

О. В. ВОРОПАЙ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДОВІЛЬНОГО РУХОМОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ЩО ДІЄ НА ЦИЛІНДРИЧНУ ОБОЛОНКУ

На різні елементи конструкцій та циліндричні оболонки скінченної довжини зокрема можуть діяти різні види зовнішнього нестационарного навантаження: розподілене та зосереджене, нерухоме та рухоме. При застосуванні різних методів ідентифікації зовнішнього навантаження, зазвичай, тип зовнішнього навантаження відомий. На практиці це не завжди так. Метою дослідження є розробка методу ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосований при ідентифікації рухомого навантаження. Для моделювання нестационарного навантаження циліндричної оболонки була використана система диференціальних рівнянь уточненої теорії оболонок середньої товщини типу Тимошенка. Розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь отримано шляхом розкладання невідомих функцій у ряди Фур'є та застосування інтегрального перетворення Лапласа. Розв'язок відповідної оберненої задачі був отриманий з використанням теорії інтегральних рівнянь та методу регуляризації Тихонова. В результаті дослідження отримано розв'язок оберненої задачі механіки деформівного твердого тіла з ідентифікації довільного осесиметричного нестационарного навантаження. Проведено числовий експеримент з використанням розробленого методу при ідентифікації рухомого нестационарного навантаження, що діє на шарнірно оберту циліндричну оболонку середньої товщини. Результати моделювання свідчать про досить точну ідентифікацію як зміни в часі, так і розподілу вздовж оболонки нестационарного осесиметричного рухомого навантаження. Розроблено метод ідентифікації зовнішнього нестационарного навантаження, яке довільно розподілено вздовж циліндричної оболонки. Описаний метод дозволяє ідентифікувати рухоме навантаження без попередньої інформації про тип цього навантаження, а також відтворювати рухомі нестационарні навантаження, що часто зустрічаються на практиці та розширити його на інші види елементів конструкцій.

Ключові слова: циліндрична оболонка, нестационарне рухоме осесиметричне навантаження, обернена задача, ідентифікація, регуляризація Тихонова.

O. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, A. S. SHARAPATA

IDENTIFICATION OF AN ARBITRARY MOVING AXISYMMETRIC LOAD ACTING ON A CYLINDRICAL SHELL

Various types of external non-stationary loads can act on various structural elements and cylindrical shells of finite length in particular distributed and concentrated, stationary and moving load. When using various external load identification methods, the type of external load is usually known. In practice this is not always the case. The purpose of the study is to develop a method for identifying an arbitrary axisymmetric load acting on an elastic cylindrical shell of finite length, which can be used to identify a moving load. To model the non-stationary load of a cylindrical shell, a system of differential equations of the refined Timoshenko theory for medium thickness shells was used. The solution to this system of differential equations is obtained by expanding the unknown functions into Fourier series and applying the integral Laplace transform. The solution of the inverse problem was obtained using the theory of integral equations and the Tikhonov regularization method. As a result of the study, a solution of the inverse problem of solid mechanics to identify an arbitrary axisymmetric non-stationary load was obtained. A numerical experiment was carried out to use the developed method to identify a moving non-stationary load acting on a simply supported cylindrical shell of medium thickness. The simulation results indicate a fairly accurate identification of both the change in time and the distribution along the shell of a non-stationary axisymmetric moving load. A method has been developed for identifying an external non-stationary load randomly distributed along a cylindrical shell, which makes it possible to identify a moving load without preliminary information about the type of this load. The developed method allows us to reproduce moving non-stationary loads, which are often encountered in practice, and expand it to other types of structural elements.

Key words: cylindrical shell, non-stationary moving axisymmetric load, inverse problem, identification, Tikhonov regularization.

Вступ. Під час розв'язання обернених задач з ідентифікації зовнішніх нестационарних навантажень, що діють на різні елементи конструкцій, невідомими можуть бути: функція навантаження у часі, геометричний розподіл навантаження та вид цього навантаження. В залежності від задачі дослідження, певна інформація про зовнішнє навантаження може бути відомою. Втім найбільш складною є задача, коли будь-яка інформація про прикладене навантаження є відсутньою.

Саме така задача з ідентифікації довільного навантаження, що діє на циліндричну оболонку середньої товщини типу Тимошенка, розглянута в даному дослідженні.

Аналіз останніх досліджень. Розрахунок елементів конструкцій під дією зовнішніх навантажень базується на застосуванні теорії коливань. В роботі [1] наведено огляд моделей, які використовуються для опису коливань елементів конструкції у вигляді стержнів, пластин та оболонок. Їх застосування дозволяє розв'язувати різноманітні задачі механіки деформівного твердого тіла для циліндричних оболонок.

Найбільш розповсюдженими є задачі з визначення параметрів напружено-деформованого стану елементів конструкцій. Так, наприклад, в роботах [2, 3] досліджується напружено-деформований стан багат шарових конструкцій при різних типах динамічного навантаження. Дослідження імпульсного навантаження шаруватих ортотропних незамкнених оболонок постійної товщини наведено в роботі [4]. Розв'язана задача мінімізації маси оболонки. В статті [5] методом Галеркіна розв'язано рівняння балансу вільних і вимушених коливань складеної циліндричної оболонки, підкріпленої ребрами, і досліджено вплив ребер сітки на динамічний відклик оболонки.

Багато прикладних задач пов'язано з дією на елементи конструкцій рухомих навантажень. Так, авторами роботи [6] проведено дослідження реакції нескінченно довгої тришарової циліндричної оболонки на дію нормального навантаження, що рухається вздовж осі з постійною до резонансної швидкістю. Вплив рухомого гармонічного навантаження на нанокмпозитні циліндричні оболонки досліджений в роботі [7]. Коливання скла-

деної циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску, що рухається, досліджено в роботі [8]. Реакцію дорожньої конструкції на рухоме нестационарне навантаження досліджено в роботі [9]. Розглянуто можливість урахування в'язкопружних властивостей матеріалу пластини.

Менш дослідженими є задачі ідентифікації зовнішніх навантажень, що діють на циліндричні оболонки. Серед них слід відмітити роботу [10], де наведено ідентифікацію нерухомого нестационарного осесиметричного навантаження, що діє на *однопрогонну циліндричну оболонку*. Оболонка складається з двох жорстко скріплених встик ділянок, виготовлених з різних матеріалів. Розглянуто випадок, коли навантаження є розподіленим по певній ділянці циліндричної оболонки.

Авторами роботи [11] на основі *методу розширеної регуляризації Тихонова* і *методу збурення матриці* запропоновано метод для реконструкції ударних навантажень, що діють на композитну ламіновану циліндричну оболонку з випадковими характеристиками.

Задача ідентифікації нестационарного навантаження, що діє на підкріплені ребрами жорсткості циліндричні оболонки розглянута в роботі [12].

Втім, актуальною проблемою є розв'язання обернених задач з ідентифікації саме рухомих зовнішніх навантажень у зв'язку з багатьма існуючими прикладними задачами.

В роботі [13] отримано розв'язок обернених задач механіки твердого тіла з ідентифікації як нерухомої так і рухомої зосередженої осесиметричної нестационарної сили, що діє на циліндричну оболонку. Тип навантаження та його швидкість вважаються відомими. Здійснюється відновлення залежності нестационарного навантаження від часу.

Виходячи з виконаного аналізу, можна зробити висновок, що ідентифікація зовнішнього рухомого навантаження, що діє на циліндричну оболонку є актуальною. Дане дослідження є продовженням робіт [9, 10, 13, 14], його відмінність полягає в ідентифікації не тільки функції навантаження у часі, а й типу навантаження та його геометричного розподілу.

Постановка задачі. Метою дослідження є розробка методу ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосований при ідентифікації рухомого навантаження.

Для досягнення мети були поставлені наступні задачі:

- отримання в інтегральному вигляді розв'язку системи диференціальних рівнянь коливань циліндричної оболонки відносно функцій її переміщень;
- розробка методу ідентифікації зовнішнього довільного нестационарного навантаження на основі розкладання невідомого навантаження у ряд Фур'є та методу регуляризації Тихонова;
- проведення числового моделювання з ідентифікації зовнішнього нестационарного осесиметричного навантаження, що рухається вздовж циліндричної оболонки.

Отримання розв'язку системи диференціальних рівнянь коливань циліндричної оболонки. В якості об'єкту дослідження розглянута шарнірно-обперта циліндрична оболонка середньої товщини *теорії типу Тимошенка* (рис. 1). На оболонку діє рухоме довільно розподілене вздовж осі оболонки осесиметричне нестационарне поперечне навантаження $q(x, t)$, що розповсюджується вздовж осі x оболонки зі швидкістю V .

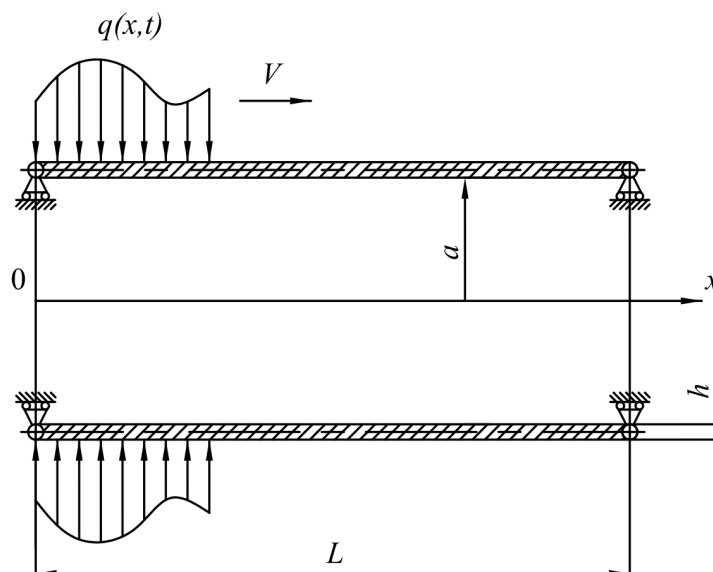


Рис. 1 – Механічна система, що досліджується.

Реакція оболонки середньої товщини теорії типу Тимошенка на осесиметричне поперечне навантаження

моделюється системою лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\nu l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ \bar{k}^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{l^2}{a} w + \nu l \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{(1-\nu^2)l^2}{Eh} q(\xi, t); \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \bar{k}^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi l^2 \right) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad t = \frac{t_p \sqrt{E}}{l \sqrt{\rho(1-\nu^2)}}; \quad \bar{k}^2 = \frac{1-\nu}{2} k^2;$$

l – довжина оболонки; t – безрозмірний час; t_p – розмірний час; u, w – переміщення точок серединної поверхні в осьовому та радіальному напрямках, відповідно; ψ – кут повороту нормалі до серединної поверхні оболонки; ν, E – пружні постійні матеріалу оболонки; ρ – густина матеріалу оболонки; k – коефіцієнт зсуву; x – координата в осьовому напрямку; $q(\xi, t)$ – задане поперечне нестационарне навантаження.

Граничні умови для аналізованої механічної системи (рис. 1) мають вигляд:

$$N_x(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad w(\xi, t)|_{\xi=0} = 0; \quad M_x(\xi, t)|_{\xi=1} = 0. \quad (2)$$

Невідомі функції (переміщення та кут повороту нормалі) були розкладені в наступні тригонометричні ряди Фур'є:

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(k\pi\xi); \\ u(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \cos(k\pi\xi); \\ \psi(\xi, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cos(k\pi\xi), \end{aligned} \quad (3)$$

де $a_k(t), b_k(t), c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти розкладання.

Система диференціальних рівнянь у частинних похідних (1) після підстановки розвинень у ряди (3) та процедури ортогоналізації перетворюється у систему звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Після оберненого перетворення Лапласа з застосуванням теорему згортки, отримано наступний розв'язок:

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{I_{n,r}(t) (C_n - \alpha_{n,r}^2) (B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \sin(n\pi\xi); \\ u(\xi, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{I_{n,r}(t) \frac{\nu l \pi n}{a} (C_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cos(n\pi\xi); \\ \psi(\xi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \frac{\frac{12}{h^2} I_{n,r}(t) l \pi n \bar{k}^2 (B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cos(n\pi\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

де $I_{n,r}(t) = \frac{2(1-\nu^2)l^2}{Eh} \int_0^t Q_n(\tau) \sin \alpha_{n,r}(t-\tau) d\tau$, причому

$$Q_n(s) = \int_0^1 q(\xi, s) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (5)$$

Для подальшого аналізу застосована *кусково-постійна апроксимація функцій часу* [15], що входять до (4). В результаті використання цієї апроксимації отримано, що

$$I_{n,r,m} = \frac{2(1-\nu^2)l^2}{Eh} \sum_{p=1}^m Q_{n,p} \cdot \frac{\cos[\alpha_{n,r}(m-p)\Delta t] - \cos[\alpha_{n,r}(m-p+1)\Delta t]}{\alpha_{n,r}}, \quad (6)$$

де $t_m = m \cdot \Delta t$; $m = 0, 1, \dots, M$ – кількість часових інтервалів; $p = 0, 1, \dots, m$; Δt – величина «кроку» у часі.

Співвідношення (4) при відомій функції розподілення зовнішнього навантаження $q(x, t)$ дозволяють знайти всі компоненти переміщення будь-якої точки оболонки, що є *прямою задачею* механіки деформівного твердого тіла.

При невідомому зовнішньому навантаженні можливо декілька постановок *оберненої задачі*:

1) *часткова ідентифікація*: по вихідним даним (компонентам переміщення певної або певних точок оболонки) та відомому геометричному розподіленню $Q(x)$ зовнішнього навантаження треба знайти закон зміни у часі цього навантаження $Q(t)$ або при відомій функції $Q(t)$ знайти $Q(x)$;

2) *повна ідентифікація*: по вихідним даним (компонентам переміщення в певних точках оболонки) треба знайти невідому функцію зовнішнього навантаження $q(x, t)$.

Зазначимо, що в цій роботі далі розв'язується обернена задача повної ідентифікації.

При невідомому зовнішньому навантаженні співвідношення (4) є *інтегральними рівняннями Вольтерра I-го роду*.

Розробка методу ідентифікації зовнішнього довільного нестационарного навантаження. Далі розглянуто ідентифікацію нормального нестационарного навантаження, що діє на шарнірно-оперту циліндричну оболонку (рис. 1) за значеннями поперечного прогину. Причому, визначено не тільки закон зміни нестационарного навантаження в часі, а й його геометричний розподіл уздовж осі циліндричної оболонки.

Для ідентифікації невідоме навантаження подавалося у вигляді K – часткової суми ряду Фур'є наступного виду:

$$q(\xi, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot \sin(k \cdot \pi \cdot \xi), \quad (7)$$

де $q_k(t)$ – невідомі коефіцієнти розкладання в ряд Фур'є; K – число утримуваних членів ряду.

По суті, за допомогою формули (7) здійснювалася апроксимація невідомого навантаження першими K членами її розкладання в ряд Фур'є. Вкажемо, що тригонометричні функції, що входять до апроксимаційної формули, збігаються з відповідними формами коливань нормального переміщення для шарнірно-опертої циліндричної оболонки.

На основі (4) та (7) для ідентифікації невідомого навантаження за значеннями прогинів було отримано інтегральне рівняння:

$$w(\xi, t) = -\frac{(1-\nu^2)l^2}{Eh} \sum_{n=1}^K \sum_{r=1}^3 \frac{(C_n - \alpha_{n,r}^2)(B_n - \alpha_{n,r}^2)}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \cdot \sin(n\pi\xi) \int_0^t q_n(\tau) \cdot \sin \alpha_{n,r}(t-\tau) d\tau. \quad (8)$$

Аналізуючи інтегральне рівняння (8), зазначимо, що в ньому міститься K невідомих функцій часу. Тому для ідентифікації довільного розподіленого нестационарного навантаження необхідно отримати K рівнянь. Природно припустити, що ідентифікація навантаження з точністю, що відповідає K членам ряду, можлива за значеннями прогину в K точках циліндричної оболонки.

При реальних експериментальних дослідженнях треба забезпечити вимірювання зміни прогину у часі в K точках оболонки, причому ці точки повинні не збігатись.

Отже, у матричній формі необхідно розв'язувати систему рівнянь розмірністю $K \times K$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K A_{1,n} \cdot q_n &= w_1, \\ \sum_{n=1}^K A_{2,n} \cdot q_n &= w_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{n=1}^K A_{K,n} \cdot q_n &= w_K, \end{aligned} \quad (9)$$

де матриця $\mathbf{A}_{m,p}$ – відповідає дискретизованим ядрам інтегральних рівнянь Вольterra; у правій частині записаний вектор-стовпець \mathbf{w}_k , що є дискретним аналогом функції прогинів в оболонці $w_k(t)$.

Елементи блокової матриці $(\mathbf{A}_{m,p})_{k,n}$ знаходяться наступним чином:

$$(\mathbf{A}_{m,p})_{k,n} = -\sum_{r=1}^3 \frac{(C_n - \alpha_{n,r}^2)(B_n - \alpha_{n,r}^2) 2(1-\nu^2)l^2 \cos[\alpha_{n,r}(m-p)\Delta t] - \cos[\alpha_{n,r}(m-p+1)\Delta t]}{\alpha_{n,r} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^3 (\alpha_{n,j}^2 - \alpha_{n,r}^2)} \frac{Eh}{\alpha_{n,r}} \sin(n\pi\xi_k). \quad (10)$$

Для розв'язання системи матричних рівнянь використаний узагальнений алгоритм Гауса [15]. Внаслідок його застосування система (9) приводиться до виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{1,1} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{B}_{1,2} \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{B}_{1,3} \cdot \mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{B}_{1,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_1, \\ \mathbf{B}_{2,2} \cdot \mathbf{q}_2 + \mathbf{B}_{2,3} \cdot \mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{B}_{2,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_2, \\ \dots & \\ \mathbf{B}_{K,K} \cdot \mathbf{q}_K &= \mathbf{w}_K. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) блокова матриця \mathbf{B} має верхню трикутну форму після прямого проходу узагальненого алгоритму Гауса.

З (11) з використанням алгоритму Тихонова [16, 17], послідовно знаходяться коефіцієнти $q_k(t)$ розкладання шуканого навантаження $q(\xi, t)$.

Зауважимо, що при розв'язанні розглянутої задачі особливу увагу слід приділяти алгоритму вибору параметра регуляризації. Якщо при ідентифікації часової складової одного навантаження необхідно обирати один параметр регуляризації, то при вирішенні СЛАУ (11) із застосуванням алгоритму Тихонова необхідно обирати K параметрів регуляризації.

Для вибору параметрів регуляризації можна використовувати принцип нев'язки, що детально описаний в роботі [16], а оптимальні значення параметрів регуляризації визначати послідовно для 1, 2, ..., K чисел членів ряду.

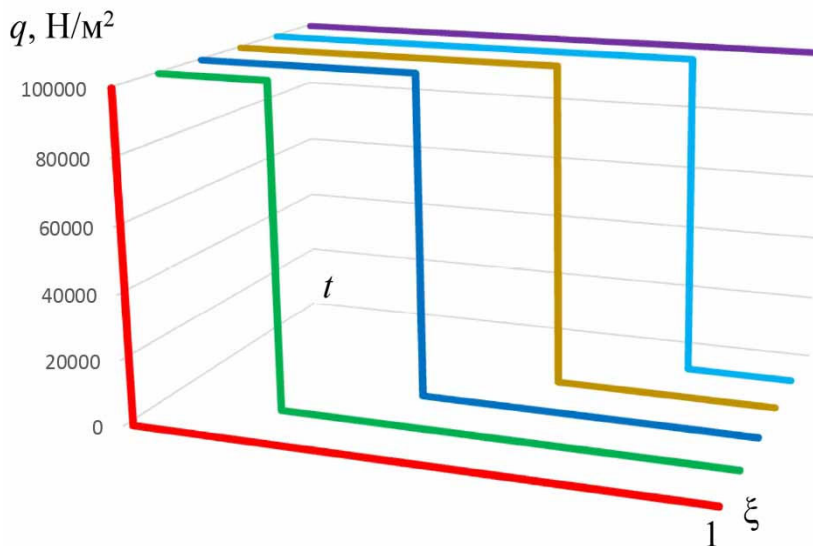


Рис. 2 – Зовнішнє навантаження.

Ідентифікація зовнішнього рухомого нестационарного навантаження. При чисельних розрахунках було розглянуто сталеву циліндричну оболонку, що має такі геометричні та фізичні характеристики: довжина $l = 1.5$ м, радіус серединної поверхні $a = 0.3$ м, товщина $h = 0.043$ м, модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$ коефіцієнт зсуву $k = 0.833$.

На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження, що розширюється від лівого торця оболонки ($\xi = 0$) до правого ($\xi = 1$) зі швидкістю $V = 542 \text{ м/с}$. Епюри даного навантаження при різних значеннях часу показані на рис. 2.

Зазначимо, що в цій роботі описаний розрахунковий експеримент, в якому спочатку була розв'язана пряма задача при заданій функції зовнішнього навантаження. В результаті впливу цього навантаження в 13 ($K = 13$) обраних точках з координатами $\xi = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9$ було розраховано прогини як функції часу. На рис. 3 показані функції цих прогинів в точках $\xi = 0.25, 0.5, 0.75$ оболонки.

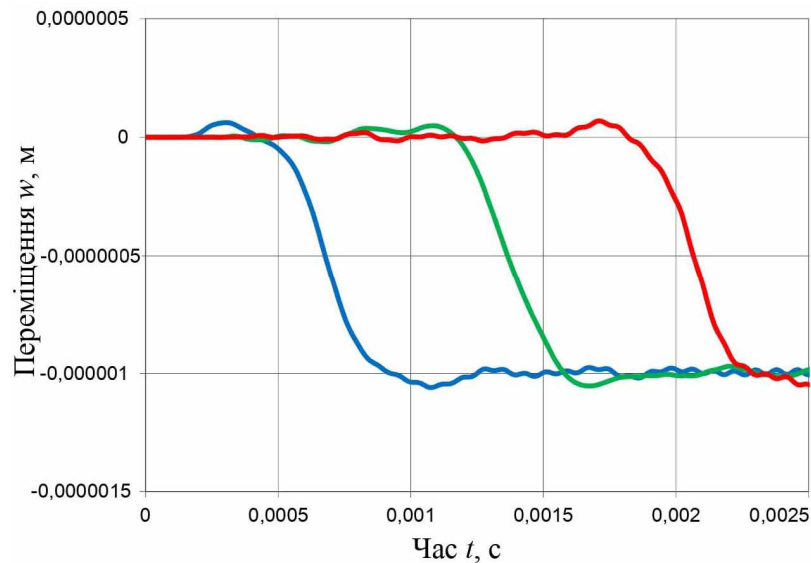


Рис. 3 – Функції прогинів оболонки.

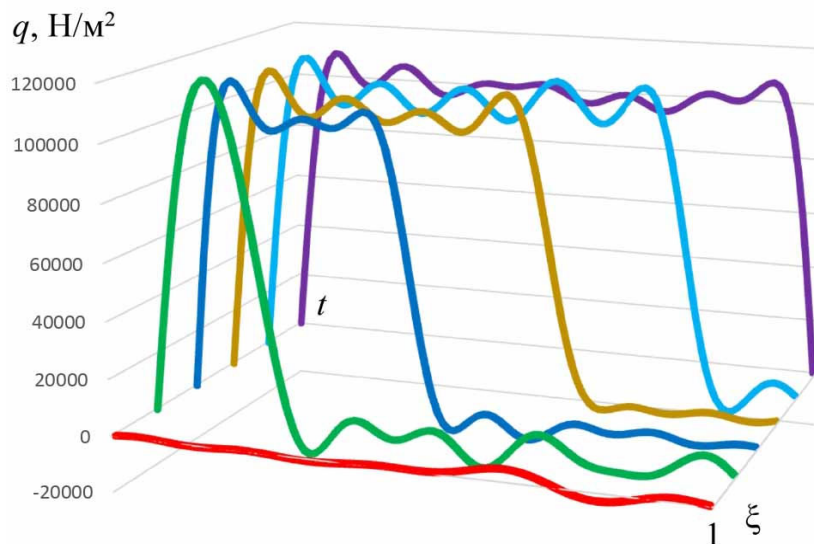


Рис. 4 – Результати ідентифікації рухомого навантаження.

На підставі цих прогинів відновлюється залежність невідомого навантаження у часі одночасно з його *геометричним розподілом (епюрою)*.

На знайдені з прямої задачі еталонні функції прогинів $\bar{w}(t)$ накладалася «похибка» $\delta = 0.05$, що моделює неточності вихідних даних для задачі ідентифікації при реальних вимірюваннях:

$$w_k(t_m) = \bar{w}_k(t_m) + \delta \cdot \max(|\bar{w}_k|) \cdot \text{rnd}(t_m),$$

де $\max(|\bar{w}_k|)$ – максимальне абсолютне значення еталонні функції прогинів в k -тій точці; $\text{rnd}(t_m)$ – псевдо-випадкове число в діапазоні $[-1, 1]$.

Результати ідентифікації рухомого навантаження у вигляді епюр при різних значеннях часу показані на рис. 4. На рис. 5 наведено порівняння епюр заданого навантаження (крива 1) та ідентифікованого навантаження (значення 2) у певний момент часу.

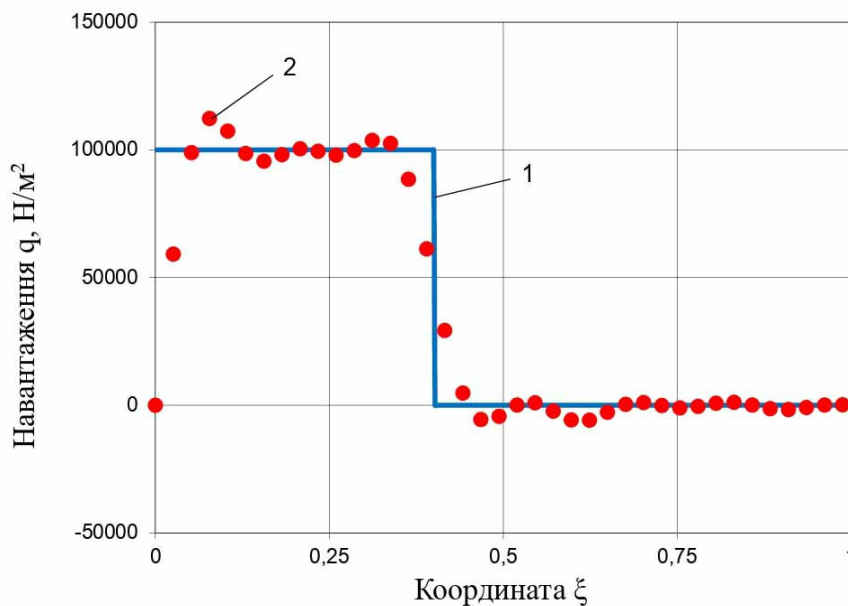


Рис. 5 – Порівняння ідентифікованого та заданого навантаження.

Чисельні результати, що наведені на рис. 4 та рис. 5 свідчать, що розроблений метод дозволяє досить точно відновлювати довільні зовнішні нестационарні навантаження (у тому числі і рухомі), що діють на циліндричні оболонки.

Висновки. У цій роботі розроблено метод ідентифікації довільного осесиметричного навантаження, що діє на пружну циліндричну оболонку скінченної довжини, який може бути застосовано при ідентифікації рухомого навантаження. Ідентифікація здійснювалася на основі прогинів циліндричної оболонки.

При ідентифікації зовнішнього рухомого нестационарного навантаження на конкретному прикладі досліджено вплив кількості точок, в яких заданий прогин, на точність ідентифікації. Дослідження показали, що для розглянутої задачі достатньою є кількість точок, в яких задаються функції прогинів $K = 13$. Зазначимо, що в роботі графічний матеріал наведений саме для $K = 13$. При $K < 13$ точність ідентифікації значно погіршується, а при $K > 13$ помітно зростає розрахунковий час. Розв'язок оберненої задачі базується на застосуванні методу регуляризації Тихонова, демонструє його універсальність, стійкість до похибок у вихідних даних, малу чутливість до наявності точок розриву 1-го роду у відновлюваного навантаження. Основним його недоліком є наявність 13 параметрів регуляризації і необхідність застосування спеціальних алгоритмів для їх вибору.

Список літератури

1. Weaver Jr. W., Timoshenko S. P., Young D. H. Vibration problems in engineering // John Wiley & Sons. – 1991. – 634 p.

2. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact // Springer. – 2020. – P. 267–276. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_22.
3. Сметанкіна Н. В., Шушніков О. М., Угримов С. В. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатосарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон. – 2016. – № 3(58). – С. 408–413.
4. Smetankina N. V., Postnyi O. V., Misura S. Yu., Merkulova A. I., Merkulov D. O. Optimal design of layered cylindrical shells with minimum weight under impulse loading // In: 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). – 2021. – P. 506–509.
5. Davar A., Azarafza R., Fayed M. S., Fallahi S., Jam J. E. Dynamic response of a grid-stiffened composite cylindrical shell reinforced with carbon nanotubes to a radial impulse load // Mechanics of Composite Materials. – 2021. – Vol. 57(2). – P. 181–204.
6. Kuldashov N. U., Marasulov A. M., Yunusov G. G., Ruzimov A. S., Hojiev T. S. Stationary stress-strain state of a three-layer viscoelastic cylindrical shell under normal loading // In Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373 (2). – 022039.
7. Eyvazian A., Davood Sh., Behrouz K. On the dynamic of graphene reinforced nanocomposite cylindrical shells subjected to a moving harmonic load // International Journal of Engineering Science. – 2020. – Vol. 154. – 103339.
8. Eipakchi H., Nasrekani F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure // Composite Structures. – 2020. – Vol. 254. – 112847. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112847.
9. Voropay A. Simulation of non-stationary deformation of rectangular plate with vibration absorber // Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University. – 2011. – Vol. 53. – P. 87–90.
10. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2022. – Vol. 119 (7). – P. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
11. Wang L., Liu Y., Xie Y., Chen B. Impact load identification of composite laminated cylindrical shell with stochastic characteristic // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol. 92 (4). – P. 1397–1411.
12. Янютін С. Г., Гнатенко Г. О., Єгоров П. А. Нестационарне деформування підкріплених циліндричних оболонки // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – Vol. 27 (1303). – P. 148–156.
13. Воропай О., Поваляев С., Шарпата А. Two inverse non-stationary problems of axially symmetric deformation of a finite-length elastic cylindrical shell // Автомобільний транспорт. – 2022. – № 51. – С. 74–84. DOI: 10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08.
14. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Dynamics and Strength of Machines. – 2022. – No. 1. – P. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
15. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. – Mineola, N.Y : Dover Publications. – 2000. – 1130 p.
16. Yang X. J., Wang L. A modified Tikhonov regularization method // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 288. – P. 180–192. DOI: 10.1016/j.cam.2015.04.011.
17. Янютін С. Г., Єгоров П. А. Нестационарні коливання шарнірно-обертої пластини, підкріпленої лінійними ребрами жорсткості (пряма та обернена задача) // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6(1115). – С. 191–200.

References (transliterated)

1. Weaver Jr. W., Timoshenko S. P., Young D. H. *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, 1991. 634 p.
2. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Postnyi O. Dynamic response of laminate composite shells with complex shape under low-velocity impact. *Springer*. 2020. pp. 267–276. DOI: 10.1007/978-3-030-66717-7_22.
3. Smetankina N. V., Shupikov O. M., Ugrimov S. V. Matematychnе modelyuvannya protsesu nestatsionarnogo deformuvannya bagatosharovogo osklinnya pry rozpodilennykh ta lokalizovanykh sylovykh navantazhenyakh [Mathematical modeling of nonstationary deformation process of multilayer glazing at distributed and localized loadings]. *Visnik Kherson'skogo natsional'nogo tekhnichnogo universytetu* [Bulletin of the Kherson National Technical University]. Kherson, 2016, no. 3(58), pp. 408–413.
4. Smetankina N. V., Postnyi O. V., Misura S. Yu., Merkulova A. I., Merkulov D. O. Optimal design of layered cylindrical shells with minimum weight under impulse loading. In: *2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. 2021, pp. 506–509.
5. Davar A., Azarafza R., Fayed M. S., Fallahi S., Jam J. E. Dynamic response of a grid-stiffened composite cylindrical shell reinforced with carbon nanotubes to a radial impulse load. *Mechanics of Composite Materials*. 2021, vol. 57(2), pp. 181–204.
6. Kuldashov N. U., Marasulov A. M., Yunusov G. G., Ruzimov A. S., Hojiev T. S. Stationary stress-strain state of a three-layer viscoelastic cylindrical shell under normal loading. In *Journal of Physics: Conference Series*. 2022, vol. 2373 (2), 022039.
7. Eyvazian A., Davood Sh., Behrouz K. On the dynamic of graphene reinforced nanocomposite cylindrical shells subjected to a moving harmonic load. *International Journal of Engineering Science*. 2020, vol. 154, 103339.
8. Eipakchi H., Nasrekani F. M. Vibrational behavior of composite cylindrical shells with auxetic honeycombs core layer subjected to a moving pressure. *Composite Structures*. 2020, vol. 254, 112847. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112847.
9. Voropay A. Simulation of non-stationary deformation of rectangular plate with vibration absorber. *Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University*. 2011, vol. 53, pp. 87–90.
10. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, vol. 119 (7), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.
11. Wang L., Liu Y., Xie Y., Chen B. Impact load identification of composite laminated cylindrical shell with stochastic characteristic. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, vol. 92 (4), pp. 1397–1411.
12. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Yegorov P. A. Nestatsionarne deformuvannya pidkriplenykh tsylindrychnykh obolonok [Nonstationary deformation of reinforced cylindrical shells]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2018, no. 27(1303), pp. 148–156.
13. Voropaj O., Povalyayev S., Sharapata A. Two inverse non-stationary problems of axially symmetric deformation of a finite-length elastic cylindrical shell. *Avtomobil'nyy transport* [Automobile transport]. 2022, no. 51, pp. 74–84. DOI: 10.30977/AT.2219-8342.2022.51.0.08.
14. Sharapata A., Povalyayev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Dynamics and Strength of Machines*. 2022, no. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.

15. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p.
16. Yang X. J., Wang L. A modified Tikhonov regularization method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015, vol. 288, pp. 180–192. DOI: 10.1016/j.cam.2015.04.011.
17. Yanyutin Ye. G., Yegorov P. A. Nestatsionarni kolyvannya sharnirno-obpertoivi plastyny, pidkriplenoyi liniynymy rebramy zhorstkosti (pryama ta obrernena zadacha) [Non-stationary vibrations of a simple supported plate reinforced with linear stiffeners (direct and inverse problems)]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2015, no. 6(1115), pp. 191–200.

Надійшла (received) 15.03.2024

Відомості про авторів / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Olexiy Valeriiovych – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарпата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergiiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.