

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОМЕНТІВ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ БАЛКИ ТИМОШЕНКА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Елементи конструкцій із шарнірним обпиранням широко використовують як у техніці, так і в установках для дослідження деформування різних елементів конструкцій. Урахування тертя в шарнірних опорах необхідне для моделювання реальних умов. Також можна використовувати тертя в шарнірах для демпфування коливань. Метою цієї роботи є розробка методу ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка під час її нестационарного навантаження. Розглядалась схема навантаження балки за симетричного розташування опор відносно точки прикладання нестационарної зосередженої сили. Ідентифікацію проводили за прогином певної точки балки як функції часу. Для моделювання коливань балки було використано систему диференціальних рівнянь для балки Тимошенка. Розв'язання цієї системи отримано з використанням розкладання невідомих функцій у ряди Фур'є і перетворення Лапласа. Під час розв'язання оберненої задачі з ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах використовувався метод регуляризації Тихонова. У результаті дослідження розроблено метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах для балки Тимошенка. Було проведено числовий експеримент. Як вихідні дані було взято прогин у деякій точці балки (як функцію часу), який було отримано під час розв'язання прямої задачі. Проведено дослідження впливу неточності задання вихідних даних на стійкість і точність ідентифікації. Результати розрахунків показали, що розроблений метод ідентифікації, який базується на використанні методу регуляризації Тихонова, дає змогу ефективно отримати стійкий розв'язок відповідної оберненої задачі навіть без попереднього доопрацювання вихідних даних. Розроблений метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах може мати подальший розвиток для більш складних схем навантаження балок, а також для інших видів елементів конструкцій.

Ключові слова: балка Тимошенка, нестационарне навантаження, тертя в опорах, момент тертя, обернена задача, інтегральні рівняння Вольтерра, регуляризації Тихонова.

A. V. VOROPAY, P. A. YEGOROV, S. I. POVALIAIEV, A. S. SHARAPATA

IDENTIFICATION OF FRICTION MOMENTS IN HINGE SUPPORTS OF TIMOSHENKO BEAM UNDER NON-STATIONARY LOADING

Structural elements with hinged support are widely used both in engineering and in plants to study the deformation of various structural elements. Consideration of friction in hinged supports is necessary for modeling natural conditions. It is also possible to use friction in joints to damp vibrations. The purpose of this work is to develop a method of identification of friction moments in the hinge supports of Timoshenko beam under its non-stationary loading. The loading scheme of the beam under symmetric arrangement of supports relative to the point of application of non-stationary concentrated force was considered. Identification was carried out on the deflection of a certain point of the beam as a function of time. The system of differential equations for the Timoshenko beam was used to model the beam vibrations. The solution of this system was obtained using Fourier series expansion of unknown functions and Laplace transform. The Tikhonov regularization method was used to solve the inverse problem for identification of friction moments in hinge supports. As a result of the study, a method for identification of friction moments in hinged supports for Timoshenko beam was developed. A numerical experiment was carried out. The deflection at some point of the beam (as a function of time), which was obtained by solving the direct problem, was taken as input data. The influence of inaccuracy of initial data setting on stability and identification accuracy was investigated. The results of calculations have shown that the developed method of identification based on the use of the Tikhonov regularization method allows to effectively obtain a stable solution of the corresponding inverse problem even without preliminary processing of the initial data. The developed method of identification of friction moments in hinge supports can be further developed for more complex loading schemes of beams, as well as for other types of structural elements.

Key words: Timoshenko beam, non-stationary loading, friction in supports, friction moment, inverse problem, Volterra integral equations, Tikhonov regularization.

Вступ та аналіз літератури. Відомо, що елементи конструкцій у вигляді балок мають широке розповсюдження. У багатьох випадках *крайові умови* для балок відповідають наступним випадкам – ідеалізаціям: шарнірне обпирання, вільне обпирання, жорстке защемлення тощо. Але навіть в *шарнірних опорах*, які виготовлені для лабораторних установок (рис. 1), має місце певна дисипація енергії, яку бажано враховувати при дослідженні коливальних процесів, особливо нестационарних.

Окрім моделювання опору в шарнірних опорах викликає інтерес кількісне визначення моментів опору (тертя) в шарнірах (рис. 2).

Дослідження дисипації енергії у шарнірах та опорах, а також питання, пов'язані з кількісною оцінкою тертя в шарнірних опорах, є виключно актуальними. Більшість оцінок виконується на основі експериментальних та стендових досліджень та використання числових моделей (які найчастіше базуються на методі скінченних елементів). Аналітичні підходи зустрічаються відносно рідко. Також можна умовно розділити *моделі дисипації енергії* у крайніх шарнірних опорах, у проміжних опорах багатопрогонових балок та моделі дисипації енергії безпосередньо у матеріалі балки (за рахунок урахування внутрішнього тертя).

Наведемо декілька робіт, у яких досліджується тертя безпосередньо в шарнірних опорах.

У роботі [1] представлені результати стендових випробувань та числового аналізу, проведених з метою визначення характеристик тертя у шарнірних опорах. Для аналітичного визначення роботи тертя у шарнірах було використано *функціональну модель (фізичну та математичну)*. Було використано *модель прилипання-ковзання переважчастого руху та модель сухого тертя*. В результаті аналізу було визначено робочу характеристику тертя у шарнірі при осьовому стиску та його міцність на розтяг (тобто зусилля розтягу з'єднання). Було визначено вплив коефіцієнта тертя між взаємодіючими фасонними профілями на характеристики опор. У статті також представлені результати стендових випробувань тертя у шарнірних опорах при осьовому стисканні та виконано

порівняння з результатами числового аналізу. Розроблена модель може бути використана для оптимізації роботи шарнірних опор.



Рис. 1 – Шарнірно-оберта балка для експериментальних досліджень.

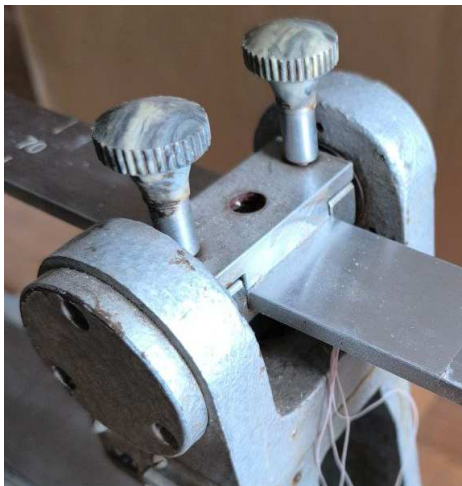


Рис. 2 – Конструкція шарнірних опор.

У статті [2] представлені результати експериментальних досліджень тертя кочення двох циліндричних роликів на спеціальному випробувальному стенді, що імітує роботу обертового опорного вузла печі. Момент тертя кочення визначається за допомогою спеціальної пластинчастої муфти на валу ведучого валка. Змінними параметрами є окружна швидкість кочення, радіальне навантаження та стан контактних поверхонь роликів. Розраховано фактичні значення коефіцієнта тертя кочення за різних умов кочення. Встановлено закономірності зміни коефіцієнта тертя кочення від швидкості кочення, в'язкості мастила та контактного тиску від радіального навантаження, що відповідає реальним значенням в основних опорних вузлах промислових обертових печей. Визначено вплив інтенсивності зношування на момент тертя кочення. Рекомендовано діапазон коефіцієнта тертя кочення, який слід враховувати при розрахунках втрат потужності в опорних вузлах великогабаритних обертових вузлів.

У роботі [3] два кульові шарніри використовуються як точки введення одноосового навантаження на стендах для випробування конструкцій, де необхідно допускати обертальні ступені свободи. Окрім можливості введення осово-циклічних сил розтягування та стискування, кульові шарніри створюють згинальні моменти, коли навантаження вводиться ексцентрично у зразок. Оскільки момент тертя безпосередньо впливає на структурну реакцію зразка, його кількісне дослідження представляє інтерес. Розроблено модель кульового шарніра *методом скінченних елементів (СЕ)* з використанням технології нелінійного контакту. Модель була перевірена за допомогою детальної твердотільної моделі СЕ та аналітичної моделі. Було запропоновано експериментальну установку, в якій кульовий шарнір на обох кінцях зразка вводив навантаження. Модель скінченних елементів випробувального стенду була перевірена за допомогою експериментів.

Метою роботи [4] є оцінка поведінки та міцності композитних плит з урахуванням впливу тертя на опорах. Для цього були використані результати програми лабораторних випробувань сталевих настилу, який складається з трапецієподібного профілю з виступами у формі літери «V». Під час випробувань вимірювалися прогини, торцеві зсуви та деформації сталевих настилів, що дозволило проаналізувати поведінку композитної плитної системи та визначити режим її руйнування. Вплив тертя на опорах у поздовжньому зсувному зв'язку оцінювався методом часткового зсувного з'єднання з використанням коефіцієнта тертя.

У дослідницькій роботі [5] пропонується нова методологія прогнозування оптимального розташування опор тертя для ефективного пом'якшення енергії коливань у трубопровідних системах. Врахування сил тертя в динамічних характеристиках системи вносить *невід'ємну нелінійність*, що ускладнює її аналіз. Як правило, числові розв'язання використовуються для обходу складнощів, пов'язаних з пошуком аналітичних розв'язків для нелінійних систем. Однак аналіз у часі може вимагати значних обчислювальних ресурсів через складні розрахунки, що виникають з нелінійності. Тому, у [5] представлено ефективний підхід, заснований на лінійному аналізі, для прогнозування ідеального положення для встановлення опор тертя як заміни нерухомих опор. Крім того, було досліджено зв'язок між положеннями встановлення опор тертя та їх ефективністю в поглинанні коливань за допомогою методу гармонійного збалансування. Обидві методології перевіряються шляхом порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими за допомогою аналізу за часом з використанням *методу скінченних елементів (FEM)*.

Запропоноване дослідження з ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка при нестационарному навантаженні базується на моделі тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях, наведеної в роботі [6] та є її логічним продовженням.

Більш детальний аналіз робіт присвячений дослідженню *нестационарного деформування балок Тимошенка* а також їх коливань приведено в роботах [6 – 9], причому в роботах [7, 8] досліджуються проміжні в'язко-пружні опори балки Тимошенка при нестационарних коливаннях, а в [9] додатково враховано вплив масово-інерційних характеристик додаткової в'язко-пружної опори.

Роботи [10 – 12] присвячено дослідженню вільних коливань багатопрогонових балок Тимошенка, а в [13] виконано аналіз характеристик як вільних, так і вимушених коливань багатопрогової балки Тимошенка на основі *методу Рунґа*.

В класичній монографії [14] розглядаються коливання деформівних систем при імпульсних та рухомих навантаженнях, велика частина якої присвячена саме балкам.

В наступних роботах ускладнення досліджуваних моделей викликано урахуванням більш складної геометрії балок або властивостями сучасних складних композитних матеріалів [15 – 17]. Числові та експериментальні дослідження характеристик *багатопротітних (багатопротітних / багатопрогонових)* балок з "метаматеріалів" описано в [15]. А в [16] досліджується затухання хвиль багатопротітної балки зі змінними поперечними перерізами. В роботі [17] описані геометрично нелінійні вимушені коливання повністю закріплених функціонально-градієнтних балок з кількома тріщинами, що спираються на проміжні прості опори.

Геометрично нелінійні вимушені коливання повністю затиснутих багатопротітних балок, що несуть кілька мас і спираються на скінченну кількість простих опор, описано в [18].

В роботах [19 – 21] розглядаються балки та пластини. Стаття [19] стосується визначення навантажень у багатопрогонових балках та плитах. В роботі [20] досліджуються шаруваті (ламіновані) смуги (полоси) та пластини, а в [21] описана теорія та експеримент для ламінованої пластини при ударному навантаженні.

В статті [22] описано розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спиранням.

Далі наведено цикл робіт, в яких розглянуто деформування або коливання багатопрогонових балок під час дії рухомих навантажень або мас [23 – 31]. Вплив на балку кінцевої довжини рухомої маси описано в [23]. В роботі [24] динамічна реакція одно- та багатопрогонових балок під рухомих навантаженням досліджується з використанням *формул динамічної жорсткості* та *методу Гальоркіна*. Застосування інтегральних *рівнянь Вольтерра* в динаміці багатопрогової балки Релея під дією рухомого навантаження описано в [25]. Динамічний аналіз багатопротітної балки під дією рухомої сили виконується з використанням *методу спектральних елементів частотної області* в роботі [26]. В статті [27] для багатопротітних балок Тимошенка розглядається дія різних силових навантажень – від стаціонарного навантаження до мас, що рухаються з прискоренням. В роботі [28] досліджується динамічна реакція двоколіїних багатопрогонових залізничних мостів при затримці в'їзду другого поїзда. Аналіз динамічної реакції багатопрогової системи *мосто-коліїної конструкції* під дією рухомих навантажень наведено в [29]. В статті [30] виконується ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок. Задача управління вібрацією балок під рухомих навантаженнями за допомогою налаштованих систем *масового інерціювання* описана в [31].

Постановка задачі. Механічна система складається з *пружної ізотропної балки середньої товщини Тимошенка*, шарнірно-обпертої по краях (рис. 1). На балку посередині діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання балки. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладання навантаження не змінюються протягом коливального процесу.

Вважається, що в шарнірних опорах відбувається *дисипація енергії*, яка викликана безпосередньо тертям у шарнірах, а момент опору (тертя) лінійно пропорційний кутовій швидкості повороту балки в шарнірі:

$$M_j(t) = \kappa_j \frac{d\psi_j(t)}{dt}, \quad (1)$$

де κ_j – коефіцієнти тертя в шарнірних опорах; $d\psi_j(t)/dt$ – кутова швидкість повороту перерізу балки в шарнірах.

Кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz можна знайти як:

$$\psi_j(t) = \frac{1}{\kappa_j} \int M_j(t) dt. \quad (2)$$

Таким чином, вплив тертя в шарнірах моделюється за допомогою додавання двох додаткових зосереджених моментів $M_1(t)$ і $M_2(t)$, які прикладені в лівій і правій опорах відповідно. Зазначимо, що моменти $M_1(t)$ і $M_2(t)$ додаються у *рівняння деформування* як зовнішні, але згідно з *третьім законом Ньютона* їх значення треба брати з протилежним знаком.

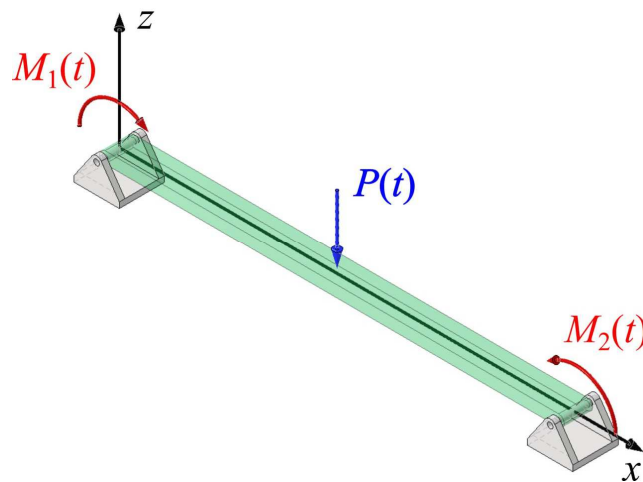


Рис. 3 – Схема навантаження балки.

Математична модель. Відповідно до [6 – 9, 14] *система диференціальних рівнянь у частинних похідних* для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G' F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_\Sigma(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G' F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - M_\Sigma(x, t), \end{cases} \quad (4)$$

де t – час; h – товщина балки; b – ширина балки; $G' = k' \cdot G$; k' – коефіцієнт зсуву; $F = bh$ – площа поперечного перерізу балки; $I = bh^3/12$; w – прогин серединної площини балки; ψ – кут повороту; ρ – густина матеріалу балки; пружні постійні: E – модуль пружності, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Вкажемо, що $P_\Sigma(x, t)$ та $M_\Sigma(x, t)$ – силове та моментне зосереджене навантаження:

$$P_\Sigma(x, t) = \delta(x - x_0) \cdot P(t); \quad (5)$$

$$M_\Sigma(x, t) = \sum_{j=1}^2 \delta(x - x_j) \cdot M_j(t). \quad (6)$$

Система рівнянь розв'язується за допомогою розкладання невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні *ряди Фур'є*. Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, *інтегрального перетворення Лапласа* [32]. У цьому випадку при виконанні обернених перетворень розв'язки можуть бути представлені у вигляді *інтегралів Дюамеля (типу згортки)*, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь. Докладніше розв'язання подібних систем рівнянь описано в [6 – 9, 33].

Пряма задача. Детальний розв'язок прямої задачі наведено в [6], де в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (4) за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки отримано наступний аналі-

тичний вираз для функції прогинів та кутів повороту:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_j}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_j}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (7)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{P_j}^\Psi(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_j}^\Psi(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (8)$$

де $K_i(x, t)$ – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток):

$$\begin{aligned} K_{P_j}^W(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin(\omega_{2k} t) \right]; \\ K_{M_j}^W(x, t) &= c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{P_j}^\Psi(x, t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{M_j}^\Psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^\Psi \sin(\omega_{2k} t) \right]. \end{aligned}$$

У випадку зосередженого навантаження (силового або моментного) балки в точці з координатою x_j коефіцієнти для навантажень матимуть вигляд:

$$C_{kj}^P = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot b \cdot h} \sin(\lambda_k \cdot x_j); \quad C_{kj}^M = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot I} \cos(\lambda_k \cdot x_j).$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$\begin{aligned} c_T^2 &= \frac{G'}{\rho}, \quad c_b^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \lambda_k = \pi \frac{k}{l}, \quad \Delta_k = \sqrt{\left(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot \lambda_k^4 \cdot c_T^2 \cdot c_b^2}; \\ \Omega_{1k}^W &= \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^W = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2k}}; \quad \Omega_{1k}^\Psi = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^\Psi = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{2k}}. \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2(c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_k)}.$$

Обернена задача – знаходження невідомих зосереджених моментів тертя в опорах.

Розглянемо конкретний випадок з однією збурювальною силою $P(t)$ (яка відома) і двома додатковими зосередженими моментами (тертя) $M_1(t)$ і $M_2(t)$ (які невідомі, але в цьому окремому випадку $M_1(t) = -M_2(t) = M(t)$).

$$w(x_0, t) = \int_0^t K_{P_j}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{M_j}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Після дискретизації виразу для прогину можна записати наступну систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{w}; \\ \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2. \end{cases} \quad (10)$$

Оскільки розглядається випадок симетричного розташування опор відносно зовнішнього навантаження, то з урахуванням $M_1(t) = -M_2(t) = M(t)$ систему (10) можна записати таким чином:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{M}_1 = -\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}. \end{cases} \quad (11)$$

При цьому кількість невідомих в системі матричних рівнянь (11) зменшиться до одного і її вигляд спроститься до одного матричного рівняння (що еквівалентно розв'язанню одного інтегрального рівняння Вольтерра I роду):

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (12)$$

Якщо позначити $\mathbf{A}_M = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ та $\mathbf{w}^* = \mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$, то матричне рівняння (12) можна записати у наступному вигляді:

$$\mathbf{A}_M \mathbf{M} = \mathbf{w}^*. \quad (13)$$

Таким чином, розв'язання оберненої задачі зводиться до розв'язання одного інтегрального рівняння Воль-

тертя І роду, яке після дискретизації зводиться до одного матричного рівняння (13) відносно невідомого моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$. Вказана задача є *некоректною за Адамаром*, тому що не має єдиного стійкого розв'язку. Для отримання наближеного розв'язку оберненої задачі відносно моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$ був використаний *метод регуляризації Тихонова*. Відповідно до нього матричне рівняння (13) зводиться до наступного вигляду:

$$(\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{A}_M^T \mathbf{w}^*, \quad (14)$$

де $\mathbf{C}$ – симетрична трьохдіагональна матриця; α – параметр регуляризації.

Після відповідних перетворень рівняння (14) дозволяє отримати формулу для визначення моменту тертя в опорах $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{A}_M^T \mathbf{w}^*. \quad (15)$$

Таким чином, в результаті розв'язання матричного рівняння (15) розроблена методика дозволяє при відомому зовнішньому навантаженні $P(t)$ та прогину в одній точці балки $w(x, t)$ визначити зосереджені реактивні моменти в опорах $M_i(t)$ з урахуванням тертя.

Обчислювальний експеримент. У роботі виконується математичний розрахунок, який моделює визначення моменту опору (тертя) в шарнірних опорах для балки Тимошенка (рис. 3) під час нестационарного навантаження.

При обчислювальному експерименті прогини не вимірювались на реальній балці, а визначались з розв'язання прямої (тестової) задачі, у якій збурювальне навантаження $\bar{P}(t)$ задавалось. Як вихідні дані (рис. 4) вибиралися значення прогину в певній точці, які були взяті з розв'язку прямої задачі.

При проведенні обчислювального експерименту була досліджена шарнірно обперта балка (рис. 3), що знаходиться під дією зовнішнього нестационарного навантаження та має наступні геометричні та фізичні параметри: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значення відповідають легованій сталі); довжина балки $l = 0.8 \text{ м}$, ширина $b = 0.05 \text{ м}$, товщина $h = 0.025 \text{ м}$; координата точки прикладення зовнішнього навантаження $x_0 = 0.4 \text{ м}$ (розглянуто випадок симетричного прикладення зовнішнього навантаження відносно опор); значення коефіцієнту лінійно-в'язкого демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Розрахунки виконувалися з урахуванням 100 членів у відповідних рядах Фур'є.

Зовнішнє нестационарне навантаження $\bar{P}(t)$ прикладалося до балки в точці з координатою x_0 та моделювалося у вигляді імпульсу, що показаний на рис. 4.

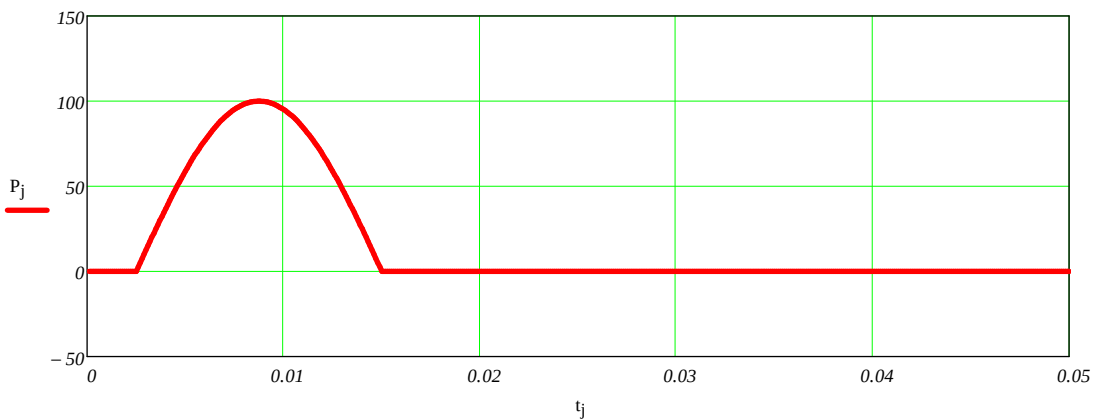


Рис. 4 – Збурююча сила $P(t)$.

Значення прогину $\bar{w}(t)$ в точці з координатою x_0 (під навантаженням) було взято з розв'язку відповідної прямої задачі (рис. 5 – червона крива). Для моделювання похибок у вихідних даних, які виникають при проведенні натурального експерименту, на цю залежність був накладений «шум», який для випадкових процесів добре моделюється *законом нормального розподілення Гауса* (рис. 5 – чорна крива). Ця залежність була розрахована в додатку MathCAD з використанням вбудованої функції для нормального розподілу Гауса *rnorm* відповідно до формули:

$$w_{\delta}(t) = \bar{w}(t) + \text{rnorm}(t, 0, \delta \cdot w_{\max}), \quad (16)$$

де δ – рівень шуму або відносна похибка, що складала 5%; $w_{\max}$ – величина максимального прогину балки в досліджуваній точці

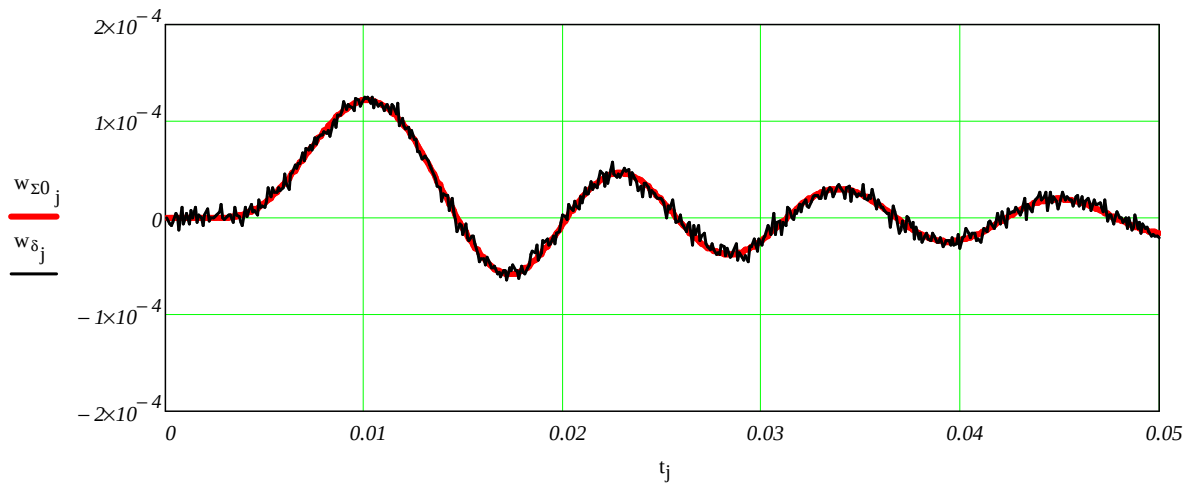
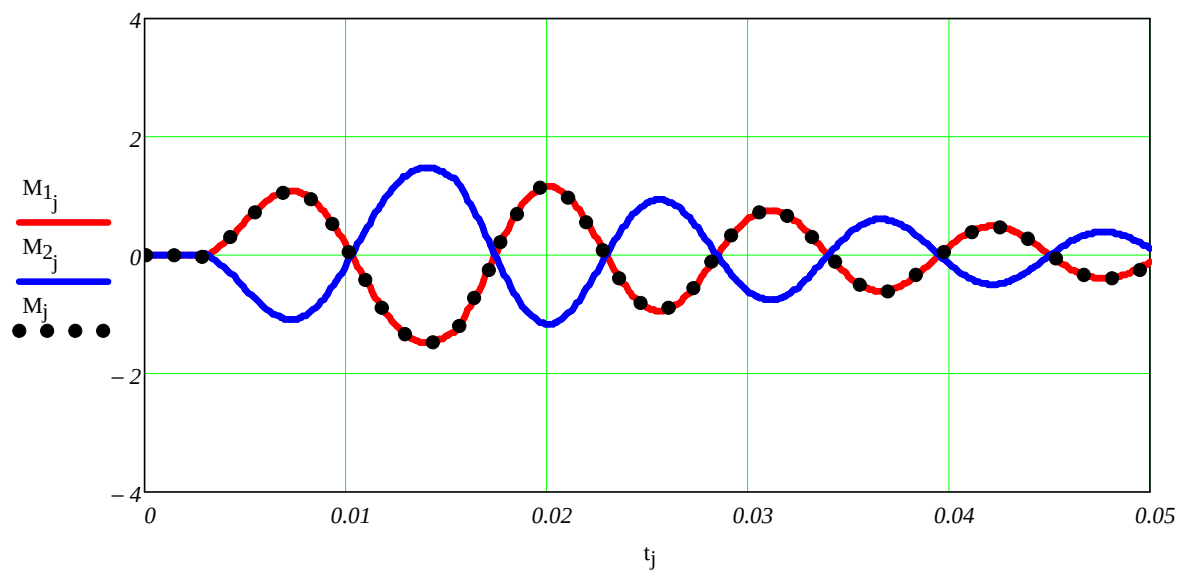
Рис. 5 – Прогин балки в точці x_0 .

Рис. 6 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки.

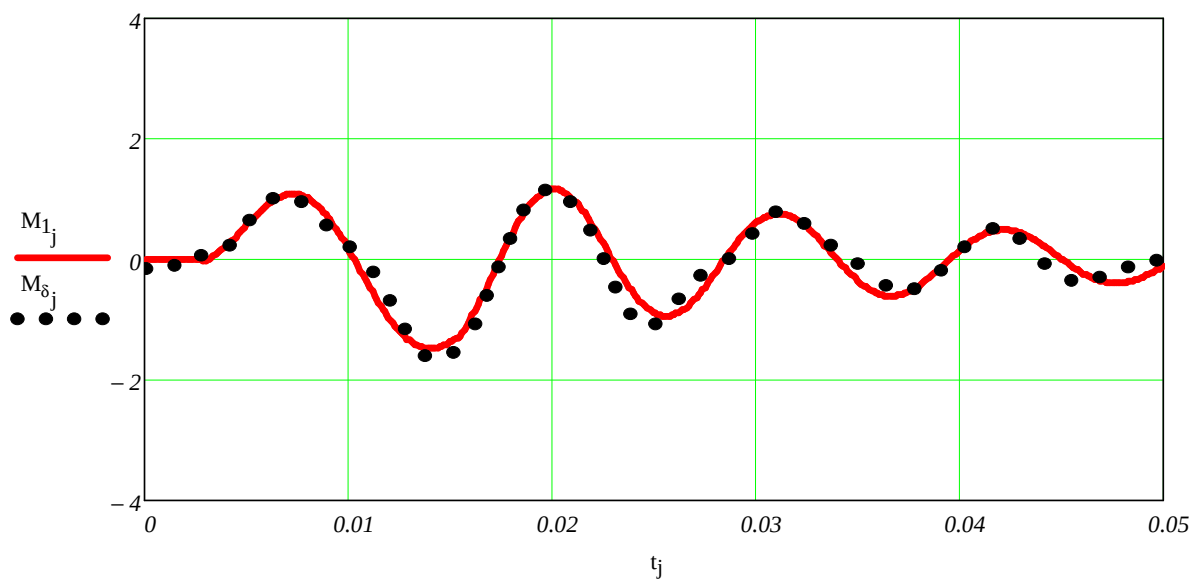


Рис. 7 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки.

Результати чисельних розрахунків – ідентифіковані зосереджені моменти тертя в шарнірних опорах балки – наведені на рис. 6 – 7.

На рис. 6 показані моменти тертя $M_1(t)$ (червона крива) та $M_2(t)$ (синя крива) знайдені в результаті розв'язання прямої задачі, а також момент тертя $M(t)$ (чорні точки), який був ідентифікований за відомими значеннями прогину $\bar{w}(t)$ (рис. 4 червона крива), взятими з розв'язку прямої задачі. Можна спостерігати, що криві $M_1(t)$ та $M_2(t)$ є дзеркально симетричними відносно горизонтальної осі, що є наслідком симетричної постановки задачі.

Зазначимо, що ідентифікований момент тертя $M(t)$ практично співпадає з моментом тертя $M_1(t)$, що свідчить про ефективність розробленого методу ідентифікації. При застосуванні до рівняння (13) процедури регуляризації за допомогою *методу нев'язки* було обрано параметр регуляризації $\alpha = 10^{-28}$, що для даної постановки задачі є близьким до оптимального. Слід зазначити, що при розв'язанні коректної задачі розрахунковий алгоритм видає нульове значення параметра регуляризації ($\alpha = 0$).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним проведення натурних експериментальних досліджень з визначення моментів тертя в шарнірних опорах балки.

Викликає інтерес визначення моментів тертя в шарнірах з різною величиною опору в лівій і правій опорах.

Розроблений метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах може набути подальшого розвитку для більш складних схем навантаження шарнірно обпертих балок, а також для інших видів елементів конструкцій.

Також у подальших дослідженнях можливо по аналогії з [34] виконати розв'язання задачі гасіння коливань балки Тимошенка за допомогою моментів тертя у шарнірних опорах. Після цього з'явиться перспектива розв'язання задачі управління нестационарними коливаннями за допомогою динамічно керованих моментів тертя у шарнірах.

Висновки. В роботі розроблено метод ідентифікації моментів тертя в шарнірних опорах балки Тимошенка. Розглядалася схема навантаження балки при симетричному розташуванні опор відносно точки прикладання нестационарної зосередженої сили. Ідентифікація проводилась за прогином певної точки балки як функцією часу.

Проведений чисельний експеримент та співставлення результатів розв'язання прямої та оберненої задачі показав ефективність розробленого методу при відновленні моментів тертя в шарнірних опорах при нестационарному навантаженні. Проведено дослідження впливу похибок випадкового характеру на рівні 5 % у вихідних даних (для прогину як функції часу) на результати ідентифікації. Результати розрахунків показали, що розроблений метод ідентифікації, заснований на використанні методу регуляризації Тихонова, дозволяє ефективно отримати стійкий розв'язок відповідної оберненої задачі навіть без попередньої обробки вихідних даних.

Список літератури

1. Brodny Jarosław. Determining the working characteristic of a friction joint in a yielding support // Archives of Mining Sciences. – 2010. – № 55. – P. 733 – 746.
2. Kuzio Igor, Gurskyi Volodymyr, Krot Pavlo, Zimroz Radoslaw, Sorokina Tatyana. Experimental Study of the Rolling Friction Coefficient in Highly Loaded Supports of Rotary Kilns. – 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-91847-7_25.
3. Rosemeier Malo, Gebauer Thomas, Lester Catherine, Bätge Moritz. Friction moments of ball joint supports used in structural test rigs subjected to cyclic loading. – 2019. DOI: 10.5281/zenodo.3386135.
4. Lavall A. C. C., Costa R. S., Rodrigues F. C. Influence of the friction at the support in the longitudinal shear strenght of composite slab // SDSS'Rio 2010 Stability And Ductility Of Steel Structures E. Batista, P. Vellasco, L. de Lima (Eds.). – Rio de Janeiro, Brazil, September 8 – 10, 2010. – P. 871 – 878.
5. Minseok Lee, Yong Hoon Jang, Seunghun Baek. Methodology for predicting optimal friction support location to attenuate vibrational energy in piping systems // Nuclear Engineering and Technology. – 2024. – Volume 56. – Issue 5. – P. 1627 – 1637. DOI: 10.1016/j.net.2023.12.017.
6. Воронай О. В., Єгоров П. А., Поваляєв С. І., Шапарата А. С. Моделювання тертя в шарнірних опорах при нестационарних коливаннях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (5). – С. 33 – 45. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).04.
7. Воронай О. В., Поваляєв С. І., Єгоров П. А. Моделювання проміжної в'язко-пружної опори при нестационарних коливаннях балки Тимошенка // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1'2022. – С. 36 – 44. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.05.
8. Воронай О. В., Поваляєв С. І., Єгоров П. А. Обернена задача для балки Тимошенка з додатковою в'язко-пружною опорою при нестационарному деформуванні // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 1'2023. – С. 52 – 58. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.08.

9. Voropay Alexey, Menshykov Oleksandr, Povaliaiev Sergiy, Sharapata Andriy, Yehorov Pavlo. Modeling a Viscoelastic Support Considering Its Mass-Inertial Characteristics During Non-Stationary Vibrations of the Beam // *Journal of Engineering Sciences*. – 2023. – № 10. – D8-D14. DOI: 10.21272/jes.2023.10(1).d2.
10. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam // *Journal of Vibration and Control*. – 2022. – Vol. 28. – No. 7 – 8. – P. 799 – 811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
11. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // *Archive of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 88. – No. 7. – P. 1213 – 1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
12. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 87. – P. 152 – 170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
13. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method // *Shock and Vibration*. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1 – 18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
14. Кохманюк С. С., Янютин Є. Г., Романенко Л. Г. Коливання деформівних систем при імпульсних та рухомих навантаженнях. – Київ : Наукова думка, 1980. – 232 с.
15. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams // *Physics Letters A*. – 2019. – Vol. 383. – No. 36. – P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
16. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections // *Acta Mechanica*. – 2023. – Vol. 234. – No. 4. – P. 1451 – 1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
17. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
18. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
19. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates // *European Journal of Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 30. – No. 1. – P. 176 – 195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
20. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – No. 48 – 49. – P. 8673 – 8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
21. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – No. 5. – P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
22. Янютин Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
23. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines*. – 2022. – No. 1. – P. 15 – 20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
24. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method // *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020)* 23 – 26 November 2020. – Athens, Greece, 2020. – P. 2621 – 2630.
25. Szytko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2019. – Vol. 121. – P. 777 – 90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
26. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method // *Computers & Structures*. – 2017. – Vol. 192. – P. 181 – 195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
27. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses // *Archive of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 92. – No. 4. – P. 1247 – 1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
28. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. – 2023. – P. 1 – 16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
29. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. – 2021. – P. 1 – 19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
30. Янютин Є. Г., Гришакін В. Т. Ідентифікація рухомого навантаження для в'язкопружних балок // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Зб. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
31. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems // *Engineering Structures*. – 2023. – Vol. 275. – P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
32. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. – Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. – 1130 p.
33. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2022. – Vol. 5. – No. 7 (119). – P. 21 – 34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
34. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads // *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – № 41. – P. 4919 – 4926.

References (transliterated)

1. Brodny Jarosław. Determining the working characteristic of a friction joint in a yielding support. *Archives of Mining Sciences*. 2010, no. 55, pp. 733–746.
2. Kuzio Igor, Gurskyi Volodymyr, Krot Pavlo, Zimroz Radoslaw, Sorokina Tatyana. Experimental Study of the Rolling Friction Coefficient in Highly Loaded Supports of Rotary Kilns. 2022. DOI: 10.1007/978-3-030-91847-7_25.
3. Rosemeier Malo, Gebauer Thomas, Lester Catherine, Bätge Moritz. Friction moments of ball joint supports used in structural test rigs subjected to cyclic loading. 2019. DOI: 10.5281/zenodo.3386135.
4. Lavall A. C. C., Costa R. S., Rodrigues F. C. Influence of the friction at the support in the longitudinal shear strenght of composite slab. *SDSS'Rio 2010 Stability And Ductility Of Steel Structures E. Batista, P. Vellasco, L. de Lima (Eds.)*. Rio de Janeiro, Brazil, September 8 – 10, 2010. pp. 871–878.
5. Minseok Lee, Yong Hoon Jang, Seunghun Baek. Methodology for predicting optimal friction support location to attenuate vibrational energy in piping systems. *Nuclear Engineering and Technology*. 2024, Volume 56, Issue 5, pp. 1627–1637. DOI: 10.1016/j.net.2023.12.017.

6. Voropay A. V., Yegorov P. A., Povalyaev S. I., Sharapata A. S. Modelyuvannya tertya v sharmirnykh oporakh pry nestatsionarnykh kolyvannyakh balky Tymoshenko [Simulation of friction in hinged supports during non-stationary vibrations of a Timoshenko beam]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 2 (5), pp. 33–45. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.02(5).04.
7. Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yegorov P. A. Modelyuvannya promizhnoyi v'yazko-pruzhnoyi opory pry nestatsionarnykh kolyvannyakh balky Tymoshenko [Simulation of intermediate viscoelastic support under non-stationary vibrations of Timoshenko beams]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2022, no. 1'2022, pp. 36–44. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.05.
8. Voropay A. V., Povalyaev S. I., Yegorov P. A. Obermena zadacha dlya balky Tymoshenko z dodatkovoyu v'yazko-pruzhnoyu oporoyu pry nestatsionarnomu deformuvanni [Inverse problem for a Timoshenko beam with an additional viscoelastic support under nonstationary deformation]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2023, no. 1'2023, pp. 52–58. DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.08.
9. Voropay Alexey, Menshykov Oleksandr, Povaliaiev Sergiy, Sharapata Andriy, Yehorov Pavlo. Modeling a Viscoelastic Support Considering Its Mass-Inertial Characteristics During Non-Stationary Vibrations of the Beam. *Journal of Engineering Sciences*. 2023, no. 10, D8-D14. DOI: 10.21272/jes.2023.10(1).d2.
10. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*. 2022, Vol. 28, No. 7–8, pp. 799–811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
11. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method. *Archive of Applied Mechanics*. 2018, Vol. 88, No. 7, pp. 1213–1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
12. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs. *Applied Mathematical Modelling*. 2020, Vol. 87, pp. 152–170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
13. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method. *Shock and Vibration*. 2021, Vol. 2021, pp. 1–18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
14. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
15. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. *Physics Letters A*. 2019, Vol. 383, No. 36, P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
16. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections. *Acta Mechanica*. 2023, Vol. 234, No. 4, pp. 1451–1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
17. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, pp. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
18. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
19. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates. *European Journal of Applied Mathematics*. 2019, Vol. 30, No. 1, pp. 176–195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
20. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001, Vol. 38, No. 48–49, pp. 8673–8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
21. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment. *Journal of Applied Mechanics*. 2008, Vol. 75, No. 5, P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
22. Yanyutin E. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernenykh zadach dlya balok z pruzhnyim dodatkovym spyrannyam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
23. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines. 2022, No. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
24. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method. *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020*. Athens, Greece, 2020, pp. 2621–2630.
25. Szyłko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019, Vol. 121, pp. 777–90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
26. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. *Computers & Structures*. 2017, Vol. 192, pp. 181–195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
27. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, Vol. 92, No. 4, pp. 1247–1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
28. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
29. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021, pp. 1–19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
30. Yanyutin E. G., Gryshakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya v'yazkoupругikh balok [Identification of moving load for viscoelastic beams]. *Visnyk Nacional'nogo tekhnichnogo universytetu "Kharkiv's'kyi politekhnichnyi instytut". Zb. naukovykh prats'* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Scientific Digest]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
31. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems. *Engineering Structures*. 2023, Vol. 275, P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
32. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p.
33. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, Vol. 5, No. 7 (119), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

34. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 2004, no. 41, pp. 4919–4926.

Надійшла (received) 30.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3396-8803>; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valeriiovych – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3396-8803>; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6616-9966>; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Yegorov Pavlo Anatoliiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6616-9966>; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9027-0132>; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9027-0132>; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарапата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0823-9262>; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergiiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0823-9262>; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.