

К. І. ДЕНИСОВ, В. В. ПІЧКУР

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО МАТРИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В статті висвітлено метод дослідження стійкості матричного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є лінійні матричні диференціальні рівняння, частинним випадком яких є рівняння Ляпунова. Матричні диференціальні рівняння виникають в задачах теорії стійкості, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності. В зв'язку з цим необхідно обчислювати та аналізувати якісні властивості розв'язків матричних диференціальних рівнянь. Постають проблеми існування, єдиності, продовжуваності і аналізу умов стійкості для різних видів таких математичних рівнянь. Метод, розроблений в статті, базується на алгебраїчних властивостях власних чисел, жорданових форм матриць, використовує властивості коренів многочленів. В статті обґрунтовується теорема про умови стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. Розроблена методика полягає у знаходженні максимальних дійсних частин власних чисел, а також у аналізі структури жорданової форми матриць лінійного диференціального рівняння. Наслідком теореми є відповідні умови стійкості матричного рівняння Ляпунова. Для знаходження власних чисел розроблено обчислювальний метод знаходження максимальної дійсної частини коренів многочлена, а також алгоритм знаходження коренів многочлена. В основі підходу лежить теорема Рауса – Гурвіца. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: матричне диференціальне рівняння, стійкість, власні значення матриці, жорданова форма матриці, обчислювальні методи, корені многочлена.

К. І. DENYSOV, V. V. PICHKUR

STABILITY ANALYSIS OF SOLUTIONS OF A LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The article presents the method for analyzing the stability of linear matrix differential equations with constant coefficients. One of the classical types of such equations is the class of linear matrix differential equations, which includes the Lyapunov equation as a particular case. Matrix differential equations arise in problems of stability theory, practical stability, optimal control theory, and state estimation of systems under uncertainty. Therefore, it is necessary to compute and analyze the qualitative properties of solutions to matrix differential equations. This involves addressing problems of existence, uniqueness, continuation, and analysis of stability conditions for various types of such mathematical equations. The method proposed in the article is based on algebraic properties of eigenvalues, Jordan forms of matrices, and characteristics of polynomial roots. A theorem is established regarding the conditions for stability, asymptotic stability, and instability of solutions to linear matrix differential equations with constant coefficients. The developed approach includes the computation of the maximal real parts of eigenvalues and the analysis of the Jordan form structure of the system matrices. As a consequence, corresponding stability conditions for the Lyapunov matrix equation are also obtained. An algorithm is proposed for computing the maximal real part of the roots of a polynomial, as well as for finding all roots. The approach relies on the Routh – Hurwitz theorem. The article also presents results of computational experiments.

Key words: matrix differential equation, stability, matrix eigenvalues, Jordan form, computational methods, polynomial roots.

Вступ. При розв'язуванні ряду задач *теорії стійкості*, практичної стійкості, теорії оптимального керування і оцінювання стану систем за умов невизначеності виникають *матричні диференціальні рівняння* [1 – 8]. Зокрема, такі задачі виникають при моделюванні перетину інтегральної лійки лінійного диференціального рівняння, множина початкових умов якого належить *еліпсоїду* [3]. Як наслідок, в задачах, пов'язаних з матричними диференціальними рівняннями, необхідно обчислювати і аналізувати якісні властивості розв'язків. Тому постають проблеми існування, єдиності, продовжуваності і аналізу умов стійкості для таких математичних співвідношень [3, 8, 9].

Одним з класичних видів матричних диференціальних рівнянь є *рівняння Ляпунова* і *лінійні матричні диференціальні рівняння* [3, 8]. В статті розроблено *метод дослідження стійкості* матричних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, який має алгебраїчний характер. Обґрунтовуються умови стійкості, асимптотичної стійкості, стійкості, нестійкості розв'язків лінійного матричного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами. В основі проведеного аналізу лежать властивості власних чисел і *жорданової форми матриць* рівняння. Для знаходження власних чисел розроблено відповідний обчислювальний метод, який ґрунтується на *теоремі Рауса – Гурвіца* [3, 9]. Методику апробовано за допомогою обчислювальних експериментів.

В статті будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, $\bar{\alpha}$ – комплексне спряження числа α , $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множина матриць $n \times n$ з дійсними елементами, $\mathbb{C}^{n \times n}$ – множина матриць $n \times n$ з комплексними елементами, T – знак транспонування, $A_{i,j}$ – елемент i, j матриці A , $\text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_i)$ – блоково-діагональна матриця, в якій блоки $J_1, J_2, \dots, J_i$ розміщені вздовж головної діагоналі, а всі інші елементи нульові, $\text{Re}(x)$, $\text{Im}(x)$ – дійсна та уявна частини комплексного числа x .

Стійкість лінійного матричного рівняння. Розглянемо лінійне матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + X(t)B, \quad (1)$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриці з постійними коефіцієнтами; $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (1).

Введемо позначення

$$\gamma = \left\{ \sum_{i=1}^u c_i \cos(\phi_i t) + \sum_{i=1}^v d_i \sin(\psi_i t) \mid u+v > 0, c_i \neq 0, d_i \neq 0, \psi_i > 0, \phi_i \geq 0, \psi_i \neq \psi_j, \phi_i \neq \phi_j, i \neq j \right\}.$$

Множина γ є сукупністю всіх ненульових функцій, що можна представити як скінченну лінійну комбінацію косинусів та синусів.

Лема 1. Нехай матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p_{\max}$ – максимальна дійсна частина власних чисел матриці A , m – максимальний розмір жорданової клітини матриці A , які відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$. Тоді $e^{At} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1})$, $t \rightarrow +\infty$ та існують такі індекси $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e_{i,j}^{At} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} \cdot g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \text{ де } t \rightarrow +\infty, g(t) \in \gamma.$$

Доведення.

Представимо матрицю $A = J C J^{-1}$, де $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – жорданова форма матриці A та C – невироджена матриця.

Випишемо матричну експоненту через жорданову форму $e^{At} = C e^{Jt} C^{-1}$. Матриця J є блочно-діагональною $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_i)$, де $\lambda_i \in \mathbb{C}$ – власне число матриці A , J_i – жорданова клітина, яка відповідає власному числу λ_i . Тоді $e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_i t})$.

Розглянемо блок матриці жордана J_i розміру p . Як відомо [9]:

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

Отже, для жорданового блока J_i маємо

$$e^{J_i t} = O(e^{\lambda_i t} t^{p-1}), \quad t \rightarrow +\infty; \quad e_{1,p}^{J_i t} = \frac{e^{r t} t^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (\cos(yt) + i \sin(yt)),$$

де $r = \text{Re}(\lambda_i)$, $y = \text{Im}(\lambda_i)$. Тоді $e^{Jt} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1})$, $t \rightarrow +\infty$ та існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e_{i,j}^{Jt} = \frac{e^{p_{\max} t} t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (\cos(yt) + i \sin(yt)). \quad (2)$$

Покажемо обмеженість e^{At} :

$$e^{At} = C e^{Jt} C^{-1} = C \cdot O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}) C^{-1} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}).$$

Обґрунтуємо, що для e^{At} існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що:

$$e_{i,j}^{At} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \text{ де } t \rightarrow +\infty, g(t) \in \gamma.$$

Нехай $H(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – матриця, що:

$$H_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{e^{i \cdot y t}}{(m-1)!}, & \text{якщо } e_{a,b}^{Jt} = e^{(p_{\max} + i \cdot y)t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}. \end{cases}$$

Припустимо, що у e^{At} немає таких коефіцієнтів. Тобто $CH(t)C^{-1} \equiv 0$. Оскільки матриця C невироджена, то помножимо рівність зліва на C^{-1} та справа на C та матимемо, що $H(t) \equiv 0$, що суперечить (2).

Отже, $CH(t)C^{-1} \not\equiv 0$. Тоді існують $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, що $(CH(t)C^{-1})_{i,j} \not\equiv 0$. Звідси маємо, що:

$$(C e^{Jt} C^{-1})_{i,j} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}),$$

де $t \rightarrow +\infty$, $g(t) \in \gamma$.

Лему доведено.

У наступних теоремах $p_{\max}$, $\mu_{\max}$ – це максимальні дійсні частини власних чисел матриці A та B відповідно, m – максимальний розмір жорданових клітин, які відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$ матриці A , k – максимальний розмір жорданових клітин, які відповідають власним числам з дійсною частиною $\mu_{\max}$ матриці B .

Теорема 1. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$.

Теорема 2. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли або $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$, або виконуються такі умови:

1. $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$;
2. всі жорданові клітини матриці A власних чисел з дійсною частиною $p_{\max}$ мають одиничні розміри;
3. всі жорданові клітини матриці B власних чисел з дійсною частиною $\mu_{\max}$ мають одиничні розміри.

Теорема 3. Нульовий розв'язок матричного диференціального рівняння (1) є нестійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли або $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$, або $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та виконується хоча б одна з таких умов:

1. існує жорданова клітина матриці A власних чисел з дійсною частиною $p_{\max}$ розміром більше 1.
2. існує жорданова клітина матриці B власних чисел з дійсною частиною $\mu_{\max}$ розміром більше 1.

Доведення.

Загальний розв'язок лінійного рівняння можна представити як лінійну комбінацію n^2 лінійно незалежних розв'язків $X_{i,j}(t) = e^{At} E_{i,j} e^{Bt}$, де $E_{i,j}$ – матриця, яка складається з нулів, окрім елемента (i, j) , що дорівнює 1. Запишемо матриці

$$e^{At} = [h_1(t) \ h_2(t) \ \dots \ h_n(t)]; \quad e^{Bt} = [f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)]^T; \quad e^{At} E_{i,j} = [0 \ 0 \ \dots \ h_i(t) \ \dots \ 0],$$

де у j -ому стовпчику знаходиться вектор-функція $h_i(t)$. Тоді

$$X_{i,j}(t) = e^{At} E_{i,j} e^{Bt} = h_i(t) f_j^T(t), \quad (e^{At} E_{i,j} e^{Bt})_{a,b} = (h_i(t))_a (f_j(t))_b.$$

З леми 1 маємо

$$e^{At} = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad e^{Bt} = O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Існують $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$, що

$$e^{At}_{i_1, j_1} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad e^{Bt}_{i_2, j_2} = e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}),$$

де $t \rightarrow +\infty$, $g_1(t), g_2(t) \in \gamma$. Тоді

$$h_i(t) = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad f_j(t) = O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty$$

та маємо

$$X_{i,j}(t) = h_i(t) f_j^T(t) = O(e^{p_{\max} t} t^{m-1}) \cdot O(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}) = O(e^{(p_{\max} + \mu_{\max}) t} t^{m+k-2}).$$

Також

$$\begin{aligned} (h_{i_1}(t))_{i_1} &= e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1}), \quad (f_{j_2}(t))_{j_2} = e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \\ (X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} &= (h_{i_1}(t))_{i_1} (f_{j_2}(t))_{j_2} = e^{p_{\max} t} t^{m-1} g_1(t) e^{\mu_{\max} t} t^{k-1} g_2(t) + o(e^{p_{\max} t} t^{m-1} e^{\mu_{\max} t} t^{k-1}), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Зазначимо, що $g_3(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \in \gamma$.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли кожен з розв'язків $X_{i,j}(t) = o(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} < 0$, то

$$X_{i,j}(t) = O(e^{(p_{\max} + \mu_{\max}) t} t^{m+k-2}) = o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отже, в цьому випадку нульовий розв'язок є асимптотично стійким, а отже і стійким.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли кожен з розв'язків $X_{i,j}(t) = O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та $m = k = 1$, то

$$(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} = g_3(t) + o(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оскільки, $g_3(t) \not\rightarrow 0$, то $(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} = O(1)$ та $(X_{j_1, i_2}(t))_{i_1, j_2} \notin o(1)$, $t \rightarrow +\infty$, тоді

$$X_{i,j}(t) = O\left(e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2}\right) = O(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Отже, нульовий розв'язок є стійким і не є асимптотично стійким у цьому випадку.

Нульовий розв'язок лінійного матричного диференціального рівняння (1) є нестійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли хоча б один $X_{i,j}(t)$ є необмеженим при $t \rightarrow +\infty$. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$, то

$$\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2} = e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2} g_3(t) + o\left(e^{(p_{\max} + \mu_{\max})t} t^{m+k-2}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Оскільки $g_3(t) \not\rightarrow 0$, то $\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2}$ є необмеженою при $t \rightarrow +\infty$. Отже нульовий розв'язок є нестійким у цьому випадку. Якщо $p_{\max} + \mu_{\max} = 0$ та $m+k > 2$, то

$$\left(X_{j_1, j_2}(t)\right)_{i_1, j_2} = t^{k+m-2} g_3(t) + (1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Аналогічно до попереднього випадку нульовий розв'язок є нестійким.

Теорему доведено.

Алгоритм аналізу стійкості лінійного матричного рівняння. Розглянемо алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку матричного диференціального рівняння (1). Алгоритми **1.1** та **1.2** є допоміжними для алгоритму **1.3**. Вони використовуються для знаходження максимальної дійсної частини коренів та самих коренів характеристичних многочленів вхідних матриць.

Алгоритм 1.1 Знаходження максимальної дійсної частини у коренів многочлена $p(x)$.

Крок 1. Обмежимо межі $l, r \in \mathbb{R}$, що $y \in [l, r]$. Покладемо

$$r := 1 + \max_i \left\{ \left| \frac{p_i}{p_n} \right| \right\}, \quad l := -r.$$

Крок 2. Спробуємо зменшити межі пошуку вдвічі. Покладемо $m := \frac{l+r}{2}$. Перевіримо, чи y менше за m . Обчислюємо многочлен $p(x+m)$, коренями якого є числа $x_i - m$. Застосуємо критерій Гурвіца для $p(x+m)$ і таким чином перевіримо, що для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\operatorname{Re}(x_i) - m < 0.$$

Крок 3. Якщо всі $\operatorname{Re}(x_i < m)$, то $y < m$ і $y \in [l, m]$, тоді присвоїмо $r := m$. Інакше $y \geq m$ і присвоїмо $l := m$.

Крок 4. Повернемося на крок 2, якщо довжина проміжку пошуку більше ϵ : $r - l > \epsilon$. Інакше вважаємо, що $y \approx \frac{l+r}{2}$.

Опис алгоритму закінчено.

Алгоритм 1.2 Знаходження коренів многочлена.

Крок 1. Якщо $n \leq 2$, то знаходимо корені аналітично.

Крок 2. Інакше $n > 2$ і знаходимо $y \approx \max_i \operatorname{Re}(x_i)$ алгоритмом **1.1**, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені многочлена $p(x)$.

Крок 3. Якщо $|p(y)| < \epsilon$, то будемо вважати, що y – корінь многочлена $p(x)$. В такому випадку рекурсивно знаходимо корені многочлена $p(x)/(x-y)$ степеня на один менше.

Крок 4. Обчислюємо многочлен $p(y+i \cdot x)$. Оскільки праворуч від вертикальної прямої $\operatorname{Re}(z) = y$ коренів немає, то після такого лінійного перетворення, а саме зсуву ліворуч на y та повороту на 90 градусів за годинниковою стрілкою, всі корені z_i многочлена $p(y+i \cdot x)$ матимуть невід'ємні уявні частини $\operatorname{Im}(z_i) \geq 0$.

Крок 5. Щоб виокремити лише корені z_i , у яких $\operatorname{Im}(z_i) = 0$, обчислюємо

$$g(x) = \text{НСД}\left(p(y+i \cdot x), \bar{p}(y+i \cdot x)\right),$$

$$\text{де } \bar{a}(z) = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} z^i.$$

Крок 6. Оскільки корені початкового многочлена були симетричні (з урахуванням кратностей) відносно осі $\operatorname{Re}(z) = 0$, то корені поточного многочлена $g(x)$ є симетричними відносно початку координат. Тобто, якщо x^* є коренем $g(x)$, то $-x^*$ також є коренем $g(x)$. Також $g(0) \neq 0$ та всі корені є дійсними, отже, поточний многочлен можна записати як $g(x) = f(x^2)$.

Крок 7. Многочлен $f(x)$ має ступінь не більше ніж $\frac{n}{2}$. Тоді рекурсивно знаходимо корені $f(x)$: оберненим лінійним перетворенням знаходимо корені, що були на осі $\operatorname{Re}(z) = y$ та ділимо початковий поліном $p(x)$ на знайдені корені, щоб рекурсивно знайти корені, що знаходяться ліворуч від прямої $\operatorname{Re}(z) = y$.

Опис алгоритму завершено.

Приклад 1. Розглянемо многочлен

$$p(x) = x^6 - 26x^5 + 290x^4 - 1784x^3 + 6379x^2 - 12574x + 10626.$$

Його коренями є числа $5 \pm \sqrt{3}$, $4 \pm i\sqrt{7}$, $4 \pm i\sqrt{5}$. Покладемо $\epsilon_{ps} = 10^{-10}$ та $\epsilon_{ps_2} = 10^{-5}$. Спершу буде шукати максимальну дійсну частину коренів початкового многочлена $p(x)$ бінарним пошуком. Алгоритм знаходить число $r_0 = 6.73205$, що приблизно дорівнює $5 + \sqrt{3}$. Обчислюємо нев'язку $p(r_0)$, отримуємо, що $|p(r_0)| < \epsilon_{ps_2}$, тоді згідно з алгоритмом вважаємо, що r_0 – корінь рівняння $p(x)$ та рекурсивно знаходимо корені многочлена:

$$p_1(x) = \frac{p(x)}{x - r_0}.$$

Далі алгоритм знову шукає найбільшу дійсну частину коренів, але для рівняння $p_1(x)$. Алгоритм знаходить число $r_1 = 4$, що є дійсною частиною чотирьох комплексних коренів. Далі обчислюємо нев'язку $p_1(r_1)$ і маємо, що $|p_1(r_1)| \geq \epsilon_{ps_2}$. Тоді треба шукати комплексні корені на цій осі $\operatorname{Re}(z) = r_1$.

Обчислюємо многочлен $p_2(x) = p_1(r_1 + ix)$. Таке лінійне перетворення зсуває корені многочлена вліво на r_1 та обертає на 90 градусів за годинниковою стрілкою. Знаходимо:

$$p_3(x) = \operatorname{HCD}(p_2(x), \bar{p}_2(x)).$$

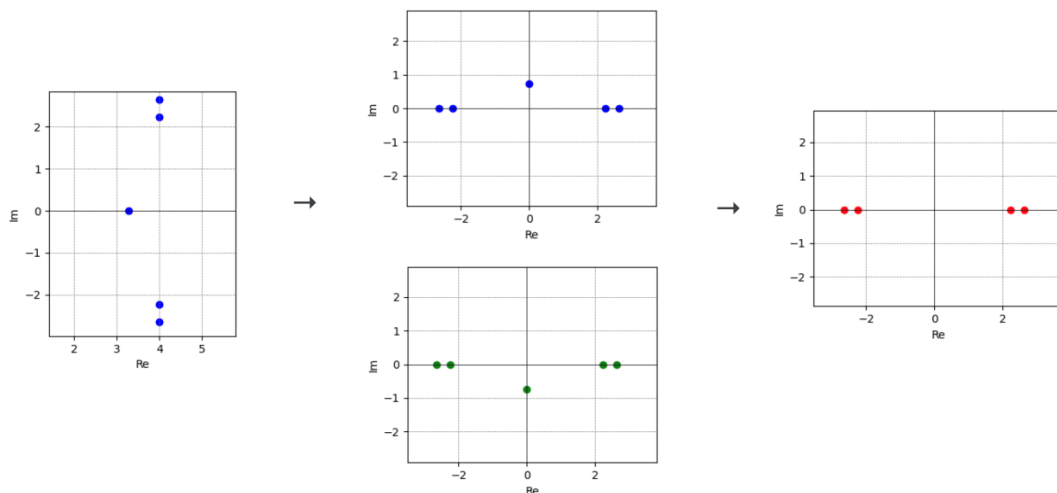


Рис. 1 – Ліворуч корені многочлена $p_1(x)$, посередині – $p_2(x), \bar{p}_2(x)$, праворуч – $p_3(x)$.

На рис. 1 зображено лінійні перетворення, що відбуваються з коренями многочлена у процесі. Позначимо $p_3(x) = p_4(x^2)$. Рекурсивно знаходимо корені многочлена $p_4(x)$. Оскільки $p_4(x)$ другого ступеня, то розв'язуємо аналітично. Маємо корені: 4.99999, 7.00000 – уявні частини початкових коренів у квадраті. Робимо обернені заміни і знаходимо ще 4 корені початкового многочлена: $4 \pm i\sqrt{4.99999}$, $4 \pm i\sqrt{7}$. Ділимо $p_1(x)$ на

$$(x - 4 + i\sqrt{4.99999})(x - 4 - i\sqrt{4.99999})(x - 4 + i\sqrt{7})(x - 4 - i\sqrt{7}).$$

Отримаємо многочлен $p_5(x)$. $p_5(x)$ – першого ступеня, знаходимо останній корінь аналітично. Отримуємо 3.26794, що приблизно дорівнює $5 - \sqrt{3}$. Отже, маємо корені:

$$3.26794, 4 + i \cdot 2.23606, 4 - i \cdot 2.23606, 4 + i \cdot 2.64575, 4 - i \cdot 2.64575, 6.73205.$$

Алгоритм 1.3 Аналіз стійкості нульового розв'язку рівняння (1).

Крок 1. Знаходимо характеристичний многочлен $f(x)$ матриці A .

Крок 2. Знаходимо найбільшу дійсну частину коренів $f(x)$ з точністю ϵ_{ps} , використовуючи алгоритм 1.1.

Позначимо $p_{\max}$ як реальне значення максимальної дійсної частини, а p^* – наше знайдене значення. З алгоритму

му отримуємо, що $|p_{\max} - p^*| < eps$.

Крок 3. Знаходимо характеристичний многочлен $g(x)$ матриці B . Позначимо його корені як $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Крок 4. З доведених теорем про стійкість маємо, що треба дізнатися знак виразу $p_{\max} + \mu_{\max}$, де $\mu_{\max}$ – найбільша дійсна частина коренів рівняння $g(x)$.

Крок 5. Спершу перевіримо на асимптотичну стійкість

$$p_{\max} + \mu_{\max} < \mu_{\max} + p^* + eps.$$

Якщо $\mu_{\max} + p^* + eps < 0$, то маємо асимптотичну стійкість. Тоді обчислюємо многочлен $g(x - p^* - eps)$, коренями якого є числа $y_i + p^* + eps$ і застосуємо критерій Гурвіца для перевірки, що всі $\operatorname{Re}(y_i + p^* + eps) < 0$.

Крок 6. Далі перевіримо чи $p_{\max} + \mu_{\max}$ більше 0 з точністю eps :

$$p_{\max} + \mu_{\max} > \mu_{\max} + p^* - eps.$$

Тоді, якщо $\mu_{\max} + p^* - eps \geq 0$, то $p_{\max} + \mu_{\max} > 0$ і нульовий розв'язок є нестійким. Перевіримо протилежну нерівність $\mu_{\max} + p^* - eps < 0$. Обчислюємо многочлен $g(x - p^* + eps)$, коренями якого є числа $y_i + p^* - eps$, і перевіримо критерієм Гурвіца, чи всі $\operatorname{Re}(y_i + p^* - eps) < 0$. Якщо існує i , що $\operatorname{Re}(y_i + p^* - eps) \geq 0$, то маємо нестійкість.

Крок 7. Інакше вважаємо, що $p_{\max} + \mu_{\max} \approx 0$. Для подальших висновків з теорем про стійкість треба дізнатися, чи всі жорданові клітини матриці A , що відповідають власним числам з дійсною частиною $p_{\max}$, будуть розміру 1. Аналогічну умову досліджуємо для матриці B та $\mu_{\max}$. Це еквівалентно тому, що жодна жорданова клітина з відповідними власними числами не містить приєднаних векторів. Приєднаних векторів для власного числа ν не буде у жорданових клітинах тоді і тільки тоді, коли розмір власного підпростору ν дорівнює кратності кореня ν у характеристичному многочлені. Цю умову можна записати як:

$$\operatorname{rang}(A - \nu E) = n - r,$$

де r – кратність кореня ν .

Крок 8. Якщо знайти всі корені характеристичних многочленів $f(x)$ та $g(x)$, то зможемо перевірити умову

$$\operatorname{rang}(A - \nu E) = n - r(\nu)$$

для всіх ν , що $\operatorname{Re}(\nu) = p_{\max}$ та аналогічні умови для матриці B .

Крок 9. Тоді знаходимо корені многочленів $f(x)$, $g(x)$ алгоритмом 1.2 і перевіряємо умови на ранги. Якщо всі умови виконуються, то маємо стійкий нульовий розв'язок, інакше – нестійкий.

Опис алгоритму закінчено.

Приклад 2. Розглянемо лінійне матричне рівняння (1) з

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покладемо $eps = 10^{-10}$ та $eps_2 = 10^{-5}$. Характеристичний многочлен матриці A має вигляд:

$$f(x) = x^2 + 17x + 45.$$

Бінарним пошуком шукаємо $p_{\max}$ – найбільшу дійсну частину коренів $f(x)$. Маємо, що $p_{\max} \approx -3.27984$. Характеристичний многочлен $g(x)$ матриці B записується так:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4.$$

Нехай $\mu_{\max}$ – найбільша дійсна частина коренів $g(x)$.

Далі перевіряємо, чи сума $p_{\max}$ та $\mu_{\max}$ менше за 0, щоб перевірити, чи нульовий розв'язок асимптотично стійкий. Для цього, використовуючи критерій Гурвіца, перевіряємо, чи всі дійсні частини коренів многочлена $g(x - p_{\max} - eps)$ менші за 0,

$$g(x - p_{\max} - eps) \approx x^2 + 4.55967x + 0.19765.$$

З критерію Гурвіца отримуємо, що всі дійсні частини менші за 0. Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий. Максимальна дійсна частина власних чисел

$$\text{матриці } A \text{ дорівнює } \frac{\sqrt{109} - 17}{2}, \text{ а матриці } B \text{ дорівнює } (\sqrt{5} + 3).$$

Їх сума менша за 0. Тоді за теоремою 1 нульовий розв'язок лінійного матричного рівняння (1) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Висновки. У роботі запропоновано алгебраїчний підхід до дослідження стійкості нульового розв'язку матричних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. На основі аналізу власних чисел і жорданової форми матриць сформульовано критерії асимптотичної стійкості, стійкості та нестійкості розв'язків у сенсі Ляпунова. Теоретичні результати подано у вигляді лем і теорем з доведеннями.

Запропоновано алгоритм для знаходження максимальної дійсної частини коренів характеристичних многочленів із використанням критерію Гурвіца. Також розроблено метод для обчислення всіх коренів многочлена з урахуванням їх кратностей і структури жорданових клітин. Роботу алгоритмів проілюстровано числовими прикладами, що підтверджують їх ефективність.

Таким чином, у роботі побудовано цілісний підхід до аналітичного та чисельного дослідження стійкості для широкого класу лінійних матричних систем, який може бути використаний у подальших теоретичних і прикладних дослідженнях.

Список літератури

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К. : Київський університет. – 2008. – 383 с.
2. Башняков О. М., Пічкур В. В. Задача синтезу в теорії керування. – К. : Сталь, 2012. – 116 с.
3. Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь. – К. : Київський університет, 2023. – 367 с.
4. Bertsekas D. Dynamic programming and optimal control. – Belmont, Massachusetts : Athena Scientific, 2005. – 281 p.
5. Khalil H. K. Nonlinear systems. – NJ : Prentice Hall, 2002. – 766 p.
6. Kurzhanski A., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes : Theory and Computation. – Boston : Birkhäuser, 2014. – 457 p.
7. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data. – River Publishers, 2021. – 224 p.
8. Reid W. T. Riccati Differential Equations. – Academic Press, 2012. – 226 p.
9. Barbu V. Differential Equations. – Springer, 2016. – 224 p.

References (transliterated)

1. Bashniakov O. M., Harashchenko F. H., Pichkur V. V. *Praktychna stiykist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical stability, evaluations and optimization]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2008. 383 p.
2. Bashniakov O. M., Pichkur V. V. *Zadacha synthezu v teoriiy keruvannya* [The synthesis problem in control theory]. Kyiv, Stal' Publ., 2012. 116 p.
3. Pichkur V. V., Kapustian O. V., Sobchuk V. V. *Stiykist' ta atraktory evoliutsiynykh rivnyan'* [Stability and attractors of evolutionary equations]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2023. 367 p.
4. Bertsekas D. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont, Massachusetts, Athena Scientific, 2005. 281 p.
5. Khalil H. K. *Nonlinear systems*. NJ, Prentice Hall, 2002. 766 p.
6. Kurzhanski A., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes : Theory and Computation*. Boston, Birkhäuser, 2014. 457 p.
7. Nakonechnyi O., Podlipenko Y. *Guaranteed Estimation Problems in the Theory of Linear Ordinary Differential Equations with Uncertain Data*. River Publishers, 2021. 224 p.
8. Reid W. T. *Riccati Differential Equations*. Academic Press, 2012. 226 p.
9. Barbu V. *Differential Equations*. Springer, 2016. 224 p.

Надійшла (received) 16.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Денисов Костянтин Ігорович – студент першого курсу магістратури та інженер кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Denysov Kostiantyn Ihorovich – first-year Master's student of the Department of Complex Systems Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5525-2753>; e-mail: kostyadenisov999@gmail.com.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38 (044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.