

О. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЄГОРОВ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРТЯ В ШАРНІРНИХ ОПОРАХ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАННЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Сучасна наука і техніка під час досліджень і виконання технологічних процесів часто вимагає зниження коливань для кращої роботи чутливого обладнання і точних приладів. У даній роботі представлено дослідження з демпфування коливань балки, викликаних дією динамічного навантаження. Рух ізотропної пружної балки описується з використанням моделі С. П. Тимошенка. Балка закріплена по краях за допомогою шарнірно-нерухомих опор. Для демпфування коливань використовують демпфувальні моменти, які розташовані і діють у точках закріплення балки. Під час руху балки в шарнірах виникає момент тертя з лінійним в'язким демпфуванням, що пропорційний коефіцієнту демпфування та кутовій швидкості балки в шарнірі. Для оцінки демпфування коливань розглянуто розв'язання прямої задачі з моделювання руху балки С. П. Тимошенка за нульових початкових умов. Для розв'язання задачі моделювання руху балки використовується система диференціальних рівнянь згідно з моделлю С. П. Тимошенка. Шукані функції задаються у вигляді рядів Фур'є. Використовується інтегральне перетворення Лапласа. Особливістю розв'язування прямої задачі є те, що на цьому етапі нам не відомі моменти тертя в шарнірах і вони підлягають визначенню за допомогою розв'язування відповідної оберненої задачі із залученням теорії інтегральних рівнянь Вольтерра. Отримано аналітичний і чисельний розв'язок практичної задачі. Чисельні результати у вигляді графіків переміщень точок балки і моментів тертя отримано для різних коефіцієнтів демпфування. Проведено порівняльну оцінку зниження коливань для різних параметрів демпфування. Результати досліджень добре збігаються з результатами інших авторів.

Ключові слова: балка Тимошенка, нестационарні коливання, інтегральні рівняння Вольтерра, ряди Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, інтеграл Дюамеля.

А. В. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ, С. И. ПОВАЛЯЕВ, А. С. ШАРАПАТА МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНИЯ В ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

Современная наука и техника при исследованиях и выполнении технологических процессов часто требует подавления или снижения колебаний для лучшей работы чувствительного оборудования и точных приборов. В данной работе представлено исследование по демпфированию колебаний балки, вызванных действием динамической нагрузки. Движение изотропной упругой балки описывается с использованием модели С. П. Тимошенка. Балка закреплена по краям при помощи шарнирно-неподвижных опор. Для демпфирования колебаний используются демпфирующие моменты, которые расположены и действуют в точках закрепления балки. При движении балки в шарнирах возникает момент трения с линейным вязким демпфированием, который пропорционален коэффициенту демпфирования и угловой скорости балки в шарнире. Для оценки демпфирования колебаний рассмотрено решение прямой задачи по моделированию движения балки С. П. Тимошенка при нулевых начальных условиях. Для решения задачи о моделировании движения балки используется система дифференциальных уравнений согласно модели С. П. Тимошенка. Искомые функции задаются в виде рядов Фурье. Используется интегральное преобразование Лапласа. Особенностью решения прямой задачи является то, что на этапе её решения нам не известны моменты трения в шарнирах и они подлежат определению при помощи решения соответствующей обратной задачи с привлечением теории интегральных уравнений Вольтерра. Получено аналитическое и численное решение практической задачи. Численные результаты в виде графиков перемещений точек балки и моментов трения получены для разных коэффициентов демпфирования. Проведена сравнительная оценка снижения колебаний для разных параметров демпфирования. Результаты исследований хорошо сопоставляются с результатами других авторов.

Ключевые слова: балка Тимошенка, нестационарные колебания, интегральные уравнения Вольтерра, ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа, интеграл Дюамеля.

A. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, P. A. YEGOROV, A. S. SHARAPATA SIMULATION OF FRICTION IN HINGED SUPPORTS DURING NON-STATIONARY VIBRATIONS OF A TIMOSHENKO BEAM

When carrying out research and technological processes in modern science and technology, the suppression or reduction of vibrations is often required for better operation of sensitive equipment and precision instruments. This paper presents a study on the damping of vibrations of a beam caused by the action of a dynamic load. The motion of an isotropic elastic beam is described using the model of S. P. Timoshenko. The beam has hinged supports at the edges. Damping moments located and acting at the anchoring points of the beam are used to damp the vibrations. As the beam moves in the hinges, a frictional moment with linear viscous damping occurs, which is proportional to the damping coefficient and the angular velocity of the beam in the hinge. In order to estimate the vibration damping, the solution of the direct problem of modeling the motion of the Timoshenko beam at zero initial conditions is considered. The beam motion is modeled by a system of differential equations according to the model of S. P. Timoshenko. The required functions are set in the form of Fourier series. Laplace integral transformation is used. The peculiarity of solution of a direct problem is that at this stage the friction moments in joints are unknown and are defined by solving corresponding inverse problem using Volterra integral equation theory. An analytical and numerical solution of the practical problem is obtained. Numerical results have been obtained in the form of graphs of beam point displacements and friction moments for different damping coefficients. A comparative evaluation of vibration reduction for different damping parameters has been carried out. The research results compare well with the results obtained by other authors.

Key words: Timoshenko beam, unsteady oscillations, Volterra integral equations, Fourier series, Laplace integral transformation, Duhamel integrals.

Вступ та аналіз літератури. Елементи конструкцій, що застосовуються в аерокосмічній техніці, машинобудуванні, дорожньому будівництві, часто можна розглядати як балки. Різні динамічні впливи на балки можуть викликати небажану інтенсивність коливань. Тому задачі з демпфування коливань є актуальними.

У роботі [1] досліджується коливання неоднорідної балки з періодично безперервними змінними поперечними перерізами та шарнірними опорами. Виконано підтвердження для підтвердження точності та ефективності запропонованого методу розв'язання задачі. Приділено увагу обговоренню переваг запропонованої механі-

ної конструкції балки, досліджено вплив структури конструкції та параметрів матеріалу елементів конструкції на властивості балки.

Демпфування коливань багатопрогонових балок під час дії рухомих навантажень розглянуто у роботі [2]. Порівнюється керування коливаннями в однопрогонових і багатопрогонових балках, а також застосовуються різні типи настроєваних мас. Надано рекомендації щодо вибору ефективної системи налаштування.

У роботі [3] досліджуються динамічні реакції двоколіїних і багатопрогонових залізничних мостів різними способами. Приділяється увага управлінню явищами резонансу. Автори використовують чисельне скінченноелементне моделювання на основі *балочного елемента Тимошенка* для проведення зіставлення отриманих результатів. Отримані в даній роботі результати досліджень можуть сприяти підвищенню безпеки перевезень по залізничних мостах і дають можливість виключити перевантаження, збільшуючи тим самим запас міцності елементів мостових конструкцій.

Аналіз вимушених коливань *багатопрогонових балок Тимошенка*, які піддаються широкому діапазону нерухомих і рухомих зовнішніх навантажень, наводиться у роботі [4].

У роботі [5] запропоновано чисельно-символічну процедуру, що застосовується для аналізу вільних коливань узагальненої багатопрогонової балки Тимошенка та розв'язує проблему збільшення часу виконання під час символічного інтегрування в складних задачах вільних коливань ступінчастих балок, сполучених з пружинно-масовими демпферними системами з двома ступенями свободи.

Аналітичний метод розрахунку динамічного відгуку багатопрогонових систем мостових колійних конструкцій під дією серії рухомих навантажень на основі моделей двошарових і чотиришарових балок, що широко використовуються в залізничних мостових конструкціях, запропоновано у роботі [6]. Для верифікації методу проводиться порівняння результатів аналітичного та чисельного підходів. Проаналізовано вплив числа прольотів балок з простими опорами і довжини ділянок на критичні швидкості резонансу і демпфування коливань. Автори рекомендують використання результатів цього дослідження як теоретичної основи в плануванні, проектуванні та експлуатації мостових конструкцій.

В роботі [7] автори розглянули *пряму задачу* про коливання ізотропної пружної балки скінченної довжини під дією рухомого навантаження у вигляді котка, який рухається з постійною швидкістю. Рух балки описується *рівняннями С. П. Тимошенка*. У роботі авторами проведено аналіз диференціальних рівнянь з точки зору впливу їх членів на динамічну поведінку балки. Запропоновано варіант спрощення диференціальних рівнянь. Наведено чисельні результати коливань балки для різних швидкостей руху котка.

У статті [8] представлено динамічний аналіз коливань багатопрогонових балок. Автори пропонують розділити об'єкт дослідження на кілька частин, з'єднавши їх пружиною, що моделює складні межі багатопрогонових балок. Результати розрахунків отримані для різних граничних умов.

Авторами в доповіді [9] розглянуто рухомі точкові навантаження, які діють на однопрогонові та багатопрогонові балки. Точність чисельних результатів досліджень підтверджується порівнянням їх із *кінцево-елементною моделлю*.

В роботі [10] автори проводять дослідження щодо поліпшення ефективності зниження вібрації в багатопрогонній балці з *метаматеріалу*. Точність результатів дослідження перевіряється *методом скінченних елементів та експериментально*.

Геометрично нелінійні вимушені коливання повністю затиснутих багатопрогонових балок, до яких приєднано кілька мас, розглянуто у роботі [11]. Рух балки моделюється *рівняннями Ейлера – Бернуллі*. А в роботі [12] вивчають нелінійну вимушену динамічну реакцію *функціонально-градієнтних балок*, які містять велику кількість крайових тріщин. Рух балки засновано на *теорії балок Ейлера – Бернуллі*. Властивості балки безперервно змінюються по її товщині.

У дослідженні [13] розглядається динамічна поведінка однорідної безперервної багатопрогонової балочної системи, вздовж якої рухається постійна сила або розподілене навантаження.

Авторами [14] розглядається ідентифікація динамічних навантажень, які діють на багатопрогонові пружні системи у вигляді двох балок Ейлера – Бернуллі або двох прямокутних пластин. Матеріал елементів конструкції вважається однорідним та ізотропним. Ідентифікується розподіл навантаження по механічному об'єкту, тоді як закон зміни навантаження в часі відомий.

В роботі [15] автори запропонували новий метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності в ламінованих шаруватих смугах. Зазначимо, що коливання температури і різниці температур між шарами, різниця температур між внутрішньою і зовнішньою поверхнями може робити серйозний внесок у причину руйнування елементів конструкцій.

У роботі [16] представлено аналітичне дослідження коливань пластини, що складається з кількох шарів. Пластина має неканонічну форму в плані. На пластину діє ударне навантаження напівсферичним тілом. Результати розрахунків добре узгоджуються з результатами, отриманими експериментальним шляхом.

Постановка задачі. Механічна система складається з *пружної ізотропної балки середньої товщини Тимошенка*, шарнірно-обпертої по краях (рис. 1). На балку в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження $P(t)$, що викликає нестационарні коливання балки. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладення навантаження довільні (будь-які точки, що належать балці і не лежать на її краях), але не зміню-

ються протягом коливального процесу.

Вважається, що в шарнірних опорах відбувається *дисипація енергії*, яка викликана безпосередньо тертям у шарнірах, а момент опору (тертя) лінійно пропорційний кутовій швидкості повороту балки в шарнірі:

$$M_i(t) = \kappa_i \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \quad (1)$$

де κ_i – коефіцієнт демпфування в i -й точці (шарнірі); $d\psi_i(t)/dt$ – кутова швидкість повороту перерізу балки в i -й точці (шарнірі).

Тоді кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz можна знайти як:

$$\psi_i(t) = \frac{1}{\kappa_i} \int M_i(t) dt. \quad (2)$$

Тобто вплив тертя в шарнірах моделюється за допомогою додавання двох додаткових зосереджених моментів $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$, які прикладені в лівій і правій опорах відповідно. Зазначимо, що моменти $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ додаються у *рівняння деформування*, як зовнішні, але згідно *третього закону Ньютона* їх значення треба брати з протилежним знаком.

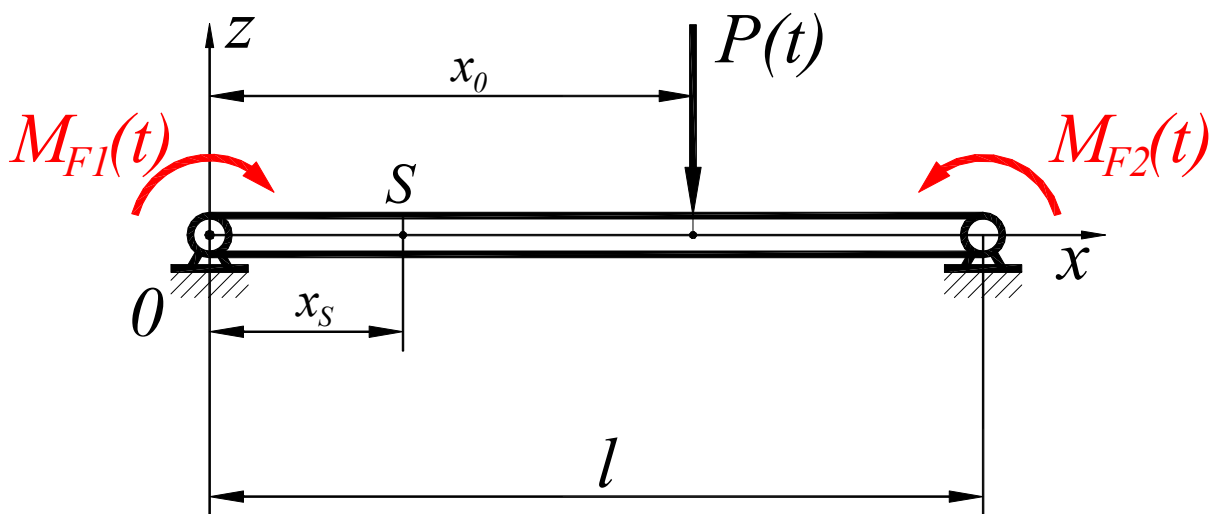


Рис. 1 – Схема навантаження балки.

В даному випадку потрібно визначити переміщення точок балки при одночасному впливі на неї системи з двох зовнішніх сил (відомої $P(t)$ і невідомих зосереджених моментних навантажень $M_i(t)$).

Розташуємо балку в декартових координатах так, що її серединна лінія буде знаходитися в площині xOz паралельно Ox , а напрямок осі Oz буде збігатися з нормаллю до серединної лінії балки.

Вкажемо, що l – довжина балки, а b – ширина. Координата точки прикладення j -го зосередженого навантаження – x_{0j} . Число навантажень, що діють, дорівнює N .

Для розв'язання цієї задачі скористаємося *моделлю балок середньої товщини С. П. Тимошенка*, яка враховує ефекти інерції обертання нормального елемента та поперечного зсуву.

Складові переміщення елемента пластини позначимо u і w . Далі зробимо такі припущення: вважатимемо, що компонент переміщення u лінійно залежить від z , а w від z не залежить [17, 18]. Тоді, виходячи з вищезгаданого, можна записати такі співвідношення:

$$u(x, z, t) = z \cdot \psi(x, t); \quad w(x, z, t) = w(x, t). \quad (3)$$

У цих співвідношеннях x, z – декартові координати, w – нормальні переміщення точок серединної лінії балки (прогини), а ψ – кут повороту нормалі до серединної лінії балки у площині xOz ; $z \in [-h/2; h/2]$, де h – товщина балки.

Задача про нестационарне деформування пружної ізотропної балки з урахуванням відповідних початкових та крайових умов, а також навантаження системи з N сил і моментів зводиться до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь другого порядку.

Математична модель. Відповідно до [19] система диференціальних рівнянь у часткових похідних для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та крайових умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G'F \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_{\Sigma}(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + G'F \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - M_{\Sigma}(x, t), \end{cases} \quad (4)$$

де t – час; h – товщина балки; b – ширина балки; $G' = k' \cdot G$; k' – коефіцієнт зсуву; $F = bh$ – площа поперечного перерізу балки; $I = bh^3 / 12$; w – прогин серединної площини балки; ψ – кут повороту; ρ – густина матеріалу балки; пружні постійні: E – модуль пружності, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

Вкажемо, що $P_{\Sigma}(x, t)$ та $M_{\Sigma}(x, t)$ – збурювальне силове та моментне навантаження:

$$P_{\Sigma}(x, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \cdot P_j(t); \quad (5)$$

$$M_{\Sigma}(x, t) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \cdot M_j(t). \quad (6)$$

Система рівнянь розв'язується за допомогою розкладання невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні ряди Фур'є. Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, *інтегрального перетворення Лапласа* [20]. У цьому випадку, при виконанні обернених перетворень, розв'язки можуть бути представлені у вигляді *інтегралів Дюамеля (типу згортки)*, що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь. Докладніше розв'язання подібних систем рівнянь описано в [21 – 24].

Побудова розв'язку прямої задачі у загальному вигляді. При розв'язанні задачі прийемо нульові початкові умови, а саме:

$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad \psi(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Для шарнірно-обпертої балки для задоволення необхідних граничних умов [25] в опорах $x = 0$ та $x = l$:

$$w = 0, \quad M = 0, \quad (M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0). \quad (8)$$

Крайові умови для прогинів стандартні та очевидні. Розглянемо докладніше крайову умову для моментів в «ідеальній» шарнірній опорі. Вираз для згинального моменту для балки теорії Тимошенко: $M = -EI \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Ос-

кільки жорсткість $EI \neq 0$, то з $M = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$.

Запишемо функції (3) у вигляді розвинень у наступні ряди Фур'є:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l}; \quad (9)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l}. \quad (10)$$

Підставивши розвинення (9) – (10) в систему диференціальних рівнянь з частинними похідними (4) та скориставшись властивістю ортогональності тригонометричних функцій, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь по змінній t . Система диференціальних рівнянь розв'язується так: за нульових початкових умов виконується пряме інтегральне перетворення Лапласа [20]; в просторі зображень на основі розв'язання системи алгебраїчних рівнянь знаходяться шукані коефіцієнти розвинення $w_k^L(s)$, $\psi_k^L(s)$, виконується обернене перетворення Лапласа. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} w_{kj}(t) &= \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \int_0^t \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin \omega_{1k}(t-\tau) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin \omega_{2k}(t-\tau) \right] P_j(\tau) d\tau + \\ &+ c_T^2 \frac{C_{kj}^M \lambda_k}{\Delta_k} \int_0^t \left[\frac{\sin \omega_{1k}(t-\tau)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin \omega_{2k}(t-\tau)}{\omega_{2k}} \right] M_j(\tau) d\tau; \\ \psi_{kj}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{kj}^P \lambda_k}{\Delta_k} \int_0^t \left[\frac{\sin \omega_{1k}(t-\tau)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin \omega_{2k}(t-\tau)}{\omega_{2k}} \right] P_j(\tau) d\tau + \end{aligned} \quad (11)$$

$$+ \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \int_0^t \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin \omega_{1k}(t-\tau) - \Omega_{2k}^\Psi \sin \omega_{2k}(t-\tau) \right] M_j(\tau) d\tau; \quad (12)$$

В результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (4) за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки можна отримати наступний аналітичний вираз для функції прогинів та кутів повороту:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^W(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^W(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (13)$$

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pj}^\Psi(x, t-\tau) P_j(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Mj}^\Psi(x, t-\tau) M_j(\tau) d\tau \right), \quad (14)$$

де $K_i(x, t)$ – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток):

$$\begin{aligned} K_{Pj}^W(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^W \cdot \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^W \cdot \sin(\omega_{2k} t) \right]; \\ K_{Mj}^W(x, t) &= c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M \cdot \lambda_k}{\Delta_k} \sin(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Pj}^\Psi(x, t) &= c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^P \cdot \lambda_k}{h^2} \cos(\lambda_k x) \left[\frac{\sin(\omega_{1k} t)}{\omega_{1k}} - \frac{\sin(\omega_{2k} t)}{\omega_{2k}} \right]; \\ K_{Mj}^\Psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{kj}^M}{\Delta_k} \cos(\lambda_k x) \left[\Omega_{1k}^\Psi \sin(\omega_{1k} t) - \Omega_{2k}^\Psi \sin(\omega_{2k} t) \right]. \end{aligned}$$

У випадку зосередженого навантаження (силового або моментного) балки в точці з координатою x_j коефіцієнти для навантажень матимуть вигляд:

$$C_{kj}^P = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot b \cdot h} \sin(\lambda_k \cdot x_j); \quad C_{kj}^M = \frac{2}{\rho \cdot l \cdot I} \cos(\lambda_k \cdot x_j).$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$\begin{aligned} c_T^2 &= \frac{G'}{\rho}, \quad c_b^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \lambda_k = \pi \frac{k}{l}, \quad \Delta_k = \sqrt{\left(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2 \right)^2 - 4 \cdot \lambda_k^4 \cdot c_T^2 \cdot c_b^2}; \\ \Omega_{1k}^W &= \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^W = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_b^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2k}}; \quad \Omega_{1k}^\Psi = \omega_{1k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k}^\Psi = \omega_{2k} - \frac{\lambda_k^2 \cdot c_T^2}{\omega_{2k}}. \end{aligned}$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12 / h^2 + \Delta_k)}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5(\lambda_k^2 (c_T^2 + c_b^2) + c_T^2 12 / h^2 - \Delta_k)}.$$

Для функцій деформацій можуть бути отримані аналогічні вирази.

Знаходження невідомих зосереджених моментів тертя в опорах.

Розглянемо конкретний випадок з однією збурювальною силою $P(t)$ (яка відома) і двома додатковими зосередженими моментами (тертя) $M_{F1}(t)$ і $M_{F2}(t)$ (які невідомі).

Значимо, що вираз (2) за структурою аналогічний виразу для кута повороту балки (14), якщо у функцію двох змінних $\psi(x, t)$ замість змінної x підставити координату опори. Тоді для точки $x = 0$ можна записати наступні співвідношення для кута повороту з боку балки та з боку першої опори:

$$\begin{cases} \psi(0, t) = \frac{1}{\kappa_1} \int_0^t M_1(\tau) d\tau, \\ \psi(0, t) = \int_0^t K_P^{\Psi 1}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M1}^{\Psi 1}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M2}^{\Psi 1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (15)$$

Виконаємо виключення невідомих функцій кута повороту $\psi(0, t)$ шляхом прирівнювання відповідних виразів для першої опори:

$$\frac{1}{\kappa_1} \int_0^t M_1(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi 1}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M1}^{\Psi 1}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M2}^{\Psi 1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \quad (16)$$

А для точки $x = l$ можна записати наступні співвідношення для кута повороту з боку балки та з боку другої опори:

$$\begin{cases} \psi(l, t) = \frac{1}{\kappa_2} \int_0^t M_2(\tau) d\tau, \\ \psi(l, t) = \int_0^t K_P^{\Psi_2}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_1}^{\Psi_2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_2}^{\Psi_2}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (17)$$

Після виключення $\psi(l, t)$ для точки $x = l$ можна записати (17) для другої опори:

$$\frac{1}{\kappa_2} \int_0^t M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi_2}(t-\tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_1}^{\Psi_2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau - \int_0^t K_{M_2}^{\Psi_2}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Вирази (16) і (18) після перенесення відомих доданків у праву частину рівняння, а невідомих у ліву будуть мати вигляд системи двох *інтегральних рівнянь Вольтерра I роду* щодо невідомих зосереджених моментів $M_1(t)$ та $M_2(t)$:

$$\begin{cases} \int_0^t \left[K_{M_1}^{\Psi_1}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_1} \right] M_1(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_2}^{\Psi_1}(t-\tau) M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi_1}(t-\tau) P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{M_1}^{\Psi_2}(t-\tau) M_1(\tau) d\tau + \int_0^t \left[K_{M_2}^{\Psi_2}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_1} \right] M_2(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^{\Psi_2}(t-\tau) P(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (19)$$

Виконаємо дискретизацію системи інтегральних рівнянь (19). Після дискретизації інтегральне рівняння замінюється *системою лінійних рівнянь алгебри (СЛАР)* [26]. Внаслідок чого дискретний аналог (19) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{\Psi_1 M_1}^* \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{\Psi_1 M_2} \mathbf{M}_2 = \Psi_1; \\ \mathbf{A}_{\Psi_2 M_1} \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{\Psi_2 M_2}^* \mathbf{M}_2 = \Psi_2, \end{cases} \quad (20)$$

де вектор \mathbf{M}_i відповідає зміні у часі зосередженого реактивного моменту $M_i(t)$; вектор Ψ_i – функція зміни кута повороту у часі в опорі, викликана лише зовнішньою силою $P(t)$, що визначається як:

$$\psi_i = \int_0^t K_{\Psi_i P}(t-\tau) P(\tau) d\tau;$$

матриця $\mathbf{A}_{\Psi_i M_i}^*$ – відповідає дискретному аналогу оператора, що відповідає сумі $K_{\Psi_i M_i}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa_i}$.

В результаті розв'язання системи (20) знаходяться зосереджені реактивні моменти в опорах з урахуванням тертя $M_i(t)$, що дозволяє визначати компоненти переміщення у часі у всіх точках балки (як при дії трьох незалежних навантажень: силового $P(t)$ та моментних $M_1(t)$ і $M_2(t)$ на балку з ідеальними шарнірами без тертя в опорах).

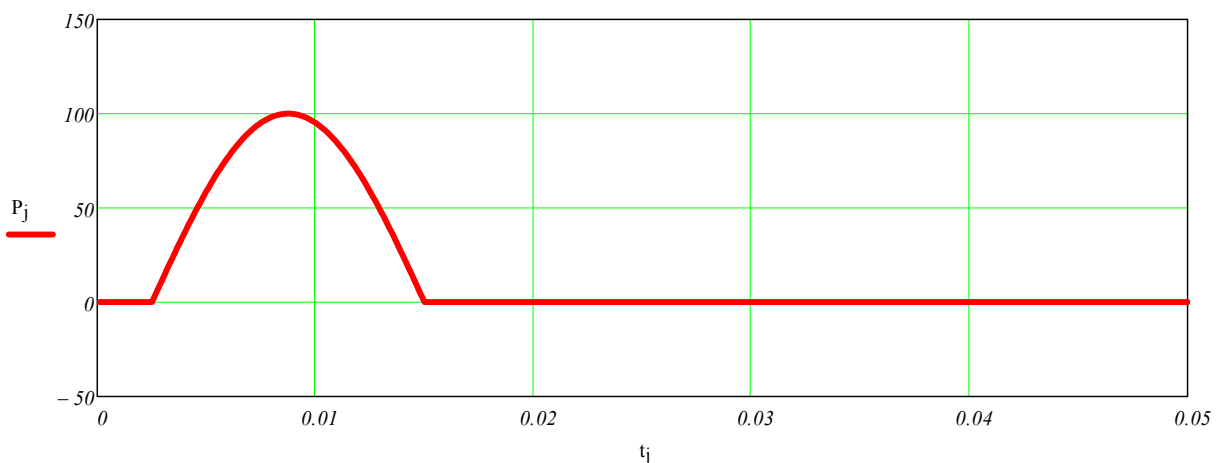


Рис. 2 – Збурююча сила $P(t)$.

Обчислювальний експеримент. У роботі розглядається конкретний приклад моделювання нестационарних поперечних коливань балки з урахуванням тертя в шарнірних опорах (рис. 1).

При розрахунках серединна лінія балки у недеформованому стані збігалася з віссю Ox декартової системи координат. Обчислення проводилися за наступних значень параметрів: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (значення механічних констант для балки відповідають легуваній сталі); довжина балки $l = 0.8 \text{ м}$, ширина $b = 0.05 \text{ м}$, товщина $h = 0.0025 \text{ м}$; координати точки прикладення збурюючого навантаження мають значення: $x_0 = 0.4 \text{ м}$ (посередині балки – для простоти та наочності розглядався випадок симетричного навантаження), точка, в якій додатково досліджувалася зміна прогину у часі: $x_S = 0.25 \text{ м}$. Значення коефіцієнта лінійно-в'язкого демпфування $\kappa = 1 \div 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; кількість членів у відповідних рядах Фур'є 100.

Результати чисельних розрахунків наведені на рис. 2 – 12.

На рис. 2 показана зовнішня сила $P(t)$, яка викликає деформування (нестационарні коливання).

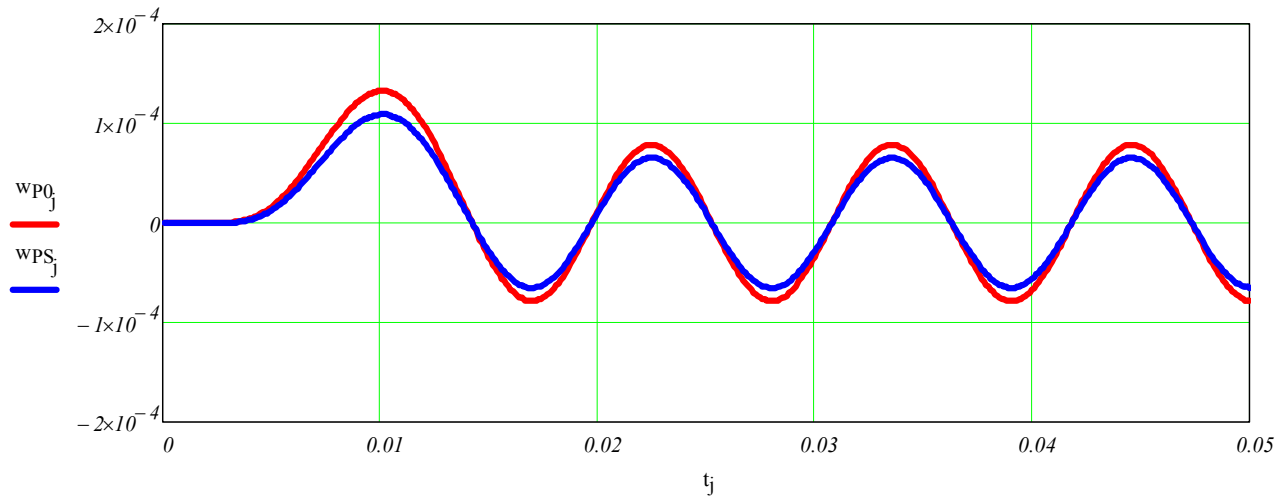


Рис. 3 – Прогин балки у точках x_0 і x_S .

На рис. 3 показані зміни прогину балки у точках x_0 (точка під зосередженим навантаженням) – крива 1, а x_S – крива 2, що викликані лише впливом зовнішньої сили $P(t)$.

На рис. 4 показані зміни кута повороту $\psi(t)$ у лівій (першій) та правій (другій) шарнірних опорах балки. Зазначимо, що оскільки зовнішня сила $P(t)$ прикладена до середини балки, то значення кутів повороту у шарнірах однакові, але протилежні за напрямком, що добре можна побачити на рис. 4.

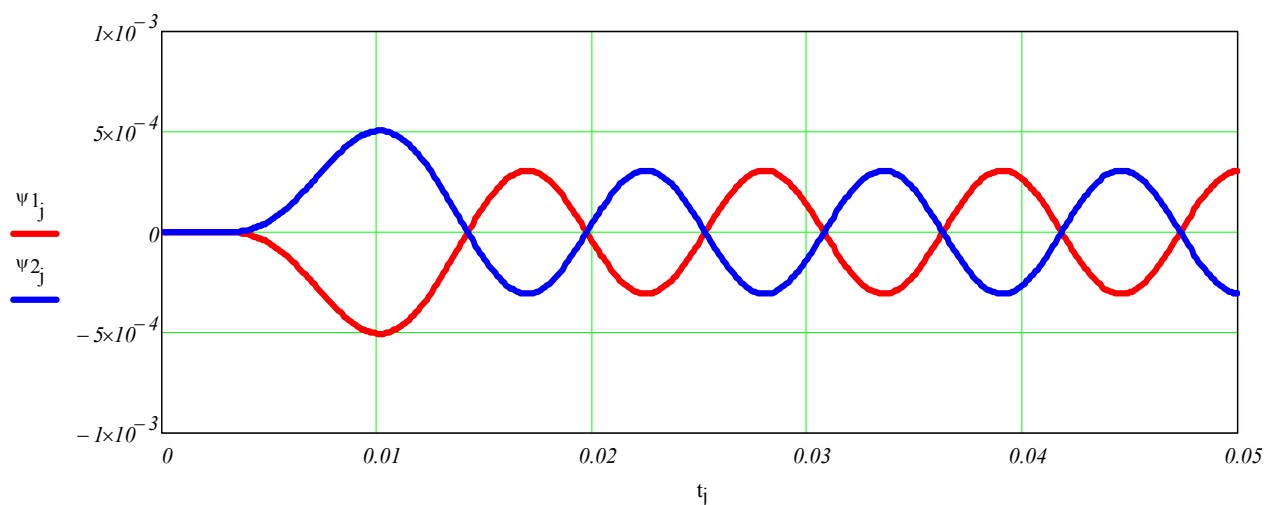


Рис. 4 – Кути повороту в шарнірних опорах балки.

На рис. 5 показані зміни зосереджених моментів тертя $M_1(t)$ і $M_2(t)$ у лівій (першій) та правій (другій) шарнірних опорах балки при значенні коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

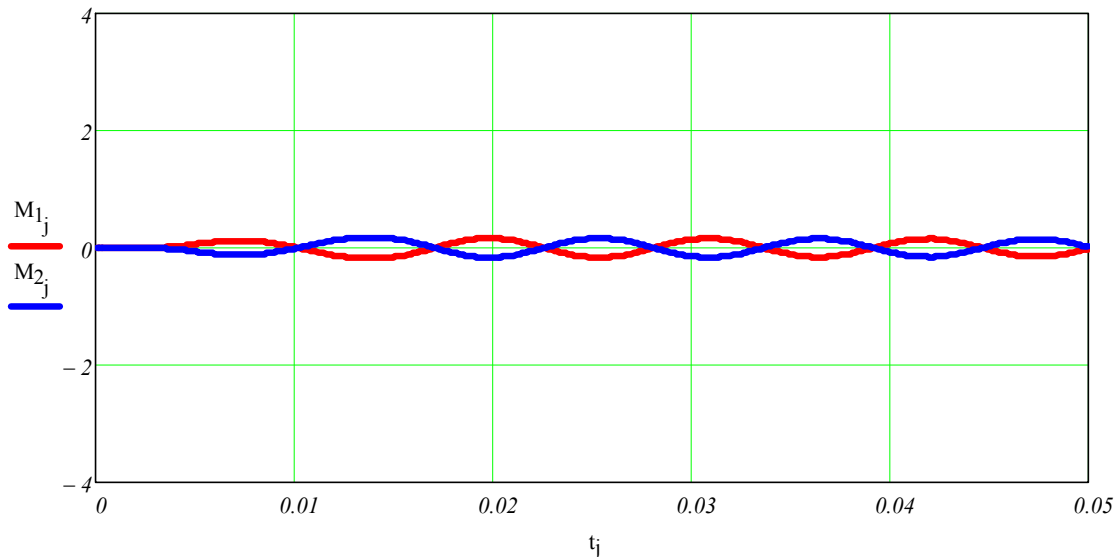


Рис. 5 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 6 показано:

- зміну прогину балки $w_{P0}(t)$, яка викликана дією зосередженого навантаження $P(t)$ (посередині балки) – крива 1;
- зміну прогину балки $w_{0M1}(t)$, яка викликана дією зосередженого моменту тертя в лівій опорі $M_1(t)$ (посередині балки) – крива 2;
- зміну прогину балки $w_{0M2}(t)$, яка викликана дією зосередженого моменту тертя в правій опорі $M_2(t)$ (посередині балки) – крива 3 (крапки);
- реальну зміну прогину балки $w_{P0}(t)$, яка викликана дією зосередженого навантаження $P(t)$ та з урахуванням тертя в опорах (сумарна крива) – крива 4.

Зазначимо, що криві 2 та 3 повністю збігаються (тому одна показана суцільною кривою, а друга крапками), що підтверджує вірогідність отриманих результатів, оскільки зовнішнє навантаження прикладене симетрично, а тертя в лівій та правій опорах однакове.

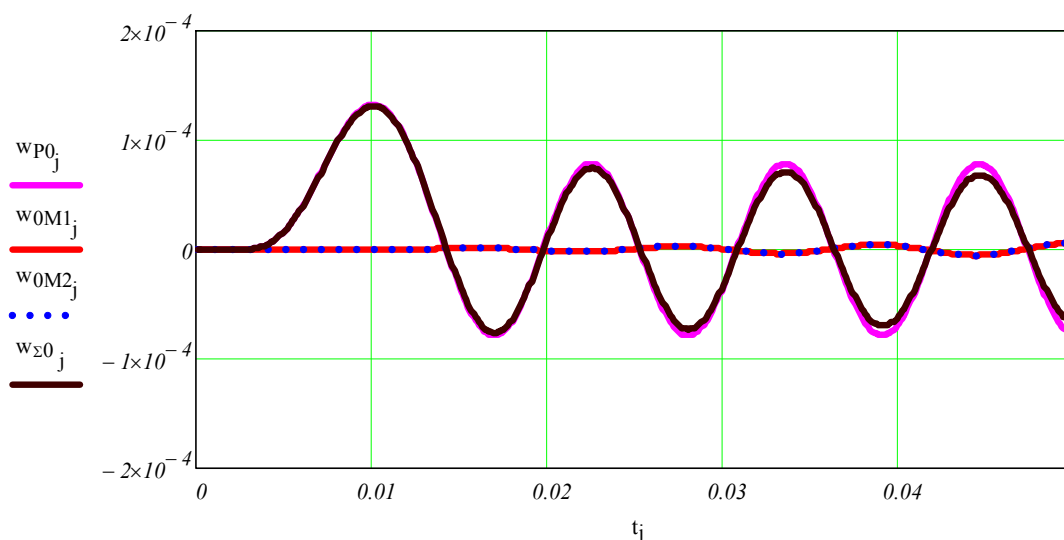


Рис. 6 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 6 можна помітити, що крива 1 (зумовлена лише дією зовнішнього навантаження) та крива 4 (прогин з урахуванням тертя в опорах) подібні, але крива 4 відповідає незначному затуханню (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 7 – 8 аналогічний опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

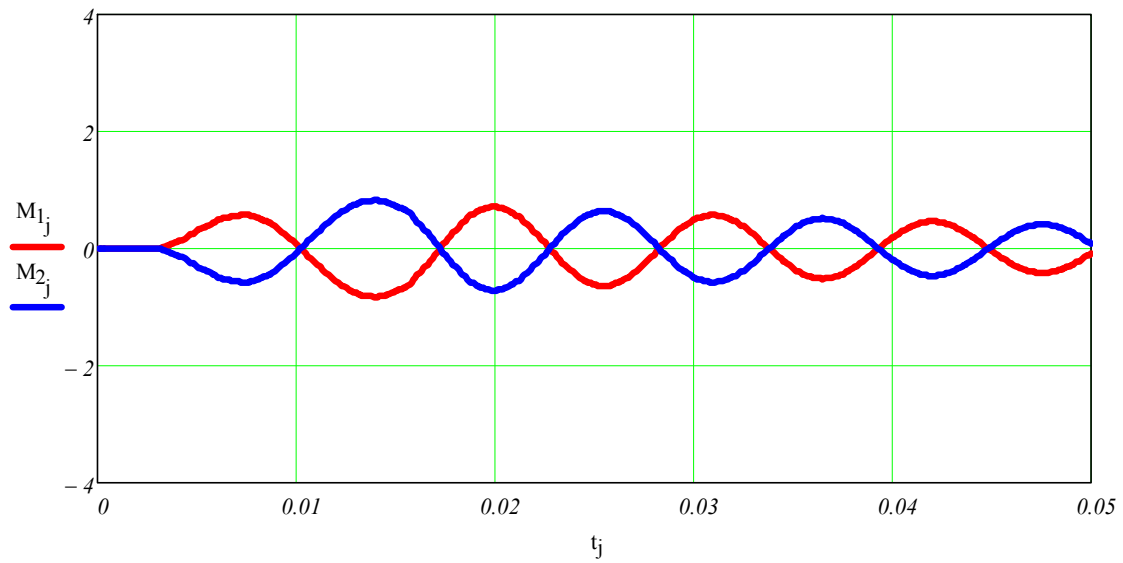


Рис. 7 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

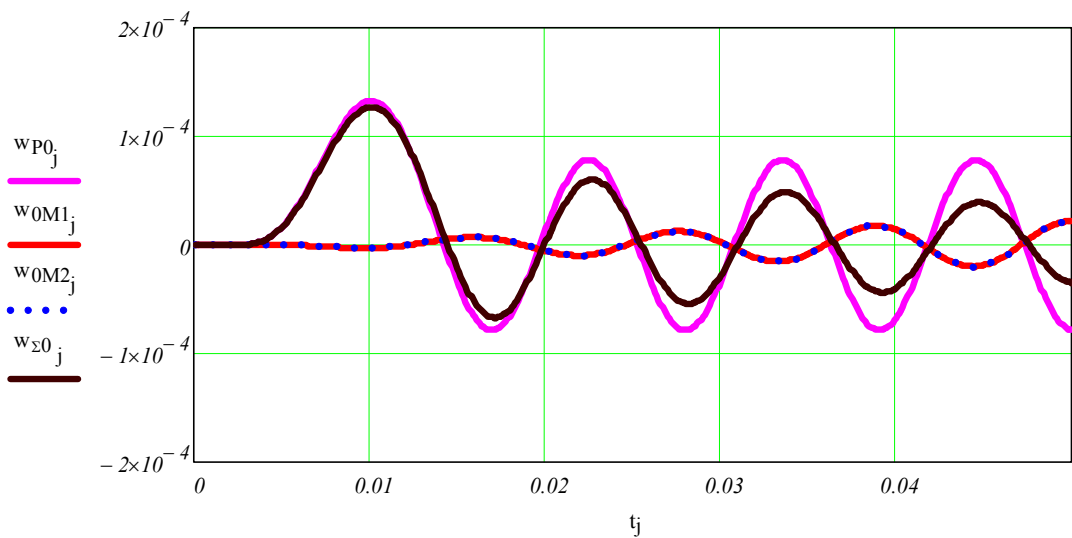


Рис. 8 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

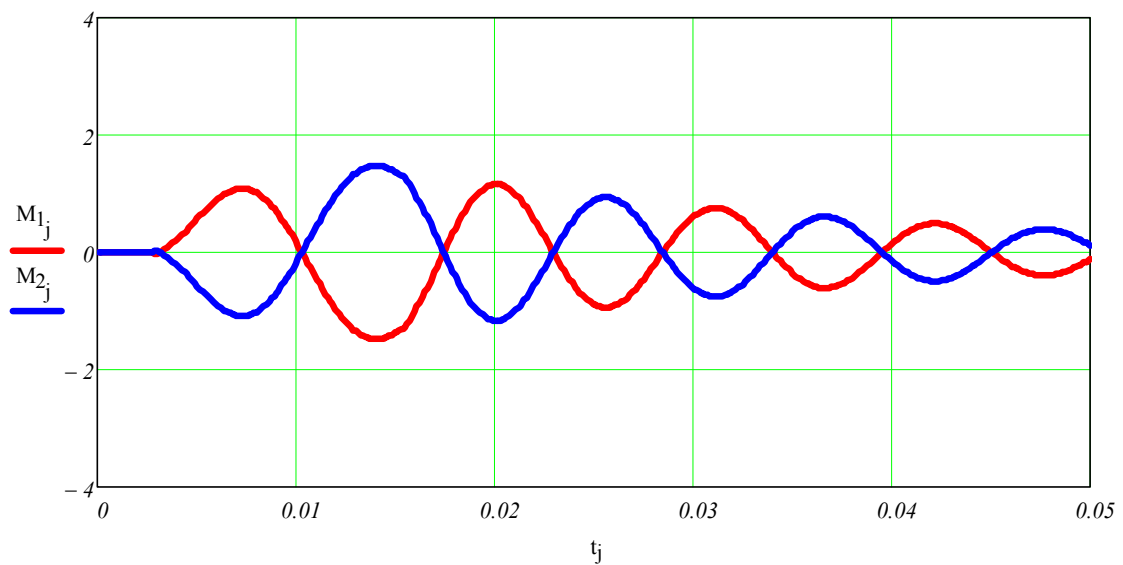


Рис. 9 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 8 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно істотне затування (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 9 – 10 також аналогічний опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

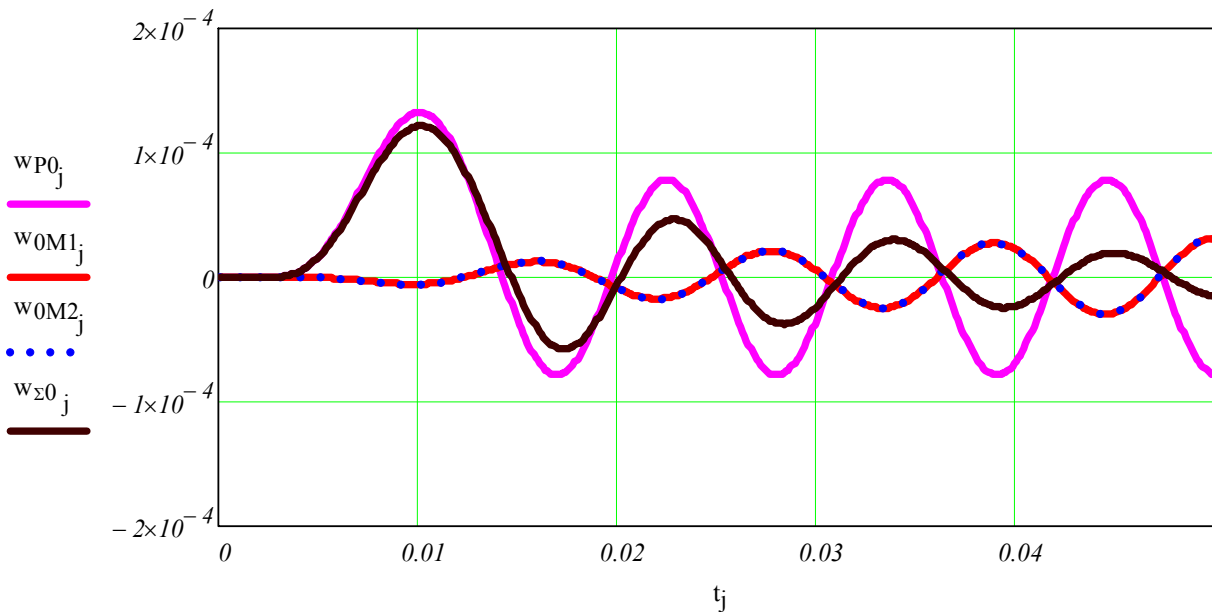


Рис. 10 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

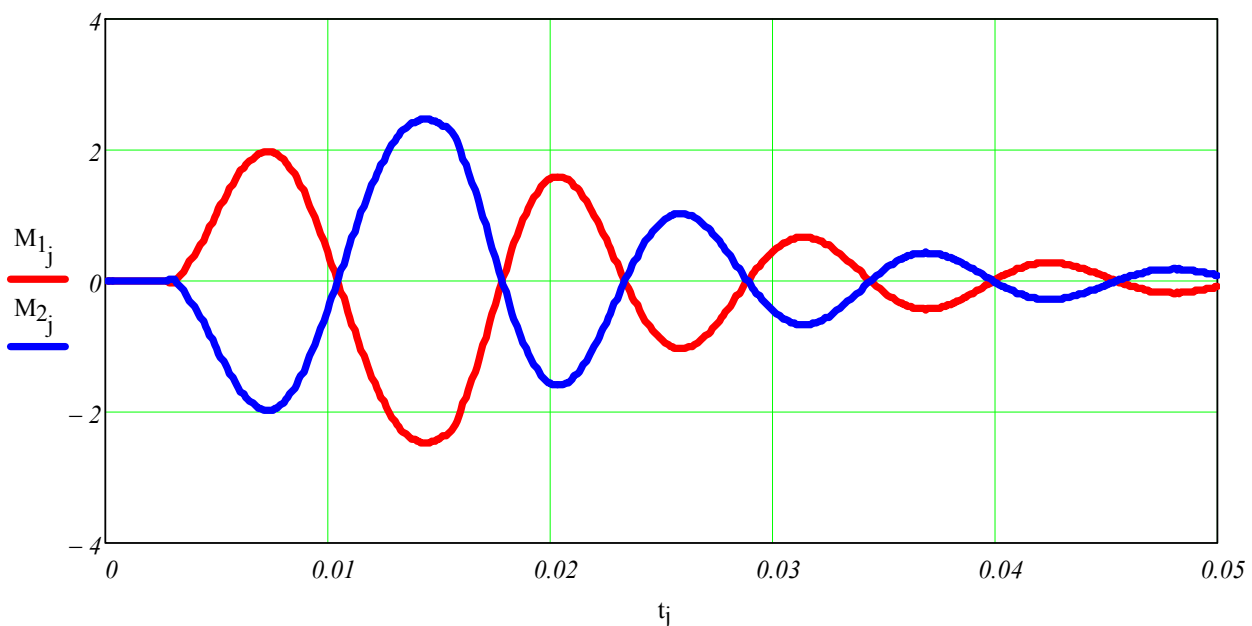


Рис. 11 – Моменти тертя в шарнірних опорах балки (коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

На рис. 10 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно сильне затування (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Опис рис. 11 – 12 аналогічний наведеному вище опису рис. 5 – 6, але у розрахунках значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

На рис. 12 для зміни прогину з урахуванням тертя в опорах (крива 4) помітно дуже сильне затування – коливання майже повністю затухають за 5 періодів (значення коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Результати роботи. Результати, отримані в даній роботі, можуть бути використані як при моделюванні тертя в шарнірних опорах для балкових елементів конструкцій, так і в задачах демпфування вимушених коливань механічних систем.

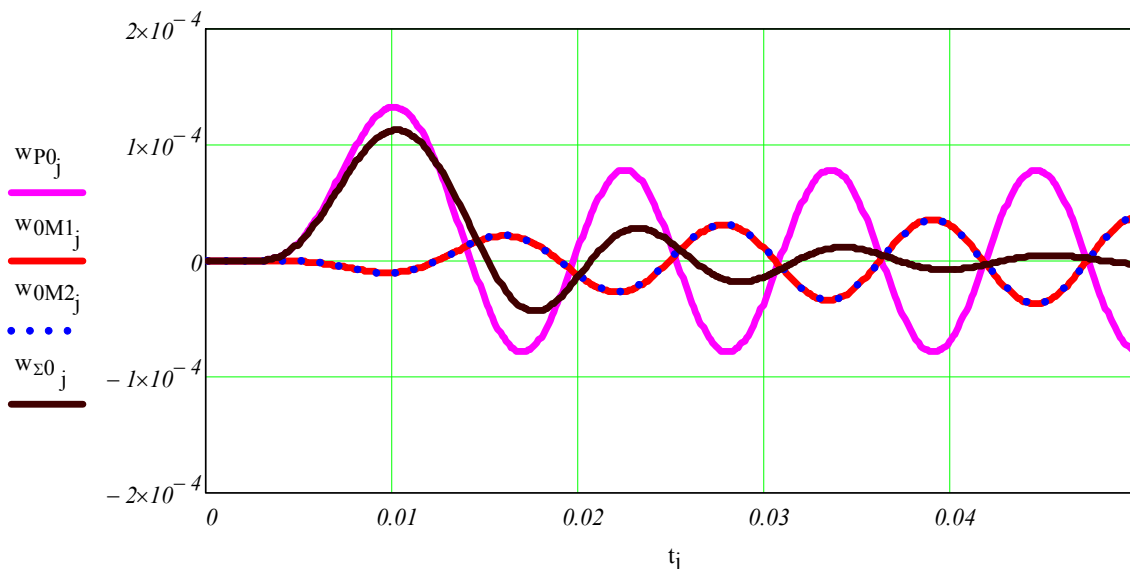


Рис. 12 – Прогин балки під навантаженням (посередині балки) (коефіцієнту демпфування $\kappa = 20 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$).

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток даного дослідження при моделюванні більш складних механічних балкових систем та більш складних елементів конструкцій (пластини, оболонки, тощо).

Висновки. У роботі представлено розв’язання задачі з демпфування коливань балки. Отримано і перевірено математичну модель, яка дозволяє розрахувати більш точний динамічний рух балки під дією навантажень. Проведено розрахунки конкретних практичних задач. Результати досліджень показали вплив коефіцієнта демпфування на затухання коливань. Виявлено, що малий коефіцієнт демпфування викликає мале затухання коливань, середній коефіцієнт демпфування викликає збільшення затухання, а значний коефіцієнт демпфування викликає значне збільшення затухання. Також запропоновано підхід до розв’язання оберненої задачі з визначення моментів тертя в опорах балки. Отримані математичні моделі, розв’язки, результати, а також запропоновані методи і підходи можна використовувати в задачах віброзахисту.

Список літератури

1. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections // Acta Mechanica. – 2023. – Vol. 234. – No. 4. – P. 1451 – 1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
2. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems // Engineering Structures. – 2023. – Vol. 275. – P. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
3. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2023. – P. 1 – 16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
4. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses // Archive of Applied Mechanics. – 2022. – Vol. 92. – No. 4. – P. 1247 – 1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
5. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam // Journal of Vibration and Control. – 2022. – Vol. 28. – No 7 – 8. – P. 799 – 811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
6. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2021. – P. 1 – 19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
7. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass // Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines. – 2022. – No. 1. – P. 15 – 20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
8. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method // Shock and Vibration. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1 – 18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
9. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin’s method // XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020. – Athens, Greece, 2020. – P. 2621 – 2630.
10. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383. – No. 36. – P. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
11. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
12. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1264. – No. 1. – P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
13. Szytko-Bigus O., Śniady P., Zakęs F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2019. – Vol. 121. – P. 777 – 90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.

14. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates // *European Journal of Applied Mathematics*. – 2019. – Vol. 30. – No. 1. – P. 176 – 195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
15. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – No. 48 – 49. – P. 8673 – 8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
16. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment // *Journal of Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 75. – No. 5. – P. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
17. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method // *Computers & Structures*. – 2017. – Vol. 192. – P. 181 – 195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
18. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // *Archive of Applied Mechanics*. – 2018. – Vol. 88. – No. 7. – P. 1213 – 1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
19. Григорюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
20. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. – Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. – 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.
21. Кохманюк С. С., Филипов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
22. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с.
23. Янютин Е. Г., Гнатенко Г. О., Гришакин В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
24. Янютин Е. Г., Гришакин В. Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязкоупругих балок // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. 36. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
25. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs // *Applied Mathematical Modelling*. – 2020. – Vol. 87. – P. 152 – 170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
26. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2022. – Vol. 5. – No. 7 (119). – P. 21 – 34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

References (transliterated)

1. Mao X., Zhang L., Fan X. Wave attenuation of a multi-span continuous beam with variable cross sections. *Acta Mechanica*. 2023, Vol. 234, No. 4, pp. 1451–1464. DOI: 10.1007/s00707-022-03465-3.
2. Zhang L., Chen Q., Zhang R., Lei T. Vibration control of beams under moving loads using tuned mass inerter systems. *Engineering Structures*. 2023, Vol. 275, pp. 115265. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115265.
3. Vesali F., Rezvani M. A., Shadfar M. Attuned Dynamic Response of Double Track Multi-span Railway Bridges Under the Delayed Entry of a Second Train. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. 2023, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s42417-023-00884-x.
4. Borji A., Movahedian B., Boroomand B. Implementation of time-weighted residual method for simulation of flexural waves in multi-span Timoshenko beams subjected to various types of external loads: from stationary loads to accelerating moving masses. *Archive of Applied Mechanics*. 2022, Vol. 92, No. 4, pp. 1247–1271. DOI: 10.1007/s00419-021-02103-z.
5. El-Sayed T. A., El-Mongy H. H. A new numeric-symbolic procedure for variational iteration method with application to the free vibration of generalized multi-span Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*. 2022, Vol. 28, No. 7–8, pp. 799–811. DOI: 10.1177/1077546320983192.
6. Liu S., Jiang L., Zhou W., Xilin C., Zhang Y. Dynamic response analysis of multi-span bridge-track structure system under moving loads. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2021, pp. 1–19. DOI: 10.1080/15397734.2021.2010569.
7. Sharapata A., Povalyaev S., Yanyutin Y. Impact on the beam of the final length of the moving mass. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and Strength of Machines*. 2022, No. 1, pp. 15–20. DOI: 10.20998/2078-9130.2022.1.263348.
8. Gao C., Pang F., Li H., Wang H., Cui J., Huang J. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method. *Shock and Vibration*. 2021, Vol. 2021, pp. 1–18. DOI: 10.1155/2021/4440250.
9. Bozyigit B., Acikgoz S., Yesilce Y. Dynamic response of single and multi-span beams under a moving load using dynamic stiffness formulations and Galerkin's method. *XI International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2020) 23 – 26 November 2020*. Athens, Greece, 2020, pp. 2621–2630.
10. Hao S., Wu Z., Li F., Zhang C. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. *Physics Letters A*. 2019, Vol. 383, No. 36, pp. 126029. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.126029.
11. Fakhreddine H., Adri A., Chajdi M., Rifai S., Benamar R. Geometrically nonlinear forced vibrations of fully clamped multi-span beams carrying multiple masses and resting on a finite number of simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, pp. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012021.
12. Chajdi M., Fakhreddine H., Adri A., Bikri K. E., Benamar R. Geometrically non-linear forced vibrations of fully clamped functionally graded beams with multi-cracks resting on intermediate simple supports. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, Vol. 1264, No. 1, P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/1264/1/012023.
13. Szyłko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F. Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019, Vol. 121, pp. 777–90. DOI: 10.1016/j.ymssp.2018.11.056.
14. Kawano A., Morassi A. Uniqueness in the determination of loads in multi-span beams and plates. *European Journal of Applied Mathematics*. 2019, Vol. 30, No. 1, pp. 176–195. DOI: 10.1017/S0956792517000419.
15. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2001, Vol. 38, No. 48–49, pp. 8673–8684. DOI: 10.1016/S0020-7683(01)00099-3.
16. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareshchenko V. G. A Noncanonically Shape Laminated Plate Subjected to Impact Loading: Theory and Experiment. *Journal of Applied Mechanics*. 2008, Vol. 75, No. 5, pp. 051004. DOI: 10.1115/1.2936925.
17. Kim T., Lee U. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. *Computers & Structures*. 2017, Vol. 192, pp. 181–195. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.07.028.
18. Zhao Z., Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method. *Archive of Applied Mechanics*. 2018, Vol. 88, No. 7, pp. 1213–1228. DOI: 10.1007/s00419-018-1368-8.
19. Grygolyuk E. I., Seleзов I. T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. Vol. 5. Neklassicheskie teorii kolebaniy stержney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5, Non-classical vibration theory of beams, plates and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
20. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2000. 1130 p. ISBN 978-0-486-41147-7.

21. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. Kolebaniya mnogoproprietykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke [Vibrations of multi-span beams on elastic supports under moving load]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
22. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebaniya deformiruemyykh system pri impul'snykh I podvizhnykh nagruzkakh* [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1980. 232 p.
23. Yanyutin E. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernykh zadach dlya balok z pruzhnyim do-datkovym spyrannyam [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
24. Yanyutin E. G., Grishakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya vyazkouprugikh balok [Identification of moving load for viscoelastic beams]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu "Kharkivs'kyi politekhnichnyi instytut". Zb. naukovykh prats'* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Scientific Digest]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
25. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs. *Applied Mathematical Modelling*. 2020, Vol. 87, pp. 152–170. DOI: 10.1016/j.apm.2020.05.023.
26. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, Vol. 5, No. 7 (119), pp. 21–34. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.265356.

Надійшло (received) 27.08.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Yegorov Pavel Anatoliyevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

Поваляєв Сергій Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Поваляев Сергей Иванович – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Povaliaiev Serhii Ivanovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

Шарпата Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Шарпата Андрей Сергеевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.

Sharapata Andrii Sergeevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Machine Components and Theory of Machines and Mechanisms, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 273-10-70; e-mail: phd.sharapata@gmail.com.