УДК 519.6 **DOI: 10.20998/2222-0631.2024.01(6).07**

О. П. НЕЧУЙВІТЕР, С. С. ІВАНОВ, К. Г. КОВАЛЬЧУК

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Сучасний етап розвитку багатьох технічних напрямків характеризується швидким впровадженням нових цифрових технологій, алгоритмів, методів. Розвиток інформаційних технологій сприяв виникненню нових підходів до отримання, обробки та аналізу інформації. Поява нових підходів до отримання вхідної інформації вимагає подальшої розробки нових алгоритмів та створення нових чисельних методів для вирішення необхідних задач. Виникає проблема побудови нових або вдосконалення відомих математичних моделей, а також їх ефективної комп'ютерної реалізації. Відповідно до типу моделювання в процесі підготовки інформації широко використовуються, зокрема, методи теорії ймовірностей і математичної статистики, одно та багатовимірної теорії інтерполяції та апроксимації. Поряд із задачами багатовимірної інтерполяції при побудові математичних моделей різноманітних процесів широко використовується теорія нових інформаційних операторів. До нових інформаційних операторів відносяться оператори, які відновлюють проміжні значення величин за наявним набором відомих значень функції багатьох змінних на лініях, площинах, тощо. Автором цієї теорії є Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор фізико-математичних наук, професор О. М. Литвин. Теорія нових інформаційних операторів ефективно зарекомендувала себе в багатьох галузях науки, зокрема, при математичному моделюванні соціально-економічних та природничих процесів. Прикладом ефективного застосування теорії нових інформаційних операторів, де в залежності від типу завдання інформації вибирається алгоритм, є теорія обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних.

Ключові слова: нові цифрові технології, алгоритми, методи, чисельне інтегрування функцій багатьох змінних, кубатурна формула, інтерлінація функцій.

O. P. NECHUIVITER, S. S. IVANOV, K. G. KOVALCHUK

NEW INFORMATION OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF THREE VARIABLES

Modern development of many technical areas is characterized by the rapid introduction of new digital technologies, algorithms, and methods which contribute to the emergence of latest approaches to obtaining, processing and analyzing information. It leads to further creation of new numerical methods for solving corresponding issues. Thereupon, there arises a problem of building new or improving known mathematical models, as well as their effective computer implementation. Depending on the modeling type the methods of probability theory and mathematical statistics, one- and multidimensional interpolation and approximation theory are widely used in the process of preparing information. Along with the tasks of multidimensional interpolation, operators that restore intermediate values of quantities from an existing set of known data are widely used in the construction of mathematical models of various processes, in particular, when the values of a function of many variables on lines, planes, etc. are known. An example of the effective use of the above operators is the theory of calculating integrals of highly oscillating functions of many variables since the algorithm is chosen depending on the type of information about the functions. The author of this theory is the Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor O.M. Lytvyn. The purpose of this article is to review the results of applying the theory of new information operators to the calculation of integrals of fast oscillating functions of many variables, as well as to present a new cubature formula for the approximate calculation of double integrals of fast oscillating functions of general type. The cubature formula is effective in terms of using the input information to achieve a given accuracy.

Key words: new digital technologies, algorithms, methods, numerical integration of functions of many variables, cubature formula, interlineation of functions.

Вступ. На сучасному етапі розвитку різних технічних напрямків відбувається стрімке впровадження *нових цифрових технологій*, *алгоритмів* і *методів*. Інформаційні технології зробили можливим використання нових підходів до збору, обробки та аналізу даних. Впровадження нових методів отримання вхідної інформації вимагає розробки нових алгоритмів та створення *чисельних методів* для розв'язання актуальних задач. Це призводить до необхідності створення нових або вдосконалення існуючих математичних моделей та їх ефективної реалізації у комп'ютерних системах. *Математичне моделювання* відіграє ключову роль у багатьох наукових і технічних галузях, забезпечуючи інструменти для аналізу та прогнозування складних систем і процесів. Серед різноманітних методів моделювання особливе місце займають *методи багатовимірного інтерполювання*, які дозволяють точно оцінювати значення функцій на основі обмеженого набору даних. Це особливо важливо в умовах, коли прямі вимірювання або експерименти є занадто дорогими чи складними. *Багатовимірна теорія інтерполяції та апроксимації* дозволяє створювати моделі, які адекватно відображають реальні процеси. Досягнення в теорії нових інформаційних операторів відкривають додаткові можливості для удосконалення математичних моделей, підвищуючи їхню точність та ефективність. *Теорія нових інформаційних операторів* була розроблена лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки, доктором фізико-математичних наук, професором *О. М. Литвином*. Ці оператори призначені для відновлення проміжних значень функцій багатьох змінних на основі відомих значень, розташованих на різних геометричних об'єктах, таких як лінії та площини. Застосування теорії нових інформаційних операторів в багатьох наукових областях дало можливість отримати значні наукові результати, зокрема в математичному моделюванні соціально-економічних і природничих процесів. Теорія також демонструє свою ефективність в наближеному обчисленні інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних, де алгоритм обчислення підбирається відповідно до специфіки задачі, від типу завдання інформації про функцію та забезпечує високу точність і ефективність розрахунків.

Статтю присвячено пам’яті видатного українського вченого в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів Олегу Миколайовичу Литвину. **Метою** даної статті є огляд результатів застосування теорії нових інформаційних операторів до обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних, а також представлення нової *кубатурної формули* наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Кубатурна формула є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності.

Аналіз останніх досліджень. Перші спроби використати *оператори інтерлінації* до наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних були анонсовані в роботах [1 – 2], а в [3] отримані перші оцінки похибки наближеного обчислення коефіцієнтів Фур’є функції двох змінних. Більш вагомі дослідження щодо обчислення $2D-$*коефіцієнтів Фур’є* з використанням інтерлінації функцій були зроблені в роботах [4 – 12]. В цих статтях були представлені дослідження кубатурних формул для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур’є на різних класах функцій. Кубатурні формули використовували в своїй побудові оператори інтерлінанти з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. В монографіях [13, 14] вперше було викладено вищезазначені дослідження з точки зору нових інформаційних операторів, а саме була зроблена класифікація кубатурних формул за типом завдання інформації про *неосцилюючий множник підінтегральної функції*. Співавторами монографій стали директор Інституту кібернетики імені *В. М. Глушкова* НАН України, генеральний директор Кібернетичного центру НАНУ, академік НАНУ *Іван Васильович Сергієнко* та академік НАНУ *Валерій Костянтинович Задірака*. В 2010 році, завдяки гранту від Комісії міжнародного математичного союзу, результати досліджень в даному напрямку були представлені у Великобританії в місті Кембридж на конференції *«ESF-EMS-ERCOM Conference on Highly Oscillatory Problems From Theory to Applications»*.

Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних (в тому числі на прикладі $3D-$*коефіцієнтів Фур’є*) з використанням нових інформаційних операторів детально представлено в роботах [15 – 22]. У цих дослідженнях представлено кубатурні формули з використанням *операторів інтерфлетації*, інтерлінації та *інтерполяції* з допоміжними функціями у вигляді *кусково-сталих* та *лінійних сплайнів*. Такі оператори в своїй побудові використовували сліди функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значення функції в точках. Дослідження про якість побудованих кубатурних формул детально викладено в монографії [23]. В 2016 році, дякуючи Грантовому комітету 7-го Європейського конгресу математиків, результати досліджень в даному напрямку були представлені у Німеччині в місті Берлін на 7-му Європейському конгресі математиків. Отриманий грант *«Open Arms Grant of IMU»* також дозволив представити застосування нових інформаційних операторів до наближеного обчислення $3D-$коефіцієнтів Фур’є в доповіді на Міжнародному математичному конгресі в Бразилії в місті Ріо-де-Жанейро.

Застосування теорії нових інформаційних операторів до наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду представлено в статтях [24 – 31]. При дослідженні питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів були використані результати робіт [24] та [25], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. У 2021 році було отримано грант Комісії міжнародного математичного союзу для участі з онлайн доповіддю на Восьмому Європейському математичному конгресі в Словенії в місті Порторож, де вже були представлені результати щодо побудови кубатурних формул для наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду.

Питанню чисельного інтегрування подвійних та потрійних інтегралів з використанням нових інформаційних операторів приділено значно менше уваги. До таких досліджень можна віднести роботи [32, 33], де викладено алгоритм побудови кубатурних формул з використанням слідів функції на лініях (в тому числі на оптимально вибраних лініях), а також [34], де розглядалося питання наближеного обчислення потрійного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних площинах. Логічним продовженням досліджень в цьому напрямку є наближене обчислення потрійного інтегралу у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних лініях [35].

На основі нових інформаційних операторів будуються ефективні (з точки зору кількості використаних значень функції двох чи трьох змінних) оператори інтерполяції. Використання таких операторів інтерполяції для наближеного обчислення $2D-$ та $3D-$коефіцієнтів Фур’є досліджено в монографіях [13, 14, 23]. Однак до наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду такі алгоритми не були використанні. Таке дослідження є актуальним, в результаті будуть отримані ефективні кубатурні формули.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y})}\,dxdy \tag{1}$$

дослідити кубатурну формулу з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах кусково-сталої інтерлінації. На класі диференційованих функцій отримати оцінку похибки наближення кубатурною формулою.

Кубатурна формула обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду. Введемо наступні позначення:

$$h1_{0k}(x)=\begin{cases}1, x\in X1_k,\\ 0, x\notin X1_k,\end{cases}\quad k=\overline{1,\ell_1},\qquad H1_{0j}(y)=\begin{cases}1, y\in Y1_j,\\ 0, y\notin Y1_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,\ell_1};$$

$$X1_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\ Y1_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right];$$

$$x_k=k\Delta_1-\Delta_1/2,\quad y_j=j\Delta_1-\Delta_1/2,\quad k,j=\overline{1,\ell_1},\quad \Delta_1=1/\ell_1;$$

$$\tilde h1_{0\tilde k}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde X1_{\tilde k},\\ 0, x\notin \tilde X1_{\tilde k},\end{cases}\quad \tilde k=\overline{1,\ell_1{}^2},\qquad \tilde H1_{0\tilde j}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde Y1_{\tilde j},\\ 0, y\notin \tilde Y1_{\tilde j},\end{cases}\quad \tilde j=\overline{1,\ell_1{}^2};$$

$$\tilde X_{\tilde k}=\left[\tilde x_{\tilde k-1/2},\tilde x_{\tilde k+1/2}\right],\ \tilde Y_{\tilde j}=\left[\tilde y_{\tilde j-1/2},\tilde y_{\tilde j+1/2}\right];$$

$$\tilde x_{\tilde k}=\tilde k\tilde\Delta_1-\frac{\tilde\Delta_1}{2},\ \tilde y_{\tilde j}=\tilde j\tilde\Delta_1-\frac{\tilde\Delta_1}{2},\ \tilde k,\tilde j=\overline{1,\ell_1{}^2},\ \tilde\Delta_1=\frac{1}{\ell_1{}^2};$$

$$h2_{0p}(x)=\begin{cases}1, x\in X2_p,\\ 0, x\notin X2_p,\end{cases}\quad p=\overline{1,\ell_2},\quad H2_{0s}(y)=\begin{cases}1, y\in Y2_s,\\ 0, y\notin Y2_s,\end{cases}\quad s=\overline{1,\ell_2};$$

$$X2_p=\left[x_{p-1/2},x_{p+1/2}\right],\ Y2_s=\left[y_{s-1/2},y_{s+1/2}\right];$$

$$x_p=p\Delta_2-\Delta_2/2,\quad y_s=s\Delta_2-\Delta_2/2,\quad p,s=\overline{1,\ell_2},\quad \Delta_2=1/\ell_2;$$

$$\tilde h2_{0\tilde p}(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde X2_{\tilde p},\\ 0, x\notin \tilde X2_{\tilde p},\end{cases}\quad \tilde p=\overline{1,\ell_2{}^2},\ \tilde H2_{0\tilde s}(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde Y2_{\tilde s},\\ 0, y\notin \tilde Y2_{\tilde s},\end{cases}\quad \tilde s=\overline{1,\ell_2{}^2};$$

$$\tilde X2_{\tilde p}=\left[\tilde x_{\tilde p-1/2},\tilde x_{\tilde p+1/2}\right],\ \tilde Y2_{\tilde s}=\left[\tilde y_{\tilde s-1/2},\tilde y_{\tilde s+1/2}\right];$$

$$\tilde x_p=\tilde p\tilde\Delta_2-\tilde\Delta_2/2,\quad \tilde y_s=\tilde s\tilde\Delta_2-\tilde\Delta_2/2,\quad \tilde p,\tilde s=\overline{1,\ell_2{}^2},\quad \tilde\Delta_2=1/\ell_2{}^2.$$

Розглянемо оператори

$$Jf(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell_1}f(x_k,y)h1_{0k}(x)+\sum_{j=1}^{\ell_1}f(x,y_j)H1_{0j}(y)-\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}f(x_k,y_j)h1_{0k}(x)H1_{0j}(y);$$

$$\tilde Jf(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde j=1}^{\ell_1{}^2}f(x_k,\tilde y_{\tilde j})h1_{0k}(x)\tilde H1_{0\tilde j}(y)+\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde k=1}^{\ell_1{}^2}f(\tilde x_{\tilde k},y_j)\tilde h1_{0\tilde k}(x)H1_{0j}(y)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}f(x_k,y_j)h1_{0k}(x)H1_{0j}(y);$$

$$Og(x,y)=\sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p,y)h2_{0p}(x)+\sum_{s=1}^{\ell_2} g(x,y_s)H2_{0s}(y)-\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p,y_s)h2_{0p}(x)H2_{0s}(y);$$

$$\tilde{O}g(x,y)=\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x_p,\tilde{y}_{\tilde{s}})h2_{0p}(x)\tilde{H}2_{0\tilde{s}}(y)+\sum_{s=1}^{\ell_2}\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}},y_j)\tilde{h}2_{0\tilde{p}}(x)H2_{0s}(y)-$$

$$-\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p,y_s)h2_{0p}(x)H2_{0s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k,y)h1_{0k}(x),\qquad J_2f(x,y)=\sum_{j=1}^{\ell_1} f(x,y_j)H1_{0j}(y);$$

$$\tilde{J}_1f(x,y)=\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}},y)\tilde{h}1_{0\tilde{k}}(x),\qquad \tilde{J}_2f(x,y)=\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2} f(x,\tilde{y}_{\tilde{j}})\tilde{H}1_{0\tilde{j}}(y);$$

$$O_1g(x,y)=\sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p,y)h2_{0p}(x),\qquad O_2g(x,y)=\sum_{s=1}^{\ell_2} g(x,y_s)H2_{0s}(y);$$

$$\tilde{O}_1g(x,y)=\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}},y_j)\tilde{h}2_{0\tilde{p}}(x),\qquad \tilde{O}_2g(x,y)=\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x_p,\tilde{y}_{\tilde{s}})\tilde{H}2_{0\tilde{s}}(y),$$

тоді для операторів-інтерлінантів $Jf(x,y)$, $Og(x,y)$ та операторів-інтерполянтів $\tilde{J}f(x,y)$, $\tilde{O}g(x,y)$, справедливі наступні тотожності:

$$Jf=(J_1+J_2-J_1J_2)f,\quad \tilde{J}f=(J_1\tilde{J}_2+\tilde{J}_1J_2-J_1J_2)f;$$

$$Og=(O_1+O_2-O_1O_2)g,\quad \tilde{O}g=(O_1\tilde{O}_2+\tilde{O}_1O_2-O_1O_2)g.$$

Наступна кубатурна формула

$$\tilde{\Phi}^2(\omega)=\int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)e^{i\omega\tilde{O}g(\mathrm{x},\mathrm{y})}\,dxdy$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I^2(\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{i\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y})}\,dxdy.$$

Розглянемо $H^{2,r}(M,\tilde{M})$, $r\geq 0$ – клас дійсних функцій $r\geq 0$, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що

$$\left|f^{(r,0)}(x,y)\right|\leq M,\quad \left|f^{(0,r)}(x,y)\right|\leq M,\ r\neq 0,\quad \left|f^{(r,r)}(x,y)\right|\leq \tilde{M},\quad r\geq 0.$$

Теорема. *Нехай* $f(x,y)$, $g(\mathrm{x},\mathrm{y})\in H^{2,1}(M,\tilde{M})$, *тоді*

$$\rho\left(I^2(\omega),\tilde{\Phi}^2(\omega)\right)=\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)e^{i\omega g(\mathrm{x},\mathrm{y})}\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 \tilde{J}f(x,y)e^{i\omega\tilde{O}g(\mathrm{x},\mathrm{y})}\,dxdy\right|\leq$$

$$\leq\frac{\tilde{M}+8M}{16\ell_1^2}+\tilde{M}\min\left(2;\frac{\omega\left(\tilde{M}+8M\right)}{16\ell_2^2}\right).$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho\left(I^2(\omega),\tilde{\Phi}^2(\omega)\right)$:

$$\rho\left(I^2(\omega),\widetilde{\Phi}^2(\omega)\right)=\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega g(\mathrm{x,y})}\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 \widetilde{J}f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega\widetilde{O}g(\mathrm{x,y})}\,dxdy\right|\le$$

$$\le\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega g\widetilde{O}(\mathrm{x,y})}\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 \widetilde{J}f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega\widetilde{O}g(\mathrm{x,y})}\,dxdy\right|+$$

$$+\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega g(\mathrm{x,y})}\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega Og(\mathrm{x,y})}\,dxdy\right|+$$

$$+\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega Og(\mathrm{x,y})}\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{i\omega\widetilde{O}g(\mathrm{x,y})}\,dxdy\right|\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-\widetilde{J}f(x,y)\right|\left|\mathrm{e}^{i\omega g\widetilde{O}(\mathrm{x,y})}\right|dxdy+\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|\mathrm{e}^{i\omega g(\mathrm{x,y})}-\mathrm{e}^{i\omega Og(\mathrm{x,y})}\right|dxdy+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|\mathrm{e}^{i\omega Og(\mathrm{x,y})}-\mathrm{e}^{i\omega\widetilde{O}g(\mathrm{x,y})}\right|dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)+Jf(x,y)-\widetilde{J}f(x,y)\right|dxdy+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|2i\sin\frac{\omega\,\mathrm{g(x,y)}-\omega O\,\mathrm{g(x,y)}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{2}\left(g(\mathrm{x,y})+Og(x,y)\right)}\right|dxdy+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|2i\sin\frac{\omega O\,\mathrm{g(x,y)}-\omega\widetilde{O}\,\mathrm{g(x,y)}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{2}\left(Og(\mathrm{x,y})+\widetilde{O}g(x,y)\right)}\right|dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy+\int_0^1\int_0^1\left|Jf(x,y)-\widetilde{J}f(x,y)\right|dxdy+$$

$$+2\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|\sin\frac{\omega\,\mathrm{g(x,y)}-\omega O\,\mathrm{g(x,y)}}{2}\right|dxdy+2\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)\right|\left|\sin\frac{\omega O\,\mathrm{g(x,y)}-\omega\widetilde{O}\,\mathrm{g(x,y)}}{2}\right|dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f-\left(J_1\widetilde{J}_2+J_2\widetilde{J}_1-J_1J_2\right)f\right|dxdy+$$

$$+2\widetilde{M}\int_0^1\int_0^1\min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,y)-Og(x,y)\right|}{2}\right)dxdy+$$

$$+2\widetilde{M}\int_0^1\int_0^1\min\left(1;\frac{\omega\left|\left(O_1+O_2-O_1O_2\right)g-\left(O_1\widetilde{O}_2+O_2\widetilde{O}_1-O_1O_2\right)g\right|}{2}\right)dxdy\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy+\int_0^1\int_0^1\left|\left(J_1-J_1\widetilde{J}_2\right)f+\left(J_2-J_2\widetilde{J}_1\right)f\right|dxdy+$$

$$+2\widetilde{M}\int_0^1\int_0^1\min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,y)-Og(x,y)\right|}{2}\right)dxdy+$$

$$+2\widetilde{M}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \min\left(1;\frac{\omega\left(O_1-O_1\widetilde{O}_2\right)g+\left(O_2-O_2\widetilde{O}_1\right)g}{2}\right)dxdy \le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_j}^{y} f^{(1,1)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right|dxdy+\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}dx\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\left|f\left(x_k,y\right)-f\left(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}\right)\right|dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac12}}\left|f\left(x,y_j\right)-f\left(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j\right)\right|dx\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}dy+$$

$$+2\widetilde{M}\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{s=1}^{\ell_2}\int\limits_{x_{p-\frac12}}^{x_{p+\frac12}}\int\limits_{y_{s-\frac12}}^{y_{s+\frac12}}\min\left(1;\frac{\omega}{2}\left|\int\limits_{x_p}^{x}\int\limits_{y_s}^{y} g^{(1,1)}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right|\right)dxdy+$$

$$+2\widetilde{M}\min\left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2}\sum_{\ddot{s}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac12}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\ddot{y}_{\tilde{s}+\frac12}}dxdy;\frac{\omega}{2}\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{\ddot{s}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{x_{p-\frac12}}^{x_{p+\frac12}}dx\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac12}}\left|g\left(x_p,y\right)-g\left(x_p,\tilde{y}_{\tilde{s}}\right)\right|dy+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega}{2}\sum_{s=1}^{\ell_2}\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac12}}\left|g\left(x,y_s\right)-g\left(\tilde{x}_{\tilde{p}},y_s\right)\right|dx\int\limits_{y_{s-\frac12}}^{y_{s+\frac12}}dy\right)\le$$

$$\le\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{j=1}^{\ell_1}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|y-y_j\right|dy+$$

$$+M\sum_{k=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}dx\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\left|y-\tilde{y}_{\tilde{j}}\right|dy+\ M\sum_{j=1}^{\ell_1}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac12}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{k}}\right|dx\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}dy+$$

$$+2\widetilde{M}\min\left(\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{s=1}^{\ell_2}\int\limits_{x_{p-\frac12}}^{x_{p+\frac12}}\int\limits_{y_{s-\frac12}}^{y_{s+\frac12}}dxdy,\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{s=1}^{\ell_2}\int\limits_{x_{p-\frac12}}^{x_{p+\frac12}}\int\limits_{y_{s-\frac12}}^{y_{s+\frac12}}\left|x-x_p\right|\left|y-y_s\right|dxdy\right)+$$

$$+2\widetilde{M}\min\left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2}\sum_{\ddot{s}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac12}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\ddot{y}_{\tilde{s}+\frac12}}dxdy;\frac{\omega}{2}\sum_{p=1}^{\ell_2}\sum_{\ddot{s}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{x_{p-\frac12}}^{x_{p+\frac12}}dx\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac12}}\left|y-\tilde{y}_{\tilde{s}}\right|dy+\frac{\omega}{2}\sum_{s=1}^{\ell_2}\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac12}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{p}}\right|dx\int\limits_{y_{s-\frac12}}^{y_{s+\frac12}}dy\right)\le$$

$$\le\widetilde{M}\ell_1^{\,2}\frac{\Delta_1^{\,2}}{4}\frac{\Delta_1^{\,2}}{4}+\ 2M\,\ell_1\Delta_1\frac{\Delta_1^2}{4}\ell_1^{\,2}+$$

$$+2\widetilde{M}\min\left(\ell_2^{\,2}\Delta_2^{\,2},\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\ell_2^{\,2}\frac{\Delta_2^{\,2}}{4}\frac{\Delta_2^{\,2}}{4}\right)+2\widetilde{M}\min\left(\left(\ell_2^{\,2}\Delta_2^{\,2}\right)^2,\frac{2M\omega}{2}\ell_2\Delta_2\ell_2^{\,2}\frac{\Delta_2^{\,2}}{4}\right)=$$

$$=\frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2}+\frac{M}{2\ell_1^2}+\widetilde{M}\min\left(2;\frac{\widetilde{M}\omega}{16\ell_2^2}\right)+\widetilde{M}\min\left(2;\frac{M\omega}{2\ell_2^2}\right)=\frac{\widetilde{M}+8M}{16\ell_1^2}+\widetilde{M}\min\left(2;\frac{\omega\left(\widetilde{M}+8M\right)}{16\ell_2^2}\right).$$

Теорема доведена.

В табл. 1 наведено результати обчислень $I^2=I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\widetilde{\Phi}^2=\widetilde{\Phi}^2(\omega)$ для функцій

$$f(x,y)=\sin(x+y),\quad g(x,y)=\cos(x+y)$$

при різних ℓ та ω.

Таблиця 1 – Обчислення $I^2=I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\widetilde{\Phi}^2=\widetilde{\Phi}^2(\omega)$

ℓ	$\omega=2\pi$	$\mathrm{Re}\Phi^2$, $\mathrm{Im}\Phi^2$	$\mathrm{Re}I^2$, $\mathrm{Im}I^2$	$\left\|\mathrm{Re}I^2-\mathrm{Re}\Phi^2\right\|$, $\left\|\mathrm{Im}I^2-\mathrm{Im}\Phi^2\right\|$	$\varepsilon(\omega)$
2	2π	0.3540375916459062 - 0.33304613008975337	0.3558050633093754 -0.3289739994021025	0.00176747166346924 0.00407213068765083	1.0241979338
4	2π	0.3555893919184368` - 0.3291350269882384	0.3558050633093754 -0.3289739994021025	0.00021567139093864 0.00016102758613584	0.2560494835
6	4π	0.20660758891345235 -0.22871334346415143	0.2067321725608352 -0.22893074545300268	0.000124583647382 0.00021740198885124	0.2119745408
10	4π	0.20663494102710486 -0.22900022093506067	0.2067321725608352 -0.22893074545300268	0.000097231533730 0.000069475482058	0.07631083471
10	7π	-0.1532312838429917 0.15179659763083148	-0.15356616365737322 0.151662234496899	0.00033487981438152 0.00013436313393248	0.12932521074
4	10π	0.15139020344623452 -0.12580278614219909	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.01088406140044776 0.00000382176545952	1.13962241728
6	10π	0.14071225700304252 -0.1254919790979713	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.0002061149572557 0.0003146288096873	0.50649885212
10	10π	0.14083352577051267 -0.1251188448477139	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.00032738372472592 0.0006877630599447	0.18233958676
15	10π	0.14046349223555732 -0.12556607218226937	0.14050614204578676 -0.1258066079076586	0.00004264981022944 0.00024053572538924	0.0810398163

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядається кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу з використанням оператора кусково-сталої інтерполяції, побудованого на основі кусково-сталого оператора інтерлінації. В подальшому планується провести більш детальне тестування запропонованої кубатурної формули для виявлення її потенційної спроможності на різних класах функцій. Наступним кроком в дослідженні є питання побудови та дослідження кубатурної формули з використанням оператора лінійної інтерполяції, побудованого на основі лінійного оператора інтерлінації.

Висновки. Статтю присвячено пам'яті видатного українського вченого в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, доктора фізико-математичних наук, професора Олега Миколайовича Литвина. Представлений огляд результатів демонструє ефективність застосування теорії нових інформаційних операторів, створеної Олегом Миколайовичем Литвином, в математичному моделюванні систем та процесів, зокрема для задач цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі використання нових інформаційних операторів в чисельному інтегруванні швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних.

В статті запропоновано нову кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду. Кубатурна формула є ефективною з точки зору використання вхідної інформації для досягнення заданої точності. На класі диференційованих функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюючої функції загального виду. Кубатурна формула в своїй побудові використовує оператор інтерполянт, побудований на основі оператора інтерлінанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Кубатурна формула має високу точність наближення. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичні результати.

Список літератури

1. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Застосування інтерлінації функцій та швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є // Матеріали XVIII науковометодичної конференції. – Харків, УІПА, 1995. – С. 229 – 231.
2. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Застосування швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних // Тез. доп. на Всеукр. науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях». – Львів, 1995. – С. 5 – 7.
3. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
4. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 13 – 17.
5. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
6. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління : зб. наук. пр. – Х., 2010. – № 926. – С. 153 – 160.
7. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації // Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18 – 21 травня 2010 р., Харків. – Х., 2010. – Ч. 2. – С. 211 – 213.
8. *Lytvyn O. N.*, *Nechuyviter O. P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – pp. 90 – 96.
9. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
10. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2011. – № 125. – С. 51 – 55.
11. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2011. – № 16. – С. 207 – 214.
12. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцию‌ючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
13. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Мельникова С. С.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
14. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Мельникова С. С.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
15. *Lytvyn O. N.*, *Nechuyviter O. P.* $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 44. – Is. 3. – 2012. – pp. 45 – 56.
16. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
17. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
18. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвитер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближеного вычисления $3D$ – интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
19. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково–сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – Том 1. – № 4. – С. 28 – 40.
20. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
21. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвітер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
22. *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O. P.* Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – no. 50(3). – pp. 410 – 418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.
23. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
24. *Нечуйвітер О. П.*, *Кейта К. В.* Обчислення $2D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 124 – 131.
25. *Нечуйвітер О. П.* Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.
26. *Нечуйвітер О. П.*, *Кейта К. В.* Оптимальне інтегрування двовимірних швидкоосцилюючих функцій загального вигляду // Математичне та комп'ютерне моделювання. – 2017. – Вип. 15. – С. 139 – 144.
27. *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O.*, *Pershyna Y.*, *Mezhuyev V.* Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – Kyiv, Ukraine, 2018. – pp. 365 – 373. DOI: 10.1007/978-3-319-97885-7_36.
28. *Mezhuyev V.*, *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O.*, *Pershyna Y.*, *Keita K.*, *Lytvyn O. O.* Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // U.P.B. Sci. Bull., Series A. – 2018.– Vol. 80. – Iss. 3. – pp. 169 – 182. https://www.scientificbulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.

29. *Nechuiviter O. P.* Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2020. – Vol. 4. – pp. 65 – 73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.

30. *Нечуйвітер О. П.*, *Іванов С. С.*, *Ковальчук К. Г.* Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 68 – 72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.

31. *Нечуйвітер О. П.*, *Іванов С. С.*, *Ковальчук К. Г.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2023. – Вип. 37. – С. 37 – 41. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit 2023.37.037.

32. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.

33. *Nechuiviter O. P.* Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies // Information Technologies and Learning Tools. – 2021. – no. 82 (2). – pp. 282 – 296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.

34. *Nechuiviter O. P.*, *Iarmosh O. V.*, *Kovalchuk K. H.* Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 1031 (1). – 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.

35. *Нечуйвітер О. П.*, *Іванов С. С.*, *Ковальчук К. Г.* Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1. – С. 82 – 91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Zastosuvannya interlinatsiyi funktsiy ta shvydkogo peretvorennya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e [Application of function interpolation and fast Fourier transform to calculate Fourier coefficients]. *Materialy XVIII naukovometodychnoyi konferentsiyi* [Materials of the XVIII scientific-methodological conference]. Kharkiv, UIPA Publ., 1995, pp. 229–231.

2. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Zastosuvannya shvydkogo peretvorennya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiyi dvokh zminnykh [Application of the fast Fourier transform to calculate the Fourier coefficients of the functions of two variables]. *Tez. dop. na Vseukr. naukoviy konferentsiyi «Rozrobka ta zastosuvannya matematychnykh metodiv v naukovo-tekhnichnykh doslidzhennyakh»* [Theses of the All-Ukrainian scientific conference "Development and application of mathematical methods in scientific and technical research"]. Lviv, 1995, pp. 5–7.

3. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.

4. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoost-sylyuuchykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [Optimal cubature formula for calculating double integrals from rapidly oscillating functions and spline interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2008, no. 2, pp. 13–17.

5. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya $2D-$koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [On a cubature formula for calculating $2D$ Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.

6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturna formula dlya obchislennya $2D-$ koefitsientiv Fur'e z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [The cubature formula for calculating $2D-$Fourier coefficients using the interlineation of functions]. *Visnyk KhNU Im. V. N. Karazina. Ser. : Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya : zb. nauk. pr.* [Bulletin of the Karazin Charkiv National University. Series : Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems : Collection of scientific papers]. Kharkiv., 2010, no. 926, pp. 153–160.

7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optimal'nyy za poryadkom tochnosti metod obchyslennya $2D-$ koefitsientiv Fur'e za dopomogoyu interlinatsiyi [The optimal method of calculating $2D-$ Fourier coefficients using interlineation]. *Komp'yuterne modelyuvannya v naukotmnykh tekhnologiyakh : pr. nauk.-tehn. konf. z mizhnarodnoyu uchastyu, 18–21 travnya 2010r.* [Computer modeling in science-intensive technologies: Practical Scientific and Technical Conference with international participation, May 18–21]. Kharkiv., 2010, no. 2, pp. 211–213.

8. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk. 2010, pp. 90–96.

9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. $2D-$ koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [$2D-$ Fourier coefficients on the class of differential functions and spline-interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.

10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. $2D-$ koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta operatory kuskovo-staloyi splayn-interlinatsiyi [$2D$ Fourier coefficients on a class of differentiable functions and piecewise-constant spline interliniation operators]. *Naukovi zapysky NaUKMA. Komp'uterni nauky* [Scientific notes of the National University of Kyiv Mohyla Academy. Computer sciences]. 2011, no. 125, pp. 51–55.

11. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Splayn-interlinatsiya ta optymal'ni po tochnosti kubaturni formuly obchyslennya $2D-$ koefitsientiv Fur'e odnogo klasu funktsiy [Spline interliniation and optimally accurate cubature formulas for computing $2D$ Fourier coefficients for a class of functions]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya : Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2011, no. 16, pp. 207–214.

12. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsyyuyuchykh funktsy z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from rapidly varying functions using Lagrangian polynomial interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.

13. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoost-silyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 1. Algorytmy : monografiya. In-t kibernetyky im. V. M. Glushkova NAN Ukrayiny* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 1. Algorithms: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kuiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 447 p.

14. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoost-sylyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 2. Zastosuvannya : monografiya. In-t kibernetyky im. V. M. Glushkova NAN Ukrayiny* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 2. Applications: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 348 p.

15. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012, vol. 44, is. 3, pp. 45–56.

16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D-$ koefitsientiv Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D-$ Fourier coefficients on a class of differential functions using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichny nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.

17. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiy tryekh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of the Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differential functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.

18. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnyykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya $3D-$ integralov ot bystroostsilliruyusshikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of the accuracy of cubature formulas for the approximate calculation of 3D integrals of fast-oscillating functions with the use of interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.

19. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D-$ koefitsientiv Fur'e na klasi Geldera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ Fourier coefficients on the Hölder class using piecewise constant spline interpolation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, vol. 1, no. 4, pp. 28– 40.

20. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyusshikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate calculation of oscillating integrals of three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University Series: physics and mathematics]. 2013, no, 2. pp. 3–9.

21. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the errors of the numerical integration of the fast-oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series : mathematics and physics]. 2013, vol. 32, no. 19 (162), pp. 101–107.

22. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, no. 50(3), pp. 410–418. DOI: 10.1007/s10559-014-9629-1.

23. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvannyam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.

24. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Obchyslennya $2D$ integraliv vid trigonometrichnih funktsiy z vikoristannyam kuskovo-staloyi interlinatsiyi [Calculation of $2D$ integrals from trigonometric functions using piecewise constant interlineation]. *Matematychne ta komp"yuterne modelyuvannya. Seriya : Fiziko-matematychni nauky : zb. nauk. prats*. [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences : coll. of science works]. Kam'yanets–Podil's'kiy, Kam"yanets'–Podil's'kyy natsional'nyy universytet im. Ivana Ogienka Publ., 2016, no. 13, pp. 124 – 131.

25. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interfletatsiyi [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychne modeluvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.

26. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Optymal'ne integruvannya dvovymirnykh shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vyglyadu [Optimal integration of two-dimensional rapidly oscillating generic functions]. *Matematychne ta kompiuterne modelyuvannya* [Mathematical and computer modeling]. 2017, vol. 15, pp. 139–144.

27. Lytvyn O. M, Nechuiviter O., Pershyna Y., Mezhuyev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case). *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information*. Kyiv, Ukraine, 2018, pp. 365–373. DOI: 10.1007/ 978-3-319-97885-7_36.

28. Mezhuyev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y, Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182. https://www.scientific bulletin.upb.ro/rev_docs_arhiva/full772_104997.pdf.

29. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020, vol. 4, pp. 65–73. DOI: 10.15588/1607-3274-2020-4-7.

30. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Optymal'ne integruvannya shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Optimal integration of rapidly oscillating functions of the general form]. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies]. 2021, no. 33, pp. 68–72. DOI: 10.15407/fmmit2021.33.068.

31. Nechuiviter O. P., Ivanov S. S., Kovalchuk K. H. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vydu [Approximate computation of double integrals of rapidly oscillating generic functions]. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and mathematical modeling and information technologies]. 2023, vol. 37, pp. 37–41. DOI: 10.15407/10.15407/ fmmit2023.37.037.

32. Lytvyn O. M, Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using Lagrangian polynomial interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1. pp. 66–72.

33. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021, vol. 82, no 2 (2021), pp. 282–296. DOI: 10.33407/itlt.v82i2.4084.

34. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1031 (1), 012059. DOI: 10.1088/1757-899X/1031/1/012059.

35. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Novi informatsiyni operatory v zadachakh chysel'nogo integruvannya funktsiyi trokh zminnykh [New information operators in problems of numerical integration of functions of three variables]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 1, pp. 82–91. DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10.

Надійшла (received) 27.01.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В.Н Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 189-47-38; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 189-47-38; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Іванов Сергій Сергійович **–** аспірант кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, Навчально науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія» Харківського національного університету імені В.Н Каразіна, м. Харків; тел.: (099) 560-42-21; e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Ivanov Serhii Serhiyovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Educational and Research Institute "Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy" of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (099) 560-42-21; e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Ковальчук Кирило Геннадійович – студент фізичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (066) 127-04-52; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.

Kovalchuk Kyrylo Gennadiyovych – student at the Faculty of Physics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv; tel.: (066) 127-04-52; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.