

О. М. БАШНЯКОВ, В. Т. МАТВИЄНКО, В. В. ПІЧКУР

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПУЧКА ТРАЄКТОРІЙ З НЕГЛАДКИМ КРИТЕРІЄМ ЯКОСТІ

Проблематика аналізу систем за умов детермінованої невизначеності на її початковий стан пов'язана з задачами практичної стійкості і оптимізації пучків траєкторій. Для задач параметричної оптимізації систем один з основних підходів полягає у формулюванні постановок з критеріями у формі максимуму за початковими умовами від функціоналу, який аналізується на розв'язках системи. Це, в свою чергу, спонукає до застосування методів негладкої оптимізації з врахуванням наявності параметричної системи і розробки обчислювальних методів, які є характерними для такої галузі. При цьому застосовується апарат узагальнених похідних і узагальнених диференціалів, обчислювальні методи є модифікаціями ітераційних процедур типу субградієнтного спуску в різних модифікаціях. Слід зазначити, що в таких задачах тільки в окремих випадках можна застосовувати алгоритми, характерні для опуклих функціоналів. У роботі розглядається задача з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу. Автори обґрунтовують теорему про структуру похідної за напрямком, а також необхідні умови екстремуму. На основі теоретичних результатів в роботі побудовано метод найшвидшого спуску. Для випадку лінійної системи з квадратичним критерієм якості застосовується метод координатного спуску і метод еліпсоїдів. Проведений обчислювальний експеримент та представлені результати обчислень. Слід зауважити, що застосування теоретичних результатів, які наводяться в роботі і пов'язані з методами негладкої оптимізації, ускладнюється при здійсненні практичних обчислень через комплексність постановок. Швидкість збіжності таких методів є доволі помірною. Тому важливо, з одного боку, розробляти чисельні методи, які можна було б реалізувати. Для цього доцільно застосовувати методи якісного аналізу, зокрема методи практичної стійкості, для оцінки множини розкиду початкових умов в класі еліпсоїдів, а також методу структурно-параметричної оптимізації систем. З іншого боку, необхідно оцінити якісні характеристики, такі як: початкове наближення, величину кроку, апроксимативні властивості тощо.

Ключові слова: пучок траєкторій, негладка оптимізація, параметрична оптимізація, оптимізація пучка траєкторій, метод найшвидшого спуску, метод еліпсоїдів.

O. M. BASHNIAKOV, V. T. MATVIENKO, V. V. PICHKUR

COMPUTATIONAL METHODS FOR OPTIMIZATION OF A BEAM OF TRAJECTORIES WITH A NON-SMOOTH QUALITY FUNCTIONAL

The problem of analyzing systems under conditions of deterministic uncertainty in the initial state of the system is related to the problems of practical stability and optimization of trajectory bundles. For problems of parametric optimization of systems, one of the main approaches is to formulate statements with criteria in the form of a maximum under initial conditions of the functional, which is analyzed on the solutions of the system. This, in turn, encourages the use of non-smooth optimization methods taking into account the presence of a parametric system and the development of computational methods that are characteristic of such an area. In this case, the apparatus of generalized derivatives and generalized differentials is used, the computational methods are modifications of iterative procedures of the subgradient descent type in various modifications. It should be noted that in such problems only in some cases can algorithms characteristic of convex cases be applied. The paper considers a problem with a quality criterion of the type of maximum under initial conditions of the terminal functional. The authors substantiate the theorem on the structure of the derivative in the direction, as well as the necessary conditions for the extremum. Based on the theoretical results, the method of the fastest descent is constructed in the work. For the case of a linear system with a quadratic quality criterion, the method of coordinate descent and the method of ellipsoids are used. A computational experiment was conducted and the results of the calculations are presented. It should be noted that the application of the theoretical results given in the work and related to the methods of non-smooth optimization is complicated when performing practical calculations due to the complexity of the statements and, therefore, a significant number of calculations at each iteration, the convergence rate of such methods is quite moderate. Therefore, it is important, on the one hand, to develop numerical methods that could be implemented. For this, it is advisable to use methods of qualitative analysis, in particular methods of practical stability, to estimate the set of scatter of initial conditions in the class of ellipsoids, as well as the method of structural-parametric optimization of systems. On the other hand, it is necessary to evaluate qualitative characteristics such as initial approximation, step size, approximative properties, etc.

Key words: beam of trajectories, non-smooth optimization, parametric optimization, trajectory bundle optimization, minimax optimization problems.

Вступ. При побудові математичних моделей складних систем виникає потреба у врахуванні розкиду початкових даних і параметрів за наявності обмежень на фазові координати. Це пов'язано як з необхідністю врахувати детерміновану невизначеність даних, так і з моделюванням групової динаміки систем. Це означає, що слід одночасно аналізувати сукупність розв'язків відповідних математичних співвідношень. У такий спосіб приходимо до поняття пучка траєкторій системи. Природно виникають проблеми, пов'язані з оптимізацією, оптимальним керуванням пучків траєкторій, зокрема і з негладкими критеріями якості [1, 2].

Проблемам негладкої оптимізації, обчислювальним методам присвячено значну кількість робіт, серед яких зазначимо такі роботи [3 – 7]. Зокрема, в [1] висвітлено необхідні і достатні умови оптимальності в задачі оптимального керування пучком траєкторій з негладкими критеріями якості типу максимуму за початковими умовами і часом. В [8] розглянуто обчислювальні методи оптимізації параметричних систем з гладкими критеріями якості. В [9] розроблено методику розв'язування задачі керування пучком траєкторій лінійної дискретної системи зі скінченною кількістю початкових станів на основі властивостей псевдоінверсії.

Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [1]:

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)) \quad (1)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), p, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – вектор стану системи (2); $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$ – вектор параметрів; $f(x, p, t)$ – n – вимірний вектор-функція, яка є неперервно диференційованою за x і p , а також неперервною за $t \in [t_0, T]$. У такий спосіб ми можемо застосувати *теорему про неперервну диференційованість* розв'язків системи (2) від параметра p і початкових умов x_0 . Функція $\Phi: R^n \rightarrow R^1$ є неперервно диференційованою, $M_0 \subset R^n$ – компакт, $x(t_0) = x_0 \in M_0$.

Задача полягає в тому щоб знайти параметр $p_* \in R^m$ такий, що

$$I(p_*) = \inf_{p \in R^m} I(p). \quad (3)$$

Задача (1) – (3) називається задачею параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (2) з функціоналом (3), який є функціоналом типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу

$$J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p)).$$

Тут $x(t, x_0, p)$ є розв'язком системи (2) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, де $x_0 \in R^n$ – деяка точка при фіксованому значенні параметра $p \in R^m$.

Пучком траєкторій системи (2) при фіксованому значенні параметра $p \in R^m$ називають множину розв'язків $x(t, x_0, p)$ системи (2), де точка x_0 пробігає множину $M_0 \subset R^n$. Таким чином, пучок траєкторій є сукупністю функцій в просторі неперервних функцій $C([t_0, T]; R^n)$. За *теоремою про інтегральну лійку* [1] пучок траєкторій є компактом в множині $C([t_0, T]; R^n)$, так як множина початкових умов $M_0 \subset R^n$ є компактом. Множина $X(t, p)$ точок з R^n , яка складається з таких $x \in R^n$, що існує $x_0 \in M_0$ таке, що $x = x(t, x_0, p)$, називається перетином пучка траєкторій системи (2).

За *теоремою про перетин інтегральної лійки* перетин пучка траєкторій є компактною множиною в R^n при кожному фіксованому $t \in [t_0, T]$. Таким чином, пучок траєкторій залежить від вибору параметра p . Задача параметричної оптимізації (1) – (3) полягає в тому, щоб серед усіх значень параметра p вибрати такий, який мінімізує максимальне значення критерія $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$ серед усіх траєкторій пучка.

Виберемо напрямки $h \in R^m$ і позначимо [4 – 6]

$$R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} J(y_0, p) = J(x_0, p) \right\}.$$

Множина $R(p)$ називається *маргінальною множиною*. За *теоремою про похідну за напрямком* від функції максимуму [4 – 6]

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} J'(x_0, p, h), \quad (4)$$

де $J'(x_0, p, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha}$ є похідна за напрямком (*похідна Діні*) функціоналу $J(x_0, p)$. Так як в задачі (1) – (3) функціонал $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$ є диференційованим, то похідна за напрямком співпадає з першою варіацією (*варіацією за Лагранжем*)

$$J'(x_0, p, h) = \delta J(x_0, p, h),$$

де

$$\delta J(x_0, p, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} J(x_0, p + \alpha h) \Big|_{\alpha=0} = \varphi'(0).$$

Тут $\varphi(\alpha) = J(x_0, p + \alpha h) = \Phi(x(T, x_0, p))$.

Знайдемо першу варіацію. Для цього визначимо

$$\varphi'(\alpha) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, \alpha))}{\partial x}, \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle,$$

де $x(T, \alpha) = x(T, \alpha) = x(T, x_0, p + \alpha h)$, $x(T) = x(T, x_0, p)$. Позначимо $z(T) = \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}$ в точці $\alpha = 0$. Тоді

$$\varphi'(0) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle. \quad (5)$$

Знайдемо систему диференціальних рівнянь для $z(t)$. Вона має вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} h, \quad z(t_0) = 0, \quad (6)$$

де $t \in [t_0, T]$. Система (6) називається системою рівнянь у варіаціях для задачі (1) – (3). Тут $f(t) = f(x(t), p, t)$.

Введемо вектор спряжених змінних $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^*$ і накладемо умову

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}. \quad (7)$$

Беручи до уваги систему у варіаціях (6), одержуємо

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= -\langle \psi(T), z(T) \rangle = -(\langle \psi(T), z(T) \rangle - \langle \psi(t_0), z(t_0) \rangle) = \\ &= -\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \langle \psi(t), z(t) \rangle dt = -\int_{t_0}^T \left(\left\langle \psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f(t)^*}{\partial p} \psi(t), h \right\rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (8)$$

Тоді

$$\varphi'(0) = -\left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial f(t)^*}{\partial p} \psi(t) dt, h \right\rangle = \partial J(x_0, p, h). \quad (9)$$

Введемо функцію Гамільтона – Понтрягіна для задачі (1) – (3):

$$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle. \quad (10)$$

Тоді

$$\frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial x} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t), \quad \frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial p} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t).$$

Таким чином, ми обґрунтували теорему. При формулюванні теореми ми застосували (4), (7) – (10), а також дві останні рівності.

Теорема 1. Похідна за напрямком $h \in R^m$ функціоналу (1) задачі (1) – (3) має вигляд:

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle -\int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle,$$

де $x(t) = x(t, x_0, p) \in \text{розв'язком системи (2)}$, $x(t_0) = x_0$, $\psi(t) = \psi(t, x_0, p) \in \text{розв'язком спряженої системи}$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, T], \quad (11)$$

$$x_0 \in R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x(T, y_0, p)) = \Phi(x(T, x_0, p)) \right\}, \quad (12)$$

$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle$ – функція Гамільтона – Понтрягіна.

Наслідок 1. Для того, щоб точка p_* була точкою локального мінімуму функціоналу (1) задачі (1) – (3) на R^m необхідно, щоб виконувалася умова

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \quad \forall h \in R^m, \quad (13)$$

де $x(t)$, $\psi(t)$ – розв'язки системи (2) і спряженої системи (11), які відповідають p_* , $R(p_*)$ визначається за (12) при $p = p_*$.

Наслідок 2. Для того, щоб точка p_* була точкою локального мінімуму функціоналу (1) задачі (1) – (3) на D необхідно, щоб виконувалася умова

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \forall h \in C(x_*, D), \quad (14)$$

де $C(x_*, D)$ – конус Булігана в точці x_* до множини D [3]; $x(t)$, $\psi(t)$ – розв’язки системи (2) і спряженої системи (11), які відповідають p_* ; $R(p_*)$ визначається за (12) при $p = p_*$.

Метод найшвидшого спуску. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв’язках системи (2). Розв’яжемо дану задачу методом найшвидшого спуску [4 – 7]. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і розв’язуємо для кожного вузла систему $\frac{dx}{dt} = f(x, p_k, t)$, $x(t_0) = x_0$. При цьому $x(T)$ шукається як чисельний розв’язок системи для відповідного x_0 .

Крок 2. Знаходимо $\psi(t, x_0)$ як чисельний розв’язок системи:

$$\frac{\psi(t, x_0)}{dt} = -\frac{\partial f^*(x, p_k, t)}{\partial x} \psi(t, x_0), \quad \psi(T, x_0) = -\frac{\partial \Phi(x(T, x_0))}{\partial x}.$$

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\}, \quad x_*, x_*;$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T \frac{\partial f^*(x_k, p_k, t)}{\partial p_k} \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$, якщо $z_k^{(*)} = 0$, то p_k – шукане значення параметра p і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k шукається як розв’язок одновимірної оптимізаційної задачі $I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha))$.

Лінійний випадок. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв’язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T]. \quad (15)$$

Розв’яжемо дану задачу *методом найшвидшого спуску*. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$.

Крок 2. Знаходимо $\psi(t, x_0)$ у вигляді $\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}$.

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\};$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t) \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$. Якщо $z_k^{(*)} = 0$, то p_k – шукане значення параметра p і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k шукається як

$$\text{розв'язок одновимірної оптимізаційної задачі } I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha)).$$

Метод еліпсоїдів. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв'язках системи (15). Розв'яжемо дану задачу методом еліпсоїдів [6, 7]. Нехай відомо, що розв'язок задачі $p_* \in K(p_0, R)$, де $K(p_0, R)$ – замкнена куля з центром в точці p_0 і радіусом R . Розглянемо алгоритм розв'язування даної задачі при $n > 1$. Зафіксуємо стартову точку $p_0 \in R^m$. Візьмемо $h_0 = R/(n+1)$. Покладемо $B_0 = I$, де I_m – одинична $(m \times m)$ – матриця. Нехай на k -й ітерації знайдені значення $p_k \in R^m$, h_k і матриця B_k . Перехід до $(k+1)$ -ї ітерації полягає у виконанні такої послідовності кроків:

Крок 1. Спочатку вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$. Також обчислимо $\psi(t, x_0)$ за формулою $\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}$.

Крок 2. Обчислимо $z_k^{(*)}$ з умови $\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|$, де

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k)) \right\};$$

$$L(p_k) = \left\{ -\sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t) \psi(t, x_0) dt, \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Якщо $z_k^{(*)} = 0$, тоді зупинимося: p_k – розв'язок. Інакше перейдемо до кроку 3.

Крок 3. Визначимо $\zeta_k = \frac{B_k^T z_k^{(*)}}{\|B_k^T z_k^{(*)}\|}$.

Крок 4. Обчислимо наступну точку $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \zeta_k$.

Крок 5. Обчислимо $B_{k+1} = B_k R_\beta(\zeta_k)$, $\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$, де $R_\beta(\zeta_k)$ – оператор розтягування простору в напрямку ζ_k з коефіцієнтом β .

Крок 6. Обчислимо $h_{k+1} = h_k r$, $r = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Опис алгоритму закінчено.

Метод координатного спуску. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості (1) на розв'язках системи (15). Розв'яжемо дану задачу методом координатного спуску [4]. Оберемо $p_0 \in R^m$ – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо p_k . Тоді перехід до $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k$, де $\Theta(t, s)$ – матриця Коші, $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$.

Крок 2. Введемо змінну $p_{k,0} = p_k$. Тоді побудуємо послідовно спуск по кожній з координат вектора p_k : $p_{k,l} = p_{k,l-1} - \alpha_{k,l} e_l = p_{k,l}(\alpha_{k,l})$, $l = 1, \dots, m$, де e_l – l -й орт, $\alpha_{k,l}$ шукається як розв'язок одновимірної задачі мінімізації $I(p_{k,l}(\alpha_{k,l})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} I(p_{k,l}(\alpha))$.

Крок 3. Якщо $p_{k,m} = p_k$, то алгоритм зупиняється і шукана точка p_k . Інакше $p_{k+1} = p_{k,m}$.

Обчислювальний експеримент. Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \frac{1}{2} \max_{x_0 \in M_0} (x(T, x_0) - x_T)^2 \rightarrow \min \quad (16)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + p, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in M_0, \quad M_0 = [a, b],$$

де a, b, x_T, A – деякі числа, $T > 0$, p – скалярний параметр. Для розв'язування цієї задачі застосуємо метод найшвидшого спуску. Обираємо початкове значення p_0 .

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область M_0 . Тоді беремо точки x_0 як вузли сітки і знаходимо для кожної $x_k(T) = \exp(AT)x_0 + p_k \left(\frac{1}{A}(\exp(AT) - 1) \right)$.

Крок 2. Для кожного x_0 знаходимо $\psi(t, x_0)$ у вигляді $\psi(t, x_0) = -\exp(A(T-t))(x_k(T, x_0) - x_T)$.

Крок 3. Визначимо маргінальну множину і відповідну їй множину $L(p)$:

$$R(p_k) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} (x_k(T, y_0) - x_T)^2 = (x_k(T, x_0) - x_T)^2 \right\};$$

$$L2(p_k, x_0) = \frac{1}{A} \exp(AT) (x_k(T, x_0) - x_T^T),$$

$$L(p_k) = \left\{ \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} L2(p_k, x_0), \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Оскільки задача одновимірна, то є два випадки:

1. $R(p_k)$ містить більше однієї точки. Тоді $L(p_k) = \alpha(x_1 - x_2) + x_2$, де $x_1, x_2 \in L2(p_k, x_0)$, $x_0 \in M_0$ – крайні точки множини (всі інші точки лежать між ними).

2. $R(p_k)$ містить одну точку. Тоді $L(p_k) = L2(p_k, x_0)$.

Крок 4. Знаходимо $z_k^{(*)}$ з умови $z_k^{(*)} = \alpha(x_1 - x_2) + x_2$, де $\alpha = \arg \min_{\alpha \in [0, 1]} \|\alpha(x_1 - x_2) + x_2\|$ для випадку 2, або $z_k^{(*)} = L2(p_k, x_0)$ для випадку 1.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння $p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k)$, де α_k – послідовність,

для якої виконуються умови $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k) = \infty$.

Якщо $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$, де ϵ – наперед задане мале число, то процес закінчується. Інакше переходимо на $(k+1)$ -у ітерацію.

Результати обчислень. Розглядаємо задачу 1 при таких умовах:

початкові параметри:

$$a = 1; \quad b = 2; \quad x_T = 1.4; \quad A = -2; \quad T = 0.9;$$

кількість точок розбиття для дискретної сітки на M_0 : 21;

початкове наближення параметра p : 5;

кількість ітерацій алгоритму: 20;

умова зупинки алгоритму:

$$|p_{k+1} - p_k| < \epsilon, \quad \text{де } \epsilon = 0.1e-3.$$

Результат: оптимальне значення параметра p_* : 2.7604, оптимальне значення критерія якості (16) $I(p_*)$: 0.0034.

На рис. 1 зображений оптимальний пучок $x(t, x_0, p_*)$, $t \in [0, T]$, що виходить з точок розбиття x_0 . Осі абсцис відповідає t . На осі ординат позначені точки x_0 розбиття, з яких бере початок пучок.

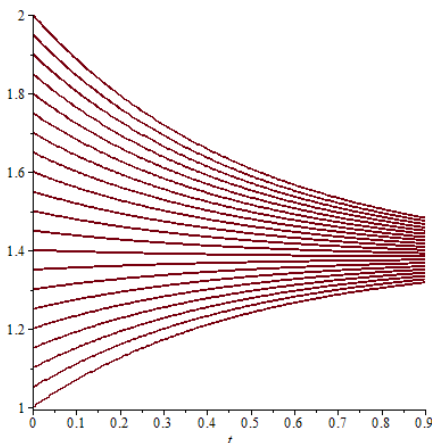


Рис. 1 – Оптимальний пучок.

Висновки. Дана робота присвячена створенню алгоритмів параметричної оптимізації пучка траєкторій з функціоналом типу максимуму. В роботі запропоновано такі результати:

1. Розглянуто задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу.

2. На основі цього для даних типів задач були модернізовані такі алгоритми:

- метод найшвидшого спуску;
- метод еліпсоїдів;

– метод координатного спуску.

3. Створено алгоритми і відповідну програму, що розв’язує задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв’язках лінійної системи.

Проведено ряд обчислювальних експериментів, які показали ефективність розроблених методів.

Список літератури

1. Башняков О. М., Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. – К. : Київський університет, 2008. – 383 с.
2. Kurzhanski A., Pravin Varaiya. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. – Boston : Birkhauser, 2014. – 457 p.
3. Borwein J. M., Lewis A. S. Convex analysis and nonlinear optimization. – Springer-Verlag, N.Y., 2000. – 273 p.
4. Бейко І. В., Зінко П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації. – К. : Київський університет, – 2012. – 799 с.
5. Shor N. Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. – Boston; Dordrecht; London : Kluwer Academic Publishers, 1998. – 394 p.
6. Shor N. Z., Zhurbenko N. G., Likhovid A. P., Stetsyuk P. I. Algorithms of nondifferentiable optimization : Development and application // Cybernetics and Systems Analysis. – 2003. – Volume 39. – Issue 4. – pp. 537 – 548.
7. Nesterov Yu. Introductory Lectures on Convex Optimization. – Springer, 2004. – 236 p.
8. Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Черній Д. І. Методи оптимізації параметричних систем // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. – №1 (135). – С. 151 – 157. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.20.
9. Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Черній Д. І. Керування пучком траєкторій лінійної дискретної системи зі скінченними множинами початкових і кінцевих станів // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – № 1. – С. 154 – 160. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.23.

References (transliterated)

1. Bashniakov O. M., Harashchenko F. H., Pichkur V. V. *Praktychna stiykist', otsinky ta optymizatsiya* [Practical stability, evaluations and optimization]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2008. 383 p.
2. Kurzhanski A., Pravin Varaiya. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*. Boston, Birkhauser, 2014. 457 p.
3. Borwein J. M., Lewis A. S. *Convex analysis and nonlinear optimization*. Springer-Verlag, N.Y., 2000. 273 p.
4. Beiko I. V., Zinko P. M., Nakonechnyy O. H. *Zadachi, metody ta alhorytmy optymizatsiyi* [Optimization problems, methods and algorithms]. Kyiv, Kyivskyy universytet Publ., 2012. 799 p.
5. Shor N. Z. *Nondifferentiable optimization and polynomial problems*. Boston; Dordrecht; London : Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
6. Shor N. Z., Zhurbenko N. G., Likhovid A. P., Stetsyuk P. I. Algorithms of nondifferentiable optimization : Development and application. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2003, Volume 39, Issue 4. pp. 537–548.
7. Nesterov Yu. *Introductory Lectures on Convex Optimization*. Springer, 2004. 236 p.
8. Matvienko V. T., Pichkur V. V., Chernii D. I. Metody optymizatsiyi parametrychnykh system [Methods for optimizing parametric systems]. *Zhurnal obchyslyuvanoi ta prykladnoi matematyky* [Journal of Computational and Applied Mathematics]. 2021, No. 1 (135), pp. 151–157. DOI: 10.17721/2706-9699.2021.1.20.
9. Matvienko V. T., Pichkur V. V., Chernii D. I. Keruvannya puchkom traektoriy liniynoyi dyskretnoyi systemy zi skinchennymy mnozhynamy pochatkovykh i kintsevykh staniv [Control of a beam of trajectories of a linear discrete system with finite sets of initial and final states]. *Visnyk natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh*. [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2023, No. 1, pp. 154–160. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.23.

Надійшла (received) 24.05.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Башняков Олександр Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Bashniakov Oleksandr Mykolaiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2272-0951>; e-mail: oleksandr.bashniakov@knu.ua.

Матвієнко Володимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Matvienko Volodymyr Tyhonovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5946-2942>; e-mail: matvienko.vt@knu.ua.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Chair of Complex Systems Modelling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: +38(044) 259-02-37; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5641-8145>; e-mail: volodymyr.pichkur@knu.ua.