

В. А. ВАНІН, Г. І. КОШОВИЙ, В. І. КАРПЕНКО, Б. В. ВАНІН

РОЗСІЮВАННЯ E-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ОДНІЄЮ ПРОВІДНОЮ СТРИЧКОЮ З ІМПЕДАНСОМ

Проведено детальне дослідження ключової задачі розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. У результаті застосування модифікації класичного методу інтегральних рівнянь отримано коректну повно-хвильову математичну модель розсіювання у формі особливого інтегрального рівняння першого роду. При дослідженні цього особливого інтегрального рівняння основна увага приділена двом важливим методам його розв'язку: асимптотичному методу Релея та прямому чисельному методу. Як результат застосування першого методу отримуємо розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот далі застосовується відомий та добре обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур. Проведено ряд чисельних експериментів розсіювання E -поляризованої хвилі однією електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Порівняння чисельних розрахунків показало, що в асимптотичній довгохвильовій області частот результати добре співпадають. Це дало можливість провести чисельні експерименти в більш широкому діапазоні частот і бути певними у їх правильності.

Ключові слова: математичне моделювання, розсіювання хвилі, метод інтегральних рівнянь, асимптотичний метод Релея, прямий чисельний метод.

V. A. VANIN, G. I. KOSHOVY, V. I. KARPENKO, B. V. VANIN

SCATTERING OF THE E-POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVE BY SOLITUDE CONDUCTIVE STRIP WITH IMPEDANCE

The key problem of scattering of a plane E -polarized electromagnetic wave by a solitude electrically conductive impedance strip is studied in detail. A well-posed full-wave mathematical model of scattering in the form of the first order singular integral equation was obtained by applying a modification of a classical method of integral equations. To examine this singular integral equation two basic methods were used. The first one is remarkable Lord Rayleigh's asymptotic method, which delivers an explicit analytical solution in a narrow frequency range. It deals with the long-wave case of the plane E -polarized electromagnetic wave scattering problem. The second method is a direct numerical method, dealing with approximate computation of definite integrals, which gives an approximate solution as well, but in the full-frequency range. A series of numerical experiments on scattering a E -polarized electromagnetic wave by impedance strip were carried out and are presented in this paper. Comparing of computation results shows good agreement in long-wave case of the plane E -polarized electromagnetic wave scattering problem, which indicates the correctness of numeric computation in full frequency range as well.

Key words: mathematical modeling, wave scattering, the integral equation technique, Rayleigh's asymptotic method, direct numerical method.

Вступ. У сучасній радіоелектроніці використовують багато пристроїв, де у якості одного з основних вузлів присутні *металеві ґратки* [1, 2]. Довгий час теоретичне дослідження розсіювання *електромагнітної (ЕМ) хвилі* ґратками обмежувалось ідеальною провідністю металів, з яких вони виготовлялись, та найпростішими способами впорядкування її елементів [3 – 6].

Сучасний розвиток радіоелектроніки вимагає більш досконалих електронних пристроїв, поліпшення яких може бути як за рахунок врахування неідеальної провідності металу, так і за рахунок нових способів впорядкування, які ґрунтуються на законах творення різноманітних ніде не щільних досконалих множинах на сегменті $[-1, 1]$ зі змінною *фрактальною розмірністю* [6 – 8].

У теоретичному плані врахування неідеальної провідності металу приводить до ускладнення задачі і необхідності розробки нових підходів до побудови *коректних математичних моделей* розсіювання хвиль просто провідними стрічковими ґратками. Так, коли мова йде про розсіювання E -поляризованої хвилі, то у випадку ідеально провідної стрічки маємо найпростішу граничну *проблему Діріхле* для хвильового рівняння, а для випадку неідеальної провідності виникає найскладніша змішана гранична проблема для хвильового рівняння [9, 10].

У даній статті проведемо дослідження ключової задачі розсіювання E -поляризованої хвилі однією провідною (не обов'язково ідеально провідною) стрічкою, де основну увагу приділимо двом важливим методам її розв'язку. Спершу до загальної коректної математичної моделі розсіювання *електронно-провідною стрічкою з імпедансом* буде застосовано *асимптотичний метод Релея* [9]. Як результат отримаємо розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв'язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот далі застосуюмо відомий та добре обґрунтований *прямий чисельний метод механічних квадратур* [4, 11].

Загальна математична модель розсіювання E-поляризованої хвилі провідною стрічкою з імпедансом.

Використовуючи класичний *метод інтегрального рівняння*, спочатку отримаємо змішане інтегрально-диференціальне рівняння, а далі відокремимо диференціальну частину від інтегральної та скористаємось *методом малого параметра*, як це вперше зроблено у науковій публікації [12].

У результаті застосування такої модифікації класичного методу інтегрального рівняння отримаємо коректну математичну модель розсіювання E -поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Наведемо тут основні моменти зазначеної модифікації для повної інформативності даної статті. Отже, при відо-

кремленні диференціальної частини від інтегральної у змішаному інтегрально-диференціальному рівнянні отримуємо таке рівняння:

$$\left[\mu^2 \frac{d^2}{dx^2} + k^2 (\mu^2 - 1) \right] \cdot \int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = 4ik^2 (1 + \mu \cdot q_2) \cdot \exp(ikq_1 x). \quad (1)$$

Тут $\mu = w / \chi = \text{Re } \mu + i \text{Im } \mu$ є безрозмірним параметром, де w – поверхневий імпеданс матеріалу, з якого виготовлена стрічка, а χ – хвильовий опір середовища навколо стрічки, k – хвильове число, $H_0^{(1)}(z)$ – функція Ганкеля першого роду нульового порядку. У правій частині маємо дві складові напрямного вектора E – поляризованої хвилі, яка набігає на стрічку. Тобто $q_1 = \sin \phi_0$, $q_2 = \sin \phi_0$, де ϕ_0 є кутом, під яким набігає зазначена хвиля.

Очевидно, коли безрозмірний параметр μ буде нульовим, що відповідає ідеальній провідності матеріалу стрічки, то змішане інтегрально-диференціальне рівняння (1) перестає бути змішаним, бо спрощується до особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = -4i \cdot \exp(ikq_1 x). \quad (2)$$

Звідси випливає, що випадок розсіювання ідеально провідною стрічкою E – поляризованої ЕМ хвилі є значно простішим від більш загального випадку розсіювання просто електронно-провідною стрічкою. Тобто маємо дещо змінювати та вдосконалювати класичний метод інтегрального рівняння, щоб отримати коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом, $\mu \neq 0$.

Введемо функцію

$$Y(x) = \int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k|x - x'|) dx', \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

тоді (1) запишеться у вигляді звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\mu^2 \cdot Y''(x) + k^2 (\mu^2 - 1) \cdot Y(x) = 4ik^2 (1 + \mu \cdot q_2) \cdot \exp(iq_1 kx), \quad |x| \leq a. \quad (4)$$

Загальний розв'язок (4) має вигляд:

$$Y(x) = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 x) - \frac{-4i \cdot \exp(ikq_1 x)}{(1 - q_2 \mu)}, \quad (5)$$

де C_1, C_2 – довільні константи; λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння для (4)

$$\lambda^2 = \frac{k^2 \cdot \sqrt{(1 - \mu^2)}}{\mu^2}.$$

Коли знайдемо потрібний розв'язок диференціального рівняння, то це інтегральне перетворення і приведе до відповідного особливого інтегрального рівняння першого роду. Отримане вище рівняння (3) з урахуванням (4), (5) може розглядатись як нова проміжна загальна (вже одновимірна) математична модель розсіювання E – поляризованої хвилі провідною стрічкою з імпедансом.

Подальше дослідження цієї математичної моделі з метою її спрощення та вдосконалення у випадку двох електронно-провідних стрічок з імпедансом, вперше наведеної у статті [12]. Там пропонується знайти потрібний розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (4), використавши степеневий ряд. Припускаючи, що безрозмірний параметр μ прямо пропорційний поверхневому імпедансу стрічки, є малим та користуючись простим виразом шуканої функції при $\mu = 0$, за цим методом степеневого ряду знаходиться потрібний розв'язок, який співпадає з (5) при $C_1 = C_2 = 0$. Так отримуємо коректну математичну модель розсіювання E – поляризованої хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом у вигляді особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-a}^a \psi(x') \cdot H_0^{(1)}(k \cdot |x - x'|) dx' = \frac{-4i \cdot \exp(ikq_1 x)}{(1 - q_2 \mu)}. \quad (6)$$

Воно вже не виявляє принципової відмінності від особливого інтегрального рівняння (2) і забезпечує потрібну властивість поведінки шуканої функції $\psi = \psi(x)$, яка визначає поздовжню складову щільності поверхневого струму на стрічці.

Таким чином, маємо досить просту і коректну математичну модель розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі нескінченно тонкою провідною стрічкою з імпедансом. Як добре відомо з попередніх більш вікових досліджень, розв'язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді можна знайти тільки асимптотичним методом Релея [9]. Тому і тут доречно спершу розібратись з вузькострічковою моделлю задачі

розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі нескінченно тонкою електронно-провідною стрічкою з імпедансом.

Вузькострічкова модель розсіювання плоскої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою. Для перевірки правильності розв’язку задач розсіювання електромагнітних хвиль є важливим отримати його у явному аналітичному вигляді навіть при певних припущеннях, що звужують частотний діапазон застосування математичних моделей [7, 8, 12]. Така можливість була реалізована при розробці *теорії взаємодії* плоскої електромагнітної хвилі з ідеальною провідною та нескінченно тонкою циліндричною стрічкою [9]. Тому зараз приділимо певну увагу розробці *асимптотичної моделі* взаємодії плоскої електромагнітної хвилі з електронно-провідною вузькою стрічкою з імпедансом. Основним припущенням при її розробці є те, що довжина хвилі має бути великою у порівнянні з шириною стрічки, а основним методом буде класичний метод Релея. Для нашої ключової задачі розсіювання вже є правильна математична модель у вигляді інтегрального рівняння першого роду із особливістю (6). Щоб мати більш зручну для подальших практичних застосувань математичну модель, виконаємо заміну $x = a \cdot t$, $x' = a \cdot \tau$. Це приводить до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 j(t) \cdot \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|\tau-t|) dt = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau)}{1-q_2 \mu}, \quad |\tau| \leq 1. \quad (7)$$

Введена нова невідома функція $j(t) = \alpha \psi(\alpha t)$, а ядро визначає *функція Ганкеля* першого роду нульового порядку. Слід зазначити, що далі буде зручно використати відоме розвинення цієї функції в ряд:

$$\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|u|) = \ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha |u|}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma \alpha |u|}{2i} - \sum_{p=1}^m \frac{1}{p} \right) \right]. \quad (8)$$

Величина $\ln \gamma = C \approx 0,5772\dots$ є *постійною Ейлера*, $\alpha = ka = 2\pi a / \lambda$ є безрозмірним частотним параметром, а λ – довжина падаючої плоскої E – поляризованої хвилі. Звідси стає очевидною логарифмічна особливість ядра інтегрального рівняння першого роду (7) за умови збігу внутрішньої змінної із зовнішньою.

Застосуємо тепер класичний метод Релея, припускаючи, що безрозмірний частотний параметр $\alpha = ka$ є достатньо малим, щоб можна було обмежитись кількома доданками в рядах, що представляють відомі та невідомі величини. Зокрема, використовуючи розгортання в ряд ядра (8) та відомої функції у правій частині (7), приходимо до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 [j_0(x) + j_1(x) \alpha] \cdot [\ln|x-t| + \ln(\gamma \alpha / (2i))] \cdot dt = c_0(\mu) \pi (1 + iq_1 x \alpha), \quad |x| \leq 1. \quad (9)$$

Тут величина $c_0(\mu) = -2(1 - q_2 \mu)^{-1}$ залежить від безрозмірного параметра, пов’язаного з імпедансом, а невідомі функції $j_0(t)$ та $j_1(t)$ визначають головний доданок та головну поправку для вихідної функції математичної моделі. Це рівняння легко розв’язати та отримати асимптотичний розв’язок інтегрального рівняння (9) у явному аналітичному вигляді:

$$j(x) \approx c_0(\mu) \cdot [\ln^{-1}(\alpha \gamma / (4i)) - iq_1 x] / (\pi \sqrt{1-x^2}), \quad |x| \leq 1. \quad (10)$$

Відносна похибка цієї наближеної рівності оцінюється як $O(\alpha^2 \ln \alpha^{-1})$, тому, зменшуючи безрозмірний частотний параметр $\alpha = 2\pi a / \lambda$, можемо підвищувати її точність до потрібного рівня. Зокрема, це важливо для тестування обчислювальних алгоритмів та здійснення контролю над їх роботою при застосуванні прямих чисельних та чисельно-аналітичних методів регуляризації [11 – 13].

Вираз (10) дозволяє досліджувати залежність вихідної змінної асимптотичної моделі від поверхневого імпедансу стрічки. Коли безрозмірний параметр, пов’язаний з імпедансом, є нульовим ($\mu = 0$), то головний доданок вихідної функції обраної математичної моделі стає таким:

$$j_0(x) = -2 \cdot \ln^{-1}(\alpha \gamma / (4i)) / (\pi \sqrt{1-x^2}),$$

що повністю співпадає з відомим класичним виразом [9]. З порівняння цих виразів випливає, що завдяки імпедансу у головному доданку (10) з’явилась залежність від кута ϕ_0 , під яким набігає E – поляризована електромагнітна хвиля. Це дозволяє досліджувати також залежність вихідної змінної асимптотичної моделі від кута набігання ϕ_0 .

Щоб суттєво розширити частотний діапазон, надалі до всього діапазону потрібних частот застосуємо добре відомий та обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур [4, 11].

Метод механічних квадратур для випадку розсіювання E-поляризованої електромагнітної хвилі про-

відною стрічкою. Метод механічних квадратур був розроблений львівськими вченими для наближеного розв'язання двовимірних задач дифракції [4, 11]. При цьому спочатку використовується метод інтегральних рівнянь, а далі до отриманих особливих інтегральних рівнянь застосовують метод механічних квадратур. Загальна схема цього прямого чисельного методу полягає у виборі відповідних квадратурних формул для особливих інтегралів, квадратурних вузлів та зовнішніх вузлових точок. В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, де шуканими є значення невідомої функції у квадратурних вузлових точках. Нарешті, за вказаними значеннями невідомої функції у квадратурних вузлах відновлюють за тією чи іншою апроксимаційною формулою і саму невідому функцію.

На жаль, у вказаних монографіях [4, 11] розглядалися тільки задачі дифракції плоскої електромагнітної хвилі двовимірними ідеально провідними екранами, що значно звужує практичне застосування. У даній дослідницькій роботі метод механічних квадратур буде використаний для випадку розсіювання нескінченно тонкою провідною стрічкою з імпедансом E – поляризованої електромагнітної хвилі. Отримана вище коректна математична модель розсіювання подається як особливе інтегральне рівняння першого роду формулою (7). Ядро містить логарифмічну особливість, тому виділяємо цю особливість у найпростішій формі, використовуючи відоме розв'язання функції Ганкеля першого роду нульового порядку в ряд (8). Це приводить до такого особливого інтегрального рівняння першого роду:

$$\int_{-1}^1 j(t) \ln|\tau-t| dt + \int_{-1}^1 j(t) R(\alpha|\tau-t|) dt = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau)}{1-q_2 \mu}, \quad |\tau| \leq 1. \quad (11)$$

Тут нова невідома функція $j(t) = \alpha \psi(\alpha t)$, а правильна частина ядра визначається формулою:

$$R(\alpha u) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\alpha|u|) - \ln|u|. \quad (12)$$

Це особливе інтегральне рівняння повністю готове до застосування методу механічних квадратур. Зазначимо ще раз, що різницева функція, що визначає ядро інтегрального рівняння, має логарифмічну особливість при однакових значеннях змінної інтегрування та зовнішньої змінної. Тому шукану невідому функцію слід подати у такому вигляді:

$$j(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

де нова допоміжна невідома функція $\varphi(t)$ вже не містить особливостей і є неперервною у сегменті $[-1, 1]$. Відповідно, квадратурну формулу для обчислення інтеграла обираємо з урахуванням зазначеної особливості:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k), \quad (13)$$

де квадратурні вузли $\xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$.

Цій формулі більше півтора століття, вона запропонована ще Меллером у 1864 році і має найвищу алгебраїчну степінь точності.

Для інтеграла з логарифмом застосовуємо іншу квадратурну формулу, що запропонована в книгах [4, 11]

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{\ln|t-\tau|}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) \cdot \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\tau) \right], \quad (14)$$

де $T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$ є *поліномом Чебишева першого роду*. Якщо підставимо наведені вище квадратурні формули (14) до особливого інтегрального рівняння першого роду (1), враховуючи (13), та вимагаючи виконання рівнянь на деякій системі точок, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\vec{\varphi} = \{\varphi(\xi_k)\}_{k=1}^n$:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\tau_l) + R(\alpha|\tau_l - \xi_k|) \right] \varphi(\xi_k) = -\frac{2\pi \cdot \exp(i\alpha q_1 \tau_l)}{1-q_2 \mu}. \quad (15)$$

Нарешті, візьмемо в якості зовнішніх вузлових точок обрані раніше внутрішні чи квадратурні вузли, тобто $\tau_l = \xi_l = \cos \frac{2l-1}{2n} \pi$, $l = 1 \dots n$, тоді коефіцієнти в системі (15), записаної для кожного n як

$$A\vec{\varphi} = \vec{b}, \quad (16)$$

обчислюються за формулами:

$$a_{lk} = \frac{1}{n} \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\xi_l) + R(\alpha|\xi_l - \xi_k|) \right], \quad b_l = -\frac{2 \cdot \exp(i\alpha q_1 \xi_l)}{1-q_2 \mu}.$$

Структуруємо матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь $A = S + R$, де S – матриця, що відповідає сингулярній частині ядра, а R – відповідно її регулярній частині. Тоді маємо такі елементи зазначених вище матриць:

$$s_{lk} = \frac{1}{n} \left[-\ln 2 - 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} T_m(\xi_k) T_m(\xi_l) \right], \quad \text{а} \quad r_{lk} = \frac{1}{n} R(\alpha |\xi_l - \xi_k|).$$

У процесі розв'язування цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо значення допоміжної функції у точках квадратурних вузлів $\varphi(\xi_k)$. Потрібну точність розрахунку можна досягти за рахунок подвоєння кількості квадратурних вузлів і порівняння відповідних значень допоміжної функції. За значеннями допоміжної функції у точках квадратурних вузлів потрібно відновлювати основну шукану функцію. При цьому можна застосовувати різні наближені формули, але тут варто використати наступну формулу:

$$j(t) \approx \psi_n(t) = \frac{1}{n\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^n \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(\xi_k) T_m(t) \right] \varphi(\xi_k). \quad (17)$$

Така залежність використовувалась при проведенні чисельних експериментів в задачах дифракції плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі двовимірними ідеально провідними екранами [4, 11].

Таким чином, маємо аналітичний вираз для вихідної змінної загальної електродинамічної математичної моделі, чим завершується розв'язання задачі взаємодії плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі з провідною та нескінченно тонкою циліндричною стрічкою з імпедансом.

Дещо інша схема методу квадратур, за якою можна успішно діяти при проведенні чисельних експериментів в задачах розсіювання плоскої електромагнітної хвилі провідною стрічкою, пропонується у монографії [13].

Чисельні експерименти в задачах розсіювання E -поляризованої електромагнітної хвилі провідною стрічкою. Досліджуються вплив на розв'язки системи алгебраїчних рівнянь (16) параметрів α , μ , ϕ_0 , n . На рис. 1 наведено розподіл густини струму, де $\psi_{322}(ksi)$ – асимптотичні значення, $\psi_{31}(ksi)$ – розрахункові значення, за умови, що

$$\alpha = 0.1, \quad \mu = (1+i)r, \quad \phi_0 = \pi/20, \quad n = 32, \quad r = 0.01,$$

який демонструє кількісну їх відповідність. В подальшому, на основі аналізу чисельних розрахунків подібних (рис. 2, рис. 3), вибиралось $n = 32$.

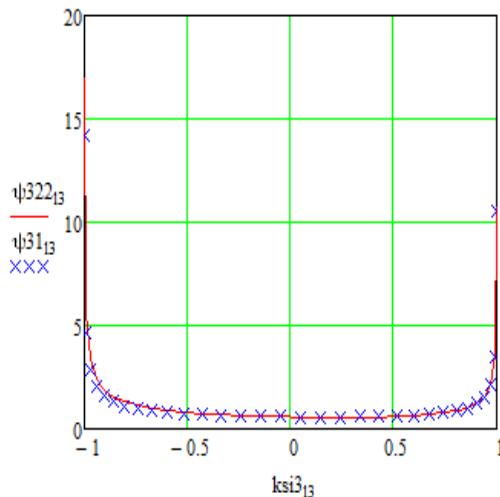


Рис. 1 – Розрахунковий і асимптотичний розподіл густини струму при $n = 32$.

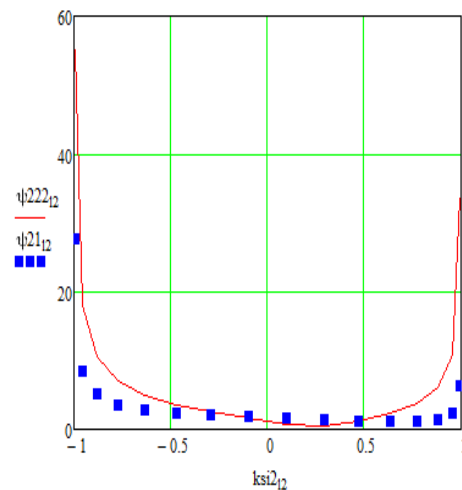


Рис. 2 – Розрахунковий розподіл густини струму при $n = 8, 16, 32$.

Зміна величини α у бік неасимптотичних значень $\alpha = 1.1$ показує узгодженість розподілів із розрахунковою моделлю при різній кількості точок колокації (рис. 2, рис. 3), але відрізняються від асимптотичних (рис. 4).

Вплив кута падіння електромагнітної хвилі (несиметричний розподіл густини струму при неортогональному падінні) на стрічку в зоні неасимптотичних значень $\alpha = 1; 1.5; 5$ та різних імпедансних даних на розподіл густини струму, наведений на рис. 5, рис. 6, рис. 8.. При неасимптотичних значеннях величини α в розрахунковій

моделі маємо значне відхилення в розподілі густини струму (рис. 5, рис. 6) в порівнянні з даними із асимптотичної області (рис. 7) при $\alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

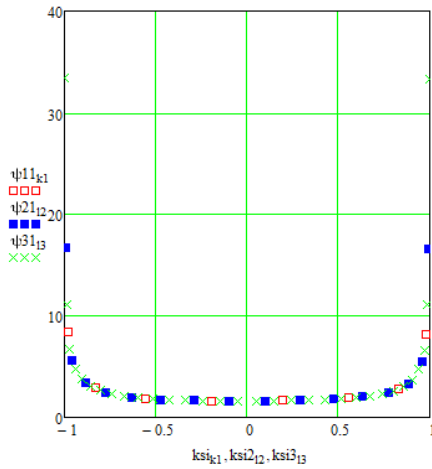


Рис. 3 – Розрахунковий розподіл густини струму при $n = 8, 16, 32$ (ортогональне падіння хвилі).

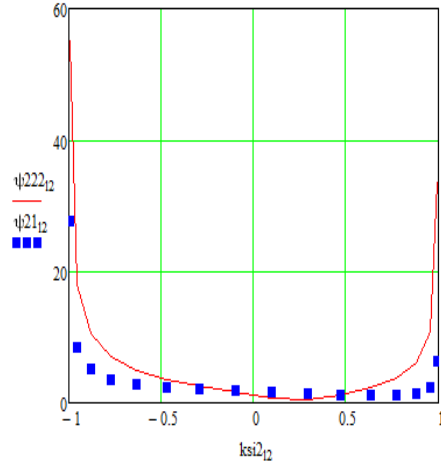


Рис. 4 – Розрахунковий і асимптотичний розподіл густини струму при $n = 16$.

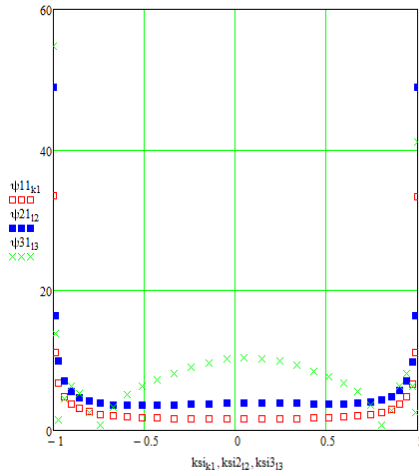


Рис. 5 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/2, r = 0.01, \alpha = 1; 1.5; 5$.

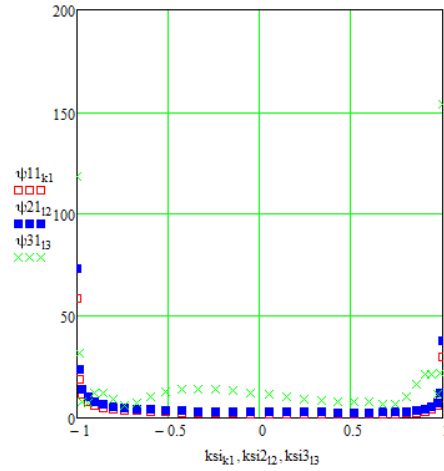


Рис. 6 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/3, r = 0.5, \alpha = 1; 1.5; 5$.

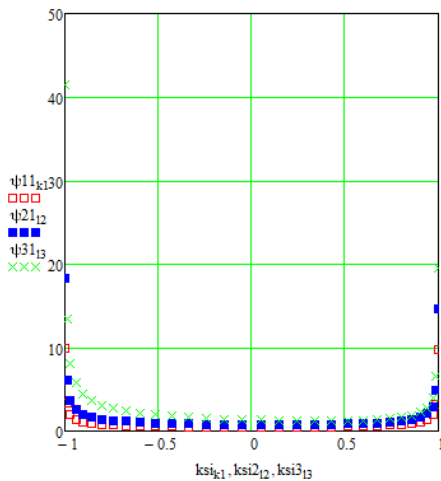


Рис. 7 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/4, r = 0.5, \alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

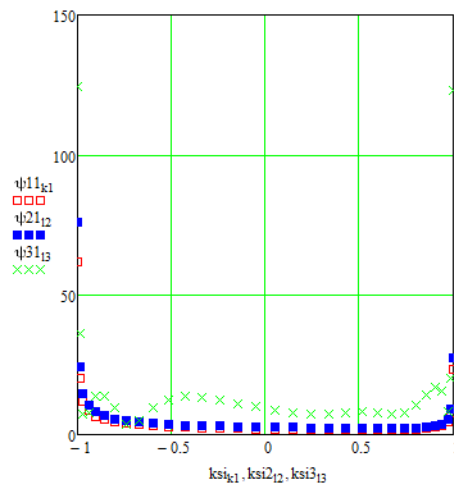


Рис. 8 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/4, r = 0.5, \alpha = 1; 1.5; 5$.

На рис. 9, рис. 10 показано вплив величини імпедансу на розрахунковий розподіл густини струму в асимптотичні області значень параметра α і за її межами. Відмітимо несиметричність розподілу при такому куті падіння електромагнітної хвилі та зменшення величини густини струму із збільшенням імпедансу.

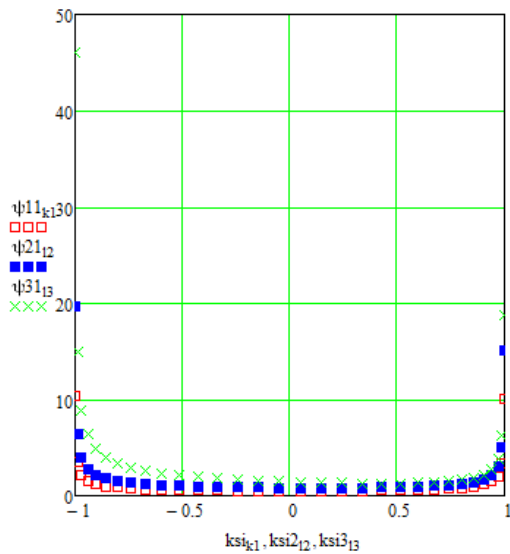


Рис. 9 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/6, r = 1, \alpha = 0.01; 0.1; 0.5$.

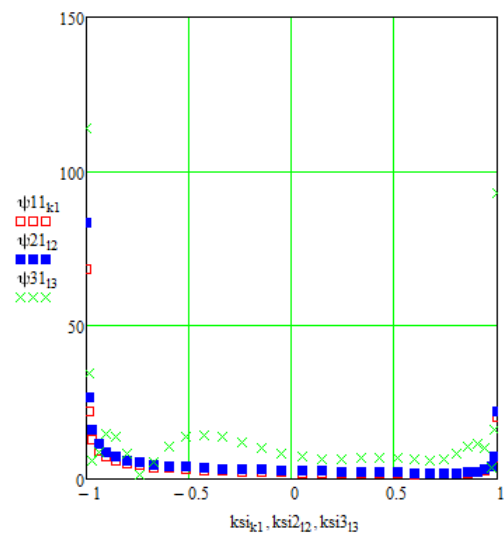


Рис. 10 – Розрахунковий розподіл густини струму при $\phi_0 = \pi/6, r = 1, \alpha = 1; 1.5; 5$.

Деякий портретний аналіз особливостей застосованого чисельного методу. Наведені нижче графіки (рис. 11) значень складових (сингулярної та регулярної) матриці алгебраїчної системи рівнянь показують структурно перевагу діагональних елементів, що забезпечує якісну побудову її розв’язку.

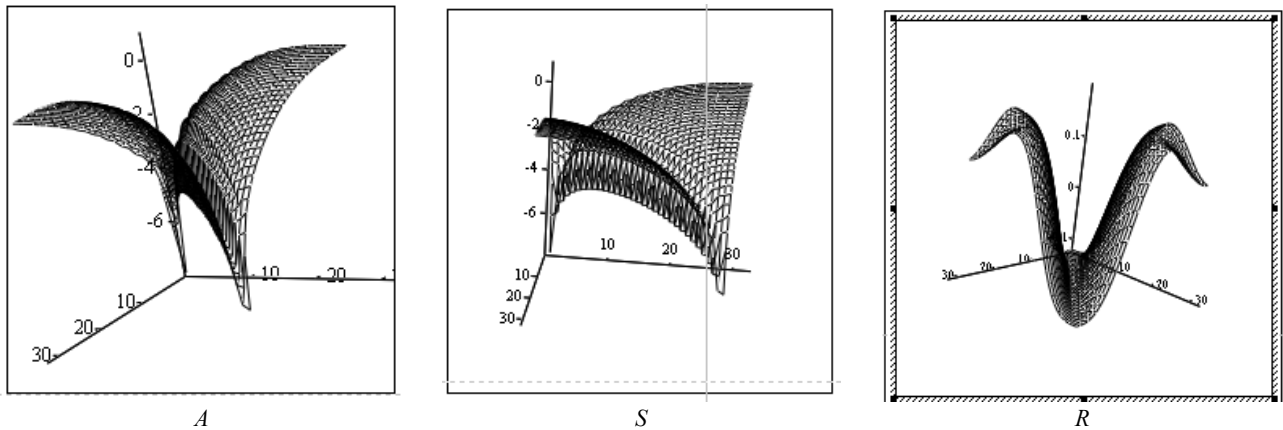


Рис. 11 – Значення елементів матриць ядро СІР (A), сингулярна складова (S), регулярна складова (R).

Висновки. В даній статті проведено детальне дослідження ключової задачі розсіювання плоскої E – поляризованої електромагнітної хвилі електронно-провідною стрічкою з імпедансом. У результаті застосування модифікації класичного методу інтегральних рівнянь отримано коректну повнохвильову математичну модель розсіювання у формі особливого інтегрального рівняння першого роду. При дослідженні цього особливого інтегрального рівняння основна увага приділена двом важливим методам його розв’язку: асимптотичному методу Реллея та прямому чисельному методу механічних квадратур. Як результат застосування першого методу отримаємо розв’язок задачі розсіювання у явному аналітичному вигляді, що суттєво може звужити частотний діапазон. Щоб отримати розв’язок задачі розсіювання у всьому діапазоні частот, далі застосовується відомий та добре обґрунтований прямий чисельний метод механічних квадратур. Проведено ряд чисельних експериментів розсіювання E – поляризованої хвилі однією електронно-провідною стрічкою з імпедансом. Порівняння чисельних ро-

зрахунків показало, що в асимптотичній довгохвильовій області частот вони добре співпадають. Це дало можливість провести чисельні експерименти в більш широкому діапазоні частот і бути певними у їх правильності.

Подальше дослідження можливе в напрямі пошуку аналітичних асимптотичних розв'язків для задач просорової дифракції на мета матеріалах із [14 – 15], використовуючи їх для тестування чисельних методів.

Список літератури

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Х. : Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1973. – 287 с.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. В 2 т. 1 т. Дифракционные решетки. – К. : Наук. Думка, 1986. – 232 с.
3. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев : Наук. Думка, 1984. – 240 с.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К. : Наук. Думка, 1984. – 344 с.
5. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. – Х. : Основа, 1997. – 283 с.
6. Koshovy G. I. Pre-fractal gratings of PEC strips: general mathematical models of wave scattering // Proc. Int. Conf. Mathem. Methods in Electromagn. Theory (MMET-2016). – Lviv, 2016. – pp. 89 – 95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544128.
7. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Х. : Ин-т радиофизики и электроники. НАН Украины. – 2007. – Вып. 12. – № 1. – С. 141 – 147.
8. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. – Х. : Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2007. – Вып. 12. – № 3. – С. 451 – 455.
9. Хьонл Х., Мауе А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М. : Мир, 1964. – 428 с.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
11. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев : Наук. думка, 1989. – 256 с.
12. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E -polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips // IET Microwaves, Antennas and Propagation. – 2021. – № 15(10). – pp. 1218 – 1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
13. Ліфанов І. К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь та чисельний експеримент. – М. : ТОО Янус, 1995. – 520 с.
14. Ванін В. А., Просвирнин С. Л. Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решетке // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9. – №4. – С. 1 – 13.
15. Vanin V. A., Pershyna Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2024. – № 1(68). – pp.41 – 50. DOI: 10.15558/1607-3274-2024-1-4.

References (transliterated)

1. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Masalov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Wave diffraction by gratings]. Kharkov, Izd-vo Khar'kovskogo gos. un-ta Publ., 1973. 287 p.
2. Shestopalov V. P., Kirilenko A. A., Masalov S. A., Sirenko YU. K. *Rezonansnoe rasseyaniye voln. V 2-kh t. 1 t. Difraktsionnye reshetki* [Resonant scattering of waves. In 2 Vol. Vol. 1 Diffraction grates B 2 т. 1 т. Diffraction gratings]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1986. 232 p.
3. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. *Spektral'nye operatory rasseyaniya v zadachakh difraktsii voln na ploskikh yekranakh* [Spectral scattering operators in the problems of wave diffraction by plane screens]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1984. 240 p.
4. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1984. 344 p.
5. Shestopalov V. P., Tuchkin YU. A., Poedinchuk A. E., Sirenko YU. K. *Novye metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach teorii difraktsii* [New methods for solving direct and inverse problems of diffraction theory]. Kharkov, Osnova Publ., 1997. 283 p.
6. Koshovy G. I. Pre-fractal gratings of PEC strips: general mathematical models of wave scattering. *Proc. Int. Conf. Mathem. Methods in Electromagn. Theory (MMET-2016)*. Lviv, 2016, pp. 89–95. DOI: 10.1109/MMET.2016.7544128.
7. Koshovy G. I. Rozsiyuvannya yelectromagnitnykh khvyly' predfraktal'nyy systememy tsylindrychnykh strichok [Electromagnetic wave scattering by prefractal systems of cylindrical strips]. *Radiofizika i yelektronika* [Radiophysics and electronics]. Kharkov, In-t radiofiziki i yelektroniki. NAN Ukrainy Publ., 2007, vol. 12, no. 1, pp. 141–147.
8. Koshovy G. I. Rozsiyuvannya yelectromagnitnykh khvyly' systemamy strichok zi zminnoyu fraktal'noyu rozmirmistyuy [Electromagnetic wave scattering by strip systems with variable fractal dimension]. *Radiofizika i yelektronika* [Radiophysics and electronics]. Kharkov, In-t radiofiziki i yelektroniki. NAN Ukrainy Publ., 2007, vol. 12, no. 3, pp. 451–455.
9. Kh'onl Kh., Maue A., Vestpfal' K. *Teoriya dyfraktsiyi* [Diffraction theory]. Moscow, Mir Publ., 1964. 428 p.
10. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.
11. Nazarchuk Z. T. *Chislennoe issledovanie difraktsii voln na tsylindricheskikh strukturakh* [Numerical study of wave diffraction by cylindrical structures]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1989. 256 p.
12. Koshovy G. I., Koshovy A. G. The Carleman regularization technique in Modelling of the Plane E -polarized EM Wave Scattering by Flat System of Impedance Strips. *IET Microwaves, Antennas and Propagation*. 2021, vol. 15(10), pp. 1218–1224. DOI: 10.1049/mia2.12156.
13. Lifanov I. K. *Metod syngulyarnykh integral'nykh rinvyan' ta chysel'nyy yeksperyment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, TOO Yanus Publ., 1995. 520 p.
14. Vanin V. A., Prosvirnin S. L. Difraktsiya nestatsionarmoy yelectromagnitnoy volny na biperiodicheskoy resheytk [Diffraction of non-stationary electromagnetic wave by biperiodic grating]. *Radiofizika i radioastronomiya* [Radiophysics and radioastronomy]. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 1–13.
15. Vanin V. A., Pershyna Y. I. Scattering of electromagnetic waves on flat grid two-periodic structures. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2024, no. 1(68), pp.41–50. DOI: 10.15558/1607-3274-2024-1-4.

Надійшла (received) 18.03.2024

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Кошовий Георгій Іванович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, м. Харків; тел.: (098) 851-32-21; e-mail: gikosh@gmail.com.

Koshovy George Ivanovych – PhD, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department no. 35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Kharkiv 61085, Ukraine; tel.: (098) 851-32-21; e-mail: gikosh@gmail.com.

Карпенко Валентина Іванівна – провідний інженер відділу № 35, Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України, м. Харків; тел.: (097) 465-06-86; e-mail: karvalya@gmail.com.

Karpenko Valentyna Ivanivna – Leading Engineer at the Department no. 35, O. Ya. Usikov Institute of Radio-Physics and Electronics of the NAS Ukraine, Kharkiv, Ukraine; tel.: (097) 465-06-86; e-mail: karvalya@gmail.com.

Ванін Борис Вікторович – магістр IT, інженер-викладач, Robocode, м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Borys Viktorovych – Master IT, Engineer-Teacher, Robocode, Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.