

І. М. ГОРБАНЬ, В. Г. БАСОВСЬКИЙ

ГЕНЕРАЦІЯ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ ПОТОКОМ РІДИНИ НАД ДВОВИМІРНИМИ ЦИЛІНДРИЧНИМИ КАНАВКАМИ РІЗНОЇ ГЛИБИНИ

Досліджуються гідродинамічне і акустичне поля, які генеруються течією в'язкої рідини навколо стінки з вирізаною у ній поперечною циліндричною канавкою. Актуальність цієї проблеми зумовлена широким використанням подібних нерівностей поверхні в технічних пристроях. Задача розв'язується чисельно в припущенні малих чисел Маха з використанням гібридного методу, який поєднує незалежну оцінку близького гідродинамічного поля з акустичною аналогією Лайтхілла. Для моделювання в'язкої нестисливої течії в пристінному потоці з циліндричною канавкою використовується вихрова числова схема; звук, який генерується канавкою в дальньому полі оцінюється за допомогою рівняння Фокс Вільямса-Хукінгса в частотній області. Циліндрична канавка характеризується кутовим розміром α , який прямо пропорційно пов'язаний з її глибиною. Розглядаються канавки з $\alpha = 40^\circ$, 60° і 90° , які за прийнятою класифікацією є мілкими. Примежовий шар на стінці перед канавкою покладається ламінарним, а його товщина є набагато меншою за глибину нерівності. Течія характеризується числом Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$, що обчислюється за швидкістю незбуреної течії і хордою канавки. Отримано, що над нерівністю встановлюється режим зсувного шару. Він характеризується автоколиваннями потоку всередині канавки, викликаними взаємодією вихрових структур, що утворилися в зсувному шарі, з кормовою крайкою канавки. При цьому, чим глибшою є канавка, тим стійкішим буде зсувний шар, який знаходиться між вільною течією і рециркуляційною зоною. Зі збільшенням глибини канавки зменшуються як частота автоколивань, так і середній коефіцієнт опору. Конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі не залежить від кутового розміру канавки й дорівнює приблизно 0.42 від швидкості незбуреного потоку. Коливання потоку випромінюють у далекому акустичному полі диполь з нерівномірними пелюстками, коли інтенсивність звуку у зворотному напрямку вища, ніж у прямому. Зі збільшенням кутового розміру канавки амплітуда звукових коливань в далекому полі зростає для всіх напрямків.

Ключові слова: пристінна течія, циліндрична канавка, чисельне моделювання, далеке акустичне поле, дипольне випромінювання.

I. M. GORBAN, V. G. BASOVSKY

GENERATION OF AN ACOUSTIC FIELD BY A FLUID FLOW OVER TWO-DIMENSIONAL CYLINDRICAL CAVITIES OF VARIOUS DEPTH

The hydrodynamic and acoustic fields generated by the flow of viscous fluid around a cross cylindrical groove cut in a solid wall are investigated. The relevance of this study is caused by the wide use of such surface irregularities in technical devices. The problem is solved numerically under the assumption of a small Mach number using a hybrid method that combines an independent estimate of the near hydrodynamic field with the acoustic Lighthill analogy. The vortex numerical scheme is used to simulate the viscous incompressible flow near the wall with a cylindrical groove; the sound generated by the groove in the far field is estimated based on the Ffowcs Williams-Hawkins equation in the frequency domain. A cylindrical groove is characterized by an angular size α , which is directly proportional to its depth. The grooves with $\alpha = 40^\circ$, 60° and 90° are considered, which are shallow according to the accepted classification. The boundary layer developed in front of the groove is assumed to be laminar, and its thickness is much less than the depth of the wall irregularity. The flow is characterized by the Reynolds number $Re = 2 \cdot 10^4$ based on the flow velocity and the chord of the groove. The characteristics of the near hydrodynamic field point out that the groove operates in the shear-layer mode, which is characterized by self-sustained oscillations of the flow caused by collision of large-scale vortices developed in the shear layer with the groove trailing edge. It is also obtained that the shear layer localized between the free flow and the recirculation zone is more stable for the deeper groove. When increasing the groove depth, both the self-oscillation frequency and the mean drag coefficient drop. The convective velocity of vortex structures in the shear layer does not depend on the groove angular size and is approximately 0.42 of the velocity of the undisturbed flow. The flow oscillations radiate a dipole with non-uniform lobes in the far acoustic field so that the sound intensity in the backward direction is higher than in the forward direction. As the angular size of the groove increases, the amplitude of sound vibrations in the far field grows for all directions.

Key words: near-wall flow, cylindrical groove, numerical simulation, far acoustic field, dipole sound radiation.

Вступ та аналіз останніх досліджень. Обтікання *поперечних канавок* трапляється під час експлуатації різних інженерних конструкцій і транспортних засобів. Вони можуть бути як необхідним елементом конструкції, так і цілеспрямовано застосовуватися для керування пристінним потоком. Так, метою розміщення канавок на обтічній поверхні в тепломасообмінниках є додаткова *турбулізація течії* [1]. В той же час, застосування поперечної канавки для збільшення підйомної сили крила вимагає стабілізації *циркуляційної течії* всередині неї [2]. Практика показує, що пристрої з канавками не лише змінюють характеристики *гідродинамічного поля*, а й генерують інтенсивний звук, який є небажаним наслідком експлуатації таких систем. Цей ефект спонукав до появи значної кількості досліджень, де вивчався вплив поперечних канавок на розвиток акустичних збурень у потоці.

Канонічною проблемою для дослідження поперечних канавок є обтікання плоскої стінки з прямокутними вирізами. Такі нерівності поділяються на глибокі та мілкі відповідно до відношення їхніх характерних розмірів – довжини прогону й глибини [3]. Мілкі канавки, в залежності від розподілу тиску вздовж донної поверхні, можуть бути відкритими, перехідними та закритими [4]. Здебільшого досліджувалися течії над відкритими неглибокими канавками, оскільки вони найчастіше застосовуються у практиці. В [5] показано, що режим течії визначається відношенням довжини канавки до товщини витіснення примежового шару перед нею. Було встановлено, що у широкому діапазоні зміни цього параметру над канавкою встановлюється режим *автоколивань потоку*, який складається з таких послідовних явищ: відриву пристінної течії у передній крайці канавки; утворення зсувного шару на межі вільної течії та течії у канавці; зіткнення зсувного шару із кормовою стінкою канавки, внаслідок чого він розпадається на окремі вихрові структури. Ці процеси створюють значні *динамічні наванта-*

ження на конструкцію, які можуть викликати небажані наслідки аж до руйнування. Крім того, встановлено, що автоколивання зсувного шару є найважливішим джерелом звуку, який генерується потоком рідини над канавкою.

Механізм автоколивань течії над поперечною канавкою докладно описаний у [6], де вказано на його істотну залежність від числа Маха. Для стисливих потоків механізм автоколивань визначається зворотним зв'язком між гідродинамічними й акустичними збуреннями, коли нестійкість зсувного шару генерує хвилю тиску поблизу задньої кромки канавки, яка поширюється проти течії і перезапускає нестійкість зсувного шару. Частоту автоколивань у цьому разі можна оцінити за допомогою напівемпіричної формули Россітера [7]. При малих числах Маха потік можна вважати нестисливим, тобто, акустичні збурення поширюються миттєво. Очевидно, що в цьому разі зворотний зв'язок автоколивань є чисто гідромеханічним, а частота коливань залежить лише від конвективної швидкості вихрових структур у зсувному шарі [8].

Завдяки широкому застосуванню пристроїв з канавками у авіації, переважна кількість досліджень щодо цієї тематики має справу зі стисливими течіями. Поперечні канавки у потоках з малим числом Маха вивчені значно менше, хоча останнім часом вони активно використовуються і в такому режимі, зокрема, в автомобілях. В цьому випадку застосування прямих числових методів для оцінки звукового поля є неможливим через велику різницю масштабів довжини гідродинамічного й акустичного полів. Це потребує розвитку спеціальних гібридних алгоритмів, які мають поєднувати незалежну оцінку близького гідродинамічного поля з певною акустичною аналогією. В цій роботі для моделювання в'язкої нестисливої течії в пристінному потоці з циліндричною канавкою використовується вихровий метод [9]. Числова схема, яка тут застосовується, належить до схем Лагранжа високої точності, і може вважатися швидкою альтернативою прямому моделюванню в'язких течій [10, 11]. Для оцінки звуку, який генерується канавкою, використовується метод, що поєднує розв'язок гідродинамічної задачі з рівнянням Фокс Вільямса-Хукінгса (ФВ-Х) в частотній області [12, 13]. Зазначимо, що інтегральний метод ФВ-Х є розширенням акустичної аналогії Лайтхілла для потоків з твердими границями.

Постановка задачі. Досліджуються гідродинамічне і акустичне поля, які генеруються плоскопаралельним потоком в'язкої рідини в області, обмеженій плоскою стінкою з вирізаною у ній циліндричною канавкою. У стані спокою середовище в області характеризується швидкістю звуку c_0 , густиною ρ_0 і тиском p_0 . Задача розв'язується за умови, що швидкість течії U_0 є набагато меншою за швидкість звуку в незбуреному середовищі. Крім того, вважається, що прилеглий шар на стінці перед канавкою є ламінарним. Геометрія задачі й системи координат зображені на рис. 1. Контур поперечного перерізу канавки обкреслюється дугою кола, радіус якого дорівнює R_0 . Канавка характеризується кутовим розміром заданої дуги α та хордою L . Інші геометричні параметри задачі, зокрема, глибина канавки D , виражаються через L і α . Початок декартової системи координат $Oxyz$ збігається з серединою хорди канавки. На рис. 1 зображена площина $z = 0$. Тут вісь Ox паралельна вектору швидкості потоку, а вісь Oy перпендикулярна до плоскої стінки. Початок циліндричної системи координат r, θ, z збігається з початком декартової системи координат, і кут θ відраховується від додатного напрямку осі Ox проти руху стрілки годинника. Вибрані системи координат жорстко пов'язані з канавкою, тобто, в цих системах координат канавка є нерухомою, а середовище, навпаки, рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Збезрозмірювання всіх величин задачі виконується на основі параметрів L , U_0 , c_0 , ρ_0 і p_0 , які повністю характеризують задачу як з геометричного, так і з фізичного боку.

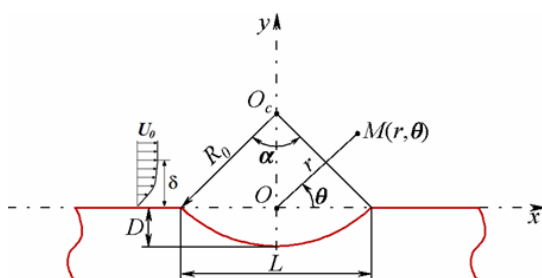


Рис. 1 – Геометрія задачі.

рівняння ФВ-Х.

Вихровий метод розв'язання двовимірних рівнянь Нав'є – Стокса. Двовимірна задача про потік в'язкого нестисливого середовища сталої густини над плоскою стінкою з круговою циліндричною канавкою (рис. 1) описується рівняннями неперервності й Нав'є – Стокса. Початковий розподіл швидкостей у середовищі вважається відомим. На нескінченності виконується умова затухання збурень: $u(r, t) \rightarrow U_0$, $p(r, t) \rightarrow p_0$, коли $r \rightarrow \infty$. Тут прийняті такі позначення: $u(r, t)$ і $p(r, t)$ – відповідно вектор швидкості й тиск збуреного середо-

Метою дослідження є описання акустичного поля, яке генерується гідродинамічною течією в точках $M(r, \theta)$, розташованих далеко від канавки. Приймаючи до уваги, що при малих числах Маха акустичне поле не впливає на гідродинамічний процес, для розв'язання цієї задачі може бути застосований гібридний метод, в якому незалежно оцінювання близького гідродинамічного поля поєднується з певною акустичною аналогією. Гідродинамічна течія розраховується тут за допомогою вихрової числової схеми [10, 11]. Отримані характеристики використовуються для побудови гідродинамічних джерел звуку в правій частині

вища в точці з радіусом-вектором r в момент часу t . Вважаємо, що на стінці канавки, а також на частині плоскої стінки безпосередньо перед і позаду канавки виконується умова прилипання. Водночас, на плоскій стінці далеко за канавкою вимагається виконання лише умови ковзання. Такий підхід дозволяє оцінити товщину прилежого шару над передньою крайкою канавки та обмежує вплив прилежого шару, розташованого далеко від неї.

Вихрові схеми, що розвинуті для моделювання в'язкої течії, ґрунтуються на рівнянні переносу завихреності, яке у двовимірному випадку має такий вигляд:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

де ∇ і Δ – відповідно диференціальні оператори Гамільтона й Лапласа; ν – кінематична в'язкість середовища. Вектор швидкості в рівнянні (1) визначається як $u = u_1 i + u_2 j$, завихреність ω є скалярною величиною, так що $\omega = \omega k = \nabla \times u$, де i, j, k – орти декартової системи координат $Oxuz$, площина Oxy якої зображена на рис. 1. Перевагою рівняння (1) є його незалежність від гідродинамічного тиску й точне виконання умови неперервності середовища та граничних умов на нескінченності. Первинною розрахунковою величиною в цьому рівнянні є завихреність, а поле швидкості визначається з поля завихреності за допомогою інтеграла Біо – Савара.

В цій роботі для розв'язання рівняння (1) використовується гібридна вихрова схема, представлена в статтях [10, 11]. Вона ґрунтується на розщепленні (1) на конвективну і дифузійну складові. Перенос завихреності моделюється рухом *лагранжевих вихрових частинок*, а її дифузія обчислюється на прямокутній сітці, накладеній на область течії. Для числового інтегрування рівнянь в'язкої дифузії та конвекції за часом застосовується явна схема другого порядку з коректуванням усіх змінних поля течії після виконання кожного під-кроку методу.

Тверда границя моделюється вихровою пеленою, інтенсивність γ якої обчислюється з умови непротікання за допомогою *методу граничних інтегральних рівнянь* [14]. Для того, щоб найбільш точно врахувати кривизну поверхні, для оцінки завихреності, яка сходиться зі стінки у потік, використовується гранична умова *типу Неймана*; вона зв'язує інтенсивність γ приєднаної вихрової пелени з функцією $\partial \omega_0 / \partial n$, де ω_0 – завихреність на стінці, n – внутрішня нормаль до границі області течії. Цей підхід вимагає розв'язання *рівняння дифузії* відносно ω_0 у пристінній області [15]. На крайках канавки, де дотична до поверхні зазнає розриву, накладається *умова Кутта – Жуковського*. Вона застосовується для обчислення інтенсивності вихрової пелени в цих точках.

Зазначимо також, що фундаментальний *розв'язок лапласіана для вихору* в області, що розглядається, знаходиться за допомогою *конформного перетворення* фізичної області течії у верхню півплощину допоміжної площини. В цій канонічній області він обчислюється із застосуванням *методу дзеркальних відображень* [16].

Рівняння переносу завихреності (1) дозволяє виокремити чисто кінематичну гідродинамічну задачу від проблеми тиску, що, безумовно, значно спрощує числове моделювання течії. Для знаходження тиску використовуються *рівняння динаміки в'язкої рідини у формі Ламба* [16]. Вони дозволяють обчислити тиск прямим інтегруванням від нескінченності до стінки. В нашій задачі зручно інтегрувати *друге рівняння системи Ламба* «звернувши вниз» вздовж вертикального напрямку.

Розв'язання рівняння ФВ-Х в частотній області. Отримані характеристики близького гідродинамічного поля використовуються як вхідні дані для звукових джерел хвильового рівняння ФВ-Х. Відомо, що класичне рівняння ФВ-Х записується в часовій області в системі координат, яка жорстко пов'язана з тілом. При цьому вважається, що тіло рухається в нерухомому середовищі. Одночлени в правій частині рівняння ФВ-Х, що описують розташовані на поверхні тіла джерела звуку монопольного й дипольного типу, мають в собі як множник *дельта-функцію Дірака* з аргументом, що залежить як від часу, так і від просторових координат. Саме це є перешкодою для застосування перетворення Фур'є безпосередньо до рівняння ФВ-Х. Але для важливого практичного випадку, коли тіло рухається прямолінійно зі сталою швидкістю, цю перешкоду можна подолати [12], а саме, за допомогою *перетворення Галілея* перейти від рухомої системи координат до нерухомої, теж жорстко пов'язаної з тілом. В такій системі координат нерухомим буде тіло, а середовище, навпаки – рухомих. Після перетворення Галілея хвильове рівняння ФВ-Х набирає вигляду конвективного хвильового рівняння [12]:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + U_i U_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + 2U_j \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right\} [\rho' H(f)] = \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)] - \frac{\partial^2}{\partial y_i} [F_i \delta(f)] + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [T_{ij} H(f)], \quad (2)$$

де монопольний, дипольний і квадрупольний члени в правій частині відповідно дорівнюють:

$$Q(y, t) = (\rho u_i - \rho_0 U_i) n_i, \quad F_i(y, t) = (p \delta_{ij} + \rho(u_i - 2U_i) u_j + \rho_0 U_i U_j) n_j, \\ T_{ij}(y, t) = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - c_0^2 \rho' \delta_{ij}. \quad (3)$$

Тут c_0 – швидкість звуку; $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $u_i = U_i + u'_i$ – відповідно повні значення густини, тиску й швидкості. Значення параметрів середовища в стані спокою позначені нижнім індексом нуль; U_i – компонен-

ти швидкості незбуреного потоку; знак штрих позначає збурення відповідної величини в потоці. Декартові координати й час позначені як y_i і t ; $\delta(f)$ – дельта-функція Дірака; $H(f)$ – функція Хевісайда; δ_{ij} – символ Кронекера. Функція $f(y)$ залежить тільки від просторових координат $y = (y_1, y_2)$ і означена так, що $f = 0$ на зовнішній поверхні тіла, $f < 0$ – усередині, $f > 0$ – ззовні; $n_j = \partial f / \partial y_j$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні нерухомого тіла. У формулах (3) в'язкою частиною тензора напружень нехтуємо і використовуємо тільки його нев'язку частину $p\delta_{ij}$.

Для скорочення запису у формулах (2) і (3) замість літерної індексації координат і проєкцій векторів використано числова. Крім того, дотримуючись *правила Ейнштейна*, якщо індекс в одноклені повторюється двічі, то це позначає операцію підсумування за цим індексом. Оскільки розглядаємо двовимірну задачу, тому індекси в цих формулах можуть набувати значень 1 і 2.

У далекому полі середовище вважаємо ізотропним акустично ідеальним, тобто, збурення густини й тиску достатньо малі ($\rho' \ll \rho_0$ і $p' \ll p_0$) та зв'язані співвідношенням $p' = c_0^2 \rho'$. Нехай середовище рухається зі швидкістю, яка менша за швидкість звуку. У цьому разі після *перетворення Фур'є* рівняння (2) і деяких спрощень частотну залежність збурення тиску (акустичний тиск) в точці спостереження y_0 далекого поля можна обчислити за наступною формулою [12]:

$$p'(y_0, \Omega) = - \oint_{f=0} i \Omega \hat{Q}(y, \Omega) G(y_0, y, \Omega) dl - \oint_{f=0} \hat{F}_i(y, \Omega) \frac{\partial G(y_0, y, \Omega)}{\partial y_i} dl - \int_{f=0} \hat{T}_{ij}(y, \Omega) \frac{\partial^2 G(y_0, y, \Omega)}{\partial y_i \partial y_j} dy, \quad (4)$$

з функцією Гріна в частотній області конвективного хвильового рівняння для вільного простору:

$$G(y_0, y, \Omega) = \frac{i}{4\beta} \exp\left(\frac{iMkr_1}{\beta^2}\right) \cdot H_0^{(2)}\left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{r_1^2 + \beta^2 r_2^2}\right). \quad (5)$$

В формулах (4) і (5) прийняті такі позначення: $r_1 = (y_{01} - y_1)$, $r_2 = (y_{02} - y_2)$; $H_0^{(2)}$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку; Ω – кутова частота; $k = \Omega / c_0$ – хвильове число; $M = U_0 / c_0$ – число Маха; $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ – множник Прандтля-Глауерта; $\hat{Q}(y, \Omega)$, $\hat{F}_i(y, \Omega)$ і $\hat{T}_{ij}(y, \Omega)$ – перетворення Фур'є відповідно функцій $Q(y, t)$, $F_i(y, t)$ і $T_{ij}(y, t)$ для фіксованої точки течії y . Щоб не плутати з відповідним індексом, уявну одиницю позначаємо як $i = \sqrt{-1}$.

Перехід в частотну область є важливим кроком розв'язання рівняння ФВ-Х для двовимірних задач, що дає можливість цілком урахувати протяжність джерел звуку поперек потоку. Це неможливо в часовій області, де функція Гріна для двовимірних задач виражається через функцію Хевісайда, а не дельта-функція Дірака, як для тривимірних задач. Тому в часовій області треба інтегрувати за часом на півнескінченному інтервалі, що неможливо фактично. Щоб перейти в часову область після обчислення звукового поля в частотній за формулою (4), треба застосувати обернене перетворення Фур'є.

Обчислення звукового поля можна суттєво спростити, якщо взяти до уваги два чинники. Перший чинник – для двовимірної задачі про обтікання тіла потоком звукова хвиля в далекому полі циліндрична з амплітудами пульсацій тиску для монопольного, дипольного і квадрупольного джерел звуку відповідно пропорційними таким величинам: $M^{3/2}$, $M^{5/2}$ і $M^{7/2}$ [13]. Отже, для малих значень числа Маха, амплітуда звуку квадрупольних джерел набагато менша за амплітуду монопольних і дипольних джерел. Тому у формулі (4) можна знехтувати останнім подвійним інтегралом для малих значень числа Маха. Другий чинник – якщо в рівнянні ФВ-Х використовуються дані близького гідродинамічного поля тільки на непроникливій поверхні (безпосередньо поверхня тіла), то $u = 0$ (умова прилипання) і у формулах (3) для $Q(y, t)$ і $F_i(y, t)$ тільки одноклен $p\delta_{ij}$ залежить від часу, коли середовище рухається прямолінійно зі сталою швидкістю. Отже, якщо знехтувати квадрупольним джерелом звуку для малих значень числа Маха, то тільки часова залежність пульсацій тиску на поверхні тіла визначає його звукове поле в потоці і для визначення звукового поля достатньо обчислити тільки другий контурний інтеграл в (4), який описує дипольне джерело звуку.

Зазначимо, що гібридний метод для розрахунку акустичних збурень у дальньому полі канавки, який поєднує вихрову схему для моделювання гідродинамічної течії та акустичну аналогію Фокс Вільямса-Хоукінгса, докладно описаний в статті [17].

Особливості числової схеми. Розвинений алгоритм застосований для дослідження гідродинамічного і акустичного полів, які утворюються при взаємодії пристінної плоскопаралельної течії з відкритими циліндричними канавками різної глибини. Глибина канавки D визначається величиною кута α (рис. 1). Розглядалися значення $\alpha = 40^\circ$, 60° і 90° . За таких параметрів $L/D \geq 3$, тобто, за прийнятою класифікацією такі канавки можна вважати неглибокими [8]. Характерним геометричним параметром в цих розрахунках є хорда канавки L . Покладається, що течія, яка набігає на канавку, є ламінарною з числом Рейнольдса $Re_L = U_0 L / \nu = 2 \cdot 10^4$.

Розрахункова область і граничні умови для завихреності зображені на рис. 2. Єдиним джерелом завихреності в потоці є частина твердої поверхні, де виконується умова прилипання; її контур наведений жирною лінією. На вході в розрахункову область і на її верхній межі потік є безвихровим. На виході з розрахункової області, де градієнти гідродинамічних параметрів невеликі, задається м'яка гранична умова $\partial^2 \omega / \partial x^2 = 0$. Ця умова вказує на те, що завихреність на виході змінюється за лінійним законом. Висота розрахункової області дорівнює $2L$, а довжина стінки за канавкою – $25L$; при цьому довжина нековзної частини, де $\omega = \omega_0$, є $5L$ (рис. 2). Як показали тестові розрахунки, розширення обчислювальної області в напрямку осей x чи y помітно не впливає на характеристики потоку.

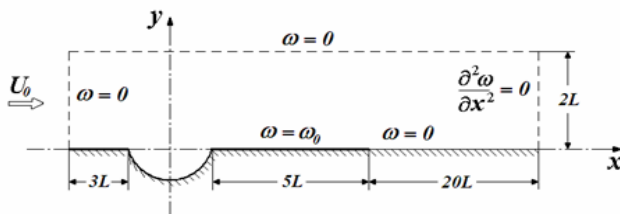


Рис. 2 – Розрахункова область.

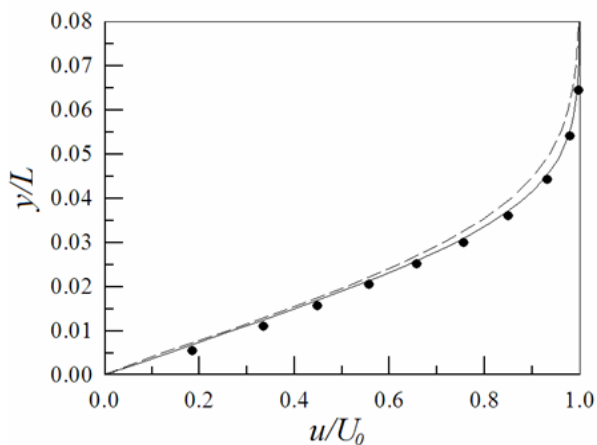


Рис. 3 – Профілі горизонтальної швидкості в пристінній області: суцільна крива – розв'язок Блазіуса для пластини; маркери – числовий розв'язок для плоскої стінки, штрихова крива – числовий розв'язок для стінки з канавкою.

шару на пластині (суцільна лінія), а також розраховані вихровим методом над плоскою стінкою (маркери) та у перерізі, що проходить через передню крайку канавки (штрихова лінія). В усіх випадках безрозмірний відносно L пробіг потоку був однаковий і дорівнював 3; інші параметри течії теж збігалися. Можна бачити, що при вибраних параметрах дискретизації числової схеми розраховані профілі швидкості є близькими до аналітичного розв'язку, що свідчить про достатню точність числової схеми щодо розрахунку параметрів примежового шару. Вплив канавки на потік оцінювався за товщиною примежового шару над передньою крайкою. Безрозмірна товщина примежового шару за формулою Блазіуса складає $\delta_{99} / L \approx 0.061$, в той час, як в чисельному експерименті з канавкою отримано $\delta_{99} / L \approx 0.073$.

Дискретні часові значення пульсацій тиску в точках сітки на поверхні плоскої стінки з канавкою були входними даними акустичної задачі з числом Маха, яке дорівнювало 0.2. Для такого значення числа Маха оцінка характеристик гідродинамічного близького поля в рамках нестисливої моделі рідини виправдана. Квадрупольним джерелом звуку нехтувалося і, як уже зазначалось, у цьому разі далеке акустичне поле буде формуватися тільки дипольними джерелами звуку, якщо в (4) контур інтегрування $f(y) = 0$ збігається із зовнішньою поверхнею плоскої стінки з канавкою. При цьому, до дипольного члена в рівнянні ФВ-Х застосовувалося швидкоперетворення Фур'є, а криволінійний інтеграл в формулі (4) обчислювався квадратурним методом трапецій.

Сітка, накладена на поле течії для оцінки в'язкої дифузії, є рівномірною з однаковим розміром комірки у вертикальному і горизонтальному напрямках: $h = 0.005L$. Крок за часом Δt вибирався з умови Курранта-Фрідрікса-Леві:

$$\frac{\max\{u_1, u_2\} \Delta t}{h} \leq 1.$$

Очевидно, що максимальне значення локальної швидкості потоку залежить від кривизни поверхні і числа Рейнольдса. Чисельний експеримент показав, що стійкість розрахунків в тій геометрії, що розглядається, може бути досягнута при $\Delta t = 0.05h$.

Особлива увага при оцінці параметрів числової схеми була приділена встановленню відстані від початку розрахункової області до передньої крайки канавки, оскільки вона визначає характеристики примежового шару, який взаємодіє з нерівністю. Для оцінки товщини ламінарного примежового шару в області передньої крайки можна скористатися відомим розв'язком Блазіуса [18]. Однак, в [19] показано, що канавка може суттєво вплинути на розвиток примежового шару перед нею. Тому, перед проведенням масових розрахунків була зроблена оцінка похибки вихрової числової схеми щодо обчислення товщини примежового шару як на плоскій поверхні, так і на стінці з циліндричною канавкою. Рис. 3 ілюструє профілі середньої поздовжньої швидкості, отримані за розв'язком Блазіуса для ламінарного примежового шару на пластині (суцільна лінія), а також розраховані вихровим методом над плоскою стінкою (маркери) та у перерізі, що проходить через передню крайку канавки (штрихова лінія).

Результати розрахунків. Відомо [5], що на розвиток течії навколо поперечної прямокутної канавки впливають два фактори – товщина витіснення прилежового шару, який сформувався до передньої крайки канавки, і відношення довжини канавки до її глибини. Якщо канавка неглибока, то в залежності від товщини втрати імпульсу прилежового шару, можливі два коливні режими потоку – *мода зсувного шару* і *слідова мода*, що визначається середнім значенням коефіцієнта опору $\bar{C}_D$. В першому випадку $\bar{C}_D \approx 0.01$, тоді як в другому ця величина є значно вищою: $\bar{C}_D \approx 0.3$. Канавки, які розглядаються в цьому дослідженні, відрізняються тим, що їхня глибина змінюється від нуля на крайках до максимального значення D у центральному осьовому перерізі. Зауважимо, що для кутів, які розглядаються ($\alpha = 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$), максимальна глибина канавки D знаходиться в діапазоні від 0.1 до 0.3, тобто, виконується $L/D > 3$, і такі нерівності можна вважати неглибокими.

Щоб визначити моду коливань потоку над круговою циліндричною канавкою, розглянемо часову залежність коефіцієнта опору $\bar{C}_D$ для канавок різного кутового розміру. Вони представлені на рис. 4, а. Тут коефіцієнт $\bar{C}_D$ нормований відносно D і зведений до одиничної довжини вздовж осі канавки, а відрізок часу охоплює десять послідовних статистично стаціонарних періодів коливань потоку. Характеристики кривих на рис. 4, а зі збільшенням кутового розміру канавки змінюються так: середнє значення $\bar{C}_D = 0.039, 0.023$ та 0.02 , середній безрозмірний період коливань (відстань між послідовними максимумами) $T \cdot (U_0/L) = 0.557, 0.784, 1.021$. Тобто, при збільшенні глибини канавки коефіцієнт опору зменшується, а період коливань потоку зростає. Оскільки значення $\bar{C}_D$ малі, можна констатувати, що над усіма канавками встановлюється мода зсувного шару з відповідними числами Струхаля $St = fL/U_0 = 1.797, 1.276, 0.979$ ($f = 1/T$ – частота коливань часової залежності C_D).

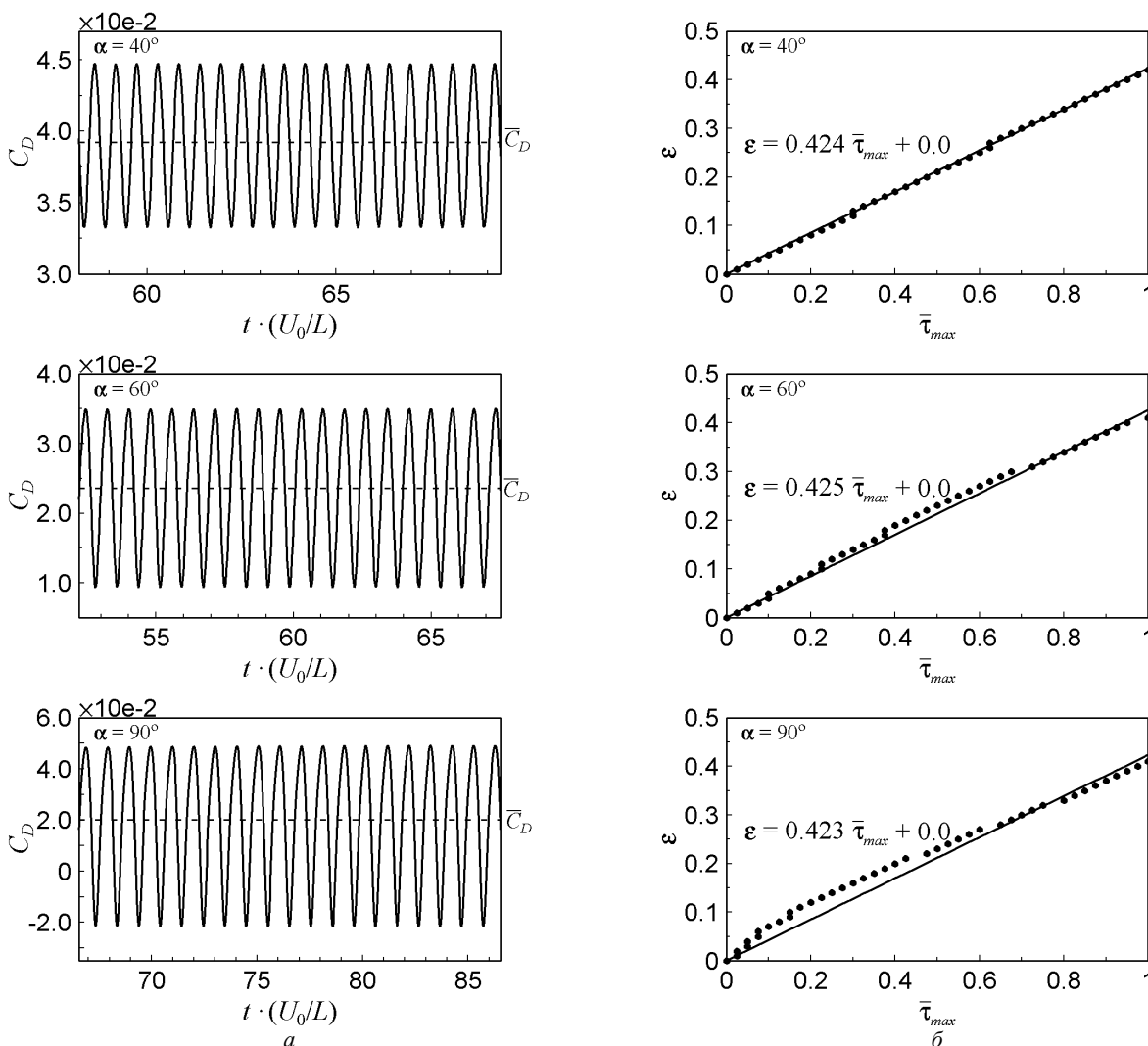


Рис. 4. – Характеристики близького гідродинамічного поля: а – часові залежності коефіцієнтів опору; б – до обчислення конвективної швидкості вихрових структур у зсувному шарі.

Факт встановлення моди зсувного шару над канавкою підтверджується миттєвими картинами розподілу завихреності та тиску у послідовні моменти часу протягом одного періоду T коливань опору. Вони показані на рис. 5. Момент часу $t = 0$ відповідає тут максимальному значенню коефіцієнта опору C_D . Наведені результати демонструють класичну поведінку потоку в канавці в режимі коливань зсувного шару. Після відриву у передній крайці зсувний шар втрачає стійкість, і в ньому генеруються вихрові структури великого масштабу, які обертаються за годинникову стрілкою. Маркерами вихрових структур в зсувному шарі є зони мінімального тиску; вони зображені чорним кольором. Видно, що вихори утворюються приблизно посередині канавки; рухаючись до задньої крайки канавки, вони зростають і після зіткнення з кормовою стінкою поділяються на дві частини. Одна частина завихреності покидає канавку й рухається вниз за потоком, збільшуючи товщину примежового шару на плоскій поверхні за канавкою. Інша частина, сповзаючи вниз по стінці канавки, утворює рециркуляційну зону всередині канавки. При цьому, в околі задньої крайки канавки генеруються раптові флуктуації тиску великої амплітуди. Видно, що в зсувному шарі цієї канавки в будь-який момент часу присутні дві вихрові структури. Розрахунки показали, що у разі меншої нерівності (при $\alpha = 40^\circ$) в зсувному шарі одночасно ідентифікуються три вихори, причому, вони зароджуються значно ближче до передньої крайки. Таким чином, чим глибшою є канавка, тим стійкішим буде зсувний шар, що розвивається між вільною течією і рециркуляційною зоною.

Другим елементом зворотного зв'язку автоколивань є індуквання швидкості вихровими структурами зсувного шару за законом Біо – Савара. Зазначимо, що для малих дозвукових чисел Маха довжина канавки значно менша, ніж довжина акустичної хвилі. Отже, у цьому разі акустичні збурення не можуть безпосередньо впливати на характеристики течії в канавці, оскільки поширюються практично миттєво, і зворотний зв'язок автоколивань може бути за природою тільки гідродинамічний (нестисливий).

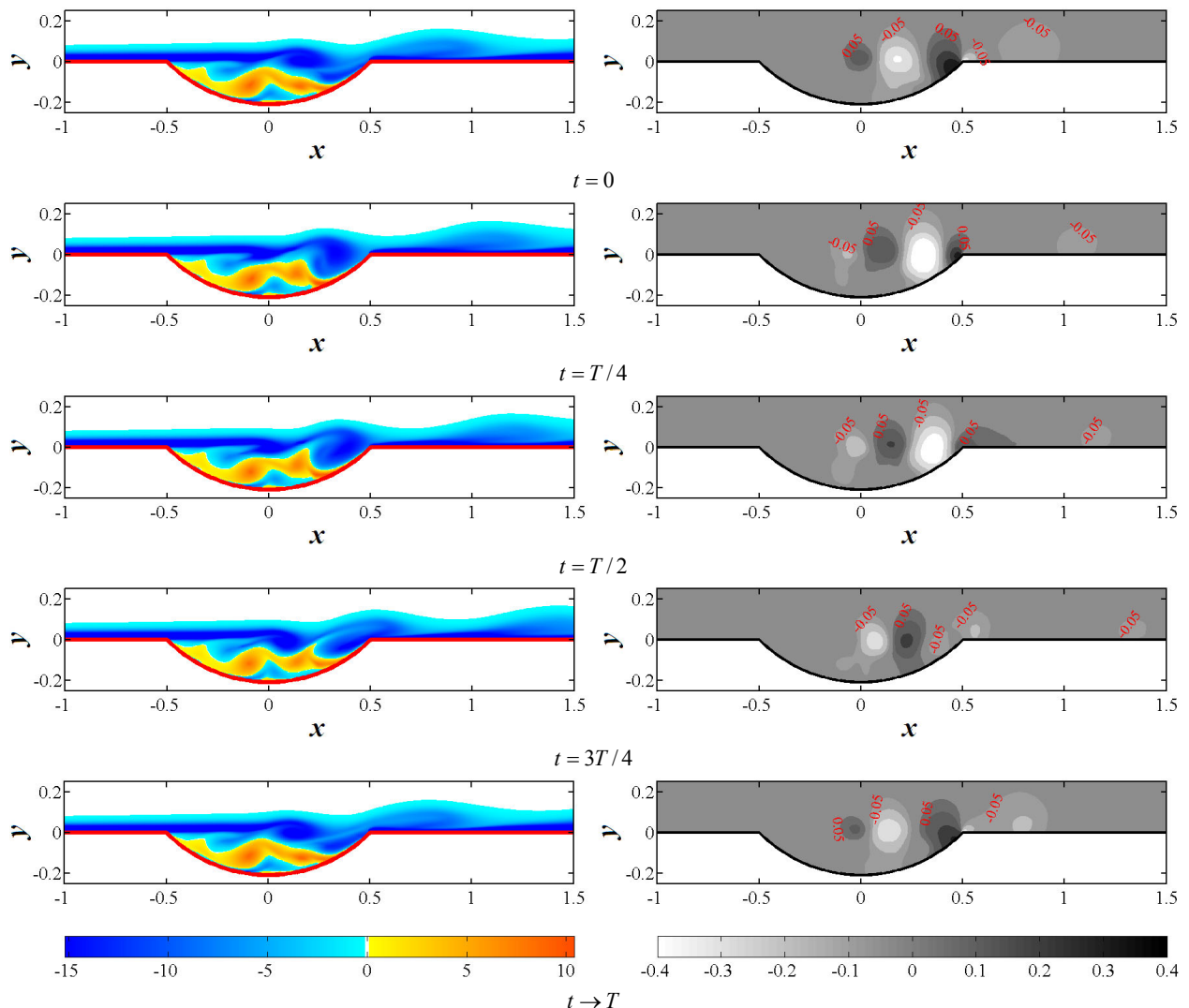


Рис. 5 – Миттєві картини розподілу завихреності (зліва) та тиску (справа) навколо канавки з кутовим розміром $\alpha = 60^\circ$ протягом одного періоду.

Для того, щоб визначити конвективну швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою, розглянемо коефіцієнт взаємної кореляції тиску $R_{12}(\tau)$ між двома точками на хорді канавки, де τ – час затримки між часовими залежностями тиску в точках, що розглядаються. На миттєвих картинках для тиску добре видно, Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 2 (9)'2025.

що вихрові структури в зсувному шарі зароджуються і формуються не безпосередньо біля передньої крайки, а на деякій відстані від неї вниз за течією, ближче до геометричного центру хорди канавки. Тому коефіцієнт $R_{12}(\tau)$ будемо аналізувати для точок хорди канавки з абсцисами $x \geq 0$, де вихрові структури вже сформовані, починаючи з опорної точки в центрі хорди з абсцисою $x = 0$. Напрямок руху вихрових структур відомий, тому коефіцієнт $R_{12}(\tau)$ досить розглянути тільки для невід'ємних значень τ . Точність обчислення координати та амплітуди першого максимуму $R_{12}(\tau)$, порівняно з іншими, найменше залежить від крайових ефектів, які неминучі через скінченний інтервал часу та дискретний крок часових залежностей тиску. Щоб позбутися фазового зв'язку часових залежностей тиску у двох точках, абсцису $\tau_{\max}$ першого максимуму $R_{12}(\tau)$ для $\tau \geq 0$ вважаємо справжнім часом затримки. Побудуємо графік залежності безрозмірної відстані між заданою точкою на хорді канавки й опорною $\varepsilon = |x - x_0|/L$ від безрозмірного часу затримки $\bar{\tau}_{\max} = \tau_{\max} \cdot (U_0/L)$ для відповідної локації (жирні точки на рис. 4, б). Характер розміщення жирних точок на цьому рисунку нашою думкою про прямолінійну залежність ε від $\bar{\tau}_{\max}$. Відповідна пряма лінія побудована методом найменших квадратів (рис. 4, б) так, щоб вона проходила через точку $(0, 0)$. Кутовий нахил цієї прямої і є шукана безрозмірна конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою. Тут маємо, що незалежно від кутового розміру канавки $U_c/U_0 \approx 0.42$. Такі значення конвективної швидкості вихрових структур над канавкою узгоджується з відомими даними в літературі $0.4 < U_c/U_0 < 0.6$. Вихрові структури в зсувному шарі концентруються в певних точках і синхронно рухаються вниз за течією. Тому частота зіткнення цих структур зі стінкою в кормовій частині канавки залежить від їхньої конвективної швидкості і кількості на хорді канавки, а також і відстані між ними. Для потоків з малим числом Маха, коли акустичним оберненим зв'язком можна знехтувати, саме ця частота зіткнення і визначає число Струхала потоку (усталену частоту автоколивань). Отже, частоту коливань можна легко визначити із адаптованої для нестисливої рідини напівемпіричної формули Россітера [20]:

$$St = \frac{fL}{U_0} = \frac{U_c}{U_0}(n - \alpha), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де n – кількість вихрових структур уздовж хорди канавки; $\alpha = 0.25$ – емпірична фазова затримка вихрових структур у зсувному шарі. У нашому разі ця формула коли $n = 3$, для $\alpha = 40^\circ$ і $n = 2$ для $\alpha = 60^\circ$ і 90° та відповідних значень чисел Струхала дає завищену оцінку конвективної швидкості. Така розбіжність тут пов'язана з тим, що у формулі Россітера вихрові структури зсувного шару пробігають усю хорду канавки від крайки до крайки, тоді як уже зазначалось, в нашому разі вихрові структури пробігають не всю довжину хорди. Це пояснює чому значення частоти Струхала обчисленої за формулою і визначеної в нашому числовому моделюванні збігаються, незважаючи на різні значення конвективної швидкості вихрових структур зсувного шару.

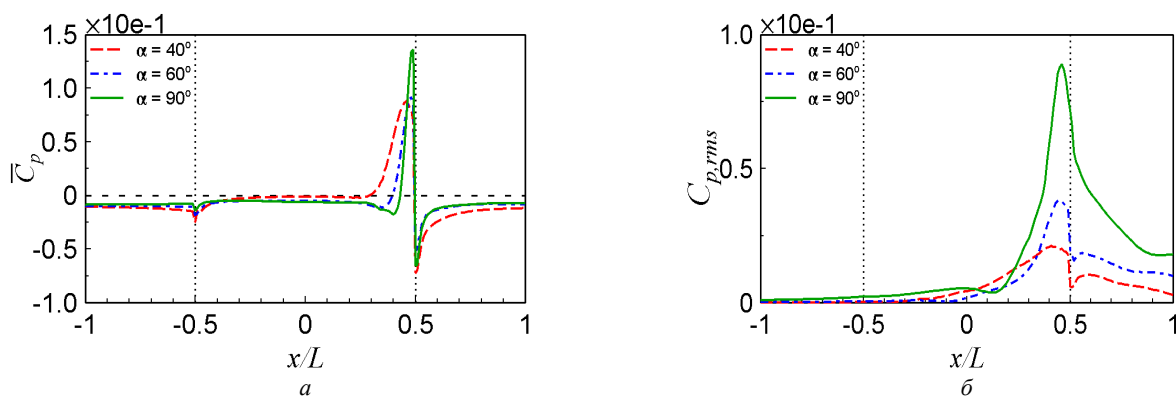


Рис. 6 – Коефіцієнт тиску на стінці канавки: а – середнє значення, б – середньоквадратичне відхилення.

Потік над канавкою генерує відповідні пульсації тиску на її поверхні. Інтегральною характеристикою цих пульсацій є середнє за часом значення коефіцієнта тиску $\bar{C}_p$ і його середньоквадратичне відхилення $C_{p,rms}$. Відповідні залежності зображені на рис. 6, а і б. На цих рисунках частини кривих між вертикальними штриховими лініями відповідають точкам стінки канавки, які однозначно характеризуються своїми проєкціями на вісь Ox . Як бачимо, незалежно від кута α , біля передньої крайки значення і амплітуда коливань величини $\bar{C}_p$ незначні, тоді як біля задньої – маємо стрімке зростання і падіння величини $\bar{C}_p$. Такі різкі перепади тиску в кормовій частині канавки зумовлені близьким сусідством зони раптового гальмування потоку стінкою канавки і зони стрімкого прискорення потоку на задній крайці канавки. Середньоквадратичне відхилення коефіцієнта C_p від його середнього значення в кормовій частині стінки канавки зумовлене періодичними ударами об стінку вихрових структур зсувного шару. На іншій частині стінки канавки причиною незначних коливань величини $C_{p,rms}$ є зміна конфігурації рециркуляційних зон в канавці протягом одного циклу коливань. На плоскій поверхні за канав-

кою в міру того як затухають вихрові структури, що покинули канавку, зменшується величина $C_{p,rms}$. Зазначимо, що біля задньої крайки канавки середнє значення і середньоквадратичне відхилення коефіцієнта тиску суттєво залежать від кутового розміру канавки.

Акустичне далеке поле, яке генерується тілом у потоці в'язкої рідини, є певним лінійним відображенням пульсацій тиску в близькому гідродинамічному полі. Тому, суттєва зміна кількісних характеристик середньоквадратичних відхилень пульсацій тиску на стінці канавки є причиною кардинальних змін діаграми спрямованості. Частота коливань звукового тиску у фіксованій точці далекого поля дорівнює частоті Струхалю потоку. Тому характеристики спрямованості звукового поля можна розглядати для амплітуди пульсацій тиску p'_{amp} . Такі характеристики спрямованості зображені на рис. 7 для точок півкола з центром в точці O і безрозмірного радіусу $r/L = 80$. Амплітуда пульсацій тиску тут нормована відносно динамічного тиску потоку. Як бачимо, характеристики спрямованості вздовж потоку мають явний дипольний характер з неоднаковими пелюстками. Назустріч потоку інтенсивність звуку, що випромінює канавка, є більшою порівняно з інтенсивністю звуку вниз за потоком. Для кута $\alpha = 90^\circ$ інтенсивність звуку різко зростає в усіх напрямках.

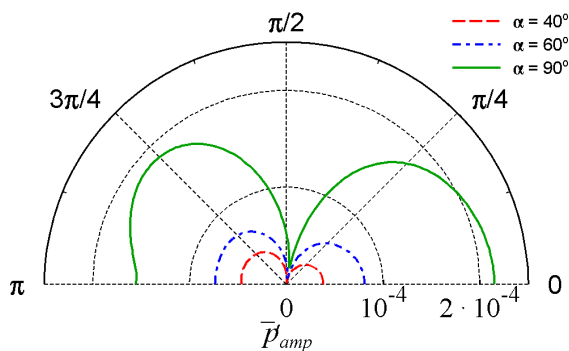


Рис. 7 – Характеристика спрямованості звукового поля, яке генерується стінкою із циліндричною канавкою.

глибина цих канавок знаходиться в діапазоні від 0.1 до 0.3, тобто, за прийнятою класифікацією такі нерівності є мілкими. Розрахунки виконані для числа Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^4$, яке обчислюється за швидкістю прямолінійної течії і хордою канавки.

Результати моделювання свідчать про встановлення навколо канавок, що розглядалися, режиму зсувного шару. Його властивістю є розпад зсувного шару на вихрові структури великого масштабу, динаміка яких є причиною автоколивань потоку всередині канавки. Знайдено, що для канавки з кутовим розміром 40° встановлюється третя мода коливань, коли у зсувному шарі ідентифікуються три великі вихори. Над глибшими канавками, які характеризуються кутами 60° і 90° , розвивається друга мода коливань з двома вихорами. Відповідно, число Струхалю зменшується від 1.797 для 40° до 0.979 для 90° , що вказує на суттєву залежність динаміки вихрових структур у зсувному шарі від кутового розміру канавки. Водночас, конвективна швидкість вихрових структур у зсувному шарі над канавкою не залежить від її кутового розміру й дорівнює приблизно 0.42 від швидкості незбуреного потоку. Ця швидкість є меншою, ніж для прямокутної канавки, що є наслідком специфічної геометрії. Коефіцієнт опору канавки падає при збільшенні її кутового розміру (глибини).

Досліджені характеристики спрямованості звукового поля для числа Маха $M = 0.2$. Отримано, що гідродинамічна течія над циліндричною поперечною канавкою є джерелом дипольного випромінювання звуку в далекому полі з нерівномірними пелюстками. Зі збільшенням кутового розміру канавки амплітуда звукових коливань в далекому полі зростає для всіх напрямків.

Список літератури

1. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements // Flow, Turbulence and Combustion. – 2013. – Vol. 90. – P. 86 – 99. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
2. Gregorio F., Fraioli G. Flow control on a high thickness airfoil by a trapped vortex cavity // Proceedings of 14th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics. – Lisbon, Portugal, 2008. – No. 1363. – 12 pp.
3. East L. F. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities // J. Sound and Vibration. – 1966. – Vol. 3. – P. 277 – 287. DOI: 10.1016/0022-460X(66)00096-4.
4. Stallings R. Jr., Wilcox F. Jr. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds // Technical Publication. Report Number: NASA-TR-2683. – NASA, June, 1987. – 75 pp.
5. Gharib M., Roshko A. The effect of flow oscillations on cavity drag // J. Fluid Mechanics. – 1987. – Vol. 177. – P. 501 – 530. DOI: 10.1017/S002211208700106X.
6. Rockwell D., Naudascher E. Review: self-sustaining oscillations of flow past cavities // J. Fluid Engineering. – 1978. – Vol. 100. – P. 152 – 165. DOI: 10.1115/1.3448624.
7. Rossiter J. E. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds // ARC Reports and Memoranda. – 1964. – No. 3438. – 36 p. – Режим доступу : <https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/handle/1826.2/4020>. – Дата звертання : 11 травня 2025 р.
8. Lin J. C., Rockwell D. Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity // AIAA J. – 2001. – Vol. 39. – P. 1139 – 1151. DOI: 10.2514/2.1427.
9. Cottet G. H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice. – London : Cambridge University Press, 2000. – 328 p.
10. Горбань В. О., Горбань І. М. Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель та алгоритми управління //

- Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Т. 7. – С. 8 – 26.
11. Gorban I. M., Lebid O. G. Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers // *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. – Springer, Cham. – 2019. – P. 159 – 179. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_10.
 12. Lockard D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation // *J. Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 229. – P. 897 – 911. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2522.
 13. Guo Y. P. Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems // *J. Fluid Mechanics*. – 2000. – Vol. 403. – P. 201 – 221. DOI: 10.1017/S0022112099006989.
 14. Довгий С. А., Лифанов І. К. Методи рішення інтегральних рівнянь. – К.: Наукова думка, 2012. – 295 с.
 15. Ploumhans P., Winckelmans G. S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry // *J. Computational Physics*. – 2000. – Vol. 165. – P. 354 – 406. DOI: 10.1006/jcph.2000.6614.
 16. Lamb H. *Hydrodynamics*. – Cambridge: New York: Cambridge University Press, 1993. – 738 p.
 17. Basovsky V. G., Gorban I. M., Khomenko O. V. Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction // *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. – Springer, Cham, 2019. – P. 137 – 158. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_9.
 18. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 817 p.
 19. Larsson J., Davidson L., Olsson M., Eriksson L. E. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low Mach number // *AIAA J.* – 2004. – Vol. 42. – P. 2462 – 2473. DOI: 10.2514/1.1339.
 20. Gloerfelt X. Cavity noise. VKI lecture series 2009-03, aerodynamics noise from wall-bounded flows. – Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Brussels, 2009. – P. 130 – 147.

References (transliterated)

1. Voskoboinick V., Kornev N., Turnov J. Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2013, Vol. 90, pp. 86–99. DOI: 10.1007/s10494-012-9433-9.
2. Gregorio F., Fraioli G. Flow control on a high thickness airfoil by a trapped vortex cavity. *Proceedings of 14th International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*. Lisbon, Portugal, 2008, No. 1363, 12 pp.
3. East L. F. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *J. Sound and Vibration*. 1966, Vol. 3, pp. 277–287. DOI: 10.1016/0022-460X(66)00096-4.
4. Stallings R. Jr., Wilcox F. Jr. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds. *Technical Publication*. Report Number: NASA-TR-2683. NASA, June, 1987. 75 pp.
5. Gharib M., Roshko A. The effect of flow oscillations on cavity drag. *J. Fluid Mechanics*. 1987, Vol. 177, pp. 501–530. DOI: 10.1017/S002211208700106X.
6. Rockwell D., Naudascher E. Review: self-sustaining oscillations of flow past cavities. *J. Fluid Engineering*. 1978, Vol. 100, pp. 152–165. DOI: 10.1115/1.3448624.
7. Rossiter J. E. Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. *ARC Reports and Memoranda*. 1964, No. 3438, 36 p. Available at: <https://reports.aerade.cranfield.ac.uk/handle/1826.2/4020>. (accessed 11 May 2025).
8. Lin J. C., Rockwell D. Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity. *AIAA J.* 2001, Vol. 39, pp. 1139–1151. DOI: 10.2514/2.1427.
9. Cottet G. H., Koumoutsakos P. *Vortex methods: theory and practice*. London, Cambridge University Press, 2000. 328 p.
10. Gorban V. O., Gorban I. M. Vykrova struktura potoku pry obtikanni kvadratnoyi pryzmy: chyslova model' ta algoritmy upravlinnya [Vortex pattern of the flow near a square prism: numerical model and algorithms of control]. *Prykladna gidromekhanika* [Applied Hydromechanics]. 2005, vol. 7, pp. 8–26.
11. Gorban I. M., Lebid O. G. Numerical Modeling of the Wing Aerodynamics at Angle-of-Attack at Low Reynolds Numbers. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham, 2019. pp. 159 – 179. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_10.
12. Lockard D. P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation. *J. Sound and Vibration*. 2000, Vol. 229, pp. 897–911. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2522.
13. Guo Y. P. Application of the Ffowcs Williams/Hawkings equation to two-dimensional problems. *J. Fluid Mechanics*. 2000, Vol. 403, pp. 201–221. DOI: 10.1017/S0022112099006989.
14. Dovgii S. A., Lifanov I. K. *Metodu resheniya integral'nykh uravneniy* [Methods of solution of integral equations]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2012, 295 p.
15. Ploumhans P., Winckelmans G. S. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry. *J. Computational Physics*. 2000, Vol. 165, pp. 354–406. DOI: 10.1006/jcph.2000.6614.
16. Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1993. 738 p.
17. Basovsky V. G., Gorban I. M., Khomenko O. V. Modification of hydrodynamic and acoustic fields generated by a cavity with fluid suction. *Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems*. Springer, Cham, 2019. pp. 137–158. DOI: 10.1007/978-3-319-96755-4_9.
18. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New York, McGraw-Hill, 1979. 817 p.
19. Larsson J., Davidson L., Olsson M., Eriksson L. E. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low Mach number. *AIAA J.* 2004, Vol. 42, pp. 2462–2473. DOI: 10.2514/1.1339.
20. Gloerfelt X. Cavity noise. VKI lecture series 2009-03, aerodynamics noise from wall-bounded flows. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Brussels, 2009. pp. 130–147.

Надійшла (received) 23.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Горбань Ірина Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідродинаміки хвильових та руслових потоків, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9662-2813>; e-mail: ivgorban@gmail.com.

Gorban Iryna Mykolaivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Staff Researcher, Senior Staff Researcher at the Department of Hydrodynamics of Wave and Channel Flows, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9662-2813>; e-mail: ivgorban@gmail.com.

Басовський Володимир Григорович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник відділу гідродинамічної акустики, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6192-2353>; e-mail: basovsky@ukr.net.

Basovsky Volodymyr Grygorovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Staff Researcher, Senior Staff Researcher at the Department of Hydrodynamical Acoustics, Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: +38(044) 371-65-46; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6192-2353>; e-mail: basovsky@ukr.net.