

П. О. ВАСІН, С. О. ДОВГИЙ, О. Г. ЛЕБІДЬ, Д. І. ЧЕРНІЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ СИСТЕМИ КЕРОВАНИХ КРИЛ (ПРОФІЛІВ) У ПОТОЦІ ІДЕАЛЬНОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Стаття присвячена моделюванню обтікання системи керованих крил (профільів) в ідеальній нестисливій рідині. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розробки обчислювальної технології для визначення в режимі реального часу скалярних та векторних характеристик керованого руху розподілених у просторі системи крил, які утворюють коливальний рушій. Режим руху системи крил виходять за межі лінійної теорії. Представлено математичну модель циркуляційної відривної течії навколо рухомих крил, які разом з вихровим слідом утворюють рухомі межі області течії. Обчислювальна технологія базується на застосуванні методу дискретних особливостей. Запропоновано модель нестационарно-відривного обтікання системи M тонких профільів з округленою передньою кромкою в якій враховується нестационарний режим обтікання системи крил. Удосконалено чисельно-аналітичну модель обчислення поля тиску в області змінної зв'язності, що дозволяє визначати як миттєві розподілені аерогідродинамічні характеристики на кожному крилі, так і усереднені інтегральні АГДХ системи крил в цілому. Запропоновано математичну модель керування рухом крил, яка суттєво покращує енергоефективність та тягові характеристики коливального рушія. У системному обчислювальному експерименті виявлено кількісні та якісні закономірності формування та еволюції сліду за системою з керованим рухом крил, визначено умови виникнення когерентних вихрових структур. Представлено порівняння результатів обчислювального експерименту з результатами натурного моделювання.

Ключові слова: ідеальна нестислива рідина, керовані крила, коливальні рухи, циркуляційна потенційна течія, метод дискретних особливостей.

P. O. VASIN, S. O. DOVGYI, O. G. LEBID, D. I. CHERNIY

MODELING THE FLOW AROUND A SYSTEM OF CONTROLLED WINGS (AIRFOILS) IN A STREAM OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

The article is devoted to modeling the flow around a system of controlled wings (profiles) in an ideal incompressible fluid. The relevance of the study is due to the need to develop a computational technology for determining in real time the scalar and vector characteristics of the controlled motion of a system of wings distributed in space, which form an oscillatory engine. The modes of motion of the wing system go beyond the limits of linear theory. A mathematical model of the circulating separation flow around the moving wings, which together with the vortex wake form the moving boundaries of the flow region, is presented. The computational technology is based on the application of the discrete singularity method. A model of unsteady-separated flow around a system of M thin profiles with a rounded leading edge is proposed, which takes into account the unsteady flow regime around the wing system. The numerical-analytical model for calculating the pressure field in the variable connectivity region has been improved, which allows determining both the instantaneous distributed aerohydrodynamic characteristics on each wing and the averaged integral AGDH of the wing system as a whole. A mathematical model for controlling the wing motion has been proposed, which significantly improves the energy efficiency and thrust characteristics of the oscillatory engine. In the system computational experiment, quantitative and qualitative regularities of the formation and evolution of the wake behind the system with controlled wing motion have been revealed, and the conditions for the emergence of coherent vortex structures have been determined. A comparison of the results of the computational experiment with the results of full-scale modeling has been presented.

Key words: ideal incompressible fluid, controlled wings, oscillatory motions, circulating potential flow, discrete singularity method.

Вступ. Коливальні рухи крилових поверхонь зустрічаються в багатьох областях природи та техніки. Серед найважливіших – коливальні рухи крил птахів, коливальні рухи плавників риб та морських ссавців, крил літальних апаратів, несучих гвинтів вертольотів, лопаток турбомашин, закрилків, а також механічних сервозакрилків. Важливою є потреба у розрахунках *розподілених динамічних характеристик течії* для запобігання виникнення *флатера* в авіації, в ракетних системах. Для водних динамічних систем з коливальним рушієм важливою є проблема виявлення режимів його ефективності. Тема *оптимізації коливальних рухів* системи крил є актуальною у зв'язку з необхідністю створення *коливального рушія*. Але, більшість *теоретичних методів розрахунку* нестационарних гідроаеродинамічних характеристик крил і крилових систем, що існують зараз, засновані на *лінеаризованій теорії*, що передбачає малі робочі кути атаки, малі амплітуди коливань, малі деформації поверхні крила. Тим часом для практики істотний інтерес представляють саме режими, що вийшли за межі лінійної теорії.

Розглядається *плоска задача* про *нестационарний коливальний рух* системи тонких профільів в ідеальній стисливій рідині. Кожен із профільів системи знаходиться в потоці рідини, яка рухається в площині прямолінійно в горизонтальному напрямку (зліва направо) з постійною швидкістю та одночасно здійснює вертикальні коливання за гармонічним законом, крім того, профіль може здійснювати обертальні коливання навколо певної точки. З задньої гострої кромки профілю сходять вихрові пелени. Завдяки коливанням профіль може генерувати силу, спрямовану у бік поступального руху – *силу тяги*.

Теоретична модель течії будується за таких припущень [1 – 5]:

- поверхні профілю та твердих меж передбачаються непроникними та рухомими;
- на задній кромці виконується *постулат Кутта – Жуковського*: швидкість рідини скінченна, а розподіл тиску є неперервним;
- вихрова пелена, що сходить із задньої кромки профілю, вважається нескінченно тонкою поверхнею тангенціального розриву швидкості рідини; форма цієї поверхні наперед невідома;
- на нескінченній відстані від профілю та вихрової пелени потік рідини рухається з постійною швидкістю (зліва направо);

– збурення швидкості, що вносяться рухомим профілем і вільним вихровим шаром у сліді, зменшуються при віддаленні від профілю і пелени та прагнуть до нуля на нескінченності;

– на початок руху профілю вихорів у рідині не було, тобто течія була безвихровою.

Внаслідок останньої умови при зроблених припущеннях щодо рідини справедлива *теорема Лагранжа* про те, що протягом усього часу течія всюди поза профілем і вихровою пеленою залишатиметься безвихровою і в усі наступні моменти часу.

Отже, при умові, що вихровий шар є нескінченно тонким, вихрова течія може бути представлена в наближенні циркуляційної течії, а для фізичної постановки задачі можна використовувати математичний апарат теорії потенційних течій.

Постановки задачі про циркуляційну течію навколо системи непроникних рухомих меж.

Постановка фізичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (тонких профілів). Так, якщо за результатом лабораторного експерименту припускається, що *структуру вихрового сліду* у плоскій течії навколо системи рухомих крил (рис. 1) можна представити у вигляді складок нескінченно тонких ліній розриву швидкостей (рис. 2).



Рис. 1 – Течія навколо рухомої системи M крил ($M = 4$ профілів). Лабораторний експеримент [6].

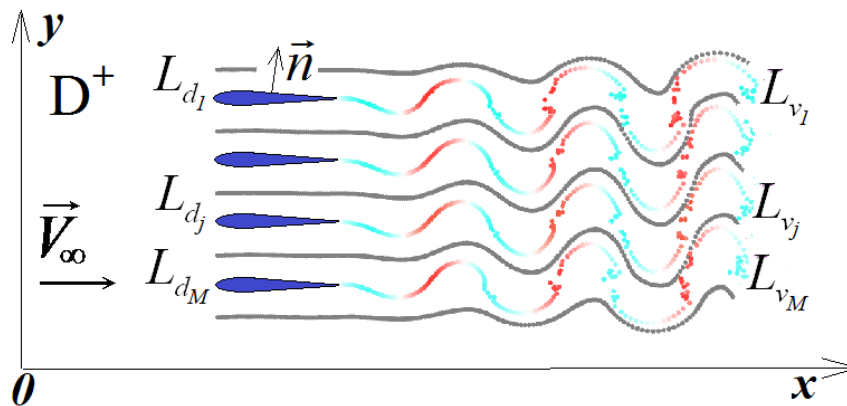


Рис. 2 – Схема течії навколо рухомої системи M крил ($M = 4$ профілів).

Припускаємо, що течія є потенційною в області $D^+(t)$ зовні M рухомих крил (профілів) та вихрових поверхонь: $L_d(t)$ – детермінованих, $L_v(t)$ – вільних. Розглядається фізична задача зі знаходження потенціалу ϕ , для якого швидкість потоку $\vec{V} = \nabla \phi$:

$$t \geq t_0 : \nabla \phi = 0 \quad \text{в } D^+; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = W_n^* \quad \text{на } L_d(t) \text{ – детерміновані границі (профіль крила);} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^- \quad \text{на } L_v(t) \text{ – вільні границі;} \quad (3)$$

$$P^+ = P^- \quad \text{на } L_v, \quad (4)$$

де

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{1}{2} V_{\infty}^2 + \frac{\partial \phi_{\infty}}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \phi = \vec{V}_{\infty}; \quad (6)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} P = P_\infty; \quad (7)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi_\infty}{\partial t}; \quad (8)$$

$$\text{при } t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, \quad L_v(t_0) = L_{v0}, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0. \quad (9)$$

Розв'язок шукається в класі функцій:

$$|\nabla \phi| < \infty, \quad (10)$$

що на гострих кромках лопатей відповідає умові Жуковського – Кутта.

Нормальна швидкість W_n^* у кожній точці лопаті для умови (2) визначається напрямом нормалі до $\vec{n}$ до лопаті $L_d(t)$ швидкості її руху. Закони руху лопатей:

– при закріпленому лівому кінці:

$$W_n^* = \left(\frac{-A_n^2 R^2 / L_n^2 \phi' \cos(\phi_n) \sin(\phi_n)}{\sqrt{1 - A_n^2 / L_n^2 \sin^2(\phi_n)}}, \phi_n' \frac{R}{L_n} \cos(\phi_n) \right), \quad (11)$$

де A – амплітуда коливання; L – довжина лопатей; R – відстань від точки, у якій знаходиться нормаль, до закріпленого кінця лопаті;

$$\phi_n = \phi_{0n} + \frac{Sh_n \cdot V_\infty}{L_n} t \quad \text{та} \quad \phi_n' = \frac{Sh_n \cdot V_\infty}{L_n}$$

– значення фази та похідної фази по t ; Sh – число Струхала.

– без закріпленого кінця:

$$W_n^* = (0, \phi' \cos(\phi_n)), \quad (12)$$

Постановка математичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (профілів).

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини для всіх точок $\vec{r}(x, y, z)$ області D^+ поза рухомими межами $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (де $L_d(t)$ – обтічна межа, рух якої задається, $L_v(t)$ – вільна межа з вихрових шарів у сліді у вигляді поверхонь розриву дотичних швидкостей) ставиться задача для знаходження функції (від координат та часу) – потенціалу $\phi = \phi(\vec{r}, t)$, для якого швидкість $\vec{V} = \nabla \phi$, а також потенціал задовольняє рівняння та крайові умови

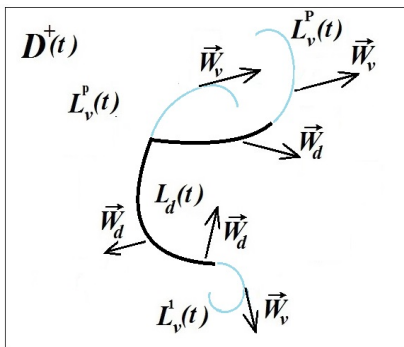


Рис. 3 – Схема взаємодії системи меж з виконанням умови Вілля [2]: поверхня розриву швидкостей в точці відриву від обтічної поверхні має дотичну, що співпадає з дотичною до обтічної поверхні.

$$\text{при } t \geq t_0 : \Delta \phi = 0 \quad \text{для } \vec{r} \in D^+; \quad (13)$$

з крайовими умовами на рухомих межах:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{r_d} = \vec{W}_d, \quad \vec{n} \Big|_{r_d} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t); \quad (14)$$

з крайовими умовами на невідомій вільній межі:

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial n} \Big|_{r_v} = \frac{\partial \phi^-}{\partial n} \Big|_{r_v} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} (\phi^+ - \phi^-) \Big|_{r_v} = 0 \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t); \quad (16)$$

з умовами для зовнішньої задачі:

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \phi = \vec{U}_\infty; \quad (17)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, \quad L_v(t_0) = L_{v0}. \quad (18)$$

Розв'язок ϕ задачі розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$, тобто

$$|\nabla \phi| < \infty \quad \text{на } L(t). \quad (19)$$

Для визначення форми області $\bar{D}^+(t)$ має бути визначена зміна в часі геометрії рухомої межі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Переміщення $L_d(t)$ задається або визначається із задачі Коші при заданій правій частині

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t); \quad (20)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}, \quad (21)$$

а зміна вільної межі $L_v(t)$ визначається з розв'язку задачі Коші для частинок $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t))$, які й формують межу $L_v(t)$ та визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (22)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (23)$$

де права частина у (22)

$$\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla\phi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla\phi^-(\vec{r}_v, t)) \quad (24)$$

задовольняє умову (15), оскільки визначається з розв'язку задачі (13) – (24).

Варто зазначити, що задача (13) – (17) з умовами Неймана (14) на $L_d(t)$, з умовами Неймана (15) та умовами типу Діріхле (16) на $L_v(t)$, призводить до розв'язку задачі (22), (23), а також з умовами (19) на ∞ є зовнішньою нелінійною задачею з вільною рухомою межею $L_v(t)$. Особливість таких задач полягає в тому, що на невідомій вільній межі для її визначення задаються одразу дві умови: кінематична (3), (16) та динамічна (4), (16). Рух невідомої вільної межі $L_v(t)$ визначається полем швидкостей $\vec{V} = \nabla\phi$, яке визначається з розв'язку самої задачі (13) – (23).

Розв'язання задач (13) – (18) та (22) – (23) у виділеному класі функцій (19) можливе при виконанні умов гладкості меж. Гладкість меж області в задачі забезпечується врахуванням основного фактора фізичного процесу – виникненням відриву, що задовольняє критерію Вілля [2]: сформована поверхня розриву швидкостей в точці відриву від обтічної поверхні має дотичну, що збігається з дотичною до обтічної поверхні. Таким чином, умова Кутта – Жуковського на всіх зламах та кінцях меж виконується автоматично, за наявності природного виникнення відривів.

Розв'язок задач (13) – (24) відносно потенціалу $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ у деформованій області $D^+(t)$ з рухомою межею $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ дозволяє визначити розподіл тиску в області течії та обчислювати динамічні характеристики на її межах, використовуючи інтегральне співвідношення Коші – Лагранжа:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\phi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (25)$$

Математична модель для циркуляційної течії в області з рухомими межами відповідає випадку, коли течія, рух і відривне обтікання крил починається з моменту часу $t = 0$, а далі, вже при $t > 0$ починається формування та розвиток циркуляційного сліду.

Принципово, що математична модель має інтегральне представлення, яке дозволяє врахувати динаміку непроникних рухомих границь L_d , L_v , а також урахувати утворення нових елементів границі L_v . Але для системи M профілів, на кожному із яких виникає до двох $p = 1, 2$ відривів, необхідно модель удосконалити таким чином, щоб було явним чином враховано кількість граничних елементів L_d , L_v , $d = 1, \dots, M$, $v = 1, \dots, M \times p$.

Для знаходження комплексних потенціалів течії та комплексно спряженої швидкості в багатозв'язній області удосконалене інтегральне представлення має вигляд:

$$\Phi(z, t) = z\bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} f_{vp}(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (26)$$

$$\bar{V}(z, t) = \frac{\partial\Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t)}{z - \omega} d\omega. \quad (27)$$

Задача (3) – (12) розпадається на дві складові частини, які вимагають одночасного (паралельного) розв'язування:

I. Задача розв'язання сингулярного інтегрального рівняння для детермінованих границь – рухомих лопатей L_d :

$$\left\{ \begin{aligned} & z = \omega_d \in \sum_{i=1}^M L_{di}, \quad t \geq t_0, \quad d = 1, \dots, M : \\ & \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t) n(\omega_d)}{\omega_d - \omega} d\omega \right\} = W_n^* - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^2 \sum_{p=1}^M \int_{L_{vp}(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t) n(\omega_d)}{\omega_d - \omega} d\omega + n(\omega_d) \bar{V}_\infty \right\}, \\ & \int_{L_d} f_d(\omega, t) d\omega = - \sum_{p=1}^2 \int_{L_{vp}} f_{vp}(\omega, t) d\omega, \quad d = v, \quad d = 1, \dots, M; \quad v = 1, \dots, M. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

II. Задача Коші – розв’язання інтегро-диференційного рівняння для вільних границь L_v :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_{vp} \in L_{vp}(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_{vp}}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{d=1}^M \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t)}{\omega_{vp} - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \int_{L_v(t)} \frac{f_{vp}(\omega, t)}{\omega_{vp} - \omega} d\omega + \bar{V}_\infty, \\ d = v, p = 1, 2, \overline{\omega_{vp}} = \overline{\omega_d} : f_{vp}(\omega_{vp}, t) = f_d(\omega_p, t), \\ t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}, L_v(t_0) = L_{v0}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Для визначення безрозмірного коефіцієнту тиску (25) маємо формулу:

$$c_p(x, y, t) = \frac{2(P(z, t) - P_\infty)}{\rho |V_\infty|^2} = \operatorname{Re} \left\{ 1 - \frac{\bar{V}(z, t) \overline{V}(z, t)}{V_\infty^2} - \frac{2}{|V_\infty|^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(z, t) - \Phi_\infty) \right\}. \quad (30)$$

Дискретизація математичної моделі та постановки математичної задачі про циркуляційну течію навколо системи рухомих крил (профільів). Для розв’язання задачі відривного нестационарного обтікання застосовано чисельні методи розв’язування *сингулярних інтегральних рівнянь* в багатозв’язній області та *вихорові технології*. Введено дискретизацію процесів та функцій для застосування в задачі чисельно-аналітичних моделей, методів та алгоритмів [1 – 3, 7].

Дискретизація часу задачі визначається заданим кроком τ_k :

$$0 \leq t_n \leq T, \quad t_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad (31)$$

$$\text{де } \tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad t_N = T, \quad n = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Нормована швидкість набігаючого потоку: $\vec{V}_\infty = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Вважається, що у момент часу $t = 0 \quad n = 0$.

Дійсна частина потенціалу течії визначається як (потенціал набігаючого потоку + потенціал детермінованих границь + потенціал вільних границь):

$$\phi(x, y, t) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_{dj}(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{dj}}{x - x_{dj}} \right) + \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \frac{\gamma_{dm}^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{vm_p}^p(t)}{x - x_{vm_p}^p(t)} \right), \quad (33)$$

$$\vec{V}(x, y, t_n) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) \vec{V}_{dj}(x, y, x_{dj}, y_{dj}) + \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p \vec{V}(x, y, x_{vm_p}^p(t_n), y_{vm_p}^p(t_n)), \quad (34)$$

де швидкість $\vec{V}_j(x, y) = \vec{V}(x, y, x_j, y_j) = (u_j(x, y), v_j(x, y))$ від j -го вихору Ренкіна з одиничною інтенсивністю дорівнює:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_j - y}{R_j^2}, \\ v_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_j}{R_j^2}, \end{array} \right. \quad (35)$$

де $R_j = \max \left\{ \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \delta_j \right\}$, δ_j – радіус дискретності j -го вихору;

$$\Gamma_j = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, N}. \quad (36)$$

На контурі L_d у кожній k -ій точці колокації d -ї лопаті задамо нормаль:

$$\vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) = (n_x(x_{dk}, y_{dk}), n_y(x_{dk}, y_{dk})), \quad d = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (37)$$

З урахуванням дискретизації по часу виконання умови (14) у вигляді системи інтегральних рівнянь (28) зводиться на кожному n -тому кроці (при $t = t_n$) до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} a_{ijdk} = b_{dk}, \\ \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) = - \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p, \quad d = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{array} \right. \quad (38)$$

де

$$a_{ijk} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n_x(x_{dk}, y_{dk})(y_{ij} - y_{dk})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2} + \frac{n_y(x_{dk}, y_{dk})(x_{dk} - x_{ij})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2} \right),$$

$$b_{dk} = W_n^*(x_{dk}, y_{dk}) - (\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot \vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) -$$

$$- \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p \vec{V}(x_{dk}, y_{dk}, x_{vm_p}^p(t_n), y_{vm_p}^p(t_n)) \cdot \vec{n}(x_{dk}, y_{dk}). \quad (39)$$

Геометрія області в момент часу t_n визначається геометрією рухомих меж. Для кожного наступного моменту часу t_{n+1} визначається нове положення меж області.

Маємо задачі Коші (щодо руху нового породженого елементу рухомої вільної межі), де у правих частинах (40), (41) визначена швидкість кожного s -го вихору ($s = \overline{1, n}$), який утворився в s -й момент часу. Для чисельного розв'язання системи (40), (41):

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = u(x_s(t), y_s(t)) = \cos(\alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) u_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p u_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)); \quad (40)$$

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = v(x_s(t), y_s(t)) = \cos(\alpha) + \sum_{d=1}^M \sum_{j=1}^N \Gamma_{dj}(t_n) v_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) +$$

$$+ \sum_{v=1}^M \sum_{p=1}^2 \sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p v_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)); \quad (41)$$

$$t = t_l : x(t_l) = x_l, y(t_l) = y_l \quad (42)$$

застосовується схема предиктор-коректор (метод Ейлера – Коші):

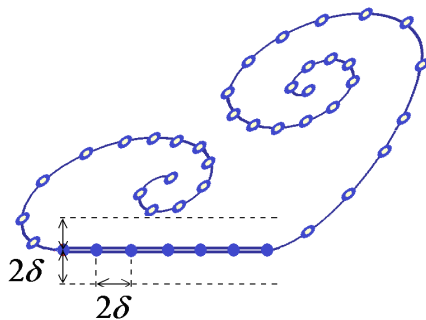


Рис. 4 – Схема для примусового виконання умови непроникнення [4].

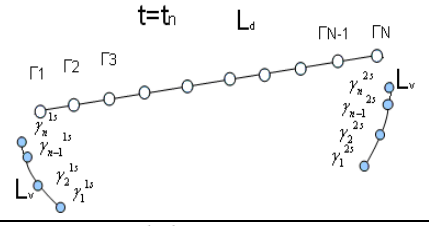
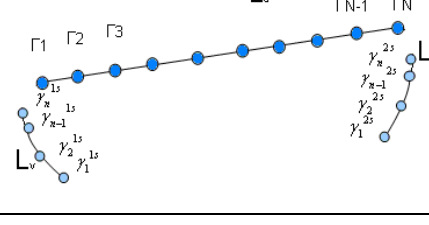
$$\begin{cases} \bar{r}_n = r_n + \tau_n V(t_n, r_n), \\ \bar{r}_{n+1} = r_n + \frac{\tau_n}{2} (V(t_n, r_n) + V(t_{n+1}, \bar{r}_n)). \end{cases} \quad (43)$$

Умова непроникності повинна виконуватися у кожній точці поверхні профілю крила. Тому алгоритмічна реалізація контролю непроникнення – примусове виконання умови, щоб вільні вихори не перетинали поверхню профілю. Виконується [4] примусове віддзеркалення вихорів на відстань не менше ніж 2δ від непроникної детермінованої межі – поверхні профілю крила (рис. 4). Таке удосконалення позбавляє від виникнення нефізичних пульсацій кінематичних та динамічних характеристик на непроникній межі.

Важливим елементом обчислювальних технологій є алгоритм, що визначає послідовність обчислення кінематичних та динамічних характеристик (табл. 1).

Таблиця 1 – Послідовність кроків обчислення кінематичних та динамічних характеристик

I	$t = t_{n-1}$ L_d Γ_{N-1} Γ_N	Для моменту часу $t = t_{n-1}$ маємо відомий розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях і відомий розподіл інтенсивностей вихорів у сліді.
II	$t = t_n$ L_d Γ_{N-1} Γ_N	Для моменту часу $t = t_n$ моделюється відривна течія і рух вихрового сліду: вихори на кромках лопатей відриваються і зміщуються в нове положення $\bar{r}_n = \bar{r}_{n-1} + \vec{V}_{n-1} \tau_n$ на відстань $dr_n^p = \bar{r}_n^p - \bar{r}_{n-1}^p = \vec{V}_{n-1} \tau_n$, після чого змінюється розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях.

Продовження таблиці 1		
III		Для моменту часу $t = t_n$ визначається розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях – розв’язується СЛАП (38), (39).
IV		Після визначення інтенсивностей усіх вихорів (на лопатях і в сліді), при відомій геометрії сліду обчислюється поле безрозмірного тиску. Для моменту часу $t = t_n$ відомий розподіл інтенсивностей вихорів на лопатях і відомий розподіл інтенсивностей вихорів у сліді. Після визначення нового положення границь, параметр часу змінюється: $t = t_{n+1}$. Виконується повторення процедури обчислень задачі починаючи з етапу II.

Результати комп’ютерного моделювання кінематики та динаміки системи керованих крил. Приклади математичного моделювання та порівняння результатів моделювання з результатами лабораторного експерименту для системи крил представлено на рис. 5 – рис. 14.



Рис. 5 – Лабораторний експеримент [6]: Коливання крила, $P^* = 5.89$, $f = 1.5 \text{ Гц}$.



Рис. 6 – Результат математичного моделювання.



Рис. 7 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання поліплана ($M = 4$), $P^* = 4.71$, $f = 1.2 \text{ Гц}$.

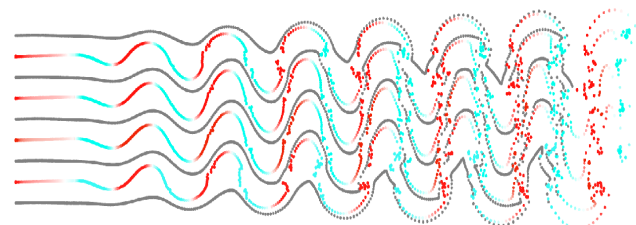


Рис. 8 – Результат математичного моделювання.

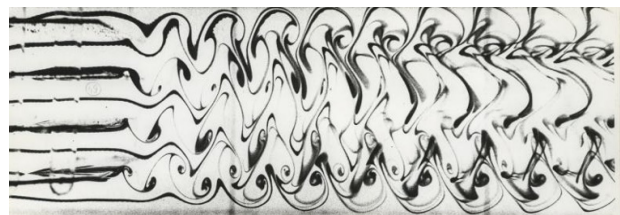


Рис. 9 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання поліплана ($M = 4$), $P^* = 5.86$, $f = 1.5 \text{ Гц}$.

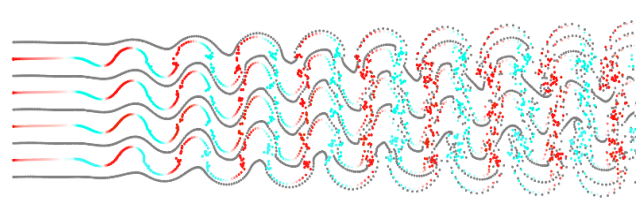


Рис. 10 – Результат математичного моделювання.



Рис. 11 – Лабораторний експеримент [6]: Синфазні коливання біплану ($M = 2$), $P^* = 3.93$, $f = 1.0 \text{ Гц}$.

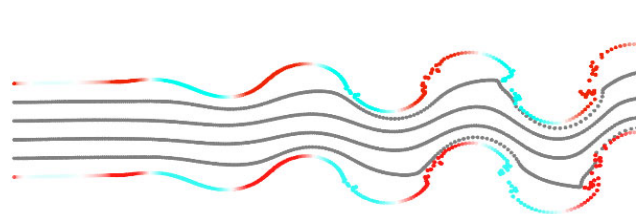


Рис. 12 – Результат математичного моделювання.

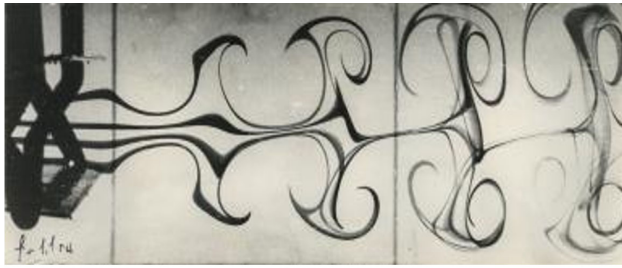


Рис. 13 – Лабораторний експеримент [6]: Протифазні коливання біплану ($M = 2$), $P^* = 3.93$, $f = 1.1$ Гц.

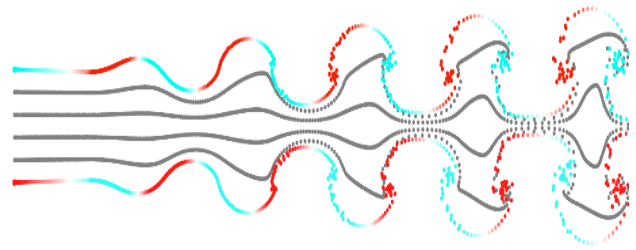


Рис. 14 – Результат математичного моделювання.

Нижче представлено додаткові результати математичного моделювання таких характеристик, як епюри та безрозмірний тиск (рис. 15 – 20).

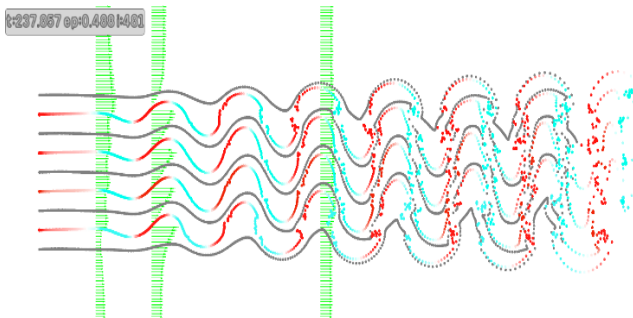


Рис. 15 – Епюри для обчислювального експерименту на (рис. 8).

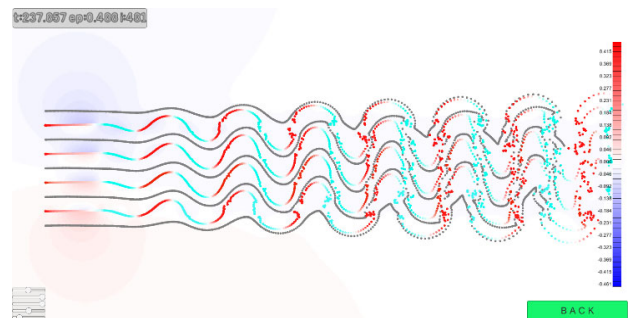


Рис. 16 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 8).

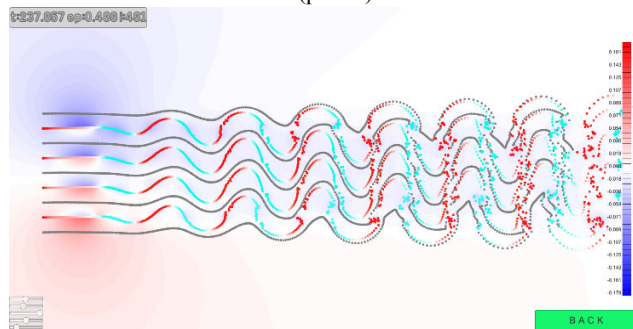


Рис. 17 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 8). Значення максимуму фіксується на 50 % від поточного.

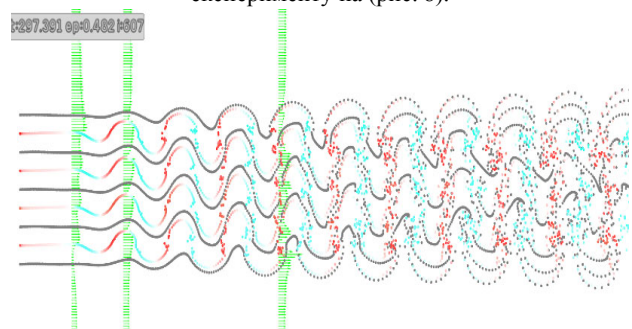


Рис. 18 – Епюри для обчислювального експерименту на (рис. 10).

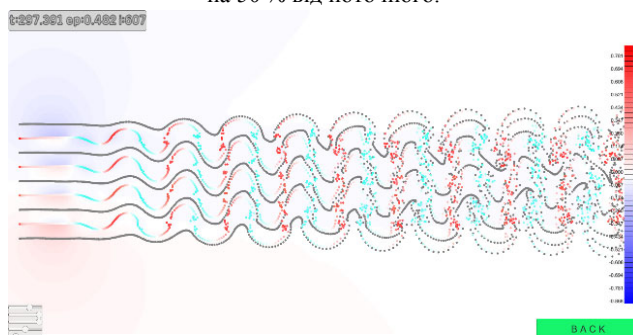


Рис. 19 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 10).

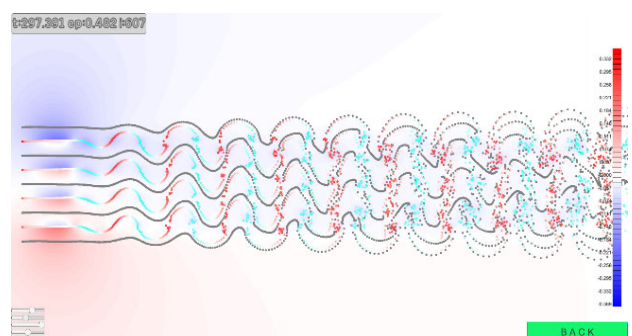


Рис. 20 – Безрозмірний тиск для обчислювального експерименту на (рис. 10). Значення максимуму фіксується на 50 % від поточного.

Висновки. Представлено удосконалення, яке сприяє розвитку обчислювальних методів комп'ютерного моделювання, призначених для передпроектного дослідження у процесі розробки конструкцій нових рушіїв і швидкісних динамічних систем, а саме:

1. Розроблено модель нестационарно-відривного обтікання системи M тонких профілів з округленою пе-

редньою кромкою при його нестационарному обтіканні динамічно змінним потоком рідини. Показано різницю між фізичною та математичною постановками задач.

2. Представлено покрововий алгоритм обчислювальної технології, яка надає можливість визначати кінематичні та динамічні характеристики потоку в області течії.

3. Удосконалено чисельно-аналітичну модель обчислення поля тиску в області змінної зв'язності, що дозволяє визначати як миттєві розподілені аерогідродинамічні характеристики на кожному крилі, так і усереднені інтегральні АГДХ системи крил в цілому.

4. Запропоновано математичну модель управління рухом крил, яка суттєво підвищує енергоефективність рушія з системою крил, що коливаються.

5. Показано, що математична модель коректно описує гідродинамічний процес та якісно демонструє прояв закономірностей формування та еволюції сліду за системою з керованим рухом крил. Математичне моделювання надає можливість адекватного віддзеркалення виникнення когерентних вихрових структур.

6. Порівняння результатів обчислювального експерименту з результатами натурного моделювання демонструє, що закон керування коливальним рухом крил впливає на динамічні характеристики рушія із системою рухомих крил.

Список літератури

1. Dovgiiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2017. – Vol. 53. – no. 6. – P. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.
2. Dovgiiy S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. The method of singular integral equations and computational technologies. – Kyiv : "Yuston", 2016. – 308 p.
3. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies // XXXVIII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2023). – 2023. – Page 28. – Режим доступу : http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2023/PDMU-2023_End.pdf. – Дата звертання : 25.05.2025 p.
4. Васин П. О. Алгоритм контролю умови непроникності для методу дискретних особливостей // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1. – С. 29 – 35. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.05.
5. Васин П. А., Черний Д. И. Моделирование трехмерной вихревой структуры // Компьютерная математика. – Київ : Інститут кібернетики НАНУ, 2018. – № 1. – С. 9 – 16.
6. Довгий С. А. Аэрогидродинамика движущихся крыльев. – Kyiv : "Yuston", 2016. – 276 p.
7. Черний Д. І., Васин П. О., Пилипенко І. Ю. Математичні моделі відірваних течій // Тези. VII Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки». (160-річчя кафедри механіки КНУ). – Київ, Україна, 2023. – С. 67. – Режим доступу : http://lcwf.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2_023_UKR.pdf. – Дата звертання : 26.05.2025 p.

References (transliterated)

1. Dovgiiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017, Vol. 53, no. 6, pp. 950 – 962. DOI: 10.1007/s10559-017-9997-4.
2. Dovgiiy S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *The method of singular integral equations and computational technologies*. Kyiv, "Yuston" Publ., 2016. 308 p.
3. Cherniy D., Vasin P., Pylypchenko I. Hypersingular integrals method for computation technologies. *XXXVIII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2023)*. 2023, Page 28. Available at : http://pdmu.univ.kiev.ua/PDMU_2023/PDMU-2023_End.pdf (accessed 25 May 2025).
4. Vasin P. O. Algoritmy kontrolyu umovy nepronyknosti dlya metodu diskretnykh osoblyvostey [Algorithms for control enforcement of the impermeability condition for the method of discrete singularities]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1, pp. 29–35. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.05.
5. Vasin P. A., Cherniy D. I. Modelirovanie tryekhmernoy vikhrevoy struktury [Modeling of a three-dimensional vortex structure]. *Komp'yuternaya matematika* [Computer mathematics]. Kyiv, Instytut kibernetiky NANU Publ., 2018, no. 1, pp. 9–16.
6. Dovgiiy S. A. Aerogidrodinamika dvizhushchikh kryl'ev [Aerohydrodynamics of moving wings]. Kyiv, "Yuston" Publ., 2016. 276 p.
7. Cherniy D. I., Vasin P. O., Pylypchenko I. Yu. Matematychni modeli vidryvnykh techiy [Mathematical models of separated flows]. *Tezy. VII Mizhnarodna naukova konferentsiya "Suchasni problemy mekhaniky" (160-richchya kafedry mekhaniky KNU)* [Abstracts of the VII International Scientific Conference Modern Problems of Mechanics (160th Anniversary of the Department of Mechanics Taras Shevchenko National University of Kyiv)]. Kyiv, Ukraine, 2023. P. 67. Available at : http://lcwf.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2023/08/ABSTRACTS_MPM_2_023_UKR.pdf (accessed 26 May 2025).

Надійшла (received) 29.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Васін Павло Олексійович – асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 765-90-29;

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4480-0347>; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Vasin Pavlo Oleksiiovych – Assistant Professor at the Department of Modeling Complex Systems, Faculty of Computer Science and Cybernetics of Taras Shevchenko National University, Kyiv; tel.: (099) 765-90-29; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-4480-0347>; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Довгий Станіслав Олексійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАНУ, завідувач відділу фізичного і математичного моделювання ІТГП НАН України, м. Київ; тел.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Dovgyi Stanislav Oleksiiovych – Doctor of Sciences, Professor, Academician of the NAS of Ukraine, Head of the Department of Physical and Mathematical Modeling, The Institute of Telecommunications and Global Information Space of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (097) 410-11-03; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1078-0162>; e-mail: s.dovgii@gmail.com.

Лебідь Олексій Григорович – доктор технічних наук, старший дослідник, заступник директора ІТГП НАНУ з наукової роботи, м. Київ; тел.: (050) 441-15-58; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068>; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Lebid Oleksii Grygorovych – Doctor of Technical Sciences, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (050) 441-15-58; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4003-8068>; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Черній Дмитро Іванович – доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри моделювання складних систем, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Cherniy Dmytro Ivanovych – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 830-72-87; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6378-8048>; e-mail: d_cherniy@ukr.net.