УДК 519.6 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.30**

Д. Я. ХУСАІНОВ, А. В. ШАТИРКО, Є. Р. ГАГУРІН

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ В СИСТЕМАХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

У статті розглядаються основні питання теорії стабілізації для різницевих систем за допомогою другого методу Ляпунова, який базується на знаходженні так званих ляпуновських функцій та дослідженні їх поведінки. Автори аналізують питання про існування оптимальних розв'язків та їхню неперервну залежність від початкових умов, параметрів системи та різницевих операторів, які можуть бути корисні при проектуванні та оптимізації різних систем. Автори використовують другий метод Ляпунова для знаходження оптимального керування та встановлюють умови його існування. В результаті дослідження встановлюється асимптотична стійкість системи при застосуванні оптимального керування. В роботі були розглянуті системи зі скалярним керуванням та з діагональною матрицею при керуванні, а також з критерієм якості загального виду. Результати дослідження включають розробку нових методів та алгоритмів оптимальної стабілізації систем, що можуть бути використані для практичних застосувань у різних галузях, таких як автоматичне керування, робототехніка, електротехніка та інші. У статті були надані основні теоретичні відомості, результати експериментів та встановлені закономірності у вирішенні проблеми. Основний акцент було зроблено на важливі відкриття, нові рішення та висновки. Дана робота дає можливість ознайомитися з основними результатами дослідження та визначити його актуальність для наукової галузі. Було сформульовано умови існування оптимального стабілізуючого керування й доведено теорему про оптимальну стабілізацію в системах різницевих рівнянь. Для різницевих систем зі скалярним керуванням у вигляді теореми було визначено загальний вигляд функції стабілізуючого керування. Аналогічні задачі були розв'язані для системи з діагональною матрицею оптимізації при керуванні, а також для систем з матрицею загального вигляду в критерії якості.

Ключові слова: оптимальна стабілізація, різницеві рівняння, другий метод Ляпунова, скалярне керування, діагональна матриця при керуванні, критерій якості загального виду, асимптотична стійкість.

Д. Я. ХУСАИНОВ, А. В. ШАТЫРКО, Е. Р. ГАГУРИН

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМАХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматриваются основные вопросы теории стабилизации для разностных систем с помощью второго метода Ляпунова, основанного на нахождении так называемых ляпуновских функций и исследовании их поведения. Авторы анализируют вопросы о существовании оптимальных решений и их непрерывной зависимости от начальных условий, параметров системы и разностных операторов, которые могут быть полезны при проектировании и оптимизации различных систем. Авторы используют второй метод Ляпунова для нахождения оптимального управления и устанавливают условия его существования. В результате исследования устанавливается асимптотическая стойкость системы при применении оптимального управления. В работе были рассмотрены системы со скалярным управлением и диагональной матрицей при управлении, а также с критерием качества общего вида. Результаты исследования включают в себя разработку новых методов и алгоритмов оптимальной стабилизации систем, которые могут быть использованы для практических применений в различных областях, таких как автоматическое управление, робототехника, электротехника и другие. В статье были даны основные теоретические сведения, результаты экспериментов и установлены закономерности в решении проблемы. Основной упор был сделан на важные открытия, новые решения и выводы. Данная работа позволяет ознакомиться с основными результатами исследования и определить его актуальность для научной отрасли. Были сформулированы условия существования оптимального стабилизирующего управления и доказана теорема об оптимальной стабилизации в системах разностных уравнений. Для разностных систем со скалярным управлением в виде теоремы был определен общий вид функции стабилизирующего управления. Аналогичные задачи были решены для системы с диагональной матрицей оптимизации при управлении, а также для систем с матрицей общего вида в критерии качества.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, разностное уравнение, второй метод Ляпунова, скалярное управление, диагональная матрица при управлении, критерий качества общего вида, асимптотическая устойчивость.

D. YA. KHUSAINOV, A. V. SHATYRKO, YE. R. HAHURIN

OPTIMAL STABILIZATION IN SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS

The authors analyze the issues of stabilization theory for difference systems using the second Lyapunov method, which is based on finding so-called Lyapunov functions and studying their behavior. The authors investigate the existence of optimal solutions and their continuous dependence on initial conditions, system parameters, and difference operators, which can be useful in designing and optimizing various systems. The authors use the second Lyapunov method to find optimal control and establish conditions for its existence. As a result of the study, the asymptotic stability of the system is established when applying optimal control. In the work systems with scalar control and diagonal matrix control, as well as with performance criterion of general type are considered. The results of the study include the development of new methods and algorithms for optimal system stabilization, which can be used for practical applications in various fields such as automatic control, robotics, electrical engineering, and others. The article provides basic theoretical information, experimental results, and established regularities in solving the problem. The main emphasis is on important discoveries, new solutions, and conclusions. It allows readers to familiarize themselves with the main research results and determine its relevance to the scientific field. The conditions for the existence of optimal stabilizing control are formulated, and a theorem on optimal stabilization in difference equations systems is proved. For difference systems with scalar control, the general form of the stabilizing control function is determined as a theorem. Similar problems were solved for the system with a diagonal optimization matrix in control and systems with a matrix in the general type performance criterion.

Key words: optimal stabilization, difference equations, second Lyapunov method, scalar control, diagonal matrix control, general performance criterion, asymptotic stability.

Вступ. В статті розглядається *проблема оптимальної стабілізації систем різницевих рівнянь з діагональним керуванням*. Дана проблема є актуальною для багатьох галузей, таких як автоматичне управління, робототехніка, електроніка, економіка та інші. В роботі будуть розглянуті результати дослідження застосування *другого методу Ляпунова* для отримання умов оптимальної стабілізації, а також розглянуті *питання асимптотичної стійкості систем*. Результати дослідження можуть бути корисними для проектування ефективних систем управління з використанням різницевих рівнянь.

Аналіз останніх досліджень. При розв’язанні оптимізаційних задач в *динамічних системах* використовуються два підходи. Перший полягає в знаходженні *фіксованого керування*, при якому система досягає заданого значення та мінімізується *інтегральний критерій* за скінчений проміжок часу. [1, 2]. Другий метод являє по суті *задачу оптимальної стабілізації*. Він полягає в знаходженні *функції керування* у вигляді *оберненого зв’язку*, при якій нульовий розв’язок стає асимптотично стійким, а інтегральний критерій якості досягає мінімального значення. Він базується на методі функцій Ляпунова. Деякі результати з цього напрямку були отримані в роботах [5 – 9]. Слід відзначити, що робіт, присвячених дослідженню систем диференціальних рівнянь, досить багато, а от робіт з дослідження різницевих рівнянь значно менше. З них слід відзначити [3, 4]. Розглянемо основні положення методу оптимальних функцій Ляпунова стосовно до динамічних систем, які описуються системами різницевих рівнянь.

Оптимальні функції Ляпунова для різницевих систем. Наведемо загальні положення про оптимальну стабілізацію в системах різницевих рівнянь з використанням другого методу Ляпунова. Розглянемо задачу оптимальної стабілізації нульового стану рівноваги $x(k)\equiv 0$ системи дискретних рівнянь:

$$x(k+1)=f\big(k,x(k),u(k)\big),\ x(k)\in R^n,\ u(k)\in R^m,\ k=0,1,2,\ldots. \tag{1}$$

Постановка задачі ставиться наступним чином. Треба знайти функцію керування $u(k)\in R^m$, $k=0,1,2,\ldots$, яка забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв’язку системи (1) і найкращу якість перехідного процесу, який виражений у вигляді суми якостей вздовж розв’язків системи (1):

$$I\Big[x(k),u\big(x(k)\big)\Big]=\sum_{k=0}^{\infty}\omega\big(k,x(k),u(k)\big). \tag{2}$$

Тут $\omega(k,x,u)$ невід’ємна функція, яка визначена в області:

$$k=0,1,2,\ldots,\ |x|<H,\ |x|=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Зокрема, для лінійних систем *функція якості* може мати квадратичний вигляд:

$$\omega(x,u)=x^TCx+u^TDu$$

з додатно визначеними матрицями C і D.

Задача оптимальної стабілізації для систем різницевих рівнянь розв’язується аналогічно задачі стабілізації для систем диференціальних рівнянь [1, 2]. Має місце наступне твердження.

Теорема (про оптимальну стабілізацію в системах різницевих рівнянь). *Нехай для системи різницевих рівнянь збуреного руху (1) існують додатно визначена функція* $V_0(x,k)$, *яка має нескінченно малу вищу границю, і функція* $u_0(x,k)$, *що задовольняють наступним умовам*:

1) *функція* $\omega\big(k,x,u_0(x,k)\big)$ *є додатно визначеною*;
2) *виконується умова* $B_\Delta\big[V_0(x,k),k,x,u_0(x,k)\big]\equiv 0$;
3) *для будь яких інших функцій керування* $u(x,k)$ *виконується нерівність*:

$$B_\Delta\big[V(x,k),k,x,u(x,k)\big]\ge 0,$$

де

$$B_\Delta[V,k,x,u]=\Big[V\big(k+1,x(k+1),k+1\big)-V\big(x(k),k\big)\Big]+\omega\big(k,x,u(x,k)\big).$$

Тоді функція $u_0(x,k)$ *розв’язує задачу оптимальної стабілізації. При цьому виконується*:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega\Big(k,x(k),u_0\big(x(k),k\big)\Big)=\min_u\Big\{\omega\Big(k,x(k),u\big(x(k),k\big)\Big)\Big\}=V_0\big(x(k_0),k_0\big). \tag{4}$$

Доведення.

Доведення даної теореми аналогічно доведенню теореми про оптимізацію в диференціальних системах. Нехай $u_0(x,k)$ – функція керування, яка задовольняє умовам теореми, а $V_0(x,k)$ – відповідна функція Ляпунова. Перша різниця функції Ляпунова $V_0(x,k)$ в силу системи (1) має вигляд:

$$\Delta V_0\big(x(k),k\big)=V_0\Big(f\big(x(k),u(k),k\big)\Big)-V\big(x(k),k\big)=-\omega\big(x(k),u(k),k\big) \tag{5}$$

і, як випливає з умов теореми, є від’ємно визначеною функцією. Тоді, як випливає з другої теореми Ляпунова для систем різницевих рівнянь [3, 4], нульовий розв’язок буде асимптотично стійким. Таким чином, функція керування $u_0(x,k)$ розв’язує задачу стабілізації.

Покажемо, що вона розв'язує і задачу оптимальної стабілізації, тобто при цьому керуванні критерій якості (2) досягає мінімального значення і виконується рівняння (4).

В силу асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги для довільного розв'язку $x(k)$ системи (1) буде виконуватись умова

$$\lim_{k\to+\infty} V_0\left(x(k),k\right)=0 .$$

Підсумовуючи залежність (5) вздовж розв'язку $x(k)$ і, використовуючи записану рівність, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(k,x(k),u_0\left(x(k),k\right)\right)=-\lim_{k\to+\infty}V_0\left(x(k),k\right)+V_0\left(x(k_0),k_0\right)=V_0\left(x(k_0),k_0\right).$$

Теорема доведена.

Оптимальна стабілізація лінійних систем зі скалярним керуванням. Розглянемо використання запропонованого підходу щодо оптимізації систем лінійних стаціонарних різницевих рівнянь. Розглянемо лінійну систему зі скалярним керуванням:

$$x(k+1)=Ax(k)+bu\left(x(k)\right),\ A\in R^{n\times n},\ b\in R^n,\ x(k)\in R^n,\ u(k)\in R^1. \tag{6}$$

Треба знайти керування $u_0(x)$, при якому система (6) є асимптотично стійкою і критерій якості

$$I\left[x(k),u\left(x(k)\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{x^T(k)Cx(k)+du^2\left(x(k)\right)\right\} \tag{7}$$

буде досягати мінімального значення. Тут C симетрична, додатно визначена матриця, $d>0$.

Нехай матриця $A\in R^{n\times n}$ є асимптотично стійкою (в розумінні різницевих систем, тобто власні числа матриці задовольняють умові $\left|\lambda_i(A)\right|<1,\ i=1,2,...,n$), а H – симетрична, додатно визначена матриця, що є розв'язком *матричного рівняння Ляпунова*:

$$A^T HA-H=-C . \tag{8}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 1. *Нехай H – розв'язок матричного різницевого рівняння Ляпунова (8) з додатно визначеною матрицею C, яка входить в інтегральний критерій якості (7). Тоді стабілізуюче керування $u_0(x)$, яке оптимізує інтегральний критерій якості, має вигляд*:

$$u_0\left(x(k)\right)=-\frac{1}{2\left[d+b^T Hb\right]}b^T HAx(k). \tag{9}$$

Доведення.

Розв'язок задачі шукаємо методом функцій Ляпунова. Функція береться у вигляді квадратичної форми $V(x)=x^T Hx$, де $H\in R^{n\times n}$ – симетрична, додатно визначена матриця. Перша різниця функції Ляпунова $V(x)=x^T Hx$ в силу системи (6) має вигляд:

$$\Delta V\left(x(k)\right)=\left[Ax(k)+bu\left(x(k)\right)\right]^T H\left[Ax(k)+bu\left(x(k)\right)\right]-x^T(k)Hx(k).$$

Прирівнявши отримане значення виразу в сумі (7), отримаємо:

$$\left[Ax(k)+bu\left(x(k)\right)\right]^T H\left[Ax(k)+bu\left(x(k)\right)\right]-x^T(k)Hx(k)=-x^T(t)Cx(t)-du^2\left(x(k)\right).$$

Прирівнявши відповідні члени, отримаємо дві підсистеми:

$$x^T(k)\left[A^T HA-H\right]x^T(k)=-x^T(k)Cx(k);$$

$$u\left(x(k)\right)b^T HAx(k)+x^T(k)A^T Hbu\left(x(k)\right)+b^T Hbu^2\left(x(k)\right)=-du^2\left(x(k)\right).$$

З першої підсистеми отримаємо, що H є розв'язком різницевого матричного рівняння Ляпунова (8):

$$A^T HA-H=-C .$$

Відомо [3], якщо матриця A асимптотично стійка (в сенсі різницевих рівнянь), то при довільній додатно визначеній матриці C матричне рівняння Ляпунова (8) має єдиний розв'язок – додатно визначену матрицю H .

Розглянемо другу підсистему. Оскільки керування $u(x)$ є скалярною величиною, то скоротивши на неї отримаємо:

$$b^T HAx(k)+x^T(k)A^T Hb=-\left[d+b^T Hb\right]u\left(x(k)\right).$$

Звідси остаточно отримаємо, що оптимальне керування має вигляд:

$$u_0\left(x(k)\right) = -\frac{1}{2\left(d + b^T Hb\right)} b^T HAx(k).$$

Таким чином, при керуванні (9) система (6) буде асимптотично стійкою, а критерій якості (7) буде досягати мінімального значення, що дорівнює

$$I\left[x_0(t), u_0\left(x(t)\right)\right] = x_0^T Hx_0.$$

Теорема доведена.

Системи з діагональною матрицею оптимізації при керуванні. Розглянемо різницеву систему більш загального вигляду:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu\left(x(k)\right), \ A \in R^{n\times n}, \ B \in R^{n\times n} \ x(k) \in R^n, \ u\left(x(k)\right) \in R^n. \tag{10}$$

Треба знайти керування $u_0\left(x(k)\right)$, при якому система буде асимптотично стійкою, а критерій якості

$$I\left[x(k), u\left(x(k)\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{x^T(k)Cx(k) + u^T\left(x(k)\right)\Lambda_d u\left(x(k)\right)\right\} \tag{11}$$

буде досягати мінімального значення. Тут $C \in R^{n\times n}$ симетрична, додатно визначена матриця, $\Lambda_d = diag\left\{d_{jj}\right\}$, $d_{jj} > 0$, $j = \overline{1,n}$ діагональна матриця вигляду:

$$\Delta_d = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай H – розв'язок матричного різницевого рівняння (10) з додатно визначеною матрицею C, яка входить в інтегральний критерій якості (11). Тоді стабілізуюче керування $u_0(x)$, що оптимізує інтегральний критерій якості (11), має вигляд*:

$$u_0(x) = -\left[D(d) + N(B,H)\right]^{-1}\left[L(A,B,H) + L^T(A,B,H)\right]x. \tag{12}$$

де

$$L(A,B,H) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ . & . & ... & . \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix};$$

$$N(B,H) = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & ... & n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} & ... & n_{2n} \\ . & . & ... & . \\ n_{n1} & n_{n2} & ... & n_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix};$$

$$D(d) = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ . & . & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Як і в попередньому випадку, функція Ляпунова береться у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Hx$. Її перша різниця в силу різницевої системи (10) має вигляд:

$$\Delta V\left(x(k)\right) = \left[Ax(k) + Bu\left(x(k)\right)\right]^T H\left[Ax(k) + Bu\left(x(k)\right)\right] - x^T(k)Hx(k).$$

Прирівнявши її виразу в сумі (11), отримаємо:

$$\left[Ax(k) + Bu\left(x(k)\right)\right]^T H\left[Ax(k) + Bu\left(x(k)\right)\right] - x^T(k)Hx(k) = -x^T(k)Cx(k) - u^T\left(x(k)\right)\Lambda_d u\left(x(k)\right).$$

Оскільки матриця H є розв'язком матричного рівняння Ляпунова, то прирівнявши відповідні члени, маємо дві підсистеми:

$$x^T(k)\left[A^T HA - H\right]x^T(k) = -x^T(k)Cx(k).$$

Залишається

$$u^T\left(x(k)\right)B^T HAx(k) + x^T(k)A^T HBu\left(x(k)\right) + u^T\left(x(k)\right)B^T HBu\left(x(k)\right) = -u^T\left(x(k)\right)\Lambda_d u\left(x(k)\right).$$

Перепишемо це рівняння у матричному вигляді:

$$(u_1, u_2, ..., u_n)\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n\end{pmatrix}+$$

$$+(x_1, x_2, ..., x_n)\times\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ . & . & ... & . \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n\end{pmatrix}+$$

$$+(u_1, u_2, ..., u_n)\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n\end{pmatrix}=$$

$$=-(u_1, u_2, ..., u_n)\times\begin{bmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & d_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n\end{pmatrix}.$$

Введемо наступні векторно-матричні позначення:

$$L(A, B, H) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ . & . & ... & . \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{bmatrix};$$

$$N(B, H) = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & ... & n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} & ... & n_{2n} \\ . & . & ... & . \\ n_{n1} & n_{n2} & ... & n_{nn}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} \\ . & . & ... & . \\ b_{1n} & b_{2n} & ... & b_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & ... & h_{2n} \\ . & . & ... & . \\ h_{1n} & h_{2n} & ... & h_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & ... & . \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn}\end{bmatrix};$$

$$\Lambda_d = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ . & . & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn}\end{bmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n\end{pmatrix}.$$

Тоді отримане рівняння буде мати вигляд:

$$u^T \times L(A, B, H)\times x + x^T L^T(A, B, H)u + u^T N(B, H)u = -u^T\Lambda_d u.$$

Якщо шукати лише ненульові (відносно u_i, $i = 1, 2, ..., n$) розв'язки, то отримаємо вектор:

$$u = -\left[\Lambda_d + N(B, H)\right]^{-1}\left[L(A, B, H) + L^T(A, B, H)\right]x.$$

Теорема доведена.

Стабілізація систем з матрицею в критерії якості загального вигляду. Нарешті, розглянемо випадок, коли матриця A вихідної системи асимптотично стійка, а критерій якості загального вигляду:

$$I\left[x(t), u\left(x(t)\right)\right] = \int_0^\infty \left\{x^T(t)Cx(t) + u^T\left(x(t)\right)Du\left(x(t)\right)\right\}dt. \tag{13}$$

Матриця $D \in R_{n\times n}$ не э діагональною, але її власні числа додатні, тобто $\lambda_i(D) = d_i > 0$, $i = 1, ..., n$.

Теорема 3. *Нехай H – розв'язок різницевого матричного рівняння Ляпунова (8) з додатно визначеною матрицею C, яка входить в інтегральний критерій якості (13). Тоді стабілізуюче керування $u_0(x)$, яке оптимі-*

зує інтегральний критерій якості (13), має вигляд:

$$u_0(x) = Sz_0(x), \quad S^{-1}DS = \Lambda_d,$$

$$z_0(x) = -\left[D(d) + N(B,H)\right]^{-1}\left[L(A,B,H) + L^T(A,B,H)\right]x, \tag{14}$$

де

$$L(A,B,H) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

$$N(B,H) = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1n} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix};$$

$$D(d) = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix};$$

$$u_0(x) = Sz_0(x), \quad S^{-1}DS = \Lambda_d, \quad \Lambda_d = diag\{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}.$$

Тут S дійсна ортогональна матриця, яка приводить матрицю D до діагонального вигляду.

Доведення.

Зробимо наступні перетворення. Векторну функцію керування $u_0(x) \in R^n$ шукаємо у вигляді:

$$u_0(x) = Sz_0(x), \tag{15}$$

де S – деяка неособлива матриця. Критерій якості вже буде мати вигляд:

$$I\left[x(t), Sz(x(t))\right] = \int_0^\infty \left\{x^T(t)Cx(t) + z^T(x(t))S^T DSz(x(t))\right\}dt. \tag{16}$$

Якщо матриця D дійсна, симетрична, то вона ортогонально-подібна деякій діагональній матриці Λ_d, тобто існує дійсна ортогональна матриця S, така що:

$$S^{-1}DS = \Lambda_d, \quad \Lambda_d = diag\{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}.$$

Тут $0 \le d_{11} \le d_{22} \le \dots \le d_{nn}$ характеристичні числа матриці D. Оскільки для ортогональної матриці виконується $S^{-1} = S^T$, то квадратична форма $u^T Du$ при ортогональному перетворенні $u = Sz$ $\left(SS^T = I\right)$ переходить в діагональну квадратичну форму:

$$z^T \Lambda_d z = \sum_{i=1}^n d_{ii} z_i^2.$$

Таким чином, після перетворення (15) критерій якості (13) системи керування (10) буде мати вигляд:

$$I\left[x(t), z(x(t))\right] = \int_0^\infty \left\{x^T(t)Cx(t) + z^T(x(t))\Lambda_d z(x(t))\right\}dt,$$

де матриця Λ_d вже є матрицею діагонального вигляду. І повертаємось до попереднього випадку.

Теорема доведена.

Висновки. У цій статті ми розглянули питання оптимальної стабілізації систем різницевих рівнянь за допомогою складних математичних методів. Ми проаналізували другий метод Ляпунова для систем різницевих рівнянь, що дозволяє знайти оптимальне керування, яке забезпечує асимптотичну стійкість системи до нуля. Було продемонстровано, що з використанням діагональної матриці при керуванні можна знизити розмірність системи і забезпечити її стійкість. Крім того, ми розглянули критерій якості загального виду, який дозволяє оцінити ефективність оптимального керування. Отже, можна зробити висновок, що застосування математичних методів, таких, як другий метод Ляпунова, дозволяє знайти оптимальне керування для систем різницевих рівнянь, що забезпечує їх стійкість та ефективність. Це може бути корисно в різних галузях, де застосовуються системи з дискретним часом.

Список літератури

1. *Бублик Б. Н.*, *Кириченко Н. Ф.* Основы теории управления. – Киев : Выща школа, 1975. – 328 с.
2. *Крак Ю. В.*, *Шатирко А. В.* Теорія керування для інформатиків. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. – 175 с.
3. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К. : Наукова думка. – 1972. – 246 с.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банановому просторі. – Рівне : Вид-во УДУВГП, 2003. – 366 с.
5. *Мартинюк А. А.*, *Чернієнко В. О.* Про стабілізацію руху неавтономних поліноміальних систем // Прикладна механіка. – 2021. – Т.57. – №5. – С. 35 – 45.
6. *Онищенко С. М.* Анализ прямых методов жесткого синтеза систем стабилизации. – Препр. / НАН Украины. Институт математики. – 1997. – 79 с.
7. *Hanna Demchenko*, *Josef Diblik*, *Denys Khusainov*. Optimal Control of the Heating Process with Delay // AIP Conference Proceedings 2293, 340016 (2020); https://doi.org/10.1063/5.0028474. Published Online: 25 November 2020.
8. *Demchenko H.*, *Diblik J.*, *Khusainov D. Ya.* Optimal stabilization for differential systems with delays – Malkin's approach // Journal of the Franklin Institute. – (2019). – 30 p. https://doi.org/10.1016/jfranklin.2019.04.021.
9. *Хусаінов Д. Я.*, *Шатирко А. В.*, *Гагурін Є. Р.* Оптимальна стабілізація в диференціальних рівняннях // Обчислювальна та прикладна математика. – 2022. – Вип. 2. – С. 158 – 164.

References (transliterated)

1. Bublik B. N., Kirichenko N. F. *Osnovy teorii upravleniya* [Fundamentals of control theory]. Kyiv, Vyshha shkola Publ., 1975. 328 p.
2. Krak Yu. V., Shatyro A. V. *Teoriya keruvannya dlya informatykiv* [Control theory for computer scientists]. Kyiv, VPTs "Kyivs'kyy Universytet" Publ., 2015. 175 p.
3. Martynyuk D. I. *Lektsii po kachestvennoy teorii raznostnykh upravleniy* [Lectures on qualitative theory of difference equations]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1972. 246 p.
4. Slyusarchuk V. Yu. *Stiykist' rozv"yazkiv riznytsevukh rivnyan' u bananovomu prostori* [Stability of solutions of difference equations in the banana space]. Rivne, Vyd-vo UDUVGP publ., 2003. 366 p.
5. Martynyuk A. A., Chernienko V. O. Pro stabilizatsiyu rukhu neavtonomnykh polinomial'nykh system [On stabilization of motion of non-autonomous polynomial systems]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 2021, vol. 57, no. 5, pp. 35–45.
6. Onyshhenko S. M. *Analiz pryamykh metodov zhyestkogo sinteza system stabilizatsii (prepr.)* [Analysis of direct methods of rigid synthesis of stabilization systems (preprint)]. NAN of Ukrainy. In-t matematiki [National Academy of Science of Ukraine. Institute of Mathematics]. 1997. 79 p.
7. Hanna Demchenko, Josef Diblik, Denys Khusainov. Optimal Control of the Heating Process with Delay. *AIP Conference Proceedings*. 2293, 340016 (2020); https://doi.org/10.1063/5.0028474. Published Online: 25 November 2020.
8. Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya. Optimal stabilization for differential systems with delays – Malkin's approach. *Journal of the Franklin Institute*. 2019, 30 p. https://doi.org/10.1016/jfranklin.2019.04.021.
9. Khusainov D. Ya., Shatyro A. V., Gagurin Ye. R. Optymal'na stabilizatsiya v dyferentsial'nykh rivnyannyakh [Optimal stabilization in differential equations]. *Obchyslyuval'na ta prykladna matematyka* [Computational and Applied Mathematics]. 2022, vol. 2, pp. 158–164.

Надійшла (received) 08.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хусаінов Денис Ях'євич – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 564-90-19; e-mail: d.y.khusainov@gmail.com.

Хусаинов Денис Яхьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры моделирования сложных систем, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (099) 564 -90-19; e-mail: d.y.khusainov@gmail.com.

Khusainov Denys Yakhyevych – Dr.sc. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, member of the National Academy of Sciences of Ukraine, and Head of the Department of Applied Informatics at Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv; tel.: (099) 564-90-19; e-mail: d.y.khusainov@gmail.com.

Шатирко Андрій Володимирович – доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 469-38-17; e-mail: shatyrko.a@knu.ua.

Шатырко Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры моделирования сложных систем, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (050) 469 -38-17; e-mail: shatyrko.a@knu.ua.

Shatyrko Andriy Volodymyrovych – Dr.sc. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Complex Systems Modeling, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (050) 469-38-17; e-mail: shatyrko.a@knu.ua.

Гагурін Євгеній Русланович – студент магістратури, кафедра Дослідження операцій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (098) 427-50-98; e-mail: zhenyahahurin@gmail.com.

Гагурин Евгений Русланович – студент магистратуры, кафедра Исследования операций, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (098) 427-50-98; e-mail: zhenyahahurin@gmail.com.

Hahurin Yevhenii Ruslanovych – Master's degree student, Department of Operations Research, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (098) 427-50-98; e-mail: zhenyahahurin@gmail.com.