

В. Т. ГРІНЧЕНКО, В. Т. МАЦИПУРА**ДИСКРЕТНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

Обговорюються можливості специфічного підходу до розв'язання задач математичної фізики, які описуються лінійними диференціальними рівняннями. Для такого типу рівнянь накопичено значний об'єм розв'язків конкретних задач для так званих канонічних областей. Загальною характерною особливістю таких областей є те, що їх границя є координатною поверхнею в декартових, циліндричних, сферичних координатах. Саме в таких координатних системах для лінійних рівнянь накопичено значний досвід в побудові частинних розв'язків. Стаття присвячена дослідженню можливостей використання таких відомих частинних розв'язків при вирішенні задач пошуку кількісних характеристик фізичних полів в областях довільної форми. Аналіз наявних аналітичних розв'язків для канонічних областей дозволяє сформулювати нове поняття загального розв'язку граничної задачі для певного класу уже неканонічних областей. Специфічною рисою таких областей є те, що їх граничні поверхні формуються як частини координатних поверхонь в указаних координатних системах. При цьому принципово важливою є та обставина, що для лінійних рівнянь є справедливим принцип суперпозиції, коли будь-яка сума частинних розв'язків є також розв'язком граничної задачі. Дослідження загальних розв'язків граничних задач для неканонічних областей вказує на можливості побудови таких розв'язків різної форми для кожної конкретної задачі. Використання таких загальних розв'язків відкриває певні можливості для зменшення об'ємів обчислювальних процедур при виконанні обчислень у випадку задач для загальних неканонічних областей. При цьому використовується ідея поділу заданої області на частинні складові. В одній із них для представлення поля використовується аналітичний загальний розв'язок, а в решті областей використовуються традиційні підходи до дискретизації, наприклад, метод скінчених елементів. Приведено твердження про можливість використання різних форм загального розв'язку та представлені конкретні приклади обчислень. Обговорюється питання про різні алгоритми для обчислювальних процедур при виконанні граничних умов і умов спряження на додаткових поверхнях.

Ключові слова: граничні задачі, лінійні рівняння, загальний розв'язок граничної задачі, умови спряження, середньоквадратична апроксимація, поточкова апроксимація, канонічна область, рівняння Лапласа.

V. T. GRINCHENKO, V. T. MATSYUPURA**DISCRETE-ANALYTICAL METHOD OF SOLVING PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS**

This paper discusses a specific approach to solving problems in mathematical physics as described by linear differential equations. For this class of equations, a substantial body of solutions has been developed for particular problems within so-called canonical domains. A common feature of these domains is that their boundaries coincide with coordinate surfaces in Cartesian, cylindrical, or spherical coordinate systems. Significant experience has been accumulated in constructing partial solutions for linear equations in these coordinate systems. The focus of the article is on exploring the potential of using these known partial solutions to solve problems involving the determination of quantitative characteristics of physical fields in domains of arbitrary shape. An analysis of existing analytical solutions for canonical domains enables the formulation of a new concept: a general solution for boundary value problems defined on a class of non-canonical domains. A distinctive feature of these domains is that their boundary surfaces are made up of segments of coordinate surfaces from different coordinate systems. A key aspect of this approach is the superposition principle, which holds for linear equations: any linear combination of partial solutions is also a valid solution to the boundary value problem. The study of general solutions in non-canonical domains reveals the possibility of constructing multiple solution forms tailored to specific problems. Employing such general solutions presents opportunities to reduce the computational effort required for problems in general non-canonical domains. This is achieved through the concept of domain decomposition: one part of the domain employs an analytical general solution to represent the field, while the remainder is treated using traditional discretization methods such as the finite element method. The article also addresses the use of various forms of the general solution and presents specific calculation examples. Additionally, it discusses different algorithms for handling boundary and interface conditions on auxiliary surfaces.

Key words: boundary value problems, linear equations, general solution of a boundary value problem, conjugation conditions, mean-square approximation, pointwise approximation, canonical domain, Laplace equation.

Вступ. При вирішенні багатьох проблем математичного моделювання фізичних процесів початок дослідження пов'язано з формулюванням граничних задач для рівнянь в частинних похідних. Подальша робота спрямована на пошук методу розв'язання задачі, часто пов'язаного з використанням додаткових гіпотез, що базувалися на попередніх знаннях відносно структури шуканого поля. Можливість прямого аналітичного розв'язку була великою удачею [1]. Використання чисельних методів, пов'язаних з відмовою від використання поняття похідної і інтеграла, вимагало величезних затрат.

З появою комп'ютера ситуація принципово змінилася. Зі зростанням потужності обчислювальних засобів все більше задач математичної фізики могли бути розв'язані з практично потрібною точністю. Можливо, перші кроки в формуванні нових комп'ютерних розділів в природничих науках були зроблені в обчислювальній гідродинаміці [2]. Складалося враження, що недоступні для кількісного аналізу задачі, сформульовані з використанням фундаментальних досягнень математичного аналізу, стають простими при заміні неперервних моделей моделями дискретними. Проблеми, що виникають при такій заміні, окреслені в цитованому довіднику. Ці проблеми не зникають при використанні запропонованого чисельно-аналітичного підходу. Основною його перевагою є зменшення об'єму обчислень.

Основна ідея розширення можливостей аналітичних методів. Добре відомо, що питання про пошук загального розв'язку рівняння в частинних похідних не має сенсу. Однак такий загальний висновок не є справедливим, якщо мова йде про постановку граничних задач, коли необхідно розглядати всі три компоненти – рівняння, граничні умови та форму області існування шуканого фізичного поля. В цьому випадку ситуація змінюється. Розглянемо, наприклад, найпростішу двовимірну внутрішню граничну задачу для рівняння Лапласа в кру-

зі відносно потенціалу $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta)$. Цієї вихідної інформації достатньо для того, щоб можна було сформулювати таке твердження: вираз

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta \quad (1)$$

має властивості, які дозволяють назвати його *загальним розв'язком граничної задачі теорії потенціалу для круга*.

Таке твердження можна обґрунтувати тим, що саме цей вираз має бути застосовано при пошуку потенціалу за будь-яких граничних умов на поверхні. При цьому вибір додатних степенів радіальної координати в частинних розв'язках відповідає саме внутрішній задачі. Принципово важливо те, що можливість задовольнити граничні умови випливає із того, що система функцій

$$\cos n\theta, (n = 0, 1, \dots, \infty)$$

є повною і ортогональною на границі кола [3].

Процедура визначення коефіцієнтів нескінченного ряду (1) буде простою для першої та другої граничної задачі. У випадку змішаних умов коефіцієнти ряду мають визначатися з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Узагальнюючи цей простий приклад, визначимо як загальний розв'язок будь-якої граничної задачі, такий набір частинних розв'язків в області існування поля, який дає можливість виконати довільні граничні умови на границі.

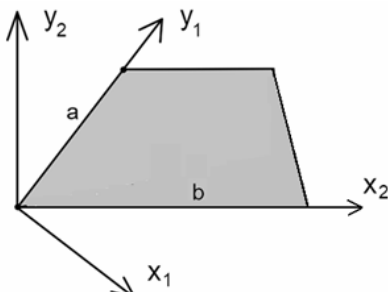


Рис. 1 – Складна область.

Побудова розв'язку конкретної задачі. Для ілюстрації того, наскільки такий підхід розширює можливості побудови аналітичних розв'язків лінійних граничних задач, розглянемо знову граничну задачу теорії потенціалу, але вже для більш складної області, показаної на рис. 1. Область існування поля – виділений чотирикутник. Згідно з основною ідеєю побудови загального розв'язку граничної задачі для даного конкретного випадку, перша вимога пов'язана з побудовою систем частинних розв'язків, що забезпечують можливість виконання довільних граничних умов на сторонах чотирикутника. Оскільки побудова єдиного розв'язку для виконання цих умов неможлива, то природно представити шуканий розв'язок у вигляді суми чотирьох складових, кожна з яких відповідальна за виконання граничних умов на одній із сторін чотирикутника. Щоб здійснити відповідну побудову слід ввести відповідні чотири *декартові координатні системи* у відповідності до числа сторін. На рис. 1 показано дві із таких систем. Цього достатньо, щоб проілюструвати сутність методу. Таким чином, маємо:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x_1, y_1) + \varphi_2(x_2, y_2) + \varphi_3(x_3, y_3) + \varphi_4(x_4, y_4). \quad (2)$$

Оскільки мова йде про якісний аналіз проблеми, обмежимося явним виразом лише для перших двох складових:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} y_1\right) \exp\left(-\frac{n\pi}{a} x_1\right), \\ \varphi_2(x_2, y_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} x_2\right) \exp\left(-\frac{m\pi}{b} y_2\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут необхідно надати певні коментарі відносно властивостей і фізичного змісту цих виразів. Перш за все слід зазначити, що кожна складова в цих рядах зберігає властивість бути частинним розв'язком рівняння Лапласа і при додатному значенні показників степені в експонентах. Однак фізичні міркування, подібні до вказаних відносно загального розв'язку (1), говорять про необхідність саме такого вибору знаків. Справедливість принципу максимуму для розв'язків граничних задач для рівняння Лапласа також вказує на необхідність такого вибору знаків в показниках експонент [4]. Решта складових в загальному розв'язку (2) визначається аналогічно з використанням частинних розв'язків у відповідних координатних системах.

Слід звернути увагу на ще одну важливу характеристику, яку необхідно враховувати при побудові загальних розв'язків. Важливо, щоб частинні розв'язки були присутні в представленні загального виразу в усіх точках існування поля вихідної задачі. Наприклад, перша із представлених функцій в (2) є по суті розв'язком *періодичної задачі теорії потенціалу для півплощини* ($x_1 \geq 0, -\infty < y_1 < \infty$), а отже є розв'язком і для тих точок $y_1 > a$, які належать області існування поля. Виглядає достатньо очевидно, що процедура побудови розв'язків (3) забезпечує виконання цієї вимоги для всіх складових в виразі (2).

Організація процедури виконання граничних умов виглядає досить просто. Розглянемо граничну умову на стороні $x_1 = 0, 0 < y_1 < a$. Якщо на цій стороні задано значення потенціалу певною функцією $\varphi(0, y_1) = F(y_1)$,

то цією рівністю породжується функціональне рівняння такого вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y_1}{a} = F(y_1) - \varphi_2(x_2, y_2) - \varphi_3(x_3, y_3) - \varphi_4(x_4, y_4). \quad (4)$$

Звичайно, для подальшого розгляду цього рівняння координати в виразах в правій частині мають бути перераховані до координати y_1 за відомими формулами [5]. Такий вигляд функціонального рівняння вказує на два можливих шляхи його перетворення на алгебраїчні рівняння (в даному випадку у вигляді нескінченних систем). Перш за все для формування такого рівняння можна скористатись властивостями тригонометричних функцій в лівій частині і здійснити звичайне обчислення коефіцієнтів *ряду Фур'є*. Очевидно, що така процедура пов'язана з обчисленням великої кількості інтегралів. З іншого боку, накопичений досвід використання дискретних рядів Фур'є дає можливість обчислити коефіцієнти алгебраїчної системи просто вибравши відповідну кількість точок, в яких це рівняння має виконуватись. Така поточкова процедура формування алгебраїчної системи виглядає особливо привабливою у випадку, коли планується використовувати аналітичні розв'язки як частину загального розв'язку в задачі з дискретною апроксимацією внутрішнього поля у внутрішніх точках області, як про це піде мова в подальшому викладі.

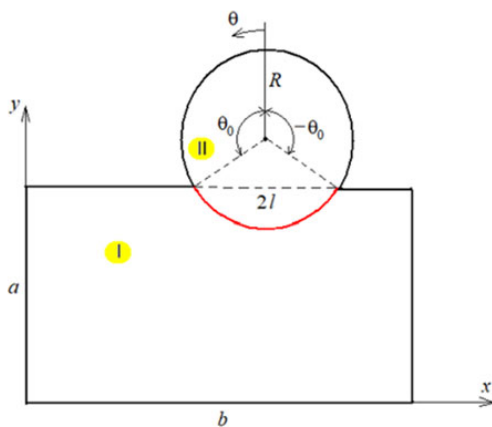


Рис. 2 – Форма області існування поля.

Важливість цієї вимоги проілюструємо при розгляді наступної задачі. Форма області існування поля показана на рис. 2. Сама постановка цієї задачі пов'язана з пошуком можливості розширення класу задач при аналітичному опису шуканого поля. Таке розширення пов'язане з використанням *методу часткових областей* і в подальшому у побудові загального розв'язку для складної області. При цьому можуть виникнути деякі ускладнення при практичній реалізації цієї ідеї. В даному випадку (рис. 2) форма області визначена суцільною кривою, котра складається з частини кола та частин сторін прямокутника. Особливість даної області полягає у тому, що ті її частини, для яких легко застосувати описану вище техніку формування загального розв'язку граничної задачі, перетинаються, що є проблемою.

На перший погляд це не є проблемою, оскільки в даному випадку на границі, показаній штриховим відрізком, слід виконувати не граничні умови, а умови спряження полів. Як вказувалось раніше, необхідною умовою при формуванні загального розв'язку є наявність присутності відповідних виразів частинних розв'язків рівняння в усій області існування шуканого поля. При побудові розв'язків в круговій області для виконання граничних умов на частині кола $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ досить легко вказати повну і ортогональну систему функцій

$$\cos \frac{n\pi\theta}{\theta_0}, \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}.$$

Однак побудовані з використанням таких кутових обмежень частинні розв'язки не є частинними розв'язками для трикутної області зі штриховими сторонами. Єдиний спосіб досягти того, щоб вся область II була покрита незалежними частинними розв'язками, полягає в тому, щоб використовувати розв'язки типу частинних розв'язків в (1), тобто розв'язків для повного круга:

$$\varphi_1^{(II)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \cdot r^n. \quad (5)$$

Другою складовою загального розв'язку в області II є вираз:

$$\varphi_2^{(II)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_m \cos \frac{m\pi x_2}{l} + D_m \sin \frac{m\pi x_2}{l} \right) \exp \left(-\frac{m\pi y_2}{l} \right). \quad (6)$$

Процедури дискретизації загальних розв'язків. Розглянутий приклад наглядно вказує на ще один важливий аспект проблеми пошуку аналітичних розв'язків для неканонічних областей. Розглянемо спочатку розв'язок (1) для канонічної області. Якщо повною мірою використати властивості повноти та ортогональності системи тригонометричних функцій в цьому виразі, то пошук значень коефіцієнтів ряду A_n приводить до розв'язання нескінченної послідовності систем, одного рівняння з однією невідомою, що є типовим при апроксимації, заданої граничними умовами функції, рядом Фур'є. При цьому апроксимація здійснюється шляхом *мінімізації середньоквадратичного відхилення* між рядом Фур'є і заданою функцією. При реалізації цього процесу отримання

розв'язку слід виконати досить значний об'єм попередніх обчислень інтегралів. В той же час, в процесі використання *поточної апроксимації* заданої функції скінченним набором тригонометричних функцій необхідно розв'язувати лінійні системи рівнянь з числом рівнянь, коефіцієнти при невідомих в яких обчислюються значно простіше. Число рівнянь визначається вибраним кроком дискретизації. З розвитком комп'ютерної техніки таке дискретне перетворення Фур'є все ширше використовується при розв'язанні наукових і інженерних проблем [6], даючи можливість зменшення об'єму обчислень.

Повертаючись до граничної задачі, геометрія області існування якої показана на рис. 2, слід звернути увагу на наступну проблему. Фізичні граничні умови в задачі визначені лише на частині круга. В той же час складова загального розв'язку (5) містить частинні розв'язки рівняння в полярних координатах, визначені для всієї площі круга. В цьому випадку при дискретизації перетворення Фур'є слід вказати значення для функції $\phi_1^{(II)}(r, \theta)$ в частині кола, позначеній на рис. 2 жирними точками. На перший погляд така вимога здається такою, що не може бути виконана і, відповідно, загальний розв'язок задачі для частини круга не можна побудувати. Традиційно це обмеження не стосується частинного випадку півкола. Логічний аналіз ситуації, що виникла в загальному випадку, дає можливість запропонувати наступний підхід. При оцінці кількісних характеристик поля в області ми проводимо розрахунки лише в точках зрізаного круга.

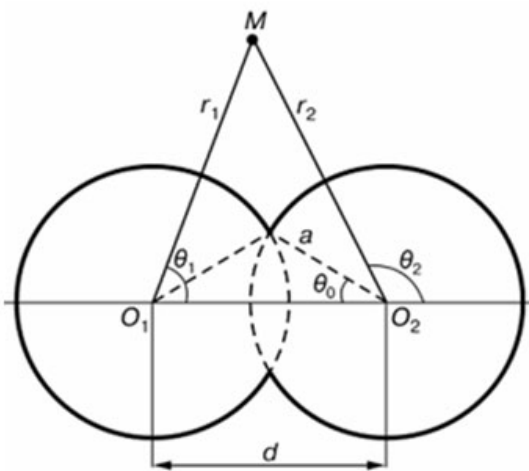


Рис. 3 – Циліндри, що перетинаються.

При цьому обидві складові загального виразу для шуканого потенціалу $\phi_{II} = \phi_1^{(II)} + \phi_2^{(II)}$ містять частинні розв'язки рівняння Лапласа в усіх точках зрізаного кола. Крім того, цей загальний розв'язок задовольняє граничні умови на круговій частині границі і умови спряження полів на стороні прямокутника $y_1 = a$. Звідси теорема про єдиність розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа дозволяє зробити висновок про можливість довільного вибору значень для функції $\phi_1^{(II)}$ на нефізичній частині границі при формуванні рівнянь для визначення коефіцієнтів A_n і B_n . Твердження виглядає парадоксальним. Але, практично реалізуючи обчислення, слід мати на увазі, що звичайно мова йде про довільність для інтегрованих функцій. Крім того, слід брати до уваги, що повна тотожність розв'язків можлива лише при врахуванні нескінченних рядів. При практичному використанні скінченних відрізків рядів певна залеж-

ність від довільних значень буде проявлятися і пошук оптимального продовження може вимагати певних обчислювальних експериментів.

Конкретні обчислення було проведено для задачі випромінювання звуку циліндрами, що перетинаються (рис. 3). Обчислення виконано для двох випадків продовження граничних умов на штрихових ділянках кіл – граничні умови для нормальної похідної приймалися рівними нулю або одиниці. При редукції системи з двадцятьма коефіцієнтами для кожного циліндра одержані кількісні оцінки шуканої функції на фізичних ділянках границі практично не відрізнялися. Детальний аналіз цієї конкретної задачі та ряду інших, при розв'язанні яких виникає подібна проблема, проведено в [7, 8]. В даному конкретному випадку використання загального розв'язку задачі у вигляді:

$$p = p_1 + p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(kr_1) \cos(n\theta_1) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} H_l^{(1)}(kr_2) \cos(l\theta_2) \quad (7)$$

з діапазоном зміни кутів θ_1 і θ_2 від 0 до 2π зумовлено необхідністю виконати умову періодичності шуканого розв'язку в області навколо циліндрів. В приведеному виразі (7) функції $H_m^{(1)}(kr)$ є функціями Ханкеля першого роду.

Використання загальних розв'язків при аналізі задач для областей загального виду. Приведені вище міркування розкривають сутність процедур, що забезпечують побудову аналітичних методів розв'язання граничних задач для неканонічних областей спеціальної форми. Наступне питання виглядає досить логічним. Як використати такі загальні розв'язки для вирішення проблеми зменшення обсягу обчислень при використанні методів типу *методу скінченних елементів для областей практично довільної форми*. Для цього розглянемо граничні задачі для областей довільної геометрії, представлених на рис. 4 і рис. 5.

На рис. 4 представлено геометрію області накресленої, як колись говорив *Л. Ейлер*, довільним рухом руки. До речі, в дискусії з *Д. Бернуллі* він заперечував можливість розкласти в ряд Фур'є саме такого типу функції [9]. Розглянемо внутрішню задачу для рівняння Лапласа для цієї області. Традиційний підхід до вирішення такої задачі передбачає використання одного із методів дискретизації. При цьому вся область існування поля покривається сіткою з вибраним масштабом. Це призводить до формування системи рівнянь з великим числом невідомих. В той же час, можна використати відносну простоту побудови загального розв'язку граничної задачі, наприклад, для виділеної області S^* . В ній побудувати загальний розв'язок і провести його узгодження з точками розбиття в залишку області. Такий підхід може значно скоротити об'єм обчислень.

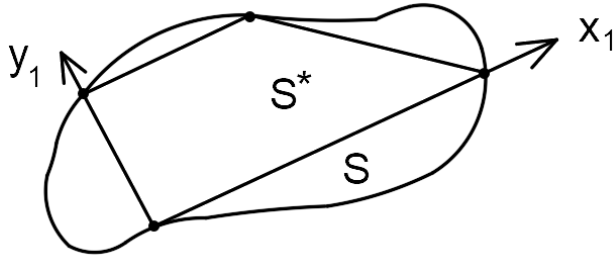
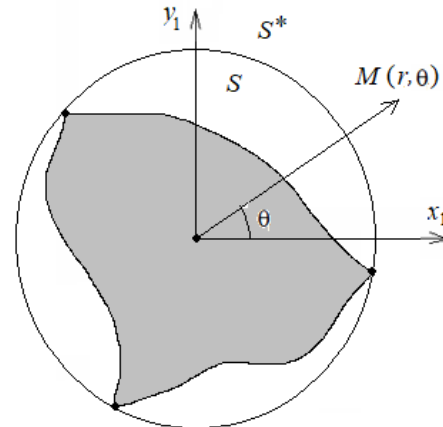


Рис. 4 – Область, накреслена довільним рухом руки.

Рис. 5 – Виділення частини існування поля S^* .

Зовнішні граничні задачі, тобто задачі в областях, що включають точки на нескінченності, мають певну специфіку. Так, для зовнішньої граничної задачі для багатокутника не вдається так легко побудувати загальний розв'язок, як це було показано раніше. І це якраз пов'язано з тим, що не вдається підібрати частинні розв'язки так, щоб мати можливість забезпечити повноту розв'язку на границі і забезпечити виконання рівняння в усій області існування поля. Але загальна ідея використання загального розв'язку для зовнішніх задач може бути реалізована. На рис. 5 показано, як відбувається виділення частини області існування поля S^* , для якої можливо побудувати загальний розв'язок – це зовнішність кола, котре оточує задану границю. Саме в цій області легко будуватиметься загальний розв'язок, що для рівняння Лапласа має вигляд:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^{-n}. \quad (8)$$

Висновки. Викладені міркування стимулюються загальною ідеєю – як набуті знання при розв'язанні відносно простих задач можна використати при розв'язанні задач більш складних. Звичайно, при подальшому суттєвому зростанні потужності обчислювальних систем такого типу економія може бути неактуальною. Однак, алгоритмічність і простота побудови загальних розв'язків можуть сприяти використанню такого підходу. Слід також зазначити досить загальний характер методу. Для ілюстрації його сутності було використано граничні задачі для рівняння Лапласа. Однак викладені ідеї можуть бути досить ефективно використані при розгляді інших рівнянь, включно з рівняннями *Гельмгольца*, рівняннями електродинаміки та теорії пружності.

Список літератури

1. Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. P.1: Types of fields. – McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. – 1061 p.
2. Peyret R. Handbook of Computational Fluid Mechanics. – Academic Press, 1996. – 467 p.
3. Titchmarsh E. C. Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part 1. – Oxford University Press, 1962. – 214 p.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – Лань, 2002. – 749 с.
5. Соколенко Л. О. Аналітична геометрія. Частина 1. Аналітична геометрія на площині. – Чернігів, НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. – 80 с.
6. Eleanor Chu. Fourier Transforms. Analysis, Application, and Fast Algorithms. – CRS Press, 2008. – 398 p.
7. Грінченко В. Т. Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – Т. 51. – № 2. – С. 53 – 60.

8. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. – New York : Begell House, Inc., 2018. – 439 p.
9. Katz V. J. *History of mathematics. An introduction*, Third edition. – Pearson Addison-Wesley, 2009. – 996 p.

References (transliterated)

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics. P. 1: Types of fields*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1953. 1061 p.
2. Peyret R. *Handbook of Computational Fluid Mechanics*. Academic Press, 1996. 467 p.
3. Titchmarsh E. C. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part 1*. Oxford University Press, 1962. 214 p.
4. Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Lan, 2002. 749 p.
5. Socolenko L. O. *Analitichna geometriya. Chastyna 1. Analitichna geometriya na ploshchyni* [Analytical Geometry. Part 1. Analytical Geometry on the Plane]. Chernihiv, NUChK imeni T. G. Shevchenka Publ., 2021. 80 p.
6. Eleanor Chu. *Fourier Transforms. Analysis, Application, and Fast Algorithms*. CRS Press, 2008. 398 p.
7. Grinchenko V. T. Zadachi matematychnoyi fizyky z nepovnistyu vyznachenymy granychnymy umovamy [Mathematical physics problems with incompletely defined boundary conditions]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya* [Mathematical Methods and Physical and Mechanical Fields]. 2008, vol. 51, no. 2, pp. 53–60.
8. Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T. *Acoustic wave problems*. New York, Begell House, Inc., 2018. 439 p.
9. Katz V. J. *History of mathematics. An introduction*, Third edition. Pearson Addison-Wesley, 2009. 996 p.

Надійшла (received) 23.03.2025

Відомості про авторів / Information about authors

Грінченко Віктор Тимофійович – доктор фізико-математичних наук, професор, академік Національної академії наук України, радник дирекції Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (095) 531-66-27; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3229-1810>; e-mail: grinchenko@nas.gov.ua.

Grinchenko Viktor Tymofiiovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Member of the National Academy of Sciences of Ukraine, Advisor to the Directorate of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (095) 531-66-27; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3229-1810>; e-mail: grinchenko@nas.gov.ua.

Маціпура Володимир Тимофійович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету КНУ України, м. Київ; тел.: (068) 894-60-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0136-6659>; e-mail: mnivtt@gmail.com.

Matsypura Volodymyr Tymofiiovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department of Mechanical Engineering, Berdyansk State Pedagogical University, Berdyansk; tel.: (050) 999-99-99; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0136-6659>; e-mail: mnivtt@gmail.com.