

І. А. ДЖАЛЛАДОВА, О. Є. КАМІНСЬКИЙ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ КЕРОВАНOSTІ СИНГУЛЯРНИХ ГІБРИДНИХ СИСТЕМ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

У статті досліджено сингулярні гібридні системи (СГС), які характеризуються поєднанням диференціально-алгебраїчної структури та гібридної динаміки з перемиканням між різними режимами. Наведено математичну модель, обґрунтовано підходи до аналізу стійкості та керованості та проведено чисельне моделювання. Такі системи природним чином виникають у складних технічних застосуваннях – від енергетики до біомедичних пристроїв – де поведінка об'єкта змінюється внаслідок аварій, перемикань або внутрішніх структурних змін. Запропоновано математичну модель СГС на основі матриць, що залежать від дискретного режиму, де матриця може бути виродженою, що зумовлює сингулярність системи. Проведено аналіз керованості та стабільності таких систем із врахуванням специфіки – наявності алгебраїчних обмежень, імпульсних реакцій і неунікальності розв'язків. Розглянуто приклад системи з двома режимами: регулярним (з повною динамікою) та сингулярним (із замороженими змінними), продемонстровано зміну поведінки системи під час перемикання. Запропоновано підходи до аналізу стійкості із застосуванням гібридних функцій Ляпунова, методів Вейерштрасса та алгебраїчних критеріїв керованості, що враховують структурну виродженість. Проведено чисельне моделювання з використанням Python, реалізовано алгоритм керування у вигляді зворотного зв'язку по стану. Отримані результати підтверджують ефективність моделі у відображенні динаміки СГС, дозволяють дослідити вплив сингулярності на еволюцію стану та підкреслюють необхідність точного аналізу при розробці стратегій керування. Графіки ілюструють типову поведінку системи при перемиканні, зокрема адаптацію до алгебраїчних обмежень та вплив на керованість. Представлена модель і результати моделювання можуть бути використані для розробки безпечних та адаптивних систем керування у сферах, де сингулярні гібридні структури є невід'ємною частиною об'єкта управління.

Ключові слова: сингулярні системи, гібридна динаміка, системи керування, стійкість, керованість.

I. A. DZHALLADOVA, O. YE. KAMINSKY

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF CONTROLLABILITY OF SINGULAR HYBRID SYSTEMS IN APPLIED PROBLEMS

The article investigates singular hybrid systems (SHS), which combine differential-algebraic structures with hybrid dynamics involving mode switching. A mathematical model is presented, approaches to stability and controllability analysis are substantiated, and numerical simulation is performed. Such systems naturally arise in complex engineering applications – from energy systems to biomedical devices – where the system behavior changes due to faults, mode transitions, or internal structural variations. A mathematical model of SHS is proposed based on matrices, which depend on the discrete mode, with potentially being singular, leading to a differential-algebraic formulation. The controllability and stability of such systems are analyzed with a focus on the specific challenges of differential-algebraic formulation – including algebraic constraints, impulsive responses, and non-uniqueness of solutions. A case study of a two-mode system is presented: one regular mode with full dynamics, and one singular mode where certain state variables become constrained. The transition between modes demonstrates the shift from dynamic to algebraic behavior. Approaches to stability analysis are proposed, including hybrid Lyapunov functions, Weierstrass decomposition, and algebraic controllability criteria that account for matrix singularity. Numerical simulation is performed in Python using a state-feedback control law. The results confirm the model's capability to accurately capture SHS behavior, explore the effects of singularity on state evolution, and highlight the need for careful control design under mode transitions. Plots illustrate the characteristic response of the system, particularly adaptation to algebraic constraints and loss of controllability. The proposed model and simulation outcomes offer a basis for developing robust and adaptive control strategies in systems where singular hybrid dynamics are intrinsic to the control process.

Key words: singular systems, hybrid dynamics, control systems, stability, controllability.

Вступ. У сучасних задачах моделювання та керування все частіше зустрічаються *сингулярні гібридні системи (СГС)* – системи, які поєднують у собі неособливі та сингулярні динаміки, перемикання між режимами, а також дискретні події. Такі моделі природно виникають у мехатроніці, електроенергетиці, біомедичних системах, транспорті та робототехніці. Їхні ключові особливості – неуніформність динаміки, структурна неоднорідність та наявність сингулярностей (наприклад, деградація матриці при керуванні або спостереженні).

Початок вивчення таких систем припадає на 1950 – 1960-ті роки, коли в межах аналізу електричних кіл з ідеальними компонентами (індуктивності, ємності, ідеальні джерела струму) було виявлено, що класичний підхід до опису динаміки звичайними *диференціальними рівняннями* не завжди застосовний. Це призвело до виникнення поняття *диференціально-алгебраїчних рівнянь*, у яких не всі змінні мають похідні, а деякі підпорядковуються лише алгебраїчним співвідношенням. У 1980-х роках цей підхід був формалізований у рамках *теорії сингулярних систем* (або систем з описом у просторі станів через *матрицю E* , що може бути виродженою). Одним із провідних дослідників цього періоду став *Lunwen Dai*, який заклав фундамент для аналізу стабільності, керованості та спостережуваності таких систем [1].

У подальші десятиліття, з розвитком автоматизованих та вбудованих систем, особливу увагу почали привертати *гібридні динамічні системи*, які поєднують безперервну динаміку з дискретними подіями – перемиканнями між режимами, логікою контролю або реакцією на порогові значення. У 1990-х і 2000-х роках роботи таких науковців, як *Daniel Liberzon* і *João Hespanha*, сприяли становленню гібридного керування як окремого напрямку. Синтез цих двох галузей – теорії сингулярних систем і гібридної динаміки – відбувся у 2000-х і особливо активно розвивався після 2010 року. Сьогодні сингулярні гібридні системи є актуальними для опису складних технічних об'єктів, таких як мікромережі з динамічною топологією, автономні мобільні платформи з перемиканням режимів роботи, а також у хімічній технології та біомедичних пристроях, де система може переходити з одного функціонального стану в інший зі зміною внутрішньої структури.

Аналіз останніх досліджень. У дослідженні [2] автори розглядають проблеми стійкості та стабілізації для класу неперервних сингулярних гібридних систем. Вони пропонують нові необхідні та достатні умови для регулярності, відсутності імпульсів та стохастичної стійкості таких систем, виражені через *систему строгих лінійних матричних нерівностей (LMIs)*. Крім того, представлено умови існування зворотного зв'язку по стану для стабілізації системи. Результати підкріплені чисельним прикладом, що демонструє ефективність запропонованого підходу.

У роботі [3] було досліджено взаємозв'язок між *біфуркацією Гопфа* в сингулярно збурених нелінійних системах електропостачання та біфуркаціями, *індукованими сингулярністю (SIB)*, у відповідних диференціально-алгебраїчних рівняннях. Автори показують, що явище SIB у системі диференціально-алгебраїчних рівнянь може сигналізувати про наявність біфуркації Гопфа в сингулярно збуреній системі звичайних диференціальних рівнянь. Аналіз базується на теорії лінійних матричних олівців та поліномів з параметрично залежними коефіцієнтами. Представлено кілька чисельних прикладів для ілюстрації результатів.

У дослідженні [4] розглянуто проблему аналізу стійкості для класу сингулярних гібридних систем з перемиканнями та імпульсами. Для кожної підсистеми розроблено відповідний контролер, після чого обговорюється *експоненціальна стійкість* запропонованої системи як для лінійних, так і для нелінійних випадків. Результати застосовуються до організації контролю сингулярних систем, а запропоновані теореми надають вказівки щодо проектування керування. Два чисельні приклади демонструють ефективність запропонованих підходів.

Сингулярні гібридні системи з безперервною динамікою часто виникають у практичних застосуваннях, тому надійний аналіз стійкості таких систем є критично важливим для забезпечення безпеки і прогнозованої поведінки у складних сценаріях з перемиканням режимів. У контексті енергетичних систем, які все частіше характеризуються складною гібридною структурою та високою чутливістю до параметричних змін, дослідження *біфуркаційних явищ* у диференціально-алгебраїчних структурах дозволяє прогнозувати нестабільність і запобігати катастрофічним відмовам у режимі реального часу.

Постановка задачі. Сингулярні гібридні системи (СГС) – це складний клас динамічних систем [5], які поєднують у собі:

- диференціально-алгебраїчну структуру, де матриця при похідній E є виродженою (тобто $\det(E) = 0$);
- гібридну динаміку, що включає перемикання між дискретними режимами або підсистемами;
- керованість, яка може бути частково або повністю втрачена в деяких режимах [6].

Математична модель. Розглянемо сингулярну гібридну систему у формі:

$$E_{\sigma} \dot{x}(t) = A_{\sigma} x(t) + B_{\sigma} u(t), \quad y(t) = C_{\sigma} x(t), \quad \sigma \in S,$$

де $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи; $u(t) \in R^m$ – вхідний сигнал; $y(t) \in R^p$ – вихідний сигнал; $\sigma(t)$ – дискретна змінна стану (режим роботи системи); $E_{\sigma} \in R^{n+n}$ – сингулярна (можливо вироджена) матриця; $A_{\sigma}, B_{\sigma}, C_{\sigma}$ – матриці, що відповідають поточному режиму $\sigma \in S$.

Якщо $\det(E) = 0$, то система є сингулярною (диференціально-алгебраїчною).

Розглянемо, як працює дана модель. У штатному режимі (регулярному), система поводить себе як звичайна лінійна система з повною динамікою – всі стани змінюються відповідно до зовнішніх впливів та керування.

Під час перемикання режиму (наприклад, у випадку аварії, втрати компонента або активації захисту) система переходить у сингулярний режим, де частина змінних більше не має похідної (тобто не може змінюватись довільно). У такому режимі зберігаються алгебраїчні залежності між змінними, і стан може "заморожуватись" або змінюватись дискретно.

Керування може продовжувати діяти, якщо воно враховує структуру сингулярності (наприклад, обирає допустимі напрями впливу на систему).

Класичні підходи до аналізу стійкості (*підхід Ляпунова, спектральні методи*) неможливо застосувати напряму [7] через:

- наявність неунікальних розв'язків (внаслідок виродженості E_{σ});
- можливість миттєвих імпульсних реакцій (зумовлених структурою диференціально-алгебраїчного рівняння);
- перемикання між режимами, які призводять до дискретної динаміки.

Для аналізу необхідно враховувати інваріантні підпростори, регуляризацию системи [8], а також застосування гібридних моделей у просторі подій. Тому є необхідним розглядати нові підходи до синтезу керування:

- *методи розкладання Вейєрштрасса* для декомпозиції системи на регулярну та сингулярну складову;
- *гібридну Ляпуновську функцію* – об'єднання класичних та дискретних умов стійкості;

- методи оптимального перемикавання (Switching Logic Design), що забезпечують бажані характеристики під час зміни режимів;
- алгебраїчні критерії керованості (на основі рангів керованої пари (E_σ, B_σ) з урахуванням сингулярності.

Нехай система має два режими $\sigma \in \{1, 2\}$:

– Режим 1 – регулярний:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

– Режим 2 – сингулярний:

$$E_2 \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t), \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ця система демонструє складну поведінку: в режимі 2 один з рівнів є алгебраїчним. Аналіз вимагає побудови індексу диференціально-алгебраїчного рівняння, дослідження консистентності початкових умов та вибору закону перемикавання, що забезпечує стійкість. На рис. 1. бачимо графік, який ілюструє поведінку сингулярної гібридної системи зі зміною режиму на $t = 5$ секунд. До перемикавання (режим 1) система поводить як класична динамічна система другого порядку. Після перемикавання (режим 2) відбувається сингулярна динаміка – одна з координат (x_2) одразу адаптується до алгебраїчного зв'язку, а x_1 змінюється поступово.

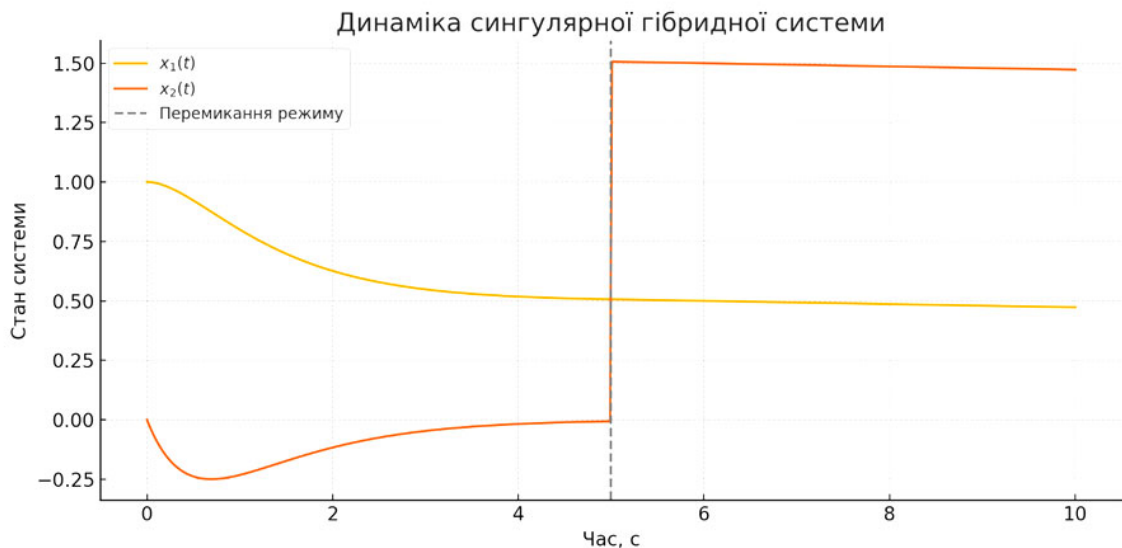


Рис. 1 – Графік поведінки сингулярної гібридної системи зі зміною режиму на $t = 5$ секунд.

Графік демонструє вплив сингулярної структури (миттєве пристосування до алгебраїчного обмеження), важливість правильного моделювання при переході між режимами та складність у забезпеченні стабільності при неконтрольованих перемикаваннях.

Пропонується програмний код для моделювання простої сингулярної гібридної системи з двома режимами, що перемикаються через заданий час. Один режим має регулярну матрицю E , інший – сингулярну (невироджену і вироджену відповідно).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# --- Закони керування для кожного режиму ---
K1 = np.array([[3, 4]]) # Регулярний режим
K2 = np.array([[0, 0]]) # Сингулярний режим — без активного керування

# --- Гібридна система з керуванням ---
def hybrid_system(t, x, mode):
    if mode == 1:
        # Регулярна система
        E = np.eye(2)
        A = np.array([[0, 1],
```

```

        [-2, -3]])
    B = np.array([[0],
                  [1]])
    K = K1
else:
    # Сингулярна система
    E = np.array([[1, 0],
                  [0, 0]]) # вироджена
    A = np.array([[0, 1],
                  [0, -1]])
    B = np.array([[0],
                  [0]]) # не реагує на вхід
    K = K2

u = -K @ x # Простий лінійний зворотній зв'язок
try:
    dxdt = np.linalg.solve(E, A @ x + B @ u)
except np.linalg.LinAlgError:
    dxdt = np.zeros_like(x)

return dxdt

# --- Симуляція з перемиканням ---
def simulate_hybrid_system(t_final=10, t_switch=5):
    x0 = np.array([1.0, 0.0])
    t_points = np.linspace(0, t_final, 500)
    sol = np.zeros((len(t_points), 2))

    for i, t in enumerate(t_points):
        mode = 1 if t < t_switch else 2
        if i == 0:
            sol[i, :] = x0
        else:
            dt = t_points[i] - t_points[i - 1]
            x_prev = sol[i - 1, :]
            dx = hybrid_system(t, x_prev, mode)
            sol[i, :] = x_prev + dx * dt

    return t_points, sol

# --- Побудова графіка ---
t_vals, x_vals = simulate_hybrid_system()

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t_vals, x_vals[:, 0], label='x1 (стан)')
plt.plot(t_vals, x_vals[:, 1], label='x2 (стан)')
plt.axvline(x=5, color='r', linestyle='--', label='Перемикання режиму')
plt.title('СГС з керуванням: поведінка станів x1, x2')
plt.xlabel('Час')
plt.ylabel('Станові змінні')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Результат роботи програми. На рис. 2 для візуального порівняння наведено результат, отриманий в ході роботи програми.

Алгоритм роботи програми полягає в наступному:

1. Моделюємо систему $E \, dx/dt = Ax + Bu$ в двох режимах.
2. До $t = 5$ система поводить себе як класична (регулярна).
3. Після $t = 5$ система переходить у сингулярний режим, де змінні "заморожуються", оскільки E є виродженою.

4. Графік відображає поведінку змінних x_1 , x_2 .
5. Вхід $u(t)$ залежатиме від стану системи – $u(t) = -K_\sigma x(t)$.
6. Додано закон керування: $u(t) = -K_x(t)$.
7. У регулярному режимі керування стабілізує систему ($x \rightarrow 0$).
8. У сингулярному режимі керування – вхід не впливає, система "заморожується".

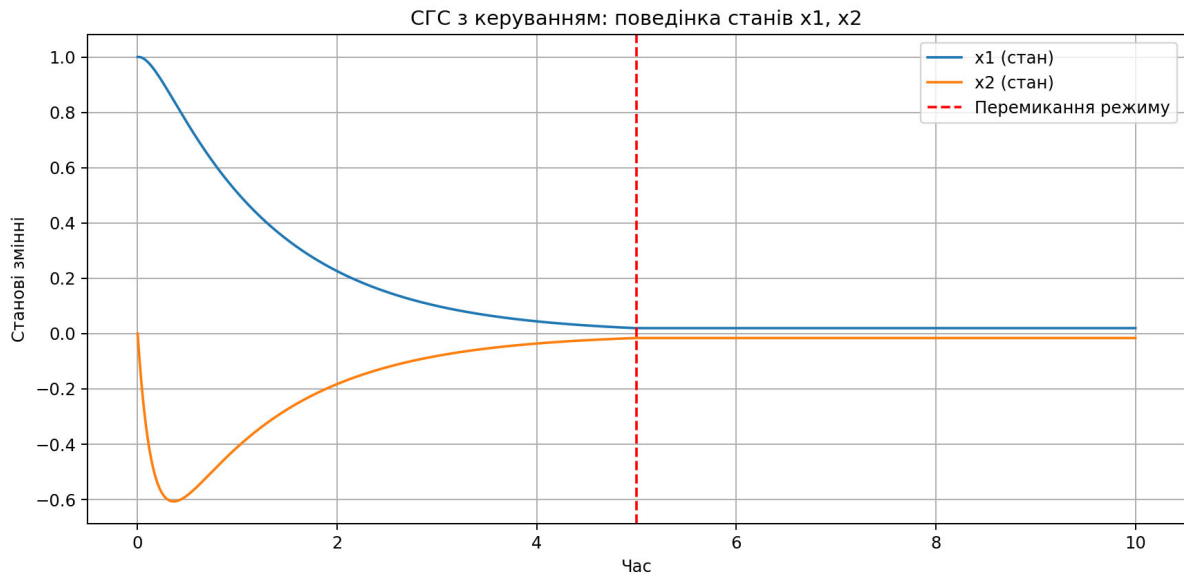


Рис. 2 – Графік поведінки простої сингулярної гібридної системи з двома режимами, що перемикаються через заданий час.

Як працює дана модель: матриця E описує здатність змінювати стан (накопичення енергії, ємність, індуктивність), у режимі 1 керування стабілізує систему: регулює напругу, усуває осциляції, а після перемикання у режим 2, наприклад, при спрацюванні захисту, частина керування блокується, а динаміка стає виродженою. Модель показує, що навіть після втрати керування у другому режимі, система зберігає стабільність у попередньо стабілізованому стані.

Практичне застосування даної моделі є можливим для керування аварійними режимами роботи енергосистеми. В енергетичній системі (наприклад, підстанція або автономна мікромережа) існують два режими роботи:

Режим 1 – штатна робота з активним регулятором напруги й динамікою передачі енергії;

Режим 2 – аварійна ситуація (наприклад, коротке замикання або втрата живлення), при якій частина системи "випадає", а стан змінюється лише за алгебраїчними співвідношеннями (сингулярність).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані із адаптивним контролем СГС, включенням стохастичних факторів [9] (наприклад, $u(t)$ – вхідний сигнал, або характеристика стану $\sigma(t)$ залежить від *марковського процесу* зі скінченною кількістю станів) у гібридні моделі та з реалізацією даних методів в прикладних задачах економіки, соціальної сфери, кібербезпеки критичної інфраструктури. СГС дозволяють враховувати як плавні зміни в економічних показниках (наприклад, інфляція, ВВП, зайнятість), так і випадкові події або зміни режиму функціонування системи, такі як економічні кризи, зміни урядової політики, запровадження санкцій чи збоїв в ланцюгах постачання (маркетингові логістичні проблеми).

У соціальній сфері СГС можуть бути використані для моделювання процесів поширення інформації чи поведінкових змін у суспільстві, де є постійна динаміка (наприклад, зростання впливу), що може випадково змінюватися внаслідок зовнішніх факторів: новин, соціальних протестів або змін у законодавстві. У таких моделях диференціально-алгебраїчні рівняння дозволяють описувати внутрішні обмеження системи (наприклад, бюджетні чи ресурсні обмеження), тоді як гібридна структура забезпечує відображення перемикань між різними сценаріями чи політичними режимами.

Отже, СГС створюють потужний інструмент для аналізу керованості соціально-економічних процесів, прогнозування кризових ситуацій, тестування політичних стратегій та оцінки наслідків управлінських рішень. Це особливо важливо у посткризових та трансформаційних умовах, коли системи не є повністю лінійними та передбачуваними.

Висновки. Запропонована у даній роботі модель дозволяє тестувати надійність керування у разі аварії, моделювати перемикання між режимами реального обладнання (наприклад, вмикання/вимикання секцій трансформатора) та може використовуватися в енергетиці, авіоніці, робототехніці, де керування має забезпечити стійкість у неповних або вироджених системах.

Розробки авторів [10] в сфері соціально-економічних досліджень, а також забезпечення безпеки та оборони країни (аналітики інцидентів кібербезпеки) дозволяють розширити клас систем, до яких можуть бути застосовані методи синтезу керування; гарантувати стійкість систем із перемиканнями між сингулярними та регулярними режимами; формалізувати поняття гібридної керованості та запропонувати алгоритми її перевірки.

Список літератури

1. Dai L. Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer Verlag, Berlin, 1989.
2. Xia Y., Boukas E.-K., Shi P., Zhang J. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems // *Automatica*. – 2009. – № 45(6). – P. 1504 – 1509. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.02.008.
3. Marszalek W., Trzaska Z. Singular Hopf Bifurcations in DAE Models of Power Systems // *Energy and Power Engineering*. – 2011. – № 3(1). – P. 1 – 8. DOI: 10.4236/epe.2011.31001.
4. Zamani I., Shafiee M., Ibeas A. On singular hybrid switched and impulsive systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. – 2018. – № 28(16). – P. 5036 – 5052. DOI: 10.1002/rnc.3876.
5. Rabier P. J., Rheinboldt W. C. Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Handbook of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. VIII, Elsevier.
6. Liberzon D. Switching in systems and control. – Birkhäuser, 2003.
7. Zhang H., Wang Z., Ho D. W. C. Stability analysis and control synthesis for singular hybrid systems // *Automatica*. – 2010. – № 46(5). – P. 903 – 910.
8. Xu S., Lam J. Robust control for uncertain singular systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2001. – № 46(12). – 1997 – 2003.
9. Dzhalladova Irada, Ruzickova Miroslava. Dynamical system with random structure and their applications, Monograph. – Cambridge Scientific Publishers, 2020. – 264 p.
10. Dzhalladova I., Kaminsky O., Lutyj O. The impact of the consequences of the Covid-19 pandemic on the social security of Ukraine // *Access to science, business, innovation in digital economy*. – ACCESS Press, 2021. – № 2(3). – P. 252 – 260. DOI: 10.46656/access.2021.2.3(4).

References (transliterated)

1. Dai L. *Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
2. Xia Y., Boukas E.-K., Shi P., Zhang J. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems. *Automatica*. 2009, no. 45(6), pp. 1504–1509. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.02.008.
3. Marszalek W., Trzaska Z. Singular Hopf Bifurcations in DAE Models of Power Systems. *Energy and Power Engineering*. 2011, no. 3(1), pp. 1–8. DOI: 10.4236/epe.2011.31001.
4. Zamani I., Shafiee M., Ibeas A. On singular hybrid switched and impulsive systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2018, no. 28(16), pp. 5036–5052. DOI: 10.1002/rnc.3876.
5. Rabier P. J., Rheinboldt W. C. *Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Handbook of Numerical Analysis*. 2000, Vol. VIII, Elsevier.
6. Liberzon D. *Switching in systems and control*. Birkhäuser, 2003.
7. Zhang H., Wang Z., Ho D. W. C. Stability analysis and control synthesis for singular hybrid systems. *Automatica*. 2010, no. 46(5), pp. 903–910.
8. Xu S., Lam J. Robust control for uncertain singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2001, no. 46(12), 1997–2003.
9. Dzhalladova Irada, Ruzickova Miroslava. *Dynamical system with random structure and their applications : Monograph*. Cambridge Scientific Publishers, 2020. 264 p.
10. Dzhalladova I., Kaminsky O., Lutyj O. The impact of the consequences of the Covid-19 pandemic on the social security of Ukraine. *Access to science, business, innovation in digital economy*. ACCESS Press, 2021, no. 2(3), pp. 252–260. DOI: 10.46656/access.2021.2.3(4).

Надійшла (received) 23.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Джалладова Ірада Агаєвна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувачка кафедри системного аналізу та кібербезпеки, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ; тел.: (067) 503-87-45; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3158-6844>; e-mail: idzhalladova@gmail.com.

Dzhalladova Irada Agayevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Systems Analysis and Cybersecurity, Vadym Hetman Kyiv National Economic University, Kyiv; tel.: (067) 503-87-45; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3158-6844>; e-mail: idzhalladova@gmail.com.

Камінський Олег Євгенович – доктор економічних наук, доцент, професор кафедри системного аналізу та кібербезпеки, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ; тел.: (067) 477-82-94; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0607-8944>; e-mail: olkam@kneu.edu.ua.

Kaminsky Oleg Yevhenovych – Doctor of Economics, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Cybersecurity, Vadym Hetman Kyiv National Economic University, Kyiv; tel.: (067) 477-82-94; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0607-8944>; e-mail: olkam@kneu.edu.ua.