УДК 517.977.55 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.23**

В. Т. МАТВІЄНКО, В. В. ПІЧКУР, Д. І. ЧЕРНІЙ

КЕРУВАННЯ ПУЧКОМ ТРАЄКТОРІЙ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ ЗІ СКІНЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ ПОЧАТКОВИХ І КІНЦЕВИХ СТАНІВ

В статті пропонується дослідження задачі керування пучком траєкторії лінійної дискретної системи. Задача керування пучком траєкторій виникає в прикладних задачах, для яких характерними ознаками є детермінована невизначеність початкових умов системи, керування групою об'єктів подібної природи тощо. До таких задач, зокрема, належать задачі керування пучком заряджених частинок. В постановці задачі, яка досліджується в статті, функція керування є скалярною, множина початкових станів і множина кінцевих станів містять скінченну кількість елементів. При цьому система є цілком керованою. Задача полягає в знаходженні керування, яке переводить систему з множини початкових умов в множину кінцевих станів. В статті задача керування пучком траєкторій зводиться до задачі термінального керування лінійною дискретною системою вищої розмірності. При цьому одержана система має блочну структуру. Такий підхід є новим. Використовуючи формулу, яка встановлює залежність між початковим і кінцевим станом дискретної системи, задачу термінального керування зведено до задачі знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Використовуючи структуру матриці системи, а також вигляд загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержано загальний розв'язок задачі термінального керування. Застосовуючи властивості псевдооберненої матриці, встановлено умови існування розв'язку і функцію, яка є загальним розв'язком задачі керування пучком траєкторій. Одержаний в статті результат має алгоритмічне спрямування.

Ключові слова: дискретна система, функція керування, керованість, пучок траєкторій, термінальне керування, псевдообернена матриця, система лінійних рівнянь.

В. Т. МАТВИЕНКО, В. В. ПИЧКУР, Д. И. ЧЕРНИЙ

УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ НАЧАЛЬНЫХ И КОНЕЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

В статье предлагается исследование задачи управления пучком траектории линейной дискретной системы. Задача управления пучком траекторий возникает в прикладных задачах, для которых характерными признаками является детерминированная неопределенность начальных условий системы, управление группой объектов подобной природы. К числу таких задач, в частности, относятся задачи управления пучком заряженных частиц. В постановке задачи, которая исследуется в статье, функция управления является скалярной, множество начальных состояний и множество конечных состояний содержат конечное количество элементов. При этом система вполне управляема. Задача состоит в нахождении управления, переводящего систему из множества начальных условий в множество конечных состояний. В статье задача управления пучком траекторий сводится к задаче терминального управления линейной дискретной системой более высокой размерности. При этом полученная система имеет блочную структуру. Такой подход новый. Используя формулу, устанавливающую зависимость между начальным и конечным состоянием дискретной системы, задача терминального управления сведена к задаче нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений. Используя структуру матрицы системы, а также вид общего решения системы линейных алгебраических уравнений, получено общее решение задачи терминального управления. Применяя свойства псевдообратной матрицы, установлены условия существования решения и функция, которая является общим решением задачи управления пучком траекторий. Полученный в статье результат имеет алгоритмическое направление.

Ключевые слова: дискретная система, функция управления, управляемость, пучок траекторий, терминальное управление, псевдообратная матрица, система линейных уравнений.

V. T. MATVIENKO, V. V. PICHKUR, D. I. CHERNIY

CONTROL OF BUNDLE OF TRAJECTORIES OF A LINEAR DISCRETE SYSTEM WITH FINITE SETS OF INITIAL AND FINAL STATES

The article proposes an analysis of the problem of control of trajectory bundle of a linear discrete system. The problem of trajectory bundle control arises in applications characterized by the deterministic uncertainty of the initial conditions of the system, control of a group of objects of a similar nature, etc. To such problems belongs, in particular, the control problem for a beam of charged particles. In the statement of the problem studied in the paper, the control function is scalar, the set of initial states and the set of final states contain a finite number of elements. At the same time, the system is completely controlled. The problem is to find a control that transfers the system from a set of initial conditions to a set of final states. The problem is to find a control that transfers the system from a set of initial conditions to a set of final states. In the article, the problem of controlling a bundle of trajectories is reduced to the problem of terminal control of a linear discrete system of higher dimension. At the same time, the resulting system has a block structure. This approach is new. Applying the formula that establishes the dependence between the initial and final states of a discrete system, the problem of terminal control is reduced to the problem of finding a solution to a system of linear algebraic equations. Using the structure of the matrix of the system, as well as the form of the general solution of the system of linear algebraic equations, we obtain a general solution of the terminal control problem. Applying the properties of the pseudoinverse matrix, we prove the theorem on conditions of the solution existence and establish the function, which gives the general solution of the trajectory bundle control problem. This result has an algorithmic orientation.

Key words: discrete system, control function, controllability, bundle of trajectories, terminal control, pseudoinverse matrix, system of linear equations.

Вступ. *Задача термінального керування* є однією з основних задач *теорії керування*. Для лінійної системи керування умови розв'язуваності такої задачі пов'язані з *критеріями керованості*. При цьому виникає проблема конструювання множини всіх керувань, які б забезпечували розв'язок задачі термінального керування. Якщо умови керованості для системи керування не виконуються, то ставиться задача про знаходження керувань, які б забезпечували перехід в найближчий стан до заданого і, відповідно, знаходження всіх таких керувань в параметричному вигляді [1 – 4]. У випадку, якщо маємо сукупність початкових і кінцевих станів, то одержуємо задачу керування пучком траєкторій. Така проблематика має суттєве прикладне значення в різних прикладних галузях. Задача керування пучком траєкторій виникає в прикладних задачах, для яких характерними ознаками є детермінована невизначеність початкових умов системи, керування групою об'єктів подібної природи тощо. До таких задач, зокрема, належать *задачі керування пучком заряджених частинок* [5 – 7].

В статті пропонується побудова розв'язку задачі керування пучком траєкторій *лінійної дискретної системи*, яка є цілком керованою. Множини початкових і кінцевих станів задаються скінченною кількістю точок. В статті задача керування пучком траєкторій зводиться до задачі *термінального керування лінійною дискретною системою вищої розмірності*. Використовуючи формулу, яка встановлює залежність між початковим і кінцевим станом дискретної системи, приходимо до задачі знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Використовуючи блочну структуру матриці системи, а також вигляд загального розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, одержано загальний розв'язок задачі термінального керування. Застосовуючи властивості псевдооберненої матриці, обгрунтувано теорему про умови існування розв'язку і функцію, яка є загальним розв'язком задачі керування пучком траєкторій.

В статті позначаємо: $\mathbb{R}^n$ – n – вимірний *евклідів простір*, $R = R^1$; T – знак транспонування; A^{-1}, A^{+} – обернена, *псевдообернена матриця* до матриці A; $rank\, A$ – ранг матриці A.

Задача керування пучком траєкторій. Розглянемо цілком керовану дискретну систему керування
$$x(i+1) = A(i)x(i) + b(i)u(i), \ i = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$
де x – вектор стану розмірності n; $A(i)$ – матриця системи розмірності $n \times n$; $b(i)$ – вектор розмірності n; $u(i)$ – скалярна функція керування; $i = 0, 1, \ldots, N$. Опис повної множини розв'язків задачі про переведення системи (1) з початкового в кінцеве положення наведено в роботах [1, 2, 4].

Розглянемо задачу, яка полягає у тому, щоб знайти функцію керування системою (1), за допомогою якої систему (1) можна перевести з заданої множини початкових станів
$$x(0) \in \Omega_0 = \left\{x_{(0,1)}, x_{(0,2)}, \ldots, x_{(0,s)}\right\} \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$
у множину кінцевих станів
$$x(N+1) \in \Omega_1 = \left\{x_{(1,1)}, x_{(1,2)}, \ldots, x_{(1,s)}\right\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Введемо такі позначення: $x_{(0)} = \left(x_{(0,1)}^T, x_{(0,2)}^T, \ldots, x_{(0,s)}^T\right)^T$ – вектор початкових значень розмірності $n \cdot s$; $x_{(1)} = \left(x_{(1,1)}^T, x_{(1,2)}^T, \ldots, x_{(1,s)}^T\right)^T$ – вектор фінальних станів розмірності $n \cdot s$;
$$\overline{A}(i) = \begin{pmatrix} A(i) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A(i) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A(i) \end{pmatrix};$$
$$\overline{x} = \left(x_1^T, x_2^T, \ldots, x_s^T\right)^T, \ \overline{b}(i) = \left(b^T(i), b^T(i), \ldots, b^T(i)\right)^T, \ i = 0, 1, \ldots, N.$$

Тоді задачу переведення системи з області початкових станів (2) системи (1) в множину фінальних станів (3) можна звести до еквівалентної задачі керування системою:
$$\overline{x}(i+1) = \overline{A}(i)\overline{x}(i) + \overline{b}(i)u(i), \ i = 0, 1, \ldots, N \tag{4}$$
за умов
$$\overline{x}(0) = x_{(0)}, \ \overline{x}(N+1) = x_{(1)}. \tag{5}$$

Конструювання функції керування. В кінцевий момент часу стан системи (4) можна записати так [1, 2]:
$$\overline{x}(N+1) = \sum_{k=0}^{N} \overline{\mathrm{W}}(N+1, k)u(k) + \overline{A}(N)\overline{A}(N-1)\ldots\overline{A}(1)\overline{A}(0)\overline{x}(0), \tag{6}$$
де матриця
$$\overline{W}(N+1, k) = \overline{A}(N)\overline{A}(N-1)\ldots\overline{A}(k+1)\overline{b}(k), \ k = 0, 1, \ldots, N.$$

З (6) випливає, що:
$$\overline{x}(N+1) - \overline{A}(N)\overline{A}(N-1)\ldots\overline{A}(1)\overline{A}(0)\overline{x}(0) = \sum_{k=0}^{N} \overline{W}(N+1, k)u(k). \tag{7}$$

Позначимо

$$\tilde{x}_{(1)}=\bar{x}(N+1)-\bar{A}(N)\bar{A}(N-1)\ldots\bar{A}(1)\bar{A}(0)\bar{x}(0),$$

$$W=\left(\bar{W}(N+1,0),\bar{W}(N+1,1),\ldots,\bar{W}(N+1,N-1),\bar{W}(N+1,N)\right),$$

$$\tilde{u}=\left(u(0),u(1),\ldots,u(N)\right)^T.$$

Матриця W є матрицею розмірності $ns\times(N+1)$. Тоді (7) можемо записати як систему алгебраїчних рівнянь відносно вектора розмірності $N+1$, який описує функцію керування

$$W\tilde{u}=\tilde{x}_{(1)}. \tag{8}$$

Розв’язок системи (8) має вигляд:

$$\tilde{u}=W^+\tilde{x}_{(1)}. \tag{9}$$

Рівняння (9) запишимо так:

$$\tilde{u}=W^+\tilde{x}_{(1)}=W^T\left(WW^T\right)^+\tilde{x}_{(1)}, \tag{10}$$

де

$$W^+=W^T\left(WW^T\right)^+=W^T\left(\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)\bar{W}^T(N+1,j)\right)^+.$$

Тоді (9) має вигляд:

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}\bar{W}^T(N+1,0)\\ \bar{W}^T(N+1,1)\\ \vdots\\ \bar{W}^T(N+1,N)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)\bar{W}^T(N+1,j)\right)^+\tilde{x}_{(1)}+$$

$$+[E-\begin{pmatrix}\bar{W}^T(N+1,0)\\ \bar{W}^T(N+1,1)\\ \vdots\\ \bar{W}^T(N+1,N)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)\bar{W}^T(N+1,j)\right)^+\times$$

$$\times\left(\bar{W}(N+1,0),\bar{W}(N+1,1),\ldots,\bar{W}(N+1,N)\right)]\tilde{v}, \tag{11}$$

де $\tilde{v}$ – довільний вектор розмірності $N+1$; E – одинична матриця розмірності $(N+1)\times(N+1)$. Співвідношення (11) є загальним розв’язком сформульованої задачі. Перепишимо (11) так:

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix}\bar{W}^T(N+1,0)\\ \bar{W}^T(N+1,1)\\ \vdots\\ \bar{W}^T(N+1,N)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)\bar{W}^T(N+1,j)\right)^+\tilde{x}_{(1)}+\tilde{v}-$$

$$-\begin{pmatrix}\bar{W}^T(N+1,0)\\ \bar{W}^T(N+1,1)\\ \vdots\\ \bar{W}^T(N+1,N)\end{pmatrix}\left(\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)\bar{W}^T(N+1,j)\right)^+\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,j)v(j), \tag{12}$$

де $\tilde{v}=\left(v(0),v(1),\ldots,v(N)\right)^T$; $v(k)\in\mathbb{R}$; $k=0,1,\ldots,N$. Матрицю $\bar{W}(N+1,k)$ запишемо у вигляді:

$$\bar{W}(N+1,k)=\bar{A}(N)\bar{A}(N-1)\ldots\bar{A}(k+1)\bar{b}(k)=\begin{pmatrix}A(N)A(N-1)\ldots A(k+1)b(k)\\ A(N)A(N-1)\ldots A(k+1)b(k)\\ \vdots\\ A(N)A(N-1)\ldots A(k+1)b(k)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} A(N)A(N-1)\dots A(k+1) \\ A(N)A(N-1)\dots A(k+1) \\ \vdots \\ A(N)A(N-1)\dots A(k+1) \end{pmatrix} b(k),\ k=0,1,\dots,N.$$

Тоді

$$\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,\,j)\bar{W}^{T}(N+1,\,j)=\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N}D(j) & \sum_{j=0}^{N}D(j) & \dots & \sum_{j=0}^{N}D(j) \\ \sum_{j=0}^{N}D(j) & \sum_{j=0}^{N}D(j) & \dots & \sum_{j=0}^{N}D(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^{N}D(j) & \sum_{j=0}^{N}D(j) & \dots & \sum_{j=0}^{N}D(j) \end{pmatrix},$$

де

$$D(j)=A(N)A(N-1)\dots A(j+1)b(j)b^{T}(j)A^{T}(j+1)\dots A^{T}(N).$$

Позначимо

$$\sum_{j=0}^{N}D(j)=C\,.$$

Тоді (12) можна представити так:

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix} \bar{W}^{T}(N+1,0) \\ \bar{W}^{T}(N+1,1) \\ \vdots \\ \bar{W}^{T}(N+1,N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & C & \dots & C \\ C & C & \dots & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & C & \dots & C \end{pmatrix}^{+}\tilde{x}_{(1)}+\tilde{v}-$$

$$-\begin{pmatrix} \bar{W}^{T}(N+1,0) \\ \bar{W}^{T}(N+1,1) \\ \vdots \\ \bar{W}^{T}(N+1,N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & C & \dots & C \\ C & C & \dots & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & C & \dots & C \end{pmatrix}^{+}\sum_{j=0}^{N}\bar{W}(N+1,\,j)v(j)\,. \qquad (13)$$

Відомо [3], що якщо $\tilde{A}$ – матриця, складена зі всіх лінійно незалежних рядків матриці A, матриця $\bar{A}$ – зі всіх лінійно незалежних стовпчиків матриці A, а матриця $\hat{A}$ одержана з A послідовним застосуванням попередніх двох операцій, тоді

$$A^{+}=\tilde{A}^{T}\left(\tilde{A}\tilde{A}^{T}\right)^{-1}\hat{A}\left(\bar{A}^{T}\bar{A}\right)^{-1}\bar{A}^{T}.$$

Нехай

$$rank\begin{pmatrix} C & C & \dots & C \\ C & C & \dots & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & C & \dots & C \end{pmatrix}=rank\,C=n\,.$$

Використовуючи наведений вище результат, псевдообернену матрицю у формулі (13) можна записати так:

$$\begin{pmatrix} C & C & \dots & C \\ C & C & \dots & C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & C & \dots & C \end{pmatrix}^{+}=$$

$$=\left(C\,C\,\dots\,C\right)^{T}\left(\left(C\,C\,\dots\,C\right)\begin{pmatrix}C^{T}\\C^{T}\\\vdots\\C^{T}\end{pmatrix}\right)^{-1}C\left(\begin{pmatrix}C^{T}\\C^{T}\\\vdots\\C^{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\C\\\vdots\\C\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}C\\C\\\vdots\\C\end{pmatrix}^{T}=$$

$$=\left(C\,C\,\dots\,C\right)^{T}\left(\left(C\,C\,\dots\,C\right)\begin{pmatrix}C^{T}\\C^{T}\\\vdots\\C^{T}\end{pmatrix}\right)^{-1}C\left(\left(C^{T}C^{T}\,\dots\,C^{T}\right)\begin{pmatrix}C\\C\\\vdots\\C\end{pmatrix}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(C^{T}\,C^{T}\dots\,C^{T}\right)=\left(C\,C\,\dots\,C\right)^{T}\left(\sum_{i=0}^{s}CC^{T}\right)^{-1}C\left(\sum_{i=0}^{s}C^{T}C\right)^{-1}\left(C^{T}\,C^{T}\dots\,C^{T}\right).$$

Оскільки

$$\sum_{i=0}^{s}C^{T}C=sC^{T}C\ ,$$

то

$$\begin{pmatrix}C & C & ... & C\\C & C & ... & C\\... & ... & ... & ...\\C & C & ... & C\end{pmatrix}^{+}=s^{-2}\left(C\,C\,\dots\,C\right)^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}C\left(C^{T}C\right)^{-1}\left(C^{T}\,C^{T}\dots\,C^{T}\right)=$$

$$=s^{-2}\begin{pmatrix}C^{T}\\C^{T}\\\vdots\\C^{T}\end{pmatrix}\left(CC^{T}\right)^{-1}C\left(C^{T}C\right)^{-1}\left(C^{T}\,C^{T}\dots\,C^{T}\right)=$$

$$=s^{-2}\begin{pmatrix}C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1}\\C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1}\\\vdots\\C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1}\end{pmatrix}C\left(C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1},\,C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1},\,\dots,\,C^{T}(C^{T})^{-1}C^{-1}\right).$$

Враховуючи, що матриця C має повний ранг, отримуємо:

$$\begin{pmatrix}C & C & ... & C\\C & C & ... & C\\... & ... & ... & ...\\C & C & ... & C\end{pmatrix}^{+}=s^{-2}\begin{pmatrix}C^{-1}\\C^{-1}\\\vdots\\C^{-1}\end{pmatrix}C\left(C^{-1},\,C^{-1},\,\dots,\,C^{-1}\right)=s^{-2}\begin{pmatrix}C^{-1}\\C^{-1}\\\vdots\\C^{-1}\end{pmatrix}\left(E,\,E,\,\dots,\,E\right).$$

Тут E – одинична матриця розмірності $n\times n$. Базуючись на формулі (13), запишимо функцію керування пучком траєкторій так:

$$u\left(i\right)=s^{-2}\overline{W}^{T}\left(N+1,\,i\right)\begin{pmatrix}C^{-1} & C^{-1} & ... & C^{-1}\\C^{-1} & C^{-1} & ... & C^{-1}\\... & ... & ... & ...\\C^{-1} & C^{-1} & ... & C^{-1}\end{pmatrix}\tilde{x}_{(1)}+v\left(i\right)-$$

$$-s^{-2}\overline{W}^T\left(N+1,i\right)\begin{pmatrix} C^{-1} & C^{-1} & \dots & C^{-1} \\ C^{-1} & C^{-1} & \dots & C^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C^{-1} & C^{-1} & \dots & C^{-1} \end{pmatrix}\sum_{j=0}^{N}\overline{W}\left(N+1,j\right)v\left(j\right), \tag{14}$$

де $v\left(k\right)\in\mathbb{R}$; $i=0,1,\dots,N$.

Функція керування (14) є розв'язком задачі (4), (5) і переводить множину точок (2), яка задається початковою умовою $\overline{x}\left(0\right)=x_{(0)}$, в множину (3), яка задається умовою на правому кінці $\overline{x}\left(N+1\right)=x_{(1)}$. Отже, ми обгрунтували таке твердження.

Теорема 1. *Для того, щоб задача (4), (5) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб*

$$rank\sum_{j=0}^{N}A\left(N\right)A\left(N-1\right)\dots A\left(j+1\right)b\left(j\right)b^T\left(j\right)A^T\left(j+1\right)\dots A^T\left(N\right)=n,$$

при цьому $N\geq n$.

Висновки. В статті проведено дослідження задачі керування пучком траєкторії лінійної дискретної системи. Функція керування є скалярною, множина початкових станів і множина кінцевих станів містять скінченну кількість елементів. В статті показано, що така задача зводиться до задачі термінального керування лінійною дискретною системою. Використовуючи формулу, яка встановлює залежність між початковим і кінцевим станом дискретної системи, задачу термінального керування зведено до задачі знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь дає загальний розв'язок задачі термінального керування. Використовуючи властивості псевдооберненої матриці і структуру задачі, встановлено умови існування розв'язку і функцію, яка є загальним розв'язком задачі керування пучком траєкторій. Одержаний в статті результат має алгоритмічне спрямування.

Список літератури

1. *Kirichenko N. F., Lepekha N. P.* Application of pseudoinverse and projection matrixes to study control, observation, and identification problems // Cybernetics and Systems Analysis. – 2002. – T. 38. – № 4. – P. 568 – 585. https://doi.org/10.1023/A:1021110319693.
2. *Kirichenko N. F., Matvienko V. T.* General solution of terminal control and observation problems // Cybernetics and Systems Analysis. – 2000. – T. 36, № 2. – P. 219 – 228. https://doi.org/10.1007/BF02678668.
3. *Kirichenko N. F., Lepekha N. P.* Perturbation of pseudo-inverse and projective matrices and their application for identification of linear and nonlinear relations // Journal of Automation and Information Sciences. – 2001. – № 33(3). – P. 1 – 16. https://doi.org/10.1615/JAutomatInf Scien. v33.i3.10.
4. *Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Черній Д. І., Демківський Є. О.* Загальний розв'язок термінального керування лінійної дискретної системи // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2022. – № 2. – С. 83 – 90.
5. *Гаращенко Ф. Г., Верченко А. П.* Необхідні умови оптимальності для однієї задачі оптимізації пучків траєкторій дискретних процесів // Вісник Київського університету. Кібернетика. – 2001. – № 2. – С. 1 – 12.
6. *Гаращенко Ф. Г., Бублик Б. М.* Розвиток методів практичної стійкості та їх використання для аналізу, оцінки і оптимізації динаміки пучків // Вісник Київського університету. Кібернетика. – 2000. – № 1. – С. 4 – 17.
7. *Pichkur V. V., Sobchuk V. V.* Mathematical Model and Control Design of a Functionally Stable Technological Process // Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications. – 2021. – № 29(1). – P. 32 – 41. http://dx.doi.org/10.15421/142102.

References (transliterated)

1. Kirichenko N. F., Lepekha N. P. Application of pseudoinverse and projection matrixes to study control, observation, and identification problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002, vol. 38, no. 4, pp. 568–585. https://doi.org/10.1023/A:1021110319693.
2. Kirichenko N. F., Matvienko V. T. General solution of terminal control and observation problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000, vol. 36, no. 2, pp. 219–228. https://doi.org/10.1007/BF02678668.
3. Kirichenko N. F., Lepekha N. P. Perturbation of pseudo-inverse and projective matrices and their application for identification of linear and nonlinear relations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2001, vol. 33(3), pp. 1–16. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien. v33.i3.10.
4. Matvienko V. T., Pichkur V. V., Cherniy D. I., Demkivs'kyy E. O. Zagal'nyy rozv"yazok terminal'nogo keruvannya liniynoyi dyskretnoyi systemy [General solution of terminal control of a linear discrete system]. *Zhurnal obchyslyuval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computing and Applied Mathematics]. 2022, vol. 2, pp. 83–90.
5. Garashhenko F. G., Verchenko A. P. Neobkhidni umovy optymal'nosti dlya odnieyi zadachi optymizatsiyi puchkivtraektoriy dyskretnykh protsesiv [Necessary conditions of optimality for a problem of optimization of bundle of trajectories of discrete processes]. *Visnyk Kyyivs'kogo universytetu. Kibernetyka* [Bulleting of Kyiv University. Cybernetics]. 2001, vol. 2, pp. 1–12.
6. Garashhenko F. G., Bublyk B. M. Rozvytok metodiv praktychnoyi stiykosti ta yikh vykorystannya dlya yikh analizu, otsinky I optymizatsiyi dynamiky puchkiv [Development of practical stability methods and their use to analysis, evaluation and optimization of bunch dynamics]. *Visnyk Kyyivs'kogo universytetu. Kibernetyka* [Bulleting of Kyiv University. Cybernetics]. 2000, vol. 1, pp. 4–17.

Надійшла (received) 09.03.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Матвієнко Володимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 913-94-68; e-mail: matvienko.vt@gmail.com.

Матвиенко Владимир Тихонович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра моделирования сложных систем, факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (099) 913-94-68; e-mail: matvienko.vt@gmail.com.

Matvienko Vladimir Tikhonovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences**,** Associate Professor, Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (099) 913-94-68; e-mail: matvienko.vt@gmail.com.

Пічкур Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (068) 133-85-75; e-mail: vpichkur@gmail.com.

Пичкур Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра моделирования сложных систем, факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (068) 133-85-75; e-mail: vpichkur@gmail.com.

Pichkur Volodymyr Volodymyrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences**,** Professor, Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (068) 133-85-75; e-mail: vpichkur@gmail.com.

Черній Дмитро Іванович – доктор технічних наук, завідувач кафедри моделювання складних систем, факультет комп’ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Черний Дмитрий Иванович – доктор технических наук, заведующий кафедры моделирования сложных систем, факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (095) 830-72-87; e-mail: d_cherniy@ukr.net.

Cherniy Dmytro Ivanovych – Doctor of Engineering Sciences, Head of the Department of Composite System Modeling, Faculty of Computer Science and Cybernetics, National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 830-72-87; e-mail: d_cherniy@ukr.net.