

Ю. М. АНДРЕЄВ, Д. Д. КОВАЛЬОВ

### АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ТА АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКІВ МЕХАНІКИ КОНСТРУКЦІЙ З БАЛКАМИ БЕРНУЛЛІ – ЕЙЛЕРА У ССКА КІДИМ

Розглянуто завдання розробки універсального аналітичного опису та алгоритму автоматичного комп'ютерного проведення розрахунків динаміки, статички та кінестатики механічних моделей конструкцій, що включають балкові ґрати. Це можуть бути розрахунки перехідних процесів, вільних та вимушених коливань, що встановилися, визначення положень рівноваги та напружено-деформованого стану при статичних та динамічних навантаженнях тощо. Сама конструкція може бути плоскою або просторовою, нерухомою або рухатися на площині чи в просторі, до неї можуть бути прикріплені різні прилади та пристрої. Також можна враховувати будь-які в'язі. Показано, як можна лаконічно спеціальною мовою підготовки комп'ютерних даних аналітично описати частину конструкції, що представляє балочні ґрати. За підсумками теорії пружності балок Бернуллі – Ейлера отримано 2 форми канонічного уявлення потенціальної енергії пружної балки. Це дає можливість ввести в мову опису механічних моделей спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ) новий елемент – балку, для якої вказується положення систем координат, пов'язаних з крайніми перерізами. Положення цих перерізів визначаються вузлами ґрат як тверді тіла. Кутові та лінійні координати таких тіл дають узагальнені координати механічної моделі. Розроблено алгоритм формування елементів, прийнятих для опису механічних моделей у ССКА КіДиМ. Таким чином формується пружна структура механічної моделі. Найвими засобами у цій програмі автоматично будуються рівняння динаміки та статички, тобто формується математична модель, і можуть бути проведені динамічні та статичні розрахунки. У статті на прикладі розрахунку деформаційного стану пружної решітки – основи БПЛА (безпілотно-го літального апарату) докладно демонструється запропонована методика. Проведено порівняння результатів із розрахунками за програмою ANSYS.

**Ключові слова:** ґратчасті балкові конструкції, балки Бернуллі – Ейлера, кінематика та динаміка плоских та просторових систем, розрахунки динаміки та статички плоских та просторових механічних моделей.

Yu. M. ANDRIEIEV, D. D. KOVALOV

### ANALYTICAL DESCRIPTION AND ALGORITHM OF CALCULATIONS OF MECHANICS OF STRUCTURES WITH BERNOULLI – EULER BEAMS USING SCAS KIDYM

The problems of developing a universal analytical description and algorithm for automatic computer calculations of dynamics, statics and kinestatics of mechanical models of structures including a beam lattice are considered. This can be calculations of transient processes, steady-state free and forced oscillations, determination of equilibrium positions and stress-strain states under static and dynamic loads, etc. The structure itself can be flat or spatial, stationary or moving on a plane or in space. Various instruments and devices can be attached to it. Arbitrary connections can be taken into account. It is shown how it is possible to succinctly, using a special language for preparing computer data, analytically describe a part of a structure representing a beam lattice. Based on the theory of elasticity of Bernoulli-Euler beams, 2 forms of the canonical representation of the potential energy of an elastic beam are obtained. This makes it possible to introduce into the language of description of mechanical models of the special computer algebra system KiDyM (SCAS KiDyM) a new beam element, for which the position of the coordinate systems associated with the extreme sections is indicated. The positions of these sections are determined by lattice nodes, like solid bodies. Angular and linear coordinates of such solid bodies give generalized coordinates of the mechanical model. An algorithm has been developed for the formation of elements adopted to describe mechanical models in SCAS KiDyM. Thus, the elastic structure of the mechanical model is formed. Using the available tools in this program, equations of dynamics and statics are automatically constructed, that is, a mathematical model is formed, and dynamic and static calculations can be carried out. The proposed method is demonstrated in detail on the example of calculating the deformation of an elastic lattice, with is the basis of a UAV (unmanned aerial vehicle). The results are compared with calculations using the ANSYS program.

**Key words:** grated beam structures, Bernoulli – Euler beam, kinematics and dynamics of flat and spatial structures, computing dynamics and statics of flat and special mechanical models.

**Вступ.** Є достатньо багато машинобудівних конструкцій, опорними елементами яких є *плоскі та просторові стрижневі ґрати та ферми*. Такі конструкції разом з елементами машини, що на них закріплені, потрібно розраховувати як *статичні або динамічні моделі*. Ефективним засобом для розрахунку статички, динаміки, кінестатики та коливань складних плоских і просторових дискретних моделей з будь-якими в'язями є *спеціальна система комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ)* [1 – 4]. Протягом існування і використання цього програмного комплексу відбувалися досить успішні спроби [5, 6] поширити його можливості для проведення розрахунків механічної поведінки моделей конструкцій, в склад яких включено *пружні балки Бернуллі – Ейлера*. Такі моделі досі є доволі популярними в літературі [7 – 10].

В статті розглядається універсальний підхід до завдання та опису балкових систем з прикріпленням в їх вузлах різноманітним обладнанням, дія елементів якого враховується відповідними силами. Пропонується універсальний алгоритм опису і завдання таких конструкцій на мові опису механічних моделей КіДиМ [1] для автоматичного отримання їх математичної моделі з метою проведення комплексних аналітичних і чисельних динамічних і статичних розрахунків засобами ССКА КіДиМ.

В результаті отримано універсальний алгоритм опису на аналітичному рівні таких механічних систем, який дозволяє за одним і тим же описом за допомогою ССКА КіДиМ автоматично отримати динамічні рівняння руху, зокрема коливань, або алгебраїчні рівняння положень рівноваги. Це дає змогу дуже ефективно проводити комплексні розрахунки статички та динаміки (в тому числі, розрахунки вільних та змушених коливань, перехідних процесів тощо).

**Аналіз останніх досліджень.** Підхід, що реалізований тут, базується на представленні балкових конструкцій

цій системою балок Бернуллі – Ейлера з твердими масивними тілами у вузлах. Такі тверді тіла мають масу і моменти інерції. Працездатність таких систем підтверджується, наприклад, роботою [10]. Основою такої дискретизації є робота [7], де розглянуто аналогічні моделі, в яких інерційність системи задається точковими масами в вузлах конструкції. Там же прикладаються і зосереджені сили. Пружність моделі визначається властивостями балок Бернуллі – Ейлера. Близькими підходами користувалися в роботах [5, 6, 9].

Результати, що наведені в даній статті, є безпосереднім продовженням досліджень і реалізацією алгоритму, що викладено в статті [11].

**Постановка задачі.** В статті пропонується аналітичний алгоритм комп’ютерної побудови динамічних рівнянь широкого класу плоских та просторових балкових конструкцій на базі розробленого аналітичного опису їх механічної моделі для комп’ютерних розрахунків статичної, кінетостатичної та динамічної поведінки. Розглядається конструкція, що закріплена шарнірно в кількох точках контуру, хоча розроблений підхід допускає будь-яке закріплення (а також і повну відсутність його) для моделювання процесів польоту. На прикладі гратчастої балкової рами демонструються основні положення такої методики.

**Використання теорії стрижнів Бернуллі – Ейлера для цілей дослідження.**

**1. Об’єкт для розрахунків.** Розглядаються балкові плоскі та просторові конструкції (наприклад решітка, що представлена на рис. 1, розрахунки якої тут наводяться), що зазнають просторового напруженого стану. Уся конструкція представлена сукупністю пружних балок, кінці яких жорстко скріплені у вузлах (наприклад, за допомогою зварних з’єднань). Припускається, що елементарні балки відчують всю множину деформацій: розтягання-стискання, кручення, вигин та зсув у двох площинах.

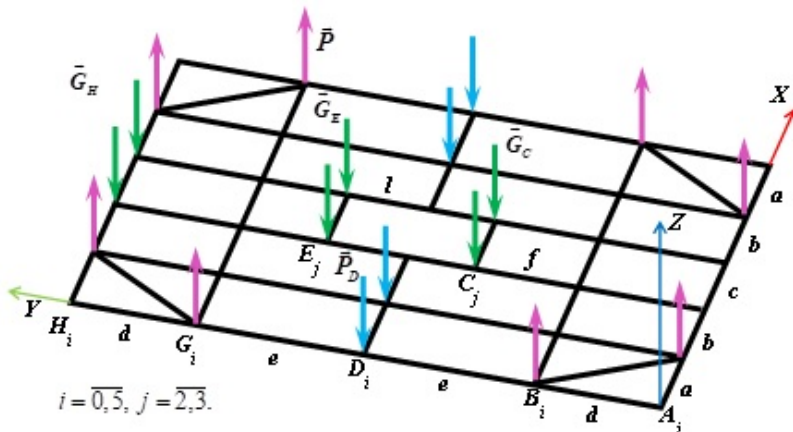


Рис. 1 – Зовнішній вигляд решітки із навантаженням.

в описі таких систем відносно того, що наведено в роботі [11]. Тому має сенс стисло і послідовно викласти всі міркування, які покладено в основу моделювання таких систем.

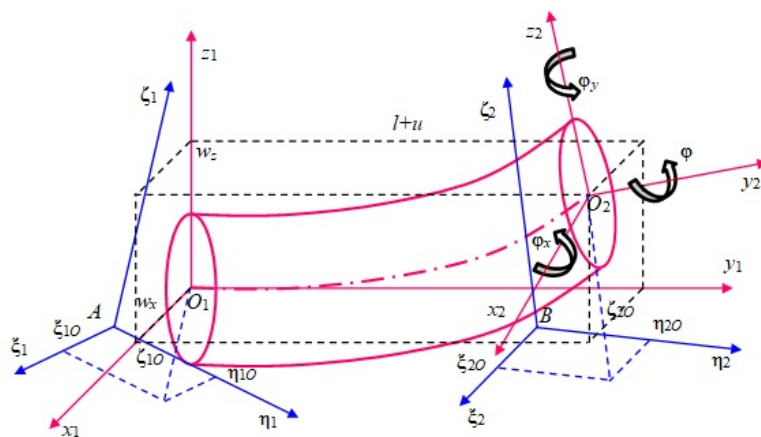


Рис. 2 – Балка у деформованому стані.

ні власні системи координат (показані на рис. 2 червоним кольором –  $O_1x_1y_1z_1$  і  $O_2x_2y_2z_2$ ). Положення цих

**2. Завдання** – отримати алгоритм визначення деформаційної картини всієї конструкції та внутрішніх зусиль в елементарних балках при статичному та динамічному навантаженні конструкції дискретною системою сил у вузлах. У вузлах розташовуються і зосереджені маси, зумовлені рівномірним рознесенням мас балок (наприклад, маса кожної балки розноситься по її кінцях навпіл [10]).

**3. Опис балкової конструкції.** Будемо дотримуватись таких позначень кутових і лінійних переміщень крайніх перерізів балки один щодо іншого, що показані на рис. 2 [8].

Практика використання запропонованого алгоритму привела до деяких змін

Кожна балка пов’язана своїми крайніми перерізами з вузлами, які представляються твердими тілами будь-якого розміру, маси, тензору інерції, зокрема і малими, в тому числі, і нескінченно малими та невагомими. З цими вузлами жорстко пов’язані системи координат (показані на рис. 2 синім кольором –  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$  і  $B\xi_2\eta_2\zeta_2$ ). Положення цих систем задаються в абсолютній системі координат, яка вважається умовно нерухомою, змінними координатами їх початків  $A$  та  $B$  і кутами Ейлера або Кривола, або літаковими, або кватерніонами, або матрицями напрямних косинусів орієнтації [12]. З крайніми перерізами балки пов’яза-

систем координат задаються *постійними* координатами центрів  $O_1 (\xi_{10}\eta_{10}\zeta_{10})$  та  $O_2 (\xi_{20}\eta_{20}\zeta_{20})$  і *постійними* кутами, кватерніонами або матрицями напрямних косинусів орієнтації в системах координат, пов'язаних з вузлами (твердими тілами) та показаними на рис. 2 синім кольором ( $O_1x_1y_1z_1$  відносно  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ ,  $O_2x_2y_2z_2$  відносно  $B\xi_2\eta_2\zeta_2$  відповідно).

Вся картина деформацій конструкції визначиться абсолютними координатами вузлів та абсолютними координатами орієнтації вузлів (кутами Ейлера, Крилова, літаковими, компонентами кватерніонів та іншим). Саме ці параметри можна взяти за узагальнені координати системи.

В даній роботі кожна балка припускається виконаною з одного матеріалу, має довжину  $l$  (у недеформованому стані), площу постійного поперечного перерізу  $F$ , постійні геометричні моменти інерції перерізу  $I_x$ ,  $I_z$ ,  $I_y = I_x + I_z$ , відомі значеннями модуля пружності  $E$  і модуля зсуву  $G$  матеріалу і може бути задана аналітичними записами – наступними синтаксичними конструкціями у вихідних даних ССКА КіДиМ:

$$\begin{aligned} Im'A_A &\sim \text{База}_A \mid OK_A \mid COM_A, m_A, Jx_A, Jy_A, Jz_A; \\ Im'A_B &\sim \text{База}_B \mid OK_B \mid COM_B, m_B, Jx_B, Jy_B, Jz_B; \\ Im'A_{A-}Im'A_B &\parallel K_A \mid K_B \mid L(I_{AB}), F(F_{AB}), Ix(I_{x_{AB}}), Iz(I_{z_{AB}}), E(E_{AB}), G(G_{AB}); \end{aligned} \quad (1)$$

Тут перші два вирази – це записи «тверде тіло» [1, 13], що задають положення та інерційність двох вузлів з іменами  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$ , до яких кріпиться балка. Положення їх задається положенням жорстко пов'язаних з ними *систем координат* (далі – СК) (на рис. 2 – це СК  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$  і  $B\xi_2\eta_2\zeta_2$ ) відносно базових для них СК, зв'язаних з тілами, позначеними тут  $\text{База}_A$  та  $\text{База}_B$ , або відносно абсолютної СК (тоді частина запису « $\sim \text{База}_A$ », або « $\sim \text{База}_B$ » не вказується). Саме положення пов'язаних з тілами СК записується в другій секції і позначене тут « $OK_A$ » і « $OK_B$ » відповідно, як списки зсувів та поворотів, які треба зробити, щоб поєднати абсолютну СК, або СК, що пов'язані з тілами  $\text{База}_A$  та  $\text{База}_B$  із СК тіл  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$ . Ці перетворення СК задаються списком у відповідному порядку виду  $Sx(x)$ ,  $Sy(y)$ ,  $Sz(z)$ ,  $Rx(\alpha)$ ,  $Ry(\beta)$ ,  $Rz(\gamma)$  – « $S$ » означає зсув («shift») вздовж, « $R$ » – поворот («rotation») навколо осі, що позначена після цих букв, на величини (числові або формульні), що вказані в дужках. В третій секції задана повна інформація про інерційність тіл в вузлах.  $COM_A$  і  $COM_B$  – це аналогічні списки, що задають положення головних центральних СК тіл – вузлів балки відносно пов'язаних із цими тілами СК (відносно показаних на рис. 2 СК  $A\xi_1\eta_1\zeta_1$  і  $B\xi_2\eta_2\zeta_2$ ). Нарешті,  $m_A$ ,  $Jx_A$ ,  $Jy_A$ ,  $Jz_A$ ,  $m_B$ ,  $Jx_B$ ,  $Jy_B$ ,  $Jz_B$  – формули або значення для мас та головних центральних моментів інерції тіл – вузлів. Ці два записи дозволяють програмі КіДиМ побудувати *інерційну структуру* рівнянь динаміки для руху вузлів  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$  в абсолютній СК [1, 8].

Третій вираз в (1) – це, власне, і є опис балки, розташованої між вузлами  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$ . Тут

- $K_A$  та  $K_B$  – списки виду  $Sx(x)$ ,  $Sy(y)$ ,  $Sz(z)$ ,  $Rx(\alpha)$ ,  $Ry(\beta)$ ,  $Rz(\gamma)$ , що задають постійні координати положення та кути орієнтації «лівого» і «правого» перерізів балки в СК вузлів  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$  відповідно;
- $l_{AB}$ ,  $F_{AB}$ ,  $Ix_{AB}$ ,  $Iz_{AB}$ ,  $E_{AB}$ ,  $G_{AB}$  – довжина, площа поперечного перерізу, геометричні моменти інерції перерізу, модулі пружності та зсуву матеріалу балки.

Інформація, що міститься в цьому записі, дає можливість програмі КіДиМ побудувати *пружну структуру* [8] рівнянь динаміки для балки з вузлами  $Im'A_A$  та  $Im'A_B$ .

**4. Побудова пружної структури динамічних рівнянь.** У прийнятих тут припущеннях зв'язок між силами і парами ( $N$  – розтягуюча сила,  $Q_x$  і  $Q_z$  – перерізуючі сили,  $M$  – крутний момент,  $M_x$ ,  $M_y$  – згинальні моменти), прикладеними до балки по рис. 2, та малими лінійними ( $u$ ,  $w_x$ ,  $w_z$ ) і кутовими ( $\varphi$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_z$ ) переміщеннями задається виразом

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{d},$$

де матриця  $\mathbf{C}$  має ненульові елементи, згідно [8]:

$$c_{11} = \frac{4EI_x}{l}, c_{15} = c_{51} = -\frac{6EI_x}{l^2}, c_{22} = \frac{4EI_z}{l}, c_{24} = c_{42} = \frac{6EI_z}{l^2}, c_{33} = \frac{GI}{l}, c_{44} = \frac{12EI_z}{l^3}, c_{55} = \frac{12EI_x}{l^3}, c_{66} = \frac{EF}{l},$$

а вектори

$$\mathbf{R}^T = \{M_x, M_y, M, Q_x, Q_y, N\} \quad \text{та} \quad \mathbf{d}^T = \{\varphi_x, \varphi_z, \varphi, w_x, w_z, u\}.$$

Ці вирази дозволяють записати потенціальну енергію балки:

$$\Pi = 0,5\mathbf{d}^T\mathbf{C}\mathbf{d}. \quad (2)$$

В роботах [6, 9, 11] показано, що потенціальна енергія з виразу (2) для наведених матриці  $\mathbf{C}$  та вектора  $\mathbf{d}$  – це квадратична форма у неканонічному вигляді. Її можна канонізувати лінійним перетворенням  $\mathbf{d}$ . Наведемо дві форми такого перетворення для вектору  $\mathbf{d}$ , коли матриця  $\mathbf{C}$  стає діагональною:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \left\{ \psi_x = \varphi_x - \frac{3}{2l} w_z, \psi_z = \varphi_z + \frac{3}{2l} w_x, \varphi, w_x, w_z, u \right\}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag} \left\{ \frac{4EI_x}{l}, \frac{4EI_z}{l}, \frac{GI}{l}, \frac{3EI_z}{l^3}, \frac{3EI_x}{l^3}, \frac{EF}{l} \right\}; \quad (3)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{d}}} = \left\{ \varphi_x, \varphi_z, \varphi, u_x = w_x + \frac{l}{2} \varphi_z, u_z = w_z - \frac{l}{2} \varphi_x, u \right\}; \quad \tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = \text{diag} \left\{ \frac{EI_x}{l}, \frac{EI_z}{l}, \frac{GI}{l}, \frac{12EI_z}{l^3}, \frac{12EI_x}{l^3}, \frac{EF}{l} \right\}. \quad (4)$$

**5. Моделювання балкових конструкцій у ССКА КіДиМ.** Вирази (3) або (4) дозволяють автоматично за інформацією у вигляді (1) отримати аналітичними перетвореннями у ССКА КіДиМ пружні елементи з координатами – компонентами вектора  $\tilde{\mathbf{d}}$  (або  $\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}$ ) та характеристиками – діагональними компонентами матриці  $\tilde{\mathbf{C}}$  (або  $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}$ ).

Тобто, для першої форми – це будуть елементи:

$$C.x = 4EI_x/l; \quad C.\psi_z = 4EI_z/l; \quad C.\varphi = GI/l;$$

$$C.w_x = 3EI_z/l^3; \quad C.w_z = 3EI_x/l^3; \quad C.u = EF/l;$$

для другої форми – це будуть елементи:

$$C.\varphi_x = EI_x/l; \quad C.\varphi_z = EI_z/l; \quad C.\varphi = GI/l;$$

$$C.u_x = 12EI_z/l^3; \quad C.u_z = 12EI_x/l^3; \quad C.u = EF/l.$$

Для того щоб виразити координати цих силових елементів через узагальнені координати всієї системи, треба виразити через них геометричні параметри (рис. 2) деформації балки ( $\varphi_x, \varphi_z, \varphi, w_x, w_z, u$ ), що входять до виразів компонент вектору  $\tilde{\mathbf{d}}$  (або  $\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}$ ) в (3) і (4).

Будемо вважати, що СК  $O_2x_2y_2z_2$  щодо СК  $O_1x_1y_1z_1$  буде задана декартовими координатами початку (точка  $O_2$ ) –  $x_{O_2}^{(O_1)}, y_{O_2}^{(O_1)}, z_{O_2}^{(O_1)}$  і малими кутами Крилова:  $\psi^{(O_1)}$  – кут повороту навколо осі  $O_1y_1$ ,  $\theta^{(O_1)}$  – кут повороту навколо нового положення осі  $O_1x_1$ ,  $\varphi^{(O_1)}$  – кут повороту навколо отриманого положення осі  $O_1z_1$  (тут і далі верхній індекс у дужках означає позначення СК, в якій задані вектори, або компоненти векторів, або кути), для матриць індекси в дужках означають: верхній – у яку СК ця матриця перекладає вектори, а нижній – з якої.

Тоді шукані параметри деформації балки можна знайти через них

$$w_x = x_{O_2}^{(O_1)}, \quad w_z = z_{O_2}^{(O_1)}, \quad u = y_{O_2}^{(O_1)} - l, \quad \varphi_x = \theta^{(O_1)}, \quad \varphi = \psi^{(O_1)}, \quad \varphi_z = \varphi^{(O_1)}.$$

Декартові координати точки  $O_2$  у СК  $O_1x_1y_1z_1$  – це компоненти вектора:

$$\overline{O_1O_2}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(abc)}^{(A)} \overline{O_1O_2}^{(abc)} = S_{(A)}^{(O_1)} \left\{ S_{(abc)}^{(A)} \left[ \left( \vec{r}_B^{(abc)} - \vec{r}_A^{(abc)} \right) + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} \right] - \overline{AO_1}^{(A)} \right\},$$

де

$$\overline{O_1O_2}^{(abc)} = \vec{r}_B^{(abc)} + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} - \vec{r}_A^{(abc)} - S_{(A)}^{(abc)} \overline{AO_1}^{(A)} = \left[ \vec{r}_B^{(abc)} - \vec{r}_A^{(abc)} \right] + S_{(B)}^{(abc)} \overline{BO_2}^{(B)} - S_{(A)}^{(abc)} \overline{AO_1}^{(A)}.$$

Тут матриці  $S_{(abc)}^{(A)}$  і  $S_{(B)}^{(abc)}$  визначаються з послідовності поворотів, заданих в описі поворотів СК у секціях  $OK_A$  та  $OK_B$  для вузлів  $Im'A_A$  та  $Im'y_B$  у формулах (1) відповідно, матриці  $S_{(A)}^{(O_1)}$  і  $S_{(O_2)}^{(B)}$  – аналогічно із секцій  $K_A$  та  $K_B$  описів балки (1). Так само вектори  $\overline{AO_1}^{(A)}$  і  $\overline{BO_2}^{(B)}$  легко визначаються з описів зміщень у секціях  $K_A$  і  $K_B$  завдань балки, а вектори  $\vec{r}_A^{(abc)}, \vec{r}_B^{(abc)}$  – з завдань вузлів там же у формулах (1).

Кути Крилова знаходяться з компонент матриці повороту  $S_{(O_2)}^{(O_1)}$ , яку можна отримати через шукані кути  $\psi^{(O_1)}, \theta^{(O_1)}, \varphi^{(O_1)}$ :

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\gamma + S_\psi S_\theta S_\gamma & S_\psi S_\theta C_\gamma - C_\psi S_\gamma & S_\psi C_\theta \\ C_\theta S_\gamma & C_\theta S_\gamma & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\gamma - S_\psi C_\gamma & C_\psi S_\theta C_\gamma + S_\psi S_\gamma & C_\psi C_\theta \end{bmatrix},$$

де великими буквами  $C$  та  $S$  позначено  $\cos$  та  $\sin$ , а індексами – їх кути  $\psi^{(O_1)}$ ,  $\theta^{(O_1)}$ ,  $\varphi^{(O_1)}$ , і з послідовності поворотів СК від  $O_1x_1y_1z_1$  до  $A_5^x\eta_1\zeta_1$ , від  $A_5^x\eta_1\zeta_1$  до абсолютної, від абсолютної до  $A_2^x\eta_2\zeta_2$  та від  $A_2^x\eta_2\zeta_2$  до  $O_2x_2y_2z_2$  (рис. 2):

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(abc)}^{(A)} S_{(abc)}^{(B)} S_{(O_2)}^{(B)},$$

$$\psi^{(O_1)} = \arctg(S_{13}/S_{33}), \quad \theta^{(O_1)} = -\arcsin S_{23}, \quad \varphi^{(O_1)} = \arctg(S_{21}/S_{22}),$$

де  $S_{13}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{22}$  – компоненти матриці  $S_{(O_2)}^{(O_1)}$ . Очевидно, через малість кутів  $\psi^{(O_1)}$ ,  $\theta^{(O_1)}$ ,  $\varphi^{(O_1)}$  ці формули не вироджуються.

**Тестування та розрахунки за наведеним алгоритмом.** Для налагодження процедур комплексу КіДиМ, що реалізують розроблений алгоритм, було розглянуто наступний приклад – розрахувати деформаційний стан балкової ґратчастої конструкції (рис. 1), що є несучою конструкцією БпЛА [15] (рис. 3).



Рис. 3 – Прототип квадрокоптеру, розробленого в НТУ «ХП».

Ця решітка зібрана зі сталевих труб прямокутного перерізу  $30 \times 20 \times 2$  мм розмірами (м):  $a = 0,42$ ;  $b = 0,315$ ;  $c = 0,41$ ;  $d = 0,42$ ;  $e = 0,52$ ;  $f = 0,31$ ;  $l = 0,21$  (рис. 1).

Відповідно до ГОСТ 8645 – 68 (<https://dneprofpmash.com/files/----8645-68.pdf>) визначаємо площу перерізу –  $F = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , осеві геометричні моменти інерції перерізу ( $\text{м}^4$ , осі за рис.2)  $I_x = 2,01 \cdot 10^{-8}$ ,  $I_z = 1,05 \cdot 10^{-8}$ ; погонну масу  $1,39 \text{ кг/м}$ . Модуль пружності для сталі приймаємо рівним  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ , модуль зсуву  $G = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

Змодельована дія на решітку зосереджених сил (рис. 1) – підйомних, що приведені до вузлів  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $A_4$ ,  $B_5$ ,  $G_0$ ,  $H_1$ ,  $G_5$ ,  $H_4$  –  $P = 125 \text{ Н}$ , ваги встановленого обладнання –  $G_C = 235 \text{ Н}$ ,  $G_E = 205 \text{ Н}$ ,  $G_H = 10 \text{ Н}$ .

**Рішення.** Уявімо решітку, що складається з 58-и сталевих балок Бернуллі – Ейлера та 34-ма вузлами (рис. 1 та 3), 4 з яких в точках  $B_0$ ,  $B_5$ ,  $G_0$ ,  $G_5$  «закріплені» защемленням. Замінімо для деякого спрощення подвійні балочки в кутах решітки однією, по діагоналі, отримаємо балки  $\{A_1, B_0\}$ ,  $\{A_4, B_5\}$ ,  $\{G_0, H_1\}$ ,  $\{G_5, H_4\}$ . У кожному вузлі розташуємо точкове тверде тіло і зв'язану з ним локальну СК з осями, які в недеформованому стані решітки паралельні осям основної системи  $A_0XYZ$  (рис. 1). Враховуючи очевидну деформацію конструкції, будемо задавати орієнтацію пов'язаних з вузлами СК відносно абсолютної кутами Крилова – послідовністю поворотів навколо осі ординат ( $\psi$ ), навколо осі абсцис ( $\theta$ ), навколо осі аплікат ( $\varphi$ ). Зосередимо масу конструкції у вузлах шляхом поділу маси балок навпіл на їх кінцях. Уявімо таким чином у вузлах конструкції масивні точки, які крім маси можуть мати і моменти інерції. Це потрібно для того, щоб задача була динамічно визначеною. Для розв'язання поставленої задачі статичні величини інерційних властивостей представлених твердих тіл у вузлах особливого значення не мають і впливають лише на швидкість отримання рішення (сили ваги решітки тут не враховуються, хоча врахувати їх не становить труднощів).

Таким чином, у системі 180 узагальнених координат – 90 кутів (30 вузлів по 3 кути) та 90 декартових координат (30 вузлів по 3 координати).

Підготуємо вихідні дані завдання мовою ССКА КіДиМ. Наведемо для кращого розуміння деякі типові записи типу (1), що задають механічну модель конструкції:

1) вузли

$$\mathbf{A}_i | S_x(xA_i), S_y(yA_i), S_z(zA_i), R_y(\psi A_i), R_x(\theta A_i), R_z(\gamma A_i) | m(mA_i), J_x(JxA_i), J_y(JyA_i), J_z(JzA_i);$$

$$\mathbf{B}_i | S_x(xB_i), S_y(yB_i), S_z(zB_i), R_y(\psi B_i), R_x(\theta B_i), R_z(\gamma B_i) | m(mB_i), J_x(JxB_i), J_y(JyB_i), J_z(JzB_i); \quad (5)$$

...

2) балки

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i & \parallel \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | L(d), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{B}_j \mathbf{C}_j & \parallel \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | L(f), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 & \parallel Rz(-\pi/2) | Rz(-\pi/2) | L(a), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0 & \parallel Rz(\alpha) \quad | Rz(\alpha) \quad | L(h), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G); \\
 \mathbf{A}_4 \mathbf{B}_5 & \parallel Rz(-\alpha) \quad | Rz(-\alpha) \quad | L(h), F(F), I_x(I_x), I_z(I_z), E(E), G(G);
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для скорочення записів даних тут використано нижні індекси  $i, j$ , межі значень яких вказано на рис. 1, що задаються в інструкції:

$$\mathbf{РОЗМНОЖИТИ} := i(0,5), j(2,3).$$

Це дає змогу ССКА КіДиМ побудувати повний комплект даних [14]. Такий комплект дозволяє ССКА КіДиМ автоматично побудувати динамічні рівняння руху обраної моделі і провести розрахунки. Для того щоб отримати координати вузлів в положенні рівноваги, треба мати в моделі демпфуючі елементи і обрати величини інерційних параметрів. Ще треба задати початкові значення узагальнених координат. Це дасть змогу отримати необхідний перехідний процес.

Сили дисипації мають вплив на швидкість динамічного процесу переходу системи з початкового положення до урівноваженого. Тут достатньо їх задати в лінійному вигляді [7], що і було зроблено. Треба тільки підібрати значення коефіцієнтів дисипації. На рис. 4 показано закон зміни аплікати центральної точки  $D_3$  для двох наборів значень коефіцієнтів дисипації. Для задач статички потрібно підбирати величину дисипації так, щоб отримати аперіодичний процес. Це робиться декількома пробними розрахунками.

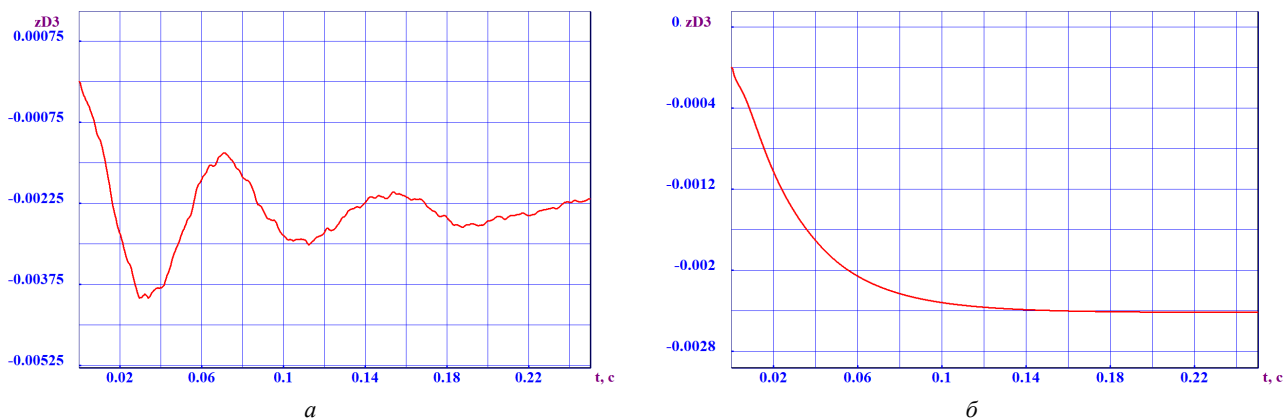


Рис. 4 – Аплікати точки  $D_3$  для коефіцієнтів дисипації:

$a$  – по кутам 100 кгм/с, по координатам 10 кг/с;  $b$  – по кутам 100 кгм/с, по координатам 1000 кг/с.

Аналогічні міркування відносно моделі інерції приводять нас до того, що точне відображення інерційних властивостей вузлів для задачі, що тут розглядається, не має особливого значення, тим паче важко визначити їх моменти інерції. Представлення інерційності вузлів решітки повним тензором інерції призводить до дуже складної математичної моделі, яка інтегрується *методом Рунге – Кутти* дуже довго. Тому для розв'язання поставленої задачі було використано представлення інерційності вузлів тільки як точкових мас. Це зменшило час розрахунку задачі в сотні разів (до однієї чи кількох хвилин на сучасних комп'ютерах). Але такий підхід приводить до виродження динамічних рівнянь по узагальненим кутам вузлів – в них відсутні члени з другими похідними. Таким чином, в матриці інерції системи диференціальних рівнянь з'являються нульові рядки і нульові стовпці. Оскільки матриця є діагональною, то в ній відсутні відповідні значення на головній діагоналі. Такі рівняння (в яких нема членів з прискореннями узагальнених координат) можна трактувати як *рівняння неголономних в'язей* (при наявності сил дисипації, що залежать від узагальнених швидкостей). Так як ССКА КіДиМ може розв'язувати задачі неголономної механіки, то поставлена в статті задача теж благополучно була розв'язана. Алгоритмічно це вимагало змінити процедуру отримання рівнянь динаміки в *формі Коші* шляхом заміни в матриці інерції нульових значень одиничними.

Початкові умови логічно обирати в положенні недеформованої конструкції.

В табл. 1 надано найбільш суттєві результати, що отримані в розрахунках деформаційного стану решітки –

величини аплікат вузлів в положенні рівноваги під дією заданих сил (рис. 1).

Таблиця 1 – Результати розрахунків решітки – аплікати вузлів, мм

Індекс вузла	0	1	2	3	4	5
$ZA_i$	0,365136	0,357982	0,163867	0,163875	0,358001	0,36514
$ZB_i$		-0,681327	-1,33361	-1,33358	-0,681273	
$ZC_j$			-2,24774	-2,24771		
$ZD_i$	-0,114815	-1,41409	-2,41838	-2,41835	-1,41405	-0,114803
$ZE_j$			-2,22254	-2,22251		
$ZG_i$		-0,679146	-1,32325	-1,32322	-0,679094	
$ZH_i$	0,352641	0,321095	0,108345	0,108353	0,321114	0,352644

Для об'єктивної перевірки отриманих динамічним методом результатів цей же приклад було розраховано за допомогою програми *Ansys*. Модель решітки будувалася за висхідним алгоритмом за методикою, що викладена в статті [15]. На рис. 5 представлено геометричну фігуру решітки (переміщення в напрямку, що перпендикулярний площині недеформованої конструкції показані на порядок більшими, ніж вони є). Слід додати, що на рис. 5 показані сумарні переміщення точок решітки з урахуванням переміщень в площині рами. Але вони на 3 порядки менші, ніж переміщення точок вздовж осі аплікат, що показані в табл. 1. З цього випливає, що результати розрахунків сформульованої тут задачі запропонованим методом і за допомогою програми *Ansys* збігаються.

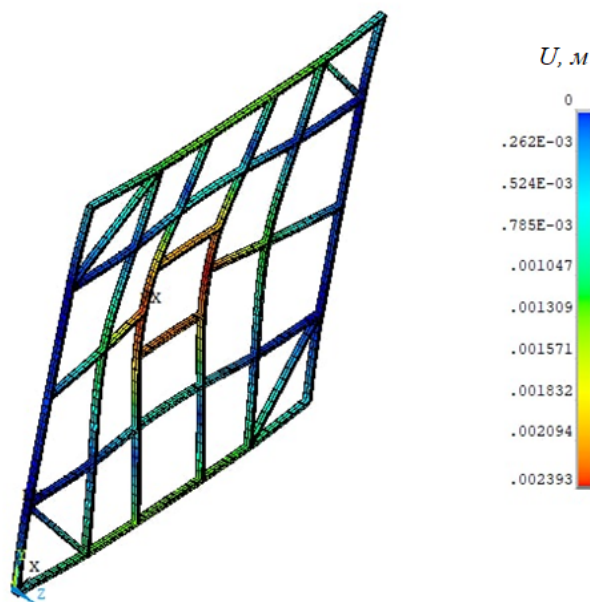


Рис. 5 – Розподіл сумарних переміщень в моделі рами.

**Перспективи подальших досліджень.** Розроблений підхід дає змогу ставити і розв'язувати задачі динаміки і статички механічних систем, в моделі яких можуть входити наряду з поширеними в дискретних системах твердими тілами, що здійснюють будь-які рухи, крутильними та лінійними пружними елементами, пружні властивості яких визначаються однією координатою, пружні балки та стрижні, які можна моделювати балками Бернуллі – Ейлера. Прикладом такої системи є система, що наведена в статті на рис. 3. Це задачі розв'язання вільних та вимушених коливань, розрахунок перехідних процесів та визначення положень рівноваги як в розглянутій тут задачі. Для цієї задачі в подальшому можна розглянути автоматичне спрощення рівнянь шляхом використання малих значень кутів повороту кінцевих перетинів балок. Це актуально для задач більшої розмірності відносно розглянутої.

**Висновки.** В статті розглянуто завдання визначення положення рівноваги гратчастої решітки розв'язанням динамічної задачі відносно великої розмірності зі 180 узагальненими координатами. Динамічні рівняння складаються комп'ютером за допомогою спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ). Для того щоб використати переваги таких можливостей, пропонується спеціальний аналітичний опис таких систем і

*Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, №1 (6)'2024.*

алгоритм автоматичного отримання дискретних елементів завдання механічної моделі в ССКА КіДиМ. Показано, як краще задати інерційні і дисипативні властивості моделі для швидкого розрахунку деформаційного стану конструкції. Не зважаючи на те, що алгоритми тут викладаються з метою їх реалізації в ССКА КіДиМ, вони мають значення і для реалізації в інших системах.

#### Список літератури

1. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – №7. – С. 130 – 138.
2. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. – К. : ИПП им. Писаренко Г.С. Ассоц. «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
3. Антощенко Р. В., Андреев Ю. М., Тищенко Л. Н. К построению уравнений динамики многоэлементного машинно-тракторного агрегата // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця : Міністерство аграрної політики України, 2015. – №3 (79). – С. 69 – 78.
4. Antoshchenkov R., Andreev Yu. Dynamics of multielement agricultural aggregates, taking into account nonholonomic constraints and spatial motion // Nonlinear Dynamics – 2016 : Proceedings of 5th International Conference (September 27 – 30, 2016)/National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al. – Kharkov, 2016. – P. 48 – 56.
5. Митин В. Н., Халыпа В. М., Штейнвольф Л. И. К расчету перемещений и внутренних усилий в балочных конструкциях // Динамика и прочность машин: респ. межотвод. науч.-техн. сб. – X. : Вища шк. Изд-во при Харк. ун-те, 1981. – Вып. 34. – С. 36 – 41.
6. Андреев Ю. М. Моделирование стержневых и балочных конструкций в специальной системе компьютерной алгебры // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – №1/1 (25). – С. 63 – 66.
7. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. – М. : Науч.-изд. центр "Инженер", 1999. – 145 с.
8. Мясенков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник. – М. : Машиностроение, 1989. – 520 с.
9. Кравец В. В., Крышко Е. П. Исследование параметров пространственного движения свободного твердого тела в нелинейной постановке // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20. – №11. – С. 122 – 125.
10. Горбачев В. И., Мельник Т. М. О постановке задач в общей теории Бернулли – Эйлера неоднородных анизотропных стержней // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2018. – №1. – С. 43 – 51.
11. Андреев Ю. М., Марусенко О. М. Алгоритм, реалізація, підготовка даних, проведення розрахунків статичної та динамічної балкових ґратчастих конструкцій у ССКА КіДиМ // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2022. – № 2 (2022). – С. 23 – 28. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270159.
12. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М. : Гл. ред. физмат. лит., 1961. – 824 с.
13. Андреев Ю. М. Реализация и использование алгоритма Левенберга – Маркварда в задачах калибровки роботов-манипуляторов // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
14. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Метод подсистем для аналитического динамического анализа и синтеза // Физические и компьютерные технологии : 12-я Междунар. конф. : труды. – Харьков : ХНПК «ФЭД», 2006. – С. 123 – 131.
15. Бреславський Д. В., Конкін В. М., Кортунов В. І., Марусенко О. М. Комп'ютерне моделювання деформованого стану та міцності рамної конструкції важкого БПЛА // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХП», 2022. – № 2 (2022). – С. 17 – 22. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270148.

#### References (transliterated)

1. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh sistem tverdykh tel [On the dynamics of holonom solid systems]. // *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2005, vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
2. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebrы dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [A new computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonom and non-hilonom solid systems]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy: mezhd. nauch.-tekhn. sb. NAN Ukrainy* [Reliability and durability of machines and structures: international scientific and technical digest of the National Academy of Science of Ukraine.]. Kiev, IPP im. Pisarenko G.S. Assots. «Nadezhnost' i sooruzheniy» Publ., 2006, vol. 26, pp. 11–18.
3. Antoshchenkov R. V., Andreev Yu. M., Tishhenko L. N. K postroyeniyu uravneniy dinamiki mnogoelementnogo mashinno-traktornogo agregata [On deriving the equation of dynamics of a multi-element machine-tractor agregate]. *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Vibrations in thechnics and technologies]. Vinnitsya, Ministerstvo agrarnoyi polityky Ukrainy Publ., 2015, no. 3 (79), pp. 69 – 78.
4. Antoshchenkov R., Andreev Yu. Dynamics of multielement agricultural aggregates, taking into account nonholonomic constraints and spatial motion. *Nonlinear Dynamics – 2016 : Proceedings of 5th International Conference (September 27 – 30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al.* Kharkov, 2016. pp. 48–56.
5. Mitin V. N., Khalypa V. M., Shteynvol'f L. I. K raschetu peremeshheniy i vnutrennykh usiliiy v balochnykh konstruksiyakh [On computing displacements and internal strains in beam structures]. *Dinamika i prochnost' mashin: resp. mezhotvod. nauch.-tekhn. sb.* [Dynamics and strength of machines]. Kharkov, Vyshha shk. Izd-vo pri Khark. un-te Publ., 1981, vol. 34, pp. 36–41.
6. Andreev Yu. M. Modelirovaniye stержnevyykh i balochnyykh konstruksiy v spetsial'noy sisteme komp'yuternoy algebrы [Modeling of rod and beam structures in a special computer algebra system]. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy* [East-European journal of Enterprice Technologies]. Kharkov, 2007, no. 1/1 (25), pp. 63–66.
7. Zylev V. B. *Vychislitel'nye metody v nelineynoy mekhanike konstruksiy* [Numerical methods in nonlinear structure mechanics]. Moscow, Nauch.-izd. tsentr "Inzhener", 1999. 145 p.
8. Myachenkov V. I., Mal'tsev V. P., Mayboroda V. P. *Raschety mashinostroitel'nykh konstruksiy metodom konechnykh elementov : spravochnik* [Computations of structures in mechanical engineering by the finite element method: handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 520 p.
9. Kravets V. V., Kryshko E. P. Issledovanie parametrov prostranstvennogo dvizheniya svobodnogo tverdogo tela v nelineynoy postanovke [Studying the parameters of the spacial movement of a free solid in nonlinear setting]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 19846 vol. 20, no. 11, pp. 122–125.
10. Gorbachev V. I., Mel'nik T. M. O postanovke zadach v obshhey teorii Bernulli – Eyera neodnorodnykh anizotropnykh stержney [On the problem setting in the general Bernoulli-Euler theory for anisotropic rods]. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1, Matematika. Mekhanika* [Bulletin of the Moscow University. Ser. 1, Mathematics. Mechanics]. 2018, no. 1, pp. 43–51.



11. Andreev Yu. M., Marusenko O. M. Algoritm, realizatsiya, pidgotovka danykh, provedennya rozrakhunkiv statyky ta dynamiky balkovykh gratchastykh konstruktsiy u SSKA KiDyM [Algorithm, implementation, data preparation, computation of the statics and dynamics of grating beam structures using SCAS KiDyM]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2022, no. 2 (2022), pp. 23–28. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270159.
12. Lur'e A. I. *Analitycheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1961. 824 p.
13. Andreev Yu. M. Realizatsiya i ispol'zovanie algoritma Levenberga – Markvarda v zadachakh kalibrovki robotov-manipulyatorov [Implementing and using the Levenberg–Markward algorithm in the problems of calibrating manipulator robots]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2021, no. 2 (2021), pp. 86–93. DOI: 10.20998/2078-9130.2021.2.249537.
14. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Metod podsistem dlya analiticheskogo dinamicheskogo analiza i sinteza [Subsystem Method for analytical dynamical analysis and synthesis]. *Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 12-ya Mezhdunar. konf. : trudy* [Physical and computer technologies. Theses of the 12<sup>th</sup> International Conference]. Kharkov, KhNPK «FED» Publ., 2006. pp. 123–131.
15. Breslavs'ky D. V., Konkin V. M., Kortunov V. I., Marusenko O. M. Komp'yuterne modelyuvannya deformovanogo stanu ta mitsnosti ramnoyi konstruktsiy vzhkogo BPLA [Computer modeling of the deformed state and strength of a frame structure of an unmanned aerial vehicle]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika ta mitsnist' mashyn* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Dynamics and Strength of Machines]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2021, no. 2 (2022), pp. 17–22. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270148.

Надійшло (received) 11.01.2024

#### Відомості про авторів / Information about authors

**Андрєєв Юрій Михайлович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

**Andrieiev Yuriy Mykhailovych** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

**Ковальов Даниїл Денисович** – магістрант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 284-70-86; e-mail: daniil.kovalov@infiz.khpi.edu.ua.

**Kovalov Daniil Denysovich** – graduate student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (066) 284-70-86; e-mail: daniil.kovalov@infiz.khpi.edu.ua.