УДК 519.6 DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.27

В. В. СОБЧУК, В. А. НЕДБАЙЛО

ПЕРІОДИЧНІ РЕЖИМИ В МОДЕЛІ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Робота присвячена встановленню умов існування періодичних режимів в моделі математичного маятника з імпульсною дією. Важливим аспектом є те, що така система зазнає дії миттєвих сил у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення. До того ж вона піддається імпульсній дії в нефіксовані моменти часу та збільшує кількість руху в такі моменти на деяку величину. У роботі наведені деякі теоретичні аспекти, а також наведено опис послідовності моментів часу, що описує механізм зведення задачі з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу до задачі про пошук нерухомих точок інтервалу в себе. Актуальність та ступінь дослідженості проблеми розкривається шляхом порівняння існуючих розв'язків задачі та знаходження і доповнення новими. Власне в цьому і є головне завдання цієї роботи. Його виконання потребує дослідити існування умов, що забезпечують існування циклів, яким відповідають періодичні розв'язки. В роботі досліджено диференціальне рівняння другого порядку з імпульсною дією у конкретному випадку при фіксованому значенні положення імпульсної дії в залежності від значень параметрів у функції імпульсної дії. Як результат було знайдено два цикли періоду три. Також продемонстровано шляхом перевірки, що наведені цикли утворюють періодичні розв'язки. Отримані результати записано максимально детально та інформативно. В роботі отримано явний вигляд точок, що гарантують існування періодичних режимів в системі математичного маятника з імпульсною дією та наведено два графіки, що демонструють результати досліду: проілюстровано в кольорах як змінюються траєкторії після кожної дії імпульсних сил. Використовуючи наслідок з теореми Шарковського, показано, що якщо функція є неперервною і має періодичну точку періоду три, то вона має періодичні точки будь-якого натурального періоду. Відтак, в системі існують такі періодичні режими, при яких фазова точка зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, де n – довільне натуральне число.

Ключові слова: математичний маятник, періодичні розв'язки, імпульсна дія, моменти часу, цикли, періодичні точки.

В. В. СОБЧУК, В. А. НЕДБАЙЛО

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ИМПУЛЬСНЫМ ДЕЙСТВИЕМ

Работа посвящена установлению условий существования периодических режимов в модели математического маятника с импульсным действием. Важным аспектом является то, что такая система подвергается действию мгновенных сил в моменты прохождения движущейся точкой некоторого фиксированного положения. К тому же она подвергается импульсному действию в нефиксированные моменты времени и увеличивает количество движения в такие моменты на некоторую величину. В работе приведены некоторые теоретические аспекты, а также приведено описание последовательности моментов времени, описывающей механизм сведения задачи с импульсным действием в нефиксированные моменты времени к задаче поиска неподвижных точек интервала в себя. Актуальность и степень исследования проблемы раскрывается путем сравнения существующих решений задачи и нахождения и дополнения новыми. Собственно, в этом и есть главная задача этой работы. Для ее решения необходимо исследовать существование условий, обеспечивающих существование циклов, которым соответствуют периодические решения. В работе исследовано дифференциальное уравнение второго порядка с импульсным действием в конкретном случае при фиксированном значении положения импульсного действия в зависимости от значений параметров функции импульсного действия. В результате были найдены два цикла периода три. Также продемонстрировано путем проверки, что приведенные циклы образуют периодические решения. Полученные результаты записаны максимально подробно и информативно. В работе получен явный вид точек, гарантирующих существование периодических режимов в системе математического маятника с импульсным действием и приведены два графика, демонстрирующие результаты опыта: проиллюстрировано в цветах как изменяются траектории после каждого действия импульсных сил. Используя следствие из теоремы Шарковского, показано, что если функция непрерывна и имеет периодическую точку периода три, то она имеет периодические точки любого натурального периода. Следовательно, в системе существуют такие периодические режимы, при которых фазовая точка испытывает импульсное действие ровно n раз за период, где n – произвольное натуральное число.

Ключевые слова: математический маятник, периодические решения, импульсное действие, моменты времени, циклы, периодические точки.

V. V. SOBCHUK, V. A. NEDBAILO

PERIODIC MODES IN THE MODEL OF A MATHEMATICAL PENDULUM WITH IMPULSE EFFECT

The article is devoted to establishing the conditions for the existence of periodic regimes of the model of a mathematical pendulum with impulse effect. An important aspect is that such a system is subjected to the action of instantaneous forces at the moments when the moving point passes some fixed position. In addition, it is subjected to impulse action at unfixed moments of time, whereby its amount of movement is increased by a certain amount. The paper presents some theoretical aspects, as well as a description of the sequence of moments of time, which describes the mechanism of reducing the problem with impulse action at unfixed moments of time to the problem of finding fixed points of the interval within itself. The relevance and degree of research of the problem is revealed by comparing existing solutions to the problem and finding and adding new ones. Actually, this is the main task of this work. The resulting problem involves investigating the existence of conditions that ensure the existence of cycles to which periodic solutions correspond. In the work, a second-order differential equation with impulse action is investigated in a specific case with a fixed value of the position of the impulse action depending on the values of the parameters in the impulse action function. As a result, two cycles of period three were found. It is also demonstrated by verification that the given cycles form periodic solutions. The obtained results are recorded as detailed and informative as possible. In the work, a clear view of the points that guarantee the existence of periodic regimes in the system of the mathematical pendulum with impulse action is obtained and two graphs are given, that demonstrate the results of the experiment. It is illustrated in colors how the trajectories change after each action of impulse forces. Using a corollary from Sharkovsky's theorem, it is shown that if a function is continuous and has a periodic point of period three, then it has periodic points of any natural period. Therefore, in the system there are such periodic regimes in which the phase point undergoes impulse action exactly n times per period, where $n \in \mathbb{N}$.

Key words: mathematical pendulum, periodic solutions, impulse action, moments of time, cycles, periodic points.

Вступ. Сучасний розвиток науки часто вимагає дослідження систем, які зазнають впливу *миттєвих сил імпульсної природи*. Вивчення таких систем обумовлене стрімким розвитком техніки та технологій, зокрема широким застосуванням обладнання, в якому значну роль відіграють *імпульсні системи керування* та *імпульсні обчис-*

лювальні системи. Імпульсні системи зустрічаються і в численних *задачах природознавства*, що описуються математичними моделями з умовами, що відображають імпульсну дію зовнішніх сил з імпульсної природи, тривалістю яких можна знехтувати при побудові відповідних математичних моделей. Така ідеалізація призводить до необхідності дослідження систем диференціальних рівнянь, розв'язки яких змінюються стрибкоподібно.

Теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією, до якої зводиться певний клас задач природознавства та техніки, за останні десятиліття збагатилася суттєвими результатами. Складність математичної постановки задачі аналітичного дослідження такого типу систем обумовлена недостатньою плавністю відповідних *динамічних процесів*. Це часто призводить до необхідності розробки *методів дослідження нелінійних систем* диференціальних рівнянь з імпульсними ефектами. Водночас в прикладних застосуваннях важливими є періодичні режими, які виникають в динамічних системах, що зазнають впливу імпульсних сил як у фіксовані, так і у нефіксовані моменти часу. Тому дослідження поведінки розв'язків для систем такого типу є актуальним завданням. Власне, дана робота присвячена дослідженню *періодичних режимів* в *моделі математичного маятника* з імпульсною дією.

Аналіз останніх досліджень. Монографія [1] присвячена дослідженню імпульсних диференціальних рівнянь із заданою та розривною правою частинами. В роботі системно викладені основи класичної теорії імпульсних систем для різних класів диференціальних рівнянь; обґрунтовано метод усереднення в системах з імпульсною дією; виписані результати для деяких елементів багатозначного аналізу.

В роботі [2] доведено експоненціальну стійкість тривіального тора для одного класу нелінійних розширень динамічних систем на торі. Отримані результати застосовані до дослідження стійкості *тороїдальних множин* імпульсних динамічних систем. Умови існування періодичних розв'язків нелінійного осцилятора з імпульсною дією отримано в [3].

Умови існування граничних циклів для *рівняння Льєнара*, розв'язки якого зазнають дії миттєвих сил імпульсної природи в нефіксовані моменти часу, встановлено в [4]. Для даної системи отримано конструктивні умови існування періодичних розв'язків таких, що фазова точка системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає $n \in \mathbb{N}$ імпульсних впливів за період. Доведено існування *єдиного стійкого граничного циклу*, фазова точка якого зазнаватиме дії імпульсних сил $n \in \mathbb{N}$ разів. Показано, що стійкий граничний цикл в заданих умовах існуватиме не зважаючи на наявність впливу дестабілізуючих сил імпульсної природи.

В роботі [5] встановлені умови, що гарантують *гіперболічність систем* диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Отримані умови гіперболічності дозволяють досліджувати існування обмежених розв'язків неоднорідних багатовимірних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

В [6] досліджується проблема існування обмежених розв'язків на всій дійсній осі (на півосі) слабо нелінійних систем диференційних рівнянь з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу; введено поняття *регулярної* і *слабо регулярної системи рівнянь* для класу слабо нелінійних імпульсних систем диференційних рівнянь та отримані достатні умови існування обмеженого розв'язку для неоднорідної системи диференційних рівнянь у випадку слабої регулярності відповідної однорідної системи рівнянь.

У описаних роботах викладені основи якісної теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Фактично у них були закладені основи якісної теорії імпульсних систем, що спираються на якісну теорію диференціальних рівнянь, методи асимптотичного інтегрування таких рівнянь, теорію різницевих рівнянь і узагальнених функцій. Разом з тим, питання існування періодичних режимів для моделі математичного маятника з імпульсною дією вимагає ще додаткових досліджень.

Постановка задачі. Для системи математичного маятника, що задана диференціальним рівнянням другого порядку $\ddot{x} + \sin x = 0$ з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу

$$\Delta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{x=x_*} = I\left(\dot{x}\right)$$

потрібно дослідити умови існування періодичних режимів. Тобто, коли система має періодичну траєкторію з деяким періодом T, при русі по якій фазова точка системи зазнає імпульсної дії рівно n раз за період $T\left(n\right)$, де n – деяке натуральне число.

Математична модель. Система з імпульсною дією в загальному випадку визначається за допомогою диференціального рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right) \tag{1}$$

($x \in M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ – фазовий простір системи (1), $t \in \mathbb{R}$ – час) і умов імпульсної дії, що задаються деякою множиною $\Gamma_t \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ та визначеним на Γ_t оператором A_t, який відображає Γ_t в розширений фазовий простір $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ згідно з правилом $\left(t, x\right) \to \left(t, A_t x\right)$ [1].

Розглянемо систему, рух фазової точки якої описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \tag{2}$$

і яка зазнає дії миттєвих сил у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$. Імпульсна дія в такій динамічній системі відбувається у нефіксовані моменти часу та збільшує в такі моменти кількість руху системи на деяку величину $I(\dot{x})$, що залежить від швидкості рухомої точки в момент проходження нею положення $x = x_*$. Далі вважатимемо, що $I(y)$, де $y = \dot{x}$, як функція свого аргументу є неперервною. Тоді, очевидно, що оператор A_t є неперервним відносно $(x, \dot{x})$. Математично імпульсна дія в системі (2), може бути записана таким чином (3):

$$\Delta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{x=x_*} = I(\dot{x}). \tag{3}$$

Розв'язком задачі (2), (3) є функція $x(t)$, неперервна відносно $t \in \mathbb{R}$ та неперервно диференційована для всіх $t \in \mathbb{R}$ за винятком точок імпульсної дії, в яких її похідна $\dot{x}(t)$ неперервна справа і має в цих точках розриви першого роду.

Рівняння (2) має розв'язки $(x(t), \dot{x}(t))$, які є обмеженими для всіх значень t, та має, зокрема, періодичні траєкторії (цикли). Перший інтеграл [7] рівняння (2) можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x = C,$$

де $C \geq -1$. Звідси випливає, що якщо стала $C \in (-1, 1)$, то розв'язки $(x(t), \dot{x}(t))$ рівняння (2) є періодичними, тобто його траєкторії утворюють цикли, а якщо $C > 1$, то траєкторії рівняння (2) є неперервними незамкненими кривими, що огинають (зверху і знизу) згадані вище цикли. При $C = 1$ та $C = -1$ диференціальне рівняння (2) має особливі точки $x = n\pi$, n – ціле число, серед яких відповідно, точки $x = 2k\pi$ (k – ціле) є особливими точками *типу центр*, що *стійкі за Ляпуновим*, та точки $x = (2k+1)\pi$ (k – ціле) є особливими точками *типу сідло*, що *не стійкі за Ляпуновим* [8]. Крім того, при $C = 1$ рівняння (2) має дві сепаратриси, що з'єднують точки $x = (2k-1)\pi$ та $x = (2k+1)\pi$, де k – ціле число. Якщо початкові умови $(x_0, \dot{x}_0)$ деякого розв'язку $x(t)$ задовольняють умові

$$\frac{\dot{x}_0^2}{2} - \cos x < 1, \text{ або, що те саме, } (x_0, \dot{x}_0) \in \Omega,$$

де

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k, \quad \Omega_k = \left\{ (x, y) : x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \ \frac{y^2}{2} - \cos x < 1, \ \ y = \dot{x} \right\}, \tag{4}$$

то такий розв'язок є періодичним [3].

Теорема 1. *Нехай* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ *– розв'язок задачі* (2), (3), *що задовольняє початкові умови* $x(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = \dot{x}_0$, *для яких виконується одна з умов:*

1) $\dot{x}_0 > 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ *та для всіх* $t \geq t_0$ *виконується нерівність* $x(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) > x_*$;

2) $\dot{x}_0 < 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ *та для всіх* $t \geq t_0$ *виконується нерівність* $x(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) < x_*$.

Тоді фазова точка системи (2), (3) *не зазнає імпульсної дії ні при жодному* $t \geq t_0$, *а розв'язок* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ *не є періодичним.*

Нехай для початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ задачі (2), (3) має місце властивість **B**: $x_0 < x_*$ та $\dot{x}_0 > 0$ або $x_0 > x_*$ та $\dot{x}_0 < 0$, або ж $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \geq |x_*|$. Тоді під дією системи (2), (3) точка $(x_0, \dot{x}_0)$ буде рухатись вздовж траєкторії $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$. Очевидно, що при цьому знайдеться момент часу t_* такий, що $x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_*$, коли фазова точка системи (2), (3) зазнає імпульсних сил згідно з законом (3) [3].

Нехай

$$t_1 = \min\left\{ t_* : t_* > t_0, x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_* \right\}. \tag{5}$$

Розглянемо координати фазової точки $(x(t), \dot{x}(t))$, де $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, для $t = t_1 + 0$, тобто їх значення відразу після дії імпульсних сил. Очевидно, що

$$x(t_1 + 0) = x_*, \ \ \dot{x}(t_1 + 0) = \dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0) + I\Big(\dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0) \Big). \tag{6}$$

Тоді якщо для $(x_1, \dot{x}_1)$, де $x_1 = x_*$, а $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t_1 + 0)$ визначено за формулою (6), як для нових початкових умов задачі (2), (3), має місце властивість **B**, тобто $(x_*, \dot{x}_1) \in \Omega_*$, то знайдеться момент часу t_* такий, що

$x(t_*, x_*, \dot{x}_1, t_1) = x_*$, коли фазова точка системи (2), (3) зазнає імпульсних сил згідно з законом (3). Позначимо:

$$t_2 = \min\{t_* : t_* > t_1,\, x(t_*, x_*, \dot{x}_1, t_1) = x_*\}. \tag{7}$$

А якщо $(x_*, \dot{x}_1) \notin \Omega_*$, тобто для $(x_1, \dot{x}_1)$ властивість **B** не виконується, то фазова точка системи (2), (3) в подальшому (при $t > t_1$) не зазнаватиме впливу миттєвих сил.

Нехай побудовано перших n членів послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$, де

$$t_k = \min\{t_* : t_* > t_{k-1},\, x(t_*, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_*\}; \tag{8}$$

$$x_k = x(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_*, \quad k = \overline{1, n}; \tag{9}$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) + I(\dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1})). \tag{10}$$

Очевидно, що при цьому значення $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$, де $k = \overline{1, n-1}$. При виконанні умови $(x_n, \dot{x}_n) = (x_*, \dot{x}_n) \in \Omega_*$ можна побудувати $(n+1)-$й член згаданої вище послідовності. Інакше ця послідовність обірветься на $(n+1)-$му кроці.

Зрозуміло, що в загальному випадку для довільних початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ послідовність моментів часу $t_1, t_2, \ldots$ може бути нескінченною, може містити лише скінченну кількість елементів і може, зокрема, складатись лише з одного елемента або, навіть, не мати жодного.

Якщо послідовність моментів часу складається з однієї точки, що можливо, наприклад, для випадку, коли виконується нерівність $|y + I(y)| \ge y_*$ для всіх $y \in (-y_*, y_*)$, де $y_* = \sqrt{2(1+\cos x_*)}$, то система (2), (3) не має періодичних траєкторій. Аналогічно, якщо ця послідовність має лише скінченну (не порожню!) множину точок, що містить, наприклад, рівно $k \ge 1$ елементів, то виконується нерівність $|\dot{x}_k + I(\dot{x}_k)| \ge y_*$, і система (2), (3) також не має періодичних траєкторій. Очевидно, що для деякого натурального числа k і для всіх значень $y \in (-y_*, y_*)$ виконується нерівність $|f^k(y)| \ge y_*$, де $f^k(y)$ – $k-$та ітерація функції $f(y) = -y + I(-y)$, $y = \dot{x}$, то згадана вище послідовність може мати не більше k елементів, а система (2), (3) не матиме періодичних розв'язків.

Таким чином, задача (2), (3) може мати періодичні траєкторії лише тоді, коли послідовність $\{t_k\}$ моментів часу містить нескінченну кількість точок або ж не має жодного елемента. В останньому випадку при русі фазової точки вздовж траєкторії розв'язку $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, що є періодичним з деяким періодом T і визначений для всіх значень $t \in \mathbb{R}$, фазова точка системи (2), (3) не піддається дії імпульсних сил (3), а отже, $(x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega \setminus \Omega_*$ або $(x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega_*$ і $|x(t)| < |x_*|$ для всіх значень $t \in \mathbb{R}$, звідки, зокрема, випливає, що виконується умова $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega \setminus \Omega_*$ або $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \ge |x_*|$, де $(x_0, \dot{x}_0)$ – початкові умови, які задовольняє розв'язок $x(t)$ при $t = t_0$.

Справедлива така теорема [3].

Теорема 2. *Нехай* $x_* \ne (2n+1)\pi$ *для всіх цілих чисел* n. *Якщо для деякого натурального числа* k *і для всіх значень* $y \in (-y_*, y_*)$ *виконується нерівність* $|f^k(y)| \ge y_*$, *де* $f^k(y)$ – $k-$*та ітерація функції*

$$f(y) = -y + I(-y), \quad y = \dot{x},$$

то задача (2), (3) *не має періодичних розв'язків*.

Нехай послідовність $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$ має нескінченну кількість елементів, тобто згаданий вище процес побудови послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$ продовжується до нескінченності. Очевидно, що при цьому значення $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$ для всіх натуральних чисел k. Крім того, оскільки фазова точка системи (2), (3) нескінченне число раз перетинає пряму $x = x_*$ в точках з координатами $(x_*, \dot{x}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, за якими визначається деяке відображення θ прямої $x = x_*$ в себе, то можна скористатися *відображенням Пуанкаре* [9]. Відображення Пуанкаре для задачі (2), (3) можна записати за допомогою формули:

$$y_1 \xrightarrow{\theta} y_2 \xrightarrow{\theta} y_3 \xrightarrow{\theta} \ldots\; y_{k-1} \xrightarrow{\theta} y_k \xrightarrow{\theta} \cdots, \tag{11}$$

де $y_k = \dot{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, визначено за формулами (10).

Відображення (11) визначає деяке неперервне відображення частини прямої, що знаходиться в середині області Ω_*, а саме відрізка $[-y_*, y_*]$, де $y_* = \sqrt{2(1+\cos x_*)}$, в цей самий відрізок.

З проведеного вище аналізу випливає, що задача (2), (3) матиме періодичні режими, при яких фазова точка зазнаватиме впливу імпульсних сил лише тоді, коли послідовність точок $\{t_n\}$ є нескінченною і відображення Пуанкаре, побудоване за цими точками, має нерухомі відмінні від $-y_*, y_*$ точки, або ж періодичні точки деякого періоду n. Якщо відображення (11) має нерухомі відмінні від $-y_*, y_*$ точки, або ж періодичні періоду n, $n > 1$, точки, то задача (2), (3) буде мати періодичні траєкторії з періодом $T(n)$, при яких фазова точка системи, що розглядається, зазнає імпульсної дії рівно один або відповідно рівно n разів за період, де $n > 1$.

Маємо таке твердження [3].

Теорема 3. *Диференціальне рівняння* (2) *з імпульсною дією* (3) *має періодичні траєкторії періоду* $T(n)$, *при русі по яких фазова точка системи* (2), (3) *зазнає імпульсної дії* n *разів* ($n > 1$) *за період* $T(n)$, *тоді і тільки тоді, коли відображення Пуанкаре* (11) *має на інтервалі* $(-y_*, y_*)$ *нерухому або періодичну точку періоду* n, *де* n *– деяке натуральне число*.

Наслідок. Якщо відображення θ має нерухому точку, відмінну від $-y_*, y_*$, то диференціальне рівняння (2) з імпульсною дією (3) має періодичну траєкторію з деяким періодом T, при русі по якій фазова точка системи (2), (3) зазнає імпульсної дії рівно один раз за період T.

Необхідні й достатні умови існування періодичних розв'язків задачі (2), (3) в термінах функції Пуанкаре в **теоремі 3** мають досить загальний характер для одержання більш конструктивних умов, що гарантують існування періодичних розв'язків задачі (2), (3), що розглядається. Потрібно дослідити питання про існування нерухомих та періодичних точок відображення відрізка $(-y_*, y_*)$, де $y_* = \sqrt{2(1+\cos x_*)}$, в цей же самий відрізок, яке визначається формулою:

$$f(y) = -y + I(-y), \quad y = \dot{x}, \quad I(-y) \neq 0. \tag{12}$$

Нерухомим точкам відображення $f(y)$ з інтервалу $(-y_*, y_*)$ відповідають періодичні режими [10] динамічної системи (1), (2), причому для таких режимів досліджувана система зазнає лише однієї імпульсної дії за період. Якщо ж відображення (12) має на інтервалі $(-y_*, y_*)$ періодичну точку y_0 періоду $n \in \mathbb{R}$, тобто $f^n(y_0) = f(f(\ldots f(y_0))) = y_0$, то точці y_0 відповідає деякий $T(n)$ – періодичний режим динамічної системи (2), (3), для якого система (2), (3) зазнає імпульсної дії рівно n разів за період $T(n)$.

Для випадку, коли відображення (12) є неперервним та має на інтервалі $(-y_*, y_*)$ періодичну точку періоду 3, існують періодичні точки довільного періоду n, яким відповідають $T(n)$ – періодичні режими динамічної системи (2), (3), для яких наведена система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період $T(n)$. Звідси випливає, що коли динамічна система (2), (3) має такий періодичний режим, при якому фазова точка системи зазнає імпульсної дії рівно три рази за період, то в цій системі існують $T(n)$ – періодичні режими, при яких дана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, де n – довільне натуральне число. Зауважимо, що в цьому випадку в системі може існувати декілька періодичних режимів, коли наведена система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, причому періоди таких режимів можуть не співпадати. Стійкість описаних вище $T(n)$ – періодичних розв'язків задачі (2), (3) адекватно визначається стійкістю відповідних нерухомих точок відображення $f^n(y)$.

Практичні результати дослідження. Розглянемо диференціальне рівняння (2) з імпульсною дією (3) вигляду:

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda - 1)y - \lambda y_*, & y \geq 0; \\ -(\lambda + 1)y - \lambda y_*, & y < 0, \end{cases} \tag{13}$$

де $y = \dot{x}$, λ – деякий параметр, причому $0 < \lambda \leq 2$.

Відображення

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda(y_* - y), & y \geq 0; \\ \lambda(y_* + y), & y < 0 \end{cases} \tag{14}$$

є неперервним для всіх $y \in \mathbb{R}$ [3].

Це відображення має:

- при $0 < \lambda < 1$ лише одну нерухому точку, яка є стійкою;
- при $\lambda = 1$ безліч нерухомих точок, стійкість яких потрібно додатково досліджувати;
- при $1 < \lambda \leq 2$ дві нерухомі точки, дві періодичні точки періоду два та шість періодичних точок періоду три.

Точки періоду три утворюють два цикли:

$$\left\{\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3}{1+\lambda^3}y_*;\ \frac{\lambda+\lambda^2-\lambda^3}{1+\lambda^3}y_*;\ \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3}{1+\lambda^3}y_*\right\},$$

$$\left\{\frac{\lambda-\lambda^2+\lambda^3}{1-\lambda^3}y_*;\ \frac{\lambda+\lambda^2-\lambda^3}{1-\lambda^3}y_*;\ \frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3}{1-\lambda^3}y_*\right\}. \tag{16}$$

Знайдемо їх з урахуванням формули $y_*=\sqrt{2\left(1+\cos x_*\right)}$ при $\lambda=\dfrac{5}{3}$ і $x_*=0$.

$$y_*=\sqrt{2\left(1+\cos x_*\right)}=\sqrt{2\left(1+1\right)}=2.$$

Відтак, для першого циклу (16) знаходимо явний вигляд точок періоду три:

$$\frac{\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{5}{3}-\frac{25}{9}-\frac{125}{27}}{1+\frac{125}{27}}\cdot 2=\frac{\frac{45-75-125}{27}}{\frac{152}{27}}\cdot 2=-\frac{155}{76};$$

$$\frac{\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{45+75-125}{27}}{\frac{152}{27}}\cdot 2=-\frac{5}{76};$$

$$\frac{\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1+\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{45+75+125}{27}}{\frac{152}{27}}\cdot 2=\frac{245}{76}.$$

Пересвідчимось, чи дійсно ці точки визначають періодичний розв'язок. Дійсно, користуючись формулою (14), маємо:

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{155}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{152-155}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{76}\right)=-\frac{5}{76};$$

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{5}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{152-5}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{147}{76}\right)=\frac{245}{76};$$

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{245}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{152-245}{76}\right)=\frac{5}{3}\left(-\frac{93}{76}\right)=-\frac{155}{76}.$$

Зауважимо, що при $\lambda=\dfrac{5}{3}$ і $x_*=0$, $y_*=2$ відображення (14) має вигляд:

$$I\left(y\right)=\begin{cases}\left(\frac{5}{3}-1\right)y-\frac{5}{3}\cdot 2,\ y\geq 0,\\ -\left(\frac{5}{3}+1\right)y-\frac{5}{3}\cdot 2,\ y<0,\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}y-\frac{10}{3},\ y\geq 0,\\ -\frac{8}{3}y-\frac{10}{3},\ y<0.\end{cases} \tag{17}$$

Відтак, точки $\left\{-\dfrac{155}{76};-\dfrac{5}{76};\dfrac{245}{76}\right\}$ визначають періодичний режим для відображення (17), що має нерухому точку періоду три, якому відповідає періодичний режим в системі математичного маятника з імпульсною дією. Знайдений періодичний розв'язок зображено на рис. 1, *а*.

Аналогічно для другого циклу (16) отримуємо:

$$\frac{\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{5}{3}-\frac{25}{9}+\frac{125}{27}}{1-\frac{125}{27}}\cdot 2=\frac{\frac{45-75+125}{27}}{\frac{27-125}{27}}\cdot 2=-\frac{95}{49};$$

$$\frac{\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{45+75-125}{27}}{\frac{-98}{27}}\cdot 2=\frac{5}{49};$$

$$\frac{\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^3}\cdot 2=\frac{\frac{45-75-125}{27}}{\frac{-98}{27}}\cdot 2=\frac{155}{49}.$$

Користуючись формулою (14), з’ясуємо, чи визначають ці точки періодичний розв’язок:

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{95}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{98-95}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{3}{49}\right)=\frac{5}{49};$$

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{5}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{98-5}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{93}{49}\right)=\frac{155}{49};$$

$$\frac{5}{3}\left(2-\frac{155}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{98-155}{49}\right)=\frac{5}{3}\left(-\frac{57}{49}\right)=-\frac{95}{49}.$$

Таким чином, точки $\left\{-\frac{95}{49};\frac{5}{49};\frac{155}{49}\right\}$ також визначають періодичний режим для відображення (17), що має нерухому точку періоду три, якому відповідає періодичний режим в системі математичного маятника з імпульсною дією. Знайдений періодичний розв’язок зображено на рис. 1, *б*.

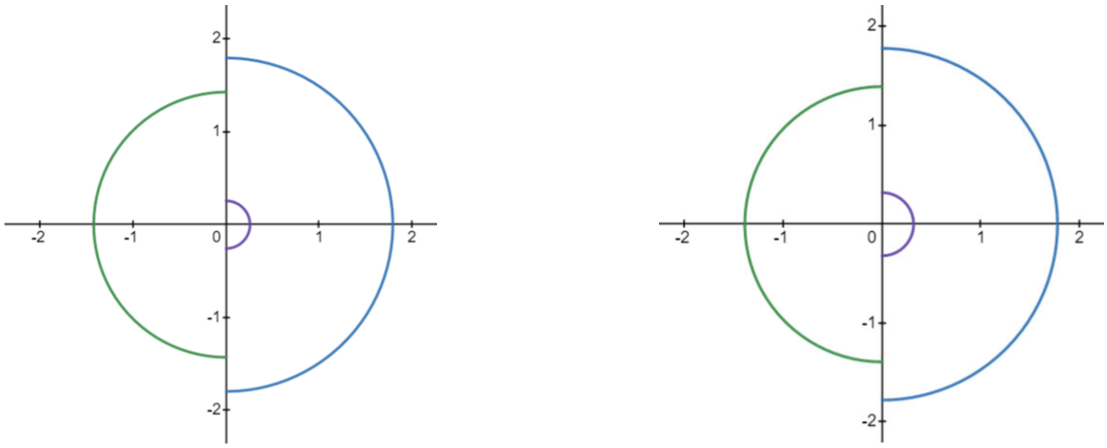

Рис. 1 – Періодичні режими математичного маятника з імпульсною дією (17): а – для першого циклу; б – для другого циклу.

Перспективи подальших досліджень. Вище ми показали, що задачу про існування періодичних режимів для математичного маятника з імпульсною дією можна звести до задачі про існування нерухомої точки деякого інтервалу. Такий прийом дозволяє суттєво спростити дослідження без втрати якісної картини поведінки вихідної системи. В подальшому дослідження можна продовжити для інших функцій імпульсної дії (відмінних від (13)). Також варто дослідити, чи існують періодичні режими в системі математичного маятника з тертям з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.

Висновки. В даній роботі для диференціального рівняння математичного маятника (2) з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу (3) при $\lambda=5/3$ і $x_*=0$, $y_*=2$ – імпульсна дія визначається відображенням (17). Показано, що для відображення (17) існують нерухомі точки, які визначаються двома періодичними циклами періоду три, а саме: $\left\{-\frac{155}{76};-\frac{5}{76};\frac{245}{76}\right\}$ і $\left\{-\frac{95}{49};\frac{5}{49};\frac{155}{49}\right\}$.

З’ясували, що якщо відображення θ має нерухому точку, відмінну від $-y_*,\, y_*$, то диференціальне рівняння (2) з імпульсною дією (3) має періодичні траєкторії періоду $T(n)$, при русі по яких фазова точка системи (2), (3) зазнає імпульсної дії n разів ($n>1$) за період $T(n)$, коли відображення Пуанкаре (11) має на інтервалі $(-y_*,\, y_*)$ нерухому або періодичну точку періоду n, де n – деяке натуральне число.

Отже, оскільки f (12) – неперервна функція, яка має періодичну точку періоду три, то вона має періодичні точки будь-якого періоду. Відтак у системі математичного маятника з описаними режимами імпульсної дії існують $T(n)$ – періодичні режими, при яких дана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, де n – довільне натуральне число.

Список літератури

1. *Perestyuk N. A.*, *Plotnikov V. A.*, *Samoilenko A. M.*, *Skripnik N. V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. – Berlin, Boston : De Gruyter, 2011. – 307 с.. https://doi.org/10.1515/9783110218176.
2. *Kapustyan O. V.*, *Asrorov F. A.*, *Perestyuk Y. M.* On the Exponential Stability of a Trivial Torus for One Class of Nonlinear Impulsive Systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2019. – № 238(3). – P. 263 – 270. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04234-9.
3. *Samoilenko A. M.*, *Samoilenko V. G.*, *Sobchuk V. V.* On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence // Ukrainian Mathematical Journal. – New York : Springer, 1999. – Вип. 51. – № 6. – P. 926 – 933.
4. *Sobchuk V.*, *Kapustyan O.*, *Pichkur V.*, *Kapustian O.* Design of Stable Periodic Regimes for one Class of Hybrid Planar Systems // II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» September 28 – 30. – Kyiv, 2021. – pp. 89 – 100.
5. *Asrorov F.*, *Sobchuk V.*, *Kurylko O.* Finding of bounded solutions to linear impulsive systems // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2019. – vol. 6. – no. 4. – P. 14 – 20. doi:10.15587/1729-4061.2019.178635.
6. *Asrorov F.*, *Perehuda O.*, *Sobchuk V.*, *Sukretna A.* Establishing conditions for the existence of bounded solutions to the weakly nonlinear pulse systems // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – № 4 (4 (112)). – P. 6 – 12. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.238208.
7. *Reissig R.*, *Sansone C.*, *Conti R.* Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen. – Rome : Edizioni Cremonese, 1963. – 320 p.
8. *Jordan D. W.*, *Smith P.* Nonlinear ordinary differential equations. – London : Oxford Univ. Press, 1987. – 381 p.
9. *Пічкур В. В.*, *Капустян О. В.*, *Собчук В. В.* Теорія динамічних систем (навчальний посібник). – Луцьк : Вежа-друк, 2020. – 348 с.
10. *Sharkovsky A. N.*, *Kolyada S. F.*, *Sivak A. G.*, *Fedorenko V. V.* Dynamics of One-Dimensional Maps. Springer-Science+Business Media, B.Y., 1997. – 262 p.

References (transliterated)

1. Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin, Boston : De Gruyter, 2011. 307 p. https://doi.org/10.1515/9783110218176.
2. Kapustyan O. V., Asrorov F. A., Perestyuk Y. M. On the Exponential Stability of a Trivial Torus for One Class of Nonlinear Impulsive Systems. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2019, vol. 238(3), pp. 263–270. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04234-9.
3. Samoilenko A. M., Samoilenko V. G., Sobchuk V. V. On periodic solutions of the equation of a nonlinear oscillator with pulse influence. *Ukrainian Mathematical Journal*. New York, Springer, 1999, vol. 51, no. 6, pp. 926–933.
4. Sobchuk V., Kapustyan O., Pichkur V., Kapustian O. Design of Stable Periodic Regimes for one Class of Hybrid Planar Systems. *II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» September 28 – 30*. Kyiv, 2021. pp. 89–100.
5. Asrorov F., Sobchuk V., Kurylko O. Finding of bounded solutions to linear impulsive systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, vol. 6, no. 4, pp. 14–20. doi:10.15587/1729-4061.2019.178635.
6. Asrorov F., Perehuda O., Sobchuk V., Sukretna A. Establishing conditions for the existence of bounded solutions to the weakly nonlinear pulse systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021, no. 4 (4 (112)), pp. 6–12. doi: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.238208.
7. Reissig R., Sansone C., Conti R. *Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen*. Rome : Edizioni Cremonese, 1963. 320 p.
8. Jordan D. W., Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*. London, Oxford Univ. Press, 1987. 381 p.
9. Pichkur V. V., Kapustyan O. V., Sobchuk V. V. Teoriya dynamichnykh system (navchal'nyy posibnyk) [The theory of dynamical systems (educational manual)]. Lutsk, Vezha-druk Publ., 2020. 348 p.
10. Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V. *Dynamics of One-Dimensional Maps*. Springer-Science+Business Media, B.Y., 1997. 262 p.

Надійшла (received) 08.03.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Собчук Валентин Володимирович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (050) 339-81-13; e-mail: sobchuk@knu.ua.

Собчук Валентин Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры интегральных и дифференциальных уравнений механико-математического факультета, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (050) 339-81-13; e-mail: sobchuk@knu.ua.

Sobchuk Valentyn Volodymyrovych – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Professor at the Department of Integral and Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv; tel.: (050) 339-81-13; e-mail: sobchuk@knu.ua.

Недбайло Вікторія Андріївна – здобувач 1 курсу другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності «Математика», механіко-математичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 778-04-60; e-mail: vikaned31012001@gmail.com.

Недбайло Виктория Андреевна – соискатель 1 курса второго (магистерского) уровня высшего образования специальности "Математика", механико-математического факультета, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (099) 778-04-60; e-mail: vikaned31012001@gmail.com.

Nedbailo Viktoriya Andriivna – graduate of the 1st year of the second (master's) level of higher education in the specialty "Mathematics", Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv; tel.: (099) 778-04-60; e-mail: vikaned31012001@gmail.com.