Її прикладні аспекти охоплюють широкий спектр застосувань – від ультразвукової діагностики в медицині до проектування акустичних систем у будівництві та інженерії, а також до контролю шуму й покращення характеристик передачі сигналу в технічних пристроях [1, 2]. Окреме значення в цих застосуваннях мають *хвилеводи* – структури, які спрямовують і контролюють поширення хвиль, зокрема акустичних. У багатьох практичних задачах хвилеводи мають складну геометрію, включаючи вигини, розширення, звуження або кути, що суттєво впливає на характер поширення хвиль [3].

Дослідження поширення акустичних хвиль у хвилеводах із вигинами є актуальним завданням, оскільки такі неоднорідні структури зустрічаються в багатьох фізичних і технічних системах. Розуміння закономірностей проходження звуку через такі області дозволяє підвищити ефективність функціонування акустичних пристроїв, зокрема шляхом оптимізації геометричних параметрів хвилеводів. У даній роботі розглядається задача моделювання поширення звукової хвилі у плоскому хвилеводі з двома вигинами з використанням методу часткових областей – ефективного підходу до аналізу хвильових процесів у складних геометріях [4].

Суть *методу часткових областей* полягає в розбитті всієї області існування звукового поля на підобласті, в кожній з яких можливо аналітично подати розв'язок *рівняння Гельмгольца* у вигляді ряду за ортогональними функціями. Подальше поєднання часткових областей із забезпеченням відповідних умов спряження дозволяє побудувати єдиний розв'язок задачі. Цей підхід, зазвичай, призводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати *методом редукції*. Водночас у разі застосування декількох систем координат у різних підобластях чисельна реалізація методу ускладнюється [5].

Аналіз останніх досліджень. Питання реалізації *методу часткових областей* при моделюванні поширення звуку в хвильоводах активно досліджуються у сучасній науковій літературі. У роботі [6] було проаналізовано два підходи до спряження хвильових полів у часткових областях: спряження в сенсі середньоквадратичного наближення та поточкове спряження. Дослідження [7] розширює ідеї комбінованого застосування обох варіантів спряження на прикладі розв'язання задачі про випромінювання плоского поршня у хвильоводі скінченної довжини з клиноподібною формою. Аналіз результатів показує, що використання середньоквадратичного наближення дає змогу досягти більш точного опису хвильових полів, тоді як поточкове спряження спрощує реалізацію розрахунків.

У роботі [8] розглянуто можливість адаптації методу часткових областей до тривимірної задачі просторового формування акустичного поля, зокрема, у випадку використання рупора фіксованої довжини в ідеальному пружному середовищі. Цей рупор застосовується в медичному приладі – широкосмуговому вушному ехоспектрометрі для об'єктивної діагностики слуху. Робота демонструє ефективність розширення методу часткових областей для складних просторових задач з практичними застосуваннями в біомедичній інженерії.

Загалом, проведені дослідження підтверджують високий потенціал методу часткових областей як інструмента для моделювання хвильових процесів у неоднорідних структурах та хвильоводах складної геометрії. Подальші дослідження у цьому напрямі дозволяють підвищити точність чисельного моделювання та розширити сферу застосування акустичних хвильоводів у сучасних технологіях.

Постановка задачі. Розглядається задача про поширення акустичних хвиль у нескінченному плоскопаралельному хвильоводі з двома вигинами (рис. 1). Хвильовід заповнено ідеальною стисливою рідиною з густиною ρ та швидкістю звуку c , поверхні вважаються абсолютно жорсткими. Характерними розмірами хвильоводу є величини h_1, h_2, h_3 та l_3 . Величини вигинів визначаються кутами $\alpha \in [0, 180^\circ)$ та $\beta \in [0, 360^\circ - \alpha]$. Втрати звукової енергії у середовищі відсутні.

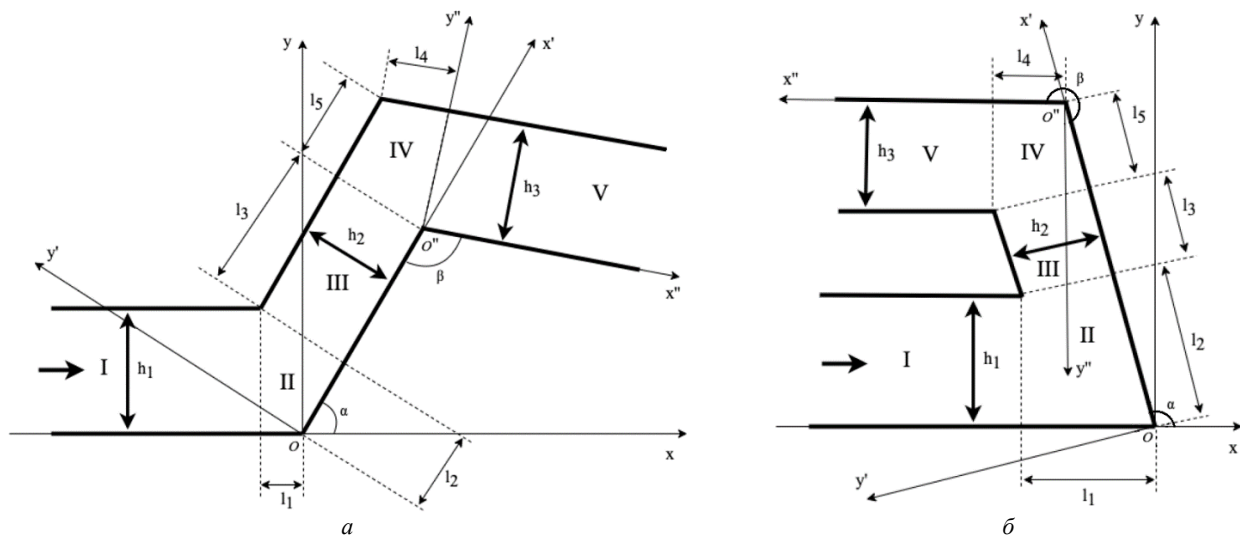


Рис. 1 – Схема хвильоводу з вигинами: $a - \alpha \in (0, 90^\circ), \beta \in (0, 180^\circ)$; $b - \alpha \in (90^\circ, 180^\circ), \beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$.

Нехай ліворуч у хвильоводі поширюється гармонічна плоска хвиля з одиничною амплітудою тиску

$$p_0 = \exp(ik(x + l_1)), \quad k = 2\pi / \lambda,$$

де k – хвильове число; λ – довжина хвилі. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$, де ω – частота хвилі, не враховуємо для скорочення подальших викладок.

Математична модель. Дослідження акустичного поля у хвильоводі проводилося на основі методу часткових областей. Характеристики гармонічного хвильового поля всередині хвильоводу визначаються через функцію акустичного тиску p , яка задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

Оскільки поверхні S хвильоводу акустично жорсткі, то на них має виконуватись рівність нулю нормальної швидкості коливань:

$$\nu_n|_S = 0.$$

Загальну область існування акустичного поля природно розділити на п'ять областей, де області I та V – це напівнескінченні хвильоводи з характерними розмірами h_1 та h_3 відповідно, область III – скінченний хвильовід з

розмірами h_2 та l_3 , області II і IV – перехідні. Вводяться три декартові системи координат xOy , $x'Oy'$ та $x''O''y''$ так, щоб осі абсцис збігалися із поверхнями областей I, III та V відповідно. Надалі області II та IV вважаються чотирикутними. Для кута $\alpha < 90^\circ$ це справедливо при $\cos \alpha < h_1/h_2$, якщо $h_1 < h_2$, та $\cos \alpha < h_2/h_1$, якщо $h_1 > h_2$. Аналогічно для кута $90^\circ < \beta < 270^\circ$ мають виконуватись умови $\cos \beta > -h_3/h_2$, якщо $h_3 < h_2$, та $\cos \beta > -h_2/h_3$, якщо $h_3 > h_2$.

Згідно з методом часткових областей, для подальшого аналізу хвильоводу потрібно представити поля тиску для кожної з областей. Внаслідок взаємодії плоскої хвилі з вигином утворюється відбита хвиля та хвиля, що проходить у область II. Тому тиск в області I можна записати в системі координат xOy як суму падаючої хвилі та відбитої, яка представляється як суперпозиція нормальних мод області I:

$$p_I = \exp(ik(x+l_1)) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right) \exp(-i\eta_n(x+l_1)),$$

де

$$\eta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_1)^2}, & k \geq (\pi n/h_1); \\ i\sqrt{(\pi n/h_1)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_1). \end{cases}$$

Вираз для функції p_I є загальним розв'язком рівняння Гельмгольца для області I.

Аналогічно запишемо поле тиску в області V в системі координат $x''O''y''$, що визначає прониклу хвилю крізь другий вигин:

$$p_V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_3}\right) \exp(i\gamma_n x''),$$

де

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_3)^2}, & k \geq (\pi n/h_3); \\ i\sqrt{(\pi n/h_3)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_3). \end{cases}$$

В області III функцію тиску можна представити в системі координат $x'Oy'$ як суперпозицію відбитих хвиль від першого та другого вигину:

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x'-l_2)) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(-i\xi_n(x'-l_2-l_3)),$$

де

$$\xi_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/h_2)^2}, & k \geq (\pi n/h_2); \\ i\sqrt{(\pi n/h_2)^2 - k^2}, & k < (\pi n/h_2). \end{cases}$$

Побудуємо розв'язок для області II:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h_1}\right) \exp(i\eta_n(x+l_1)) + \sum_{n=0}^{\infty} L_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(-i\xi_n(x'-l_2)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l_1}\right) \exp(i\varsigma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi x'}{l_2}\right) \exp(i\delta_n y'),$$

де

$$\varsigma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/l_1)^2}, & k \geq (\pi n/l_1); \\ i\sqrt{(\pi n/l_1)^2 - k^2}, & k < (\pi n/l_1); \end{cases} \quad \delta_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n/l_2)^2}, & k \geq (\pi n/l_2); \\ i\sqrt{(\pi n/l_2)^2 - k^2}, & k < (\pi n/l_2). \end{cases}$$

Розв'язок для області II є загальним. Він складається з чотирьох рядів Фур'є з довільними коефіцієнтами, що дає змогу виконати умови спряження полів на межах із суміжними областями I та III, а також крайові умови на акустично жорстких межах області завдяки повноті відповідних систем функцій. Напрямок біжучих хвиль обирається від поверхонь всередину області.

Аналогічно побудуємо розв'язок для області IV, враховуючи, що напрямок біжучих хвиль у третьому та четвертому доданках залежить від значення кута β . При $\beta \in (0, 180^\circ)$ маємо (рис. 1, а):

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{n\pi y''}{h_3}\right) \exp(-i\gamma_n x'') + \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x'-l_2-l_3)) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi(x' - l_2 - l_3)}{l_5}\right) \exp(-i\omega_n(y' - h_2)) + \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos\left(\frac{n\pi x''}{l_4}\right) \exp(i\varphi_n(y'' - h_3)),$$

де

$$\omega_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n / l_5)^2}, & k \geq (\pi n / l_5); \\ i\sqrt{(\pi n / l_5)^2 - k^2}, & k < (\pi n / l_5); \end{cases} \quad \varphi_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (\pi n / l_4)^2}, & k \geq (\pi n / l_4); \\ i\sqrt{(\pi n / l_4)^2 - k^2}, & k < (\pi n / l_4). \end{cases}$$

При $\beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$ отримаємо (рис. 1, б):

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{n\pi y''}{h_3}\right) \exp(-i\gamma_n x'') + \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_2}\right) \exp(i\xi_n(x' - l_2 - l_3)) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi(x' - l_2 - l_3)}{l_5}\right) \exp(i\omega_n y') + \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos\left(\frac{n\pi x''}{l_4}\right) \exp(i\varphi_n y'').$$

Умови спряження на межах областей I, II та II, III і крайові умови на жорстких поверхнях області II матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ \frac{\partial p_I}{\partial x} &= \frac{\partial p_{II}}{\partial x} \end{aligned} \right\} x = -l_1, y = [0, h_1], \quad \left. \begin{aligned} p_{II} &= p_{III} \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2, y' = [0, h_2], \\ \frac{\partial p_{II}}{\partial y} = 0, \quad x = [-l_1, 0], \quad y = 0, \quad \frac{\partial p_{II}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [0, l_2], \quad y' = 0.$$

Умови спряження на межах областей III, IV та IV, V і крайові умови на жорстких поверхнях області IV при $\beta \in (0, 180^\circ)$:

$$\left. \begin{aligned} p_{III} &= p_{IV} \\ \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{IV}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2 + l_3, y' = [0, h_2], \quad \left. \begin{aligned} p_{IV} &= p_V \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial x''} &= \frac{\partial p_V}{\partial x''} \end{aligned} \right\} x'' = 0, y'' = [0, h_3], \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [l_2 + l_3, l_2 + l_3 + l_5], \quad y' = h_2, \quad \frac{\partial p_{IV}}{\partial y''} = 0, \quad x'' = [-l_4, 0], \quad y'' = h_3,$$

при $\beta \in (180^\circ, 360^\circ - \alpha]$:

$$\left. \begin{aligned} p_{III} &= p_{IV} \\ \frac{\partial p_{III}}{\partial x'} &= \frac{\partial p_{IV}}{\partial x'} \end{aligned} \right\} x' = l_2 + l_3, y' = [0, h_2], \quad \left. \begin{aligned} p_{IV} &= p_V \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial x''} &= \frac{\partial p_V}{\partial x''} \end{aligned} \right\} x'' = l_4, y'' = [0, h_3], \\ \frac{\partial p_{IV}}{\partial y'} = 0, \quad x' = [l_2 + l_3, l_2 + l_3 + l_5], \quad y' = 0, \quad \frac{\partial p_{IV}}{\partial y''} = 0, \quad x'' = [0, l_4], \quad y'' = 0.$$

Підстановка виразів, що описують поля тиску в кожній з областей, у відповідні умови спряження та крайові умови, із врахуванням формул перетворень між системами координат, призведе до системи функціональних рівнянь. Використання властивості ортогональності відповідних систем функцій дає змогу провести алгебраїзацію функціональної системи. Унаслідок цього отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів, яка розв'язується методом редукції [4].

Для верифікації результатів потрібно визначити енергетичні характеристики, такі як коефіцієнт проходження падаючої хвилі крізь вигини W та коефіцієнт відбиття від першого вигину V . Коефіцієнт W природно визначити як відношення середнього потоку потужності хвилі в області V до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I:

$$W = \frac{\int_0^{h_3} \left(p_V \left(\frac{\partial p_V}{\partial x''} \right)^* + p_V^* \frac{\partial p_V}{\partial x''} \right) dx''}{\int_0^{h_1} \left(p_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^* + p_0^* \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) dx},$$

де $*$ – знак комплексного спряження. Після підстановки відповідних виразів для функцій p_0 та p_V отримаємо:

$$W = \sum_{n=0}^{N_1} W_n, \quad \text{де} \quad W_n = \frac{\varepsilon_n h_3 \operatorname{Re}(\gamma_n)}{h_1 k} |B_n|^2.$$

Тут N_1 – кількість однорідних мод в області V. Для хвильоводу з жорсткими межами $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0.5$ для

$n > 0$ [4]. Аналогічно, коефіцієнт відбиття V , який визначається як відношення середнього потоку потужності у відбитій хвилі до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I, матиме вигляд:

$$V = \sum_{n=0}^{N_2} V_n, \text{ де } V_n = \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\eta_n)}{k} |A_n|^2,$$

N_2 – кількість однорідних мод в області I. Згідно із законом збереження енергії, має виконуватися рівність:

$$W + V = 1.$$

Результат роботи програми. Для представлених у даній роботі результатів кількість доданків у рядах Фур'є становила $n = 12$. Точність обчислень може бути покращена завдяки вибору більшої кількості доданків. Характерні розміри часткових областей обирались рівними: $h_1 = h_2 = h_3 = l_3 = h$. Кут першого вигину α змінювався в межах від 0° до 140° , оскільки при $\alpha > 140^\circ$ структура акустичного поля в хвильоводі значно ускладнюється через наявність кутової області в околі початку системи координат O та потребує більшої кількості доданків у рядах Фур'є для коректних розрахунків.

На рис. 2 зображена залежність суми енергетичних коефіцієнтів $W + V$ від хвильового розміру h/λ для двох варіантів кутів вигинів: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$ (рис. 2, а) та $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 2, б). Для другого випадку точність обчислень є гіршою внаслідок появи кутових областей та ускладнення характеру особливості на ребрі. Загалом, при обраних параметрах закон збереження енергії виконується з похибкою не гірше 3%. Варто відмітити, що при збільшенні хвильового розміру h/λ у хвильоводі поширюються вищі моди, що ускладнює розрахунки в обох випадках. Критичними значеннями, при яких збуджуються наступні вищі моди, є величини $h/\lambda = n/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

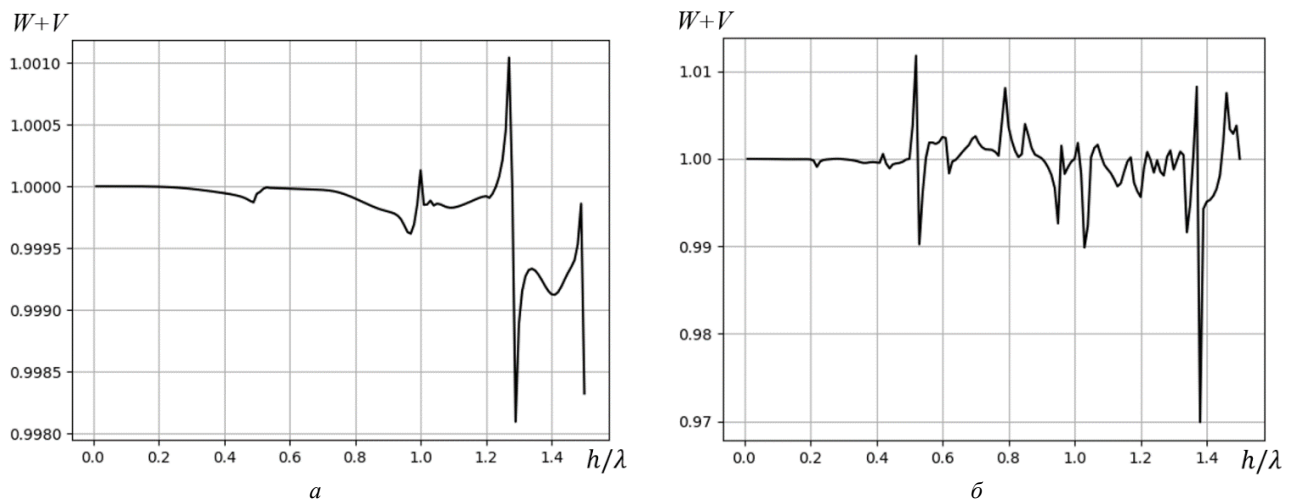


Рис. 2 – Частотні залежності $W + V$ від хвильових розмірів: а – $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 3 подано залежність суми енергетичних коефіцієнтів $W + V$ від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$ при фіксованому значенні $\beta = 135^\circ$ для трьох значень $h/\lambda = \{0.3, 0.6, 1.2\}$. При $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$ закон збереження енергії виконується на порядок краще, ніж при $\alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$, що узгоджується із рис. 2. При $h/\lambda = 0.3$ у хвильоводі поширюється лише нульова мода, тому закон збереження виконується найточніше. При $h/\lambda = 0.6$, крім нульової, поширюється також перша мода, що призводить до погіршення точності через складнішу інтерференційну структуру поля. Відповідно, при $h/\lambda = 1.2$ структура поля ще більше ускладнюється, а точність виконання закону збереження знижується. Крім цього, збільшення кутів вигинів призводить до росту ролі неоднорідних мод.

На рис. 4 представлені типові похибки виконання умов спряження областей I, II за тиском p та коливальною швидкістю в поздовжньому напрямку v_x , а також крайові умови за нормальною швидкістю до поверхні хвильоводу v_y в області II при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $h/\lambda = 0.51$. Оскільки тиск і коливальна швидкість подані як комплексні числа, то їх порівняння на межах поділу областей можна проводити за модулем різниці тиску та коливальної швидкості відповідно:

$$\delta_p = \frac{|p_{II} - p_I|}{p_0}, \quad \delta_v = \frac{|v_{xII} - v_{xI}|}{|v_{x0}|}, \quad \delta_n = \frac{|v_{yII}|}{|v_{x0}|}.$$

Оскільки коливальна швидкість має особливість на ребрі, то похибка за швидкістю є вищою ніж за тиском. З цієї ж причини крайові умови за швидкістю виконуються краще за умови спряження.

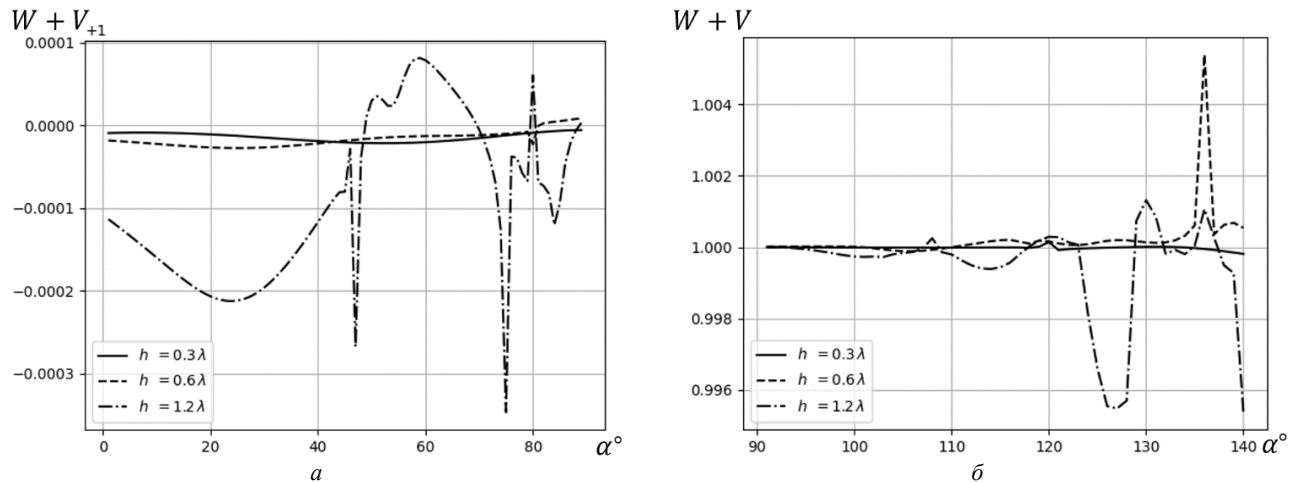


Рис. 3 – Залежність $W + V$ від кута вигину α при $\beta = 135^\circ$: $a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

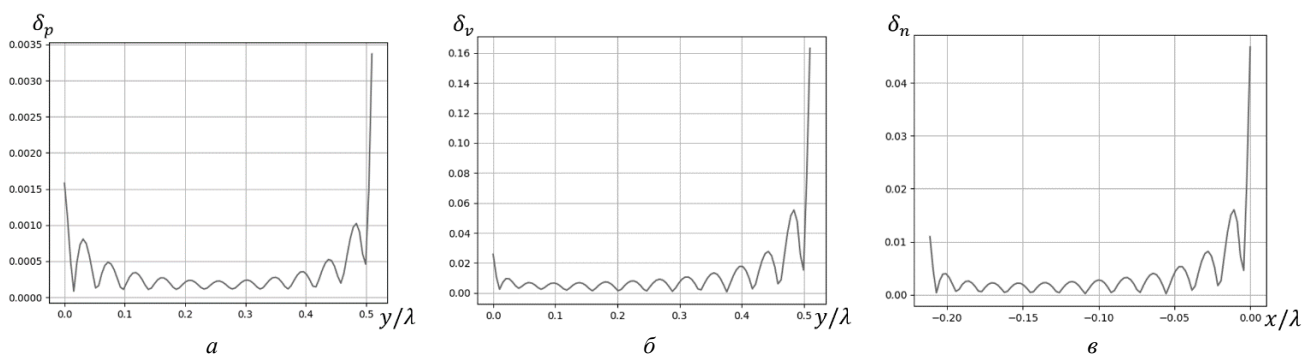


Рис. 4 – Похибки виконання умов спряження при $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $h/\lambda = 0.51$: a – за тиском δ_p , $x = 0$, $y = [0, h_1]$; b – за швидкістю δ_v , $x = 0$, $y = [0, h_1]$; c – похибка виконання крайової умови за швидкістю δ_n , $x = [-h_1, 0]$, $y = 0$.

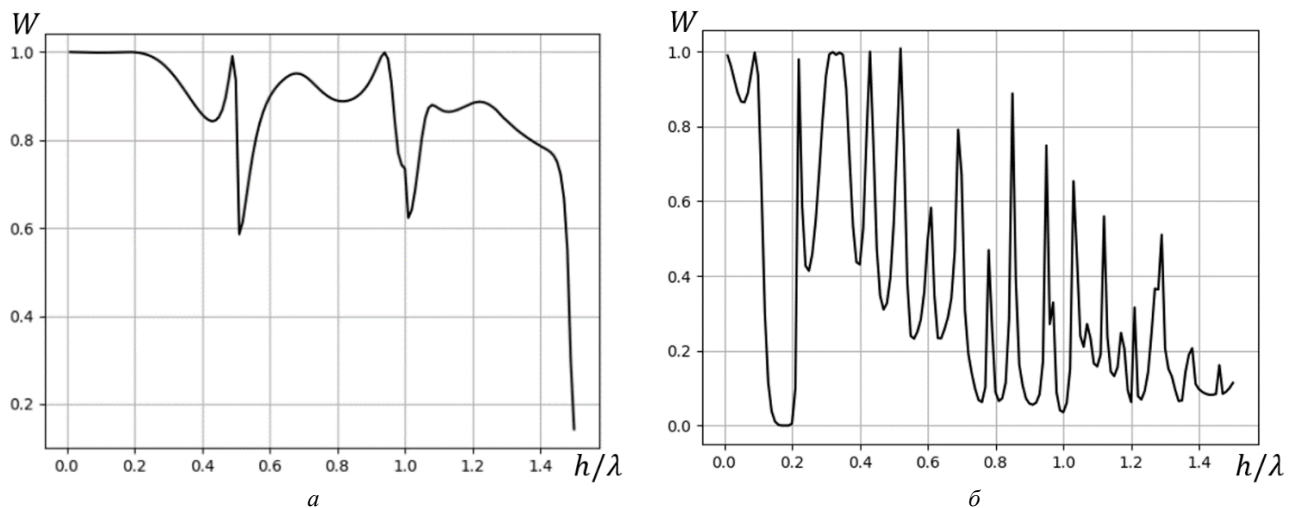


Рис. 5 – Частотні залежності W від хвильових розмірів h/λ : $a - \alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; $b - \alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 5, a відображені частотні залежності енергетичного коефіцієнта проникнення W від h/λ при фіксованих кутах вигину $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. За умови, коли величина h кратна $\lambda/2$, коефіцієнт проникнення W різко спадає. Цей ефект пов'язаний з моментом зародження чергової однорідної моди хвильоводу. На рис. 5, b наведені аналогічні частотні залежності для кутів вигину $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$. У цьому випадку наявність кутової області значно ускладнює структуру амплітудно-частотного спектру. Спостерігається нерегулярне коливання коефіцієнта проникнення W , а також поступове зниження його середнього значення при збільшенні хвильового

розміру h/λ . Це можна пояснити посиленням відбивних ефектів на геометричних неоднорідностях хвильоводу.

На рис. 6, а зображені частотні залежності коефіцієнтів збудження нормальних хвиль W_n в області V від h/λ для випадку $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. Чітко видно, що при $h/\lambda < 1/2$ у хвильоводі поширюється лише нульова мода. При $h/\lambda > 1/2$ з'являється перша мода, яка швидко перевершує нульову за амплітудою, але далі різко спадає. В той же час нульова мода зростає, і при $h/\lambda > 0.7$ стає домінуючою до $h/\lambda \approx 1.1$. При $h/\lambda > 1$ з'являється друга мода, але вона поступається спочатку нульовій, а потім першій моді.

Подібний характер спектра спостерігається й у випадку $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ (рис. 6, б). Тут варто відмітити, що при $0.5 < h/\lambda < 1$ переважно домінує нульова мода, а при $h/\lambda > 1$ відбувається чергування домінуючої моди. Таким чином, енергія нульової моди області I трансформується у вищі моди області V. Такий характер амплітудно-частотного спектра може свідчити про чергування резонансних та антирезонансних частот системи.

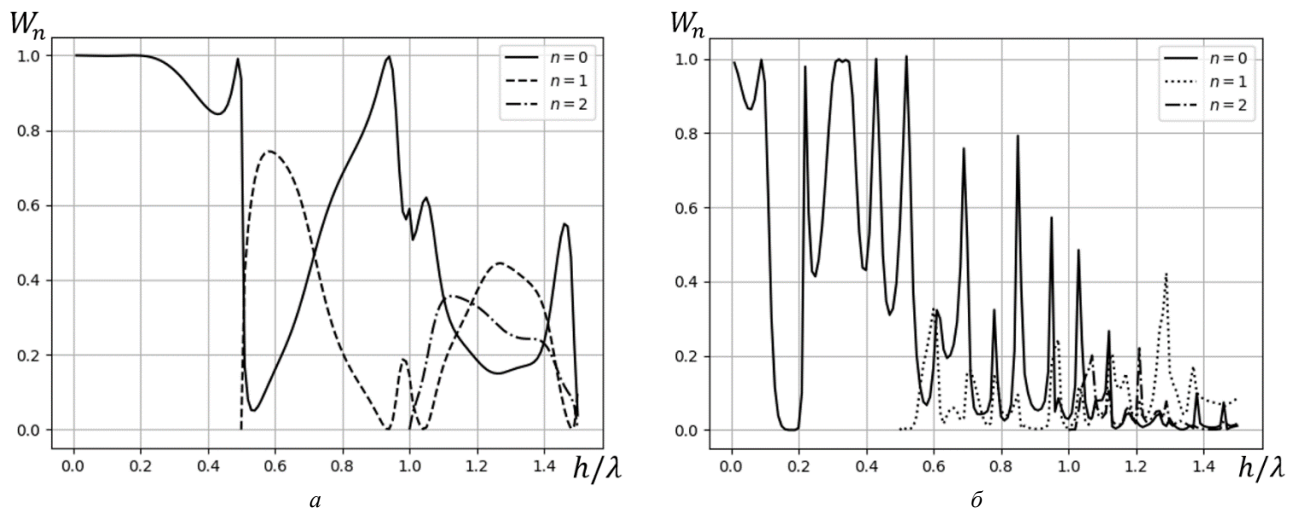


Рис. 6 – Частотні залежності коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль від хвильових розмірів h/λ :

а – $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 7, а представлено поле амплітуди тиску при $h/\lambda = 0.51$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$. Цей випадок близький до критичного, коли у хвильоводі збуджується наступна однорідна мода. Енергетичні коефіцієнти проникнення та відбиття тут дорівнюють відповідно $W \approx 0.586$, $V \approx 0.414$. Це свідчить про зменшення потоку енергії в області V та часткове відбиття енергії від геометричної неоднорідності в область I. На рис. 7, б зображено поле амплітуди тиску при $h/\lambda = 0.18$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$. У даному випадку відбувається практично повне запирання потоку енергії, не зважаючи на те, що поширюється лише нульова мода, тобто енергетичні характеристики рівні $W \approx 0$, $V \approx 1$. Природа зниження коефіцієнту проникнення у даному випадку відрізняється від попереднього. Тут кутова область виступає у ролі резонансної камери, яка блокує поширення хвилі.

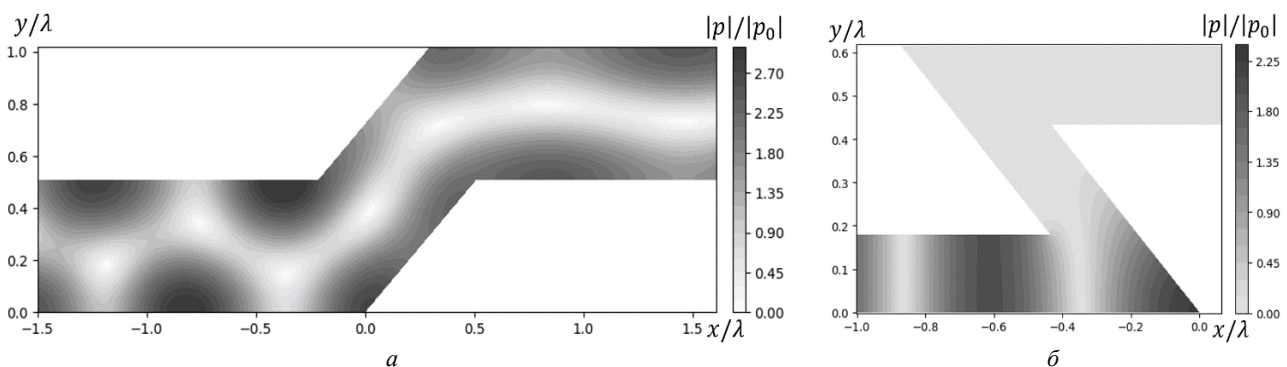


Рис. 7 – Поле амплітуди тиску: а – $h/\lambda = 0.51$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$; б – $h/\lambda = 0.18$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

На рис. 8 зображена залежність коефіцієнта проникнення W від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$ за фіксованого значен-

ня $\beta = 135^\circ$ при різних співвідношеннях h/λ . При $\alpha < 90^\circ$ спостерігається зниження коефіцієнта проходження при збільшенні кута вигину для всіх випадків h/λ . Водночас найшвидшим є зменшення у випадку $h/\lambda = 1.2$. У випадку $h/\lambda = 0.3$ спостерігається провал коефіцієнта проникнення W при $\alpha \approx 133^\circ$, причому в даному випадку відбувається повне запирання потоку. Зі збільшенням хвильового розміру h/λ також спостерігається подібний провал, проте він зміщується в область менших кутів, а мінімальне значення коефіцієнта W збільшується. Далі відбувається зростання коефіцієнта проникнення до $W \approx 1$ у випадку $h/\lambda = 0.3$ та до $W \approx 0.92$ у інших двох випадках, після чого коефіцієнт проникнення знову знижується.

На рис. 9 показані частотні залежності коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль при $h/\lambda = 1.2$ від кута $\alpha \in (0^\circ, 140^\circ]$, $\beta = 135^\circ$. При такому хвильовому розмірі у області V поширюється три нормальні моди. Нульова мода найефективніше збуджується при $\alpha \approx 64^\circ$. Перша мода – при $\alpha \approx 18^\circ$, у цьому діапазоні кутова область ефективно перетворює частину енергії падаючої хвилі у першу моду. Друга мода – при $\alpha \approx 121^\circ$, що свідчить про перерозподіл енергії з нижчих мод у другу.

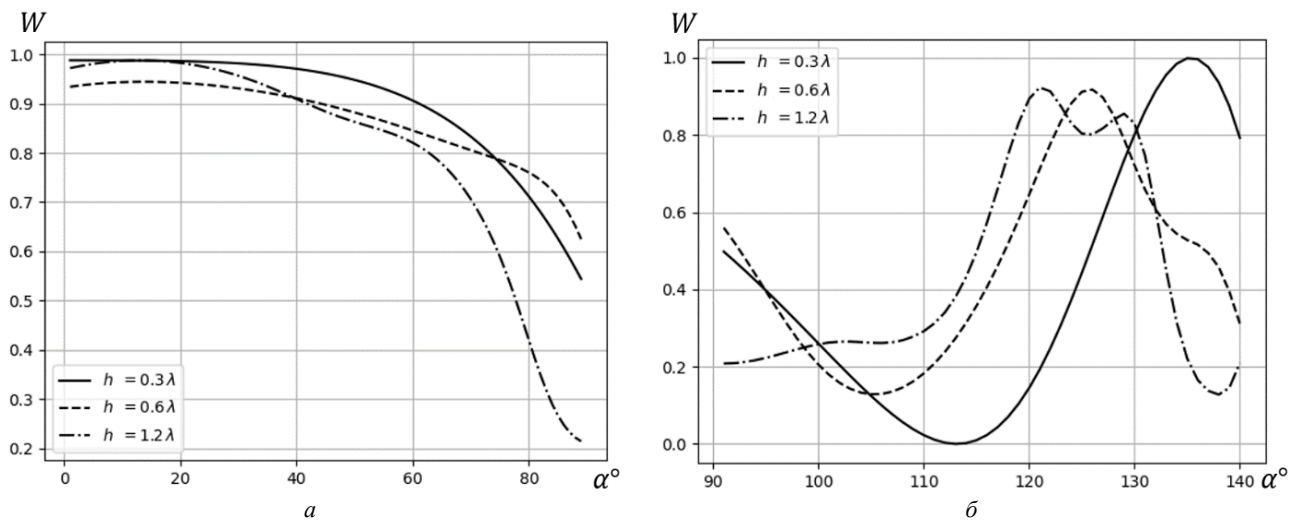


Рис. 8 – Залежність коефіцієнта проникнення W від кута α при $\beta = 135^\circ$: $a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

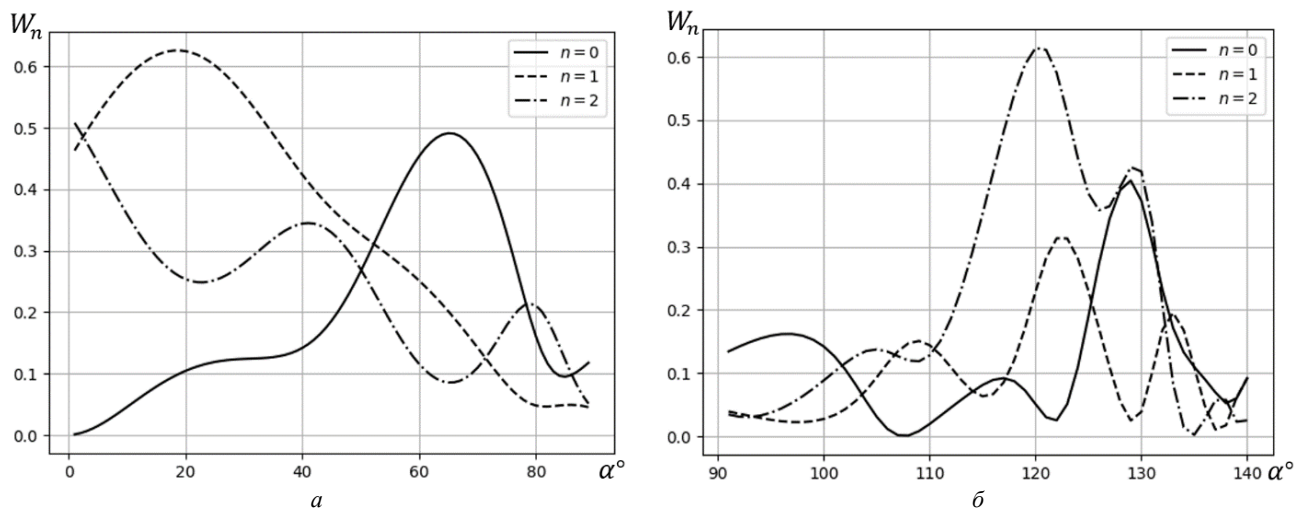


Рис. 9 – Залежність коефіцієнтів збудження W_n нормальних хвиль у випадку $h/\lambda = 1.2$ при $\beta = 135^\circ$:

$a - \alpha \in (0^\circ, 90^\circ]$; $b - \alpha \in (90^\circ, 140^\circ]$.

Перспективи подальших досліджень. Результати проведеного дослідження важливі для подальшого розвитку теорії та практичного застосування хвильоводів із вигинами. Зокрема, кількісні характеристики трансформації мод можуть бути використані під час проєктування повітряних звукопроводів, таких як вентиляційні сис-

теми, а також при аналізі поширення звуку в складних середовищах, наприклад, у підводних течіях.

Перспективним напрямом є подальше вивчення механізмів перетворення енергії між модами, що дозволяє змінювати просторову структуру звукового поля. Це може бути використано для створення ефективних шумопоглинальних систем, а також для модифікації характеристик направленості випромінювання хвильоводу, зокрема у випадках, коли його кінець розташовано за вигином. Такі ефекти можуть лягти в основу проєктування частотно-селективних пристроїв.

Подальші дослідження також доцільно зосередити на таких аспектах: аналізі поширення імпульсних сигналів у хвильоводах складної геометрії; дослідженні поширення вищих мод в окремих областях хвильоводу, що дозволить точніше моделювати фізичні процеси у широкому частотному діапазоні; урахуванні умов Мейкснера на ребрах хвильоводу для підвищення точності чисельного методу та покращення збіжності обчислювального алгоритму.

Висновки. У роботі розв'язано задачу поширення звукових хвиль у плоскому хвильоводі з акустично жорсткими стінками та геометричними неоднорідностями у вигляді двох вигинів із використанням методу часткових областей. Проведено верифікацію закону збереження енергії, умов спряження та крайових умов, що підтверджує коректність побудованої математичної моделі.

У ході дослідження встановлено, що енергетичний коефіцієнт проникнення звукової хвилі крізь вигини суттєво залежить як від хвильових розмірів, так і від кутів вигину. Показано, що при хвильових розмірах, кратних половині довжини хвилі, відбувається різке зниження коефіцієнта проникнення, що пов'язано зі збудженням вищих мод.

Дослідження показали, що при кутах вигину понад 90° амплітудно-частотна характеристика набуває складної нерегулярної структури, а кутова область виконує роль резонансної камери. Виявлено зміну домінантної моди залежно від кута вигину. При збільшенні кута від 0° до 90° спостерігається поступовий спад коефіцієнта проникнення, а подальше збільшення кута викликає його коливання.

Також встановлено, що в кутовій області можлива ефективна трансформація енергії між різними модами – від нижчих до вищих і навпаки. У певних точках частотного діапазону досягається високий коефіцієнт перетворення мод, що відкриває можливості для цілеспрямованого керування енергетичним розподілом у хвильоводі.

Список літератури

1. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. – New York : Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
2. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1994. – Vol. 95. – № 1. – P. 2363 – 2370. DOI: 10.1121/1.408746.
3. Мелешко В. В., Маціпура В. Т., Улітко І. А. *Теорія хвильоводів : навч. посіб.* – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2013. – 415 с.
4. Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маціпура В. Т. *Основи акустики : навчальний посібник*. – Київ : Видавництво «Наукова думка» НАН України, 2007. – 640 с.
5. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Вплив згладжування поверхні скінченного клиноподібного об'єкта на характеристики розсіювання плоскої хвилі. Частина I. Побудова розв'язку // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. – 2024. – № 2. – С. 29 – 32. DOI: 10.17721/1812-5409.2024/2.5.
6. Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2021. – № 2. – С. 5 – 16. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.2.01.
7. Борисейко О. В., Гусак В. О., Маціпура В. Т. Використання комбінацій двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. – 2023. – № 2. – С. 88 – 91. DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.10.
8. Naida S. A., Korzhyk O. V., Naida N. S., Korzhyk M. O., Naida A. S., Popovych P. V. Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer // *Journal of nano- and electronic physics*. – 2023. – Vol. 15. – № 6. – 06012. DOI: 10.21272/jnep.15(6).06012.

References (transliterated)

1. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. New York, Begell House, Inc., 2018. 439 p.
2. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1994, Vol. 95, no. 1, pp. 2363–2370. DOI: 10.1121/1.408746.
3. Meleshko V. V., Matsypura V. T., Ulitko I. A. *Teoriia khvylyevodiv: navch. posib.* [Waveguide theory: a textbook]. Kyiv, Vydavnycho-poligrafichnyy tsentr "Kyivs'kyi universytet" Publ., 2013. 415 p.
4. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Osnovy akustyky: navchal'nyy posibnyk* [Fundamentals of acoustics: a textbook]. Kyiv, Vydavnytstvo "Naukova dumka" NAN Ukrainy Publ., 2007. 640 p.
5. Grinchenko V. T., Husak V. O., Matsypura V. T. Vplyv zgladzhuvannya poverkhni skinchennogo klynopodibnogo ob'ekta na kharakterystyky rozsiyuvannya ploskoyi khvyli. Chastyna I. Pobudova rozv'yazku [The effect of smoothing the surface of a finite wedge-shaped object on the scattering characteristics of a plane wave. Part I. Construction of the solution]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa*

- Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2024, no. 2, pp. 29–32. DOI: 10.17721/1812-5409.2024/2.5.
6. Grinchenko V. T., Husak V. O., Matsypura V. T. Vykorystannya dvokh variantiv spryazhennya khvyly'ovyykh poliv v metodi chastkovykh oblastey [Using two variants of wave field conjugation in the partial domain method]. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 2021, no. 2, pp. 5–16. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.2.01.
 7. Boryseiko O. V., Husak V. O., Matsypura V. T. Vykorystannya kombinatsiyi dvokh variantiv spryazhennya khvyly'ovyykh poliv v metodi chastkovykh oblastey [Using combinations of two wave field conjugation options in the partial domain method]. *Visnyk Kyivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2023, no. 2, pp. 88–91. DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.10.
 8. Naida S. A., Korzyk O. V., Naida N. S., Korzyk M. O., Naida A. S., Popovych P. V. Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer. *Journal of nano- and electronic physics*. 2023, Vol. 15, no. 6, 06012. DOI: 10.21272/jnep.15(6).06012.

Надійшла (received) 10.06.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Кузьменко Володимир Володимирович – студент 1-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (063) 574-81-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7922-430X>; e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com.

Kuzmenko Volodymyr Volodymyrovych – 1st year Master's Student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (063) 574-81-34; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7922-430X>; e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com.

Троценко Ярослав Павлович – доктор філософії з галузі математики та статистики, асистент кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.

Trotsenko Yaroslav Pavlovych – Philosophy Doctor in Mathematics and Statistics, Assistant Professor at the Department of Complex Systems Modeling, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 160-18-11; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8387-9118>; e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua.