УДК 532.527+533.662.3+533.6.013.13+533.6.013.2+533.6.013.11 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.31**

О. В. ШЕХОВЦОВ

ВПЛИВ ТВЕРДИХ ГРАНИЦЬ ТА В'ЯЗКОСТІ СЕРЕДОВИЩА НА ВНЕСОК ІНЕРЦІЙНОЇ ТА ВИХРОВОЇ КОМПОНЕНТ НОРМАЛЬНОЇ СИЛИ ПЛАСТИНИ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ. ЧАСТИНА 1

У рамках удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких середовищ, було розроблено метод визначення внеску сил інерційної, вихрової та циркуляційної природи в нормальну силу пластини, яка рухається в нерухомому в'язкому безмежному середовищі по довільному закону у присутності стінки та в каналі. Розроблений метод було апробовано для випадку миттєвого кутового старту пластини з подальшою постійною кутовою швидкістю обертання (задача Вагнера) у в'язкому безмежному середовищі у присутності стінки та в каналі у ламінарному та турбулентному режимах. Була підтверджена інерційно-вихрова природа нормальної сили пластини (з домінуванням сил інерційної природи), що обертається після миттєвого старту з відривом потоку з обох її крайок, незалежно від наявності твердих границь та ламінарного чи турбулентного режимів обтікання. З'ясовано, що у випадку ламінарного режиму вплив наявності стінки на приведену інерційну компоненту нормальної сили пластини несуттєвий, проте вплив каналу призводить до більш швидкого відходу ламінарного вихору від передньої крайки пластини, що призводить до поступового збільшення внеску інерційної компоненти нормальної сили пластини до 100 % та більше наприкінці обертання пластини. Приблизно те саме відбувається у випадку відсутності твердих границь, коли вже турбулентний вихор більшого розміру та інтенсивності, ніж відповідний ламінарний, віддаляється від передньої крайки пластини.

Ключові слова: сили інерційної, циркуляційної та вихрової природи, компоненти нормальної сили пластини, внесок сил, інерційно-вихровий принцип, миттєвий кутовий старт пластини, стінка, канал, ламінарний вихор, турбулентний вихор, режим обтікання.

А. В. ШЕХОВЦОВ

ВЛИЯНИЕ ТВЕРДЫХ ГРАНИЦ И ВЯЗКОСТИ СРЕДЫ НА ВКЛАД ИНЕРЦИОННОЙ И ВИХРЕВОЙ КОМПОНЕНТ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ. ЧАСТЬ 1

В рамках усовершенствованного метода дискретных вихрей, обобщенного для вязких сред, был разработан метод определения вклада сил инерционной, вихревой и циркуляционной природы в нормальную силу пластины, движущейся в неподвижной вязкой безграничной среде по произвольному закону в присутствии стенки и в канале. Разработанный метод был апробирован для случая мгновенного углового старта пластины с последующей постоянной угловой скоростью вращения (задача Вагнера) в вязкой безграничной среде в присутствии стенки и канала в ламинарном и турбулентном режимах. Была подтверждена инерционно-вихревая природа нормальной силы пластины (с доминированием сил инерционной природы), вращающейся после мгновенного старта с отрывом потока от обеих кромок, независимо от наличия твердых границ и ламинарного или турбулентного режимов обтекания. Выяснено, что в случае ламинарного режима влияние наличия стенки на приведенную инерционную компоненту нормальной силы пластины несущественно, однако влияние канала приводит к более быстрому уходу ламинарного вихря от передней кромки пластины, что приводит к постепенному увеличению вклада инерционной компоненты нормальной силы пластины до 100 % и более в конце вращения пластины. Приблизительно то же происходит в случае отсутствия твердых границ, когда уже турбулентный вихрь большего размера и интенсивности, чем соответствующий ламинарный, удаляется от передней кромки пластины.

Ключевые слова: силы инерционной, циркуляционной и вихревой природы, компоненты нормальной силы пластины, вклад сил, инерционно-вихревой принцип, мгновенный угловой старт пластины, стенка, канал, ламинарный вихрь, турбулентный вихрь, режим обтекания.

A. V. SHEKHOVTSOV

IMPACT OF SOLID BOUNDARIES AND VISCOSITY OF THE MEDIUM ON THE CONTRIBUTION OF THE INERTIAL AND VORTEX COMPONENTS OF THE NORMAL FORCE OF A ROTATING PLATE. PART 1

Within the framework of the improved method of discrete vortices, generalized for viscous media, a method was developed for determining the contribution of forces of inertial, vortex and circulation nature to the normal force of a plate moving in a stationary viscous boundless medium according to an arbitrary law, in the presence of a wall and in a channel. The developed method was tested for the case of instantaneous angular start of the plate and subsequent constant angular speed of rotation (Wagner's problem) in a viscous boundless medium, in the presence of a wall and in a channel, in laminar and turbulent modes. The inertial-vortical nature of the normal force of the plate (with the dominance of inertial forces) was confirmed, which rotates after an instantaneous start with the separation of the flow from both its edges, regardless of the presence of solid boundaries and laminar or turbulent flow regimes. It has been clarified, that in the case of the laminar regime, the influence of the presence of the wall on the reduced inertial component of the normal force of the plate is insignificant, but the influence of the channel leads to a faster departure of the laminar vortex from the front edge of the plate, which leads to a gradual increase in the contribution of the inertial component of the normal force of the plate up to 100% and more at the end of rotation plates. Approximately the same happens in the case of the absence of solid boundaries, when a turbulent vortex of a larger size and intensity than the corresponding laminar one moves away from the leading edge of the plate.

Key words: forces of inertial, circulation and vortex nature, components of plate normal force, contribution of forces, inertial-vortex principle, instantaneous angular start of plate, wall, channel, laminar vortex, turbulent vortex, flow regime.

Загальна постановка проблеми та мета роботи. Останні чверть століття актуальними є дослідження, присвячені *гідроаеродинаміці безпілотних літальних апаратів (БпЛА)*, окремий і надзвичайно цікавий розділ яких становлять дослідження, присвячені мікро БпЛА (вагою до 2 кг), а особливо – *орнітоптерам*, рушійна аеродинамічна поверхня яких (зазвичай, тонке крило) здійснює зворотні обертально-поступальні махи замість постійних обертів гвинта, що призводить до переваг у маневреності, безшумності та енергоощадності. Такі апарати особливо цінні для розвідки на складній місцевості, у будівлях, при пожежах і таке інше.

Аеродинаміка орнітоптера досить складна через наявність відривів потоку від усіх крайок крила, а малі розміри призводять до необхідності враховувати *в'язкість середовища*.

Особливо складне та важливе питання, яке постає при вивченні природи аеродинамічних сил, які виникають на крилі, що махає – це з'ясування, який внесок у нормальну силу крила вносять *сили інерційної природи*, а який – *сили вихрової природи* (у роботах [1 – 3] було показано, що при відривному обтіканні крайок крила *циркуляційна* компонента зазвичай дуже мала). Складність полягає у тому, що у загальному випадку *нелінійної задачі* ці компоненти сил та моментів не адитивні. Принагідно зазначимо, що аеродинамічна природа сил, які виникають на крилах та гвинтах літаків та гелікоптерів – циркуляційна. Від розуміння природи аеродинамічних сил залежить напрямок науково-інженерної думки, оскільки у аеродинаміці ще не так давно панував цілий ряд помилкових уявлень. Наприклад, багато десятиліть помилково вважалось, що вихори, що сходять з передньої крайки крила, можуть призводити лише до погіршення аеродинамічних характеристик крила. Однак у 1997 році *Вилмот*, *Елінгтон* та *Томас* [4] експериментально відкрили, що на передніх крайках крил *тютюнового бражника Manduca sexta* при махах крил вниз виникають невеликі приєднані конусоподібні вихори, які призводять до збільшення нормальних сил на крилах метелика при морфологічних махах ними вниз, а отже, до збільшення підтримуючої сили та сили тяги. Також багато десятиліть помилково вважалось, що силу тяги на крилі, що махає, викликає вихровий слід за крилом (*обернена доріжка Кармана*), однак у роботах [5, 6] цей міф було спростовано. І, нарешті, *Вонг* у 2004 році показала [7], що миттєва сила опору крил комах не погіршує, а покращує аеродинамічні характеристики крил комах, оскільки майже всю її утворює не сила тертя, а проекція нормальної сили на повздовжню вісь миттєвої поточної системи координат, а відповідна миттєва поперечна проекція нормальної сили утворює миттєву підйомну силу, а обидві вони роблять внесок у вертикальну силу, яка підтримує комаху у польоті (тому, єдина сила, яка дає внесок і у силу тяги і у підтримуючу силу комахи, є нормальна сила).

Оскільки раніше природа аеродинамічних сил на крилах, що махають, вивчалась або для випадку безвідривного ідеального обтікання передніх крайок крил, або для випадку їх відривного в'язкого обтікання (але коли задня крайка крила приєднана до твердої стінки) виникла потреба вивчити внесок сил інерційної та вихрової природи для випадку *в'язкого обтікання ізольованого тонкого крила*, що обертається, та з'ясувати, як в'язкість та тверді границі (стінка та канал) впливають на перерозподіл внеску сил інерційної та вихрової природи.

Аналіз останніх досліджень. Через неможливість виділення вихрової та циркуляційної компонент аеродинамічних сил та моментів на крилі, що коливається, у повній нелінійній постановці, робіт, присвячених цьому питанню, вкрай мало і всі вони пов'язані з випадком коливань тонкого крила (гнучкої пружної мембрани, жорсткого тонкого криволінійного крила або пластини).

В роботі [1] було досліджено внесок сил інерційної, вихрової та циркуляційної природи у нормальну силу на пластині, що обертається з постійною кутовою швидкістю після миттєвого кутового старту (кидок) навколо задньої крайки, яка з'єднана з твердою стінкою, у ідеальному середовищі. Було зроблено висновок, що у такому випадку справедливий інерційно-вихровий принцип генерації нормальної сили на пластині: одразу після кутового старту пластини домінує внесок інерційних сил, а в подальшому – вихрових.

Аналогічний топологічний випадок розглядався в роботі [2], але на цей раз досліджувався вплив *числа Рейнольдса* та *закону кутового старту* пластини: миттєвий кутовий старт порівнювався з плавним (лінійним) кутовим стартом, а турбулентний режим при $\mathrm{Re} = 10^6$ порівнювався з ламінарним при $\mathrm{Re} = 10^2$. Було з'ясовано, що при зменшенні числа Рейнольдса від $\mathrm{Re} = 10^6$ до $\mathrm{Re} = 10^2$ внесок сил інерційної природи дещо зростає, внесок сил вихрової природи дещо зменшується, проте у разі миттєвого кутового старту пластини він все ж таки становить дві третини від усієї нормальної сили в кінці кидка. При плавному законі кутового старту пластини, навпаки, інерційні сили домінують незалежно від числа Рейнольдса. Вклад сил циркуляційної природи спостерігався малим в усіх випадках.

Ґрунтовне теоретико-експериментальне дослідження аеродинаміки пружного мембранного орнітоптеру було проведено у роботі [3]. Було встановлено, що для даної задачі інерційна складова нормальної аеродинамічної сили є домінуючою. Вклад як циркуляційної, так і вихрової складових малий та негативний. Було введено новий кінематичний параметр – нормальну складову прискорення задньої крайки крила, взяту з від'ємним знаком (коефіцієнт прискорення), який є істотним в аеродинаміці крила, що махає, у випадку, коли крило обертається навколо передньої кромки або біля неї. Результати показали узгодженість змін коефіцієнтів прискорення та нормальної сили: завжди після максимуму або мінімуму коефіцієнта прискорення наступає відповідний максимум або мінімум нормальної сили.

Для випадку моделювання в нелінійній ідеальній постановці коливань нескінченно тонкого профілю крила-рушія в роботах [5, 6] було виділено три компоненти коефіцієнта сили тяги – інерційну, циркуляційну і вихрову. Було досліджено внесок в силу тяги кожної з отриманих компонент та пояснено механізми утворення сили тяги крила при різних видах коливань. Виявлено, що в основі роботи крила–рушія лежить інерційно-циркуляційний принцип, причому для малих відносних швидкостей крила переважає внесок інерційних сил, а для великих – внесок циркуляційних. Для двох окремих випадків коливань крила-рушія – обертальних та поступальних – справедливі, відповідно, інерційний та циркуляційний принципи утворення сили тяги. Таким чином, для даного класу задач, коли реалізується *безвідривний режим обтікання* передньої крайки крила, індуктивний вплив вихрового сліду (оберненої доріжки Кармана) на силу тяги крила-рушія малий та негативний.

Формули обрахунку внеску інерційної, вихрової та циркуляційної компонент нормальної сили пластини, яка нестаціонарно рухається в нерухомому в'язкому середовищі при наявності стінки або каналу. Після розв'язку кінематичної задачі (постановка початково-крайової задачі викладена в роботі [8]) за допомогою *удосконаленого методу дискретних вихорів (УМДВ)*, узагальненого для в'язких вихрових середовищ [8, 9], використовуючи *узагальнену формулу Коші – Лагранжа* [10, 11] та наближені вирази для абсолютної швидкості в'язкої течії біля стінки та в каналі [12], можна визначити поле тиску навколо тонкого крила, що рухається по довільному закону у в'язкому нестисливому вихровому середовищі, та його динамічні характеристики.

Вперше формула для визначення *коефіцієнта тиску* в змішаній потенційно-вихровий області ідеального нестисливого середовища в неінерційній системі координат була отримана в роботі [10]. Через кілька років у роботі [11] була отримана практично та ж сама формула, що і в роботі [10], однак у більш універсальному вигляді, який дозволяв розраховувати поля тиску поза групи тіл довільної форми. Пізніше в роботі [13] було показано, що ця формула справедлива і для в'язких течій.

Наведемо узагальнену формулу Коші – Лагранжа для визначення коефіцієнту тиску в'язкої вихрової течії в інтегральній безрозмірній формі для випадку, коли швидкість потоку на нескінченності дорівнює нулю [2]:

$$C_P\left(\vec r,\tau\right)=2\left(\int\limits_{\Sigma}\frac{d\vec r_0}{d\tau}\cdot\vec w(\vec r,\vec r_0,\tau)dr_0+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\frac{\partial'\Gamma(\vec r_0,\tau)}{\partial\tau}\alpha\left(\vec r,\vec r_0,\vec r^{\,*}\right)dr_0\right)-\vec W^2\left(\vec r,\tau\right),\qquad(1)$$

де $\vec r\in D$, τ – безрозмірний час; $\vec w$ – швидкість, що індукується вихровим елементом в розрахунковій точці; Γ – циркуляція вихрового елементу ($\Gamma>0$ – за годинниковою стрілкою); α – кут, під яким видно з точки $\vec r$ лінію, що сполучає точки $\vec r_0$ та довільну точку $\vec r^{\,*}$, таку, що $\vec r_0-\vec r^{\,*}\in S$ [11]. Штрих означає, що диференціювання здійснюється в системі координат, пов'язаній з рухомим крилом.

При розрахунку навантажень на тонкому крилі за характерний лінійний розмір будемо брати довжину хорди розрахункової секції крила $b=c_j$, а за характерну швидкість – модуль максимальної лінійної швидкості її передньої крайки $W_C=\left|\vec W^*_{\max}\right|$.

Застосуємо формулу (1) до нижньої та верхньої поверхонь тонкого крила, враховуючи, що абсолютна швидкість $\vec W$ є сумою переносної $\vec W^*$ та відносної $\vec W_r$, беручі до уваги те, що нормальні компоненти швидкості $\vec W$ при переході через них не змінюються, а дотичні будуть терпіти розрив γ:

$$\vec n(\vec r_0,t)\times\left[\vec W_-(\vec r_0,t)-\vec W_+(\vec r_0,t)\right]=\vec\gamma(\vec r_0,t),\ \ \vec r_0\in S\cup\sigma=\Sigma,\qquad(2)$$

де $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, знак "$-$" позначає ліву поверхню крила, якщо дивитись із задньої кромки «2» на передню «1»; знак "$+$" – праву (зазначимо, що γ має фізичний зміст погонної вихрової інтенсивності або щільності вихрового шару) та взаємозв'язок:

$$\left(\vec W_-(\vec r_0,\tau)+\vec W_+(\vec r_0,\tau)\right)/2=\vec W(\vec r_0,\tau),\ \ \vec r_0\in\Sigma,\qquad(3)$$

а також те, що при обході контуру крила від $\vec r_{0-}$ до $\vec r_{0+}$ $\Delta\alpha=2\pi$.

В результаті отримаємо вираз для перепаду коефіцієнту тиску на тонкому крилі у в'язкому середовищі, який співпадає з аналогічним виразом для випадку ідеального середовища, потенційного поза вихровими поверхнями:

$$\Delta C_p(\vec r,\tau)=2\left[\vec\gamma\times\vec n\cdot\left(\vec W-\frac{d\,\vec r}{d\tau}\right)+\frac{\partial'}{\partial\tau}\left(\int\limits_{\sigma_1}\vec\gamma_0\times\vec n\cdot\delta\vec r_0+\int\limits_{\vec r_1}^{\vec r}\vec\gamma\times\vec n\cdot\delta\vec r_0\right)\right],\qquad(4)$$

де $\vec n$ – вектор нормалі; $\vec\gamma$ – вектор безрозмірної щільності сумарного вихрового шару крила S; $\vec\gamma_0$ – вектор безрозмірної щільності вільного вихрового шару σ_1 в момент його сходу з передньої крайки крила.

Для коефіцієнту нормальної сили на тонкому крилі S матимемо:

$$C_n(\tau)=\int\limits_S\Delta C_P(\vec r,\tau)\,dr.\qquad(5)$$

Таким чином, застосування узагальненої формули Коші – Лагранжа (1) для розрахунку перепаду тиску на тонкому крилі з урахуванням властивостей вихрового шару (2) і (3) для випадку, коли крило припускається нескінченно тонким, приводить до виразу (4) з першим ступенем при абсолютній швидкості $\vec W$.

З іншого боку, швидкість $\vec W$ будь-якої точки середовища D можна представити у вигляді суми збуреної швидкості $\vec{\overline{W}}$ від сумарної вихрової пелени, яка моделює тіло, що обтікається, та збуреної швидкості $\vec{\tilde W}$ від всіх вихрових пелен, що зійшли з тіла у потік. Це дає можливість представити коефіцієнт нормальної сили у вигляді суми трьох компонент [1]:

– інерційної:

$$C_{ni}(\tau) = 2\int\limits_S \frac{\partial'}{\partial \tau}\left(\int\limits_{\sigma_1} \vec{\gamma}_0 \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 + \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \delta \vec{r}_0 \right) dr ; \tag{6}$$

– циркуляційної:

$$C_{nc}(\tau) = 2\int\limits_S \left[\vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \left(\overline{\widehat{\vec{W}}} - \frac{d\,\vec{r}}{d\tau} \right) \right] dr ; \tag{7}$$

– вихрової:

$$C_{nv}(\tau) = 2\int\limits_S \vec{\gamma} \times \vec{n} \cdot \vec{\bar{W}}\, dr . \tag{8}$$

Дане розділення сил має досить ясну фізичну основу: циркуляційна компонента (7) є аналогом *квазістаціонарної сили Жуковського* для нормальної сили і визначається миттєвим значенням циркуляції відносної швидкості течії по контуру, прилеглому до крила (без урахування вихорів, що зійшли у потік); інерційна компонента (6) є складовою, що залежить від миттєвої приєднаної маси крила і визначається циркуляцією відносного прискорення течії по контуру, прилеглому до крила; вихрова (індуктивна) компонента (8) визначається поточними величиною та розподілом завихреності навколо крила [1 – 3, 5, 6].

Компоненти індукованої швидкості від дискретного вихору з початкової циркуляцією Γ_0 і комплексною координатою z_0 у необмеженому в'язкому середовищі мають вигляд [14]:

$$u = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}\left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} ;$$

$$v = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\left[\left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]. \tag{9}$$

Компоненти наближеної індукованої швидкості від дискретного вихору з початкової циркуляцією Γ_0 і комплексною координатою z_0 при наявності стінки у в'язкому середовищі мають вигляд [12]:

$$u = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}\left[\left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \right.$$
$$\left. - \left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{y+y_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right];$$

$$v = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}\left[\left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2} - \right.$$
$$\left. - \left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{4\nu t}\right]\right\}\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]. \tag{10}$$

Компоненти наближеної індукованої швидкості від дискретного вихору з початковою циркуляцією Γ_0 і комплексною координатою z_0 в каналі шириною H у в'язкому середовищі мають вигляд [12]:

$$u = \frac{-\Gamma_0}{2H}\left\{-\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\exp\left(\frac{2\pi}{H}x\right) + \exp\left(\frac{2\pi}{H}x_0\right) - \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -2\exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0+x)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0+y)\right]\right\}\right)\right] \times$$
$$\times \frac{\exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0-x)\right]\sin\left[\frac{\pi}{H}(y_0+y)\right]}{1 - 2\exp\left[\frac{\pi}{H}(x_0-x)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}(y_0+y)\right] + \exp\left[\frac{2\pi}{H}(x_0-x)\right]} -$$

$$-\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\exp\left(\frac{2\pi}{H}x\right)+\exp\left(\frac{2\pi}{H}x_0\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0+x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]\right\}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\sin\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}\right\};$$

$$v=\frac{-\Gamma_0}{2H}\left\{\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\exp\left(\frac{2\pi}{H}x\right)+\exp\left(\frac{2\pi}{H}x_0\right)-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0+x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]\right\}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0+y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}-$$

$$-\left[1-\exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\left\{\exp\left(\frac{2\pi}{H}x\right)+\exp\left(\frac{2\pi}{H}x_0\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0+x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]\right\}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\frac{1-\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]}{1-2\exp\left[\frac{\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{H}\left(y_0-y\right)\right]+\exp\left[\frac{2\pi}{H}\left(x_0-x\right)\right]}\right\}. \quad (11)$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Наведені формули обрахунку компонент наближеної індукованої швидкості від дискретних вихорів при наявності стінки та каналу разом з формулами обрахунку внеску інерційної, вихрової та циркуляційної компонент нормальної сили тонкого крила, яке нестаціонарно рухається у в'язкому середовищі, дозволяють зробити наближене чисельно-аналітичне моделювання генерації та дисперсії завихреності у в'язкому середовищі при наявності стінки та в каналі в рамках удосконаленого методу дискретних вихорів, узагальненого для в'язких вихрових середовищ, та з'ясувати природу навантажень, які виникають на крилі. Представляє інтерес дослідити вплив в'язкості середовища, наявності твердих границь та закону махів крила на внесок компонент різної природи у навантаження на крилі.

Список літератури

1. *Shekhovtsov A. V.* Inertial-vortical principle of animal flight. In: W. Nachtigall & A. Wisser (eds): BIONA–report 12, Akad. Wiss. u. Lit., Mainz: G. Fischer, Stuttgart, Jena, Lübeck, Ulm, 1998. – P. 307 – 316.
2. *Шеховцов А. В.* Инерционно–вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых // Прикладная гидромеханика. – 2011. – Том 13 (85). – № 1. – С. 61 – 76. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.
3. *Sergey Shkarayev*, *Gunjan Maniar*, *Alexander V. Shekhovtsov*. Experimental and Computational Modeling of the Kinematics and Aerodynamics of Flapping Wing // Journal of Aircraft. – 2013. – Vol. 50. – № 6. – P. 1734 – 1747. DOI: 10.2514/1.C032053.
4. *Willmott A. P.*, *Ellington C. P.*, *Thomas A. L. R.* Flow visualization and unsteady aerodynamic mechanisms in the flight of the hawkmoth Manduca sexta // Phil. Trans. R. Soc. Lond. B. – 1997. – Vol. 352. – P. 303 – 316.
5. *Шеховцов А. В.* Инерционно–циркуляционный принцип плавания и полёта гидро- и аэробионтов. Часть 1 // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2021. № 1 (135). С. 200–205.
6. *Шеховцов А. В.* Инерционно-циркуляционный принцип плавания и полёта гидро- и аэробионтов. Часть 2 // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2021. – № 1 (135). – С. 206 – 211.
7. *Wang Z. J.* The role of drag in insect hovering // J Exp. Biol. – 2004. – Vol. 207. – P. 4147 – 4155. DOI: 10.1242/jeb.01239.
8. *Довгий С. А.*, *Шеховцов А. В.* Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках // Вісник Харківського національного університету. Серія: математичне моделювання, інформаційні технології, автоматизовані системи управління. – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2009. – Вип. 12. – № 863. – С. 111 – 128.
9. *Dovgiy S. A.*, *Shekhovtsov A. V.* An improved vortex lattice method for nonstationary problems // Journal of mathematical sciences. – 2001. – Vol. 104. – No. 6. – P. 1615 – 1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.

10. *Shekhovtsov A. V.* A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential-vortical domain adjacent to the rotating wing // International journal of fluid mechanics research. – 2002. – Vol. 29. – N. 1. – P. 111 – 123. (Те саме: Шеховцов А. В. Метод расчета нестационарного поля давления в области завихренности при наличии подвижных границ. Деп. в ГНТБ Украины 06.07.95. № 1693. Ук95. (Анот. в РЖ МЖГ. 1996. № 2.). 22 с.). DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.
11. *Дынникова Г. Я.* Аналог интегралов Бернулли и Коши–Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // Изв. РАН МЖГ. – 2000. – № 1. – С. 31 – 41.
12. *Шеховцов А. В.* Выражения для функции тока, скорости и завихренности вязкого нестационарного течения с проскальзыванием от вихря вблизи стенки и в канале // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – № 8 (1333). – С. 199 – 204.
13. *Дынникова Г. Я.* Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН МЖГ. – 2003. – № 5. – С. 11 – 19.
14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1987. – 840 с.

References (transliterated)

1. Shekhovtsov A. V. Inertial-vortical principle of animal flight. In: W. Nachtigall & A. Wisser (eds): *BIONA–report 12*, Akad. Wiss. u. Lit., Mainz: G. Fischer, Stuttgart, Jena, Lübeck, Ulm. 1998, pp. 307–316.
2. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-vikhrevoy printsip generatsii usiliy na kryl'yakh nasekomykh [Inertial–vortical principle of generation of efforts on insect wings]. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied fluid mechanics]. 2011, vol. 13 (85), no. 1, pp. 61–76. DOI: 10.1615/InterJFluidMech Res.v29.i1.70.
3. Sergey Shkarayev, Gunjan Maniar, Alexander V. Shekhovtsov. Experimental and computational modeling of the kinematics and aerodynamics of flapping wing. *Journal of aircraft*. 2013, vol. 50, no. 6, pp. 1734–1747. DOI: 10.2514/1.C032053.
4. Willmott A. P., Ellington C. P., Thomas A. L. R. Flow visualization and unsteady aerodynamic mechanisms in the flight of the hawkmoth Manduca sexta. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 1997, vol. 352, pp. 303–316.
5. Shekhovtsov A. V. Inertsionno-tsirkulyatsionnyy printsip plavaniya i polyota gidro- i aerobiontov. Chast 1 [Inertial–circulating principle of swimming and flight of hydro- and aerobionts. Part 1]. *Zhurnal obchyslyuval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of numerical and applied mathematics]. 2021, no. 1 (135), pp. 200–205.
6. *Shekhovtsov A. V.* Inertsionno–tsirkulyatsionnyiy printsip plavaniya i polyota gidro- i aerobiontov. Chast 2 [Inertial–circulating principle of swimming and flight of hydro- and aerobionts. Part 2] *Zhurnal obchysliuvalnoi ta prykladnoi matematyky* [Journal of numerical and applied mathematics]. 2021, no. 1 (135), pp. 206–211.
7. Wang Z. J. The role of drag in insect hovering. *J Exp. Biol.* 2004, vol. 207, pp. 4147–4155. DOI: 10.1242/jeb.01239.
8. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. Aprobatsiya IMDV dlya klassa zadach o kolebaniyakh kryla v vyazkoy srede s ogranichennym resheniyem na kromkakh [Approbation the IMDV for a class of problems about oscillations of a wing in a viscous medium with a restricted solution on edges]. *Visnyk Kharkivs'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya : matematychne modelyuvannya, informatsíyní tekhnologíyi, avtomatyzovaní systemy upravlínnya* [Bulletin of KhNU. Series: mathematical modeling, information technology, automated control systems]. Kharkov, KhNU im. V.N. Karazina Publ., 2009, issue 12, no. 863, pp. 111–128.
9. Dovgiy S. A., Shekhovtsov A. V. An improved vortex lattice method for nonstationary problems. *Journal of mathematical sciences*. 2001, vol. 104, no. 6, pp. 1615–1627. DOI: 10.1023/A:1011325112413.
10. Shekhovtsov A. V. A Method for evaluation of an unsteady pressure field in a mixed potential–vortical domain adjacent to the rotating wing. *International journal of fluid mechanics research.* 2002, vol. 29, no. 1, pp. 111–123. (The same: *Shekhovtsov A. V.* Metod rascheta nestatsionarnogo polya davleniya v oblasti zavihrennosti pri nalichii podvizhnyih granits. *Dep. v GNTB Ukrainy* 06.07.95, no. 1693. Uk95. (Anot. v RZh MZhG. 1996, no. 2.). 22 p.). DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v29.i1.70.
11. Dyinnikova G. Ya. Analog integralov Bernulli i Koshi – Lagranzha dlya nestatsionarnogo vikhrevogo techeniya ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [An analogue of the Bernoulli and Cauchy–Lagrange integrals for an unsteady vortex flow of an ideal incompressible fluid] *Izv. RAN MZhG* [Proceedings of the Russian academy of sciences "Mechanics of liquid, gas and plasma"]. 2000, no. 1, pp. 31–41.
12. Shekhovtsov A. V. Vyrazheniya dlya funktsii toka, skorosti i zavikhrennosti vyazkogo nestatsionarnogo techeniya s proskal'zyvaniem ot vikhrya vblizi stenki i v kanale [Expressions for the stream function, velocity and vorticity of the viscous unsteady flow with slip induced by vortex near the wall and in the channel]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*. [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2019, no. 8 (1333), pp. 199–204.
13. Dyinnikova G. Ya. Dvizhenie vikhrey v dvumernykh techeniyakh vyazkoy zhidkosti [Vortex motion in two-dimensional viscous fluid flows] *Izv. RAN MZhG* [Proceedings of the Russian academy of sciences "Mechanics of liquid, gas and plasma"]. 2003, no. 5, pp. 11–19.
14. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 840 p.

Надійшла (received) 15.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Шеховцов Олександр Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту гідромеханіки Національної академії наук України, м. Київ; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.

Шеховцов Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института гидромеханики Национальной академии наук Украины, г. Киев; тел.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.

Shekhovtsov Alexander Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Research Fellow at the Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (095) 520-27-47; e-mail: avshekhovtsov@gmail.com.