УДК 517.988 : 519.632 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.21**

С. М. ЛАМТЮГОВА, А. О. ПОЛЯКОВ, М. В. СИДОРОВ

КОНСТРУКТИВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДАМИ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У роботі розглянуто першу крайову задачу для напівлінійного еліптичного рівняння другого порядку. Задачі такого класу часто виникають при моделюванні процесів, що протікають у хімії, фізиці, біології тощо. Особливе місце серед методів аналізу задач, що розглядалися, займають так звані конструктивні методи дослідження, які дозволяють не тільки довести існування розв'язку задачі, а й пропонують алгоритм його знаходження із заданою точністю. Для конструктивного дослідження нелінійної крайової задачі запропоновано використати два варіанти методу двосторонніх наближень. Обидва методи засновані на переході від диференціальної задачі до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння (за допомогою функції Гріна або за допомогою квазіфункції Гріна – Рвачова), яке аналізується методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Висновки про існування додатних розв'язків побудованих інтегральних рівнянь та двобічну збіжність до цих розв'язків послідовних наближень робляться на основі результатів В. І. Опойцева про розв'язність нелінійних рівнянь з гетеротонним оператором. Практична реалізація методу двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна має певні обмеження, пов'язані з необхідністю мати у наявності явний вираз цієї функції, що звужує коло областей, у яких метод може бути фактично застосований. Вільним від цього недоліку є метод двосторонніх наближень, заснований на використанні квазіфункції Гріна – Рвачова, яка може бути побудована за допомогою апарату теорії R – функцій для областей досить довільної геометрії. Запропоновані методи проілюстровано обчислювальними експериментами для еліптичних рівнянь з операторами Лапласа та Гельмгольця і гетеротонною степеневою нелінійністю у ряді дво- та тривимірних областей. Результати роботи обох методів двосторонніх наближень порівняно між собою.

Ключові слова: крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння, метод двосторонніх наближень, метод функцій Гріна, метод квазіфункцій Гріна – Рвачова, додатний розв'язок крайової задачі, гетеротонний оператор.

С. Н. ЛАМТЮГОВА, А. А. ПОЛЯКОВ, М. В. СИДОРОВ

КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУЛИНИЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе рассмотрена первая граничная задача для полулинейного эллиптического уравнения второго порядка. Задачи такого класса часто возникают при моделировании процессов, протекающих в химии, физике, биологии и тому подобное. Особенное место среди методов анализа рассматриваемых задач занимают так называемые конструктивные методы исследования, позволяющие не только доказать существование решения задачи, а и предлагают алгоритм его нахождения с заданной точностью. Для конструктивного исследования нелинейной граничной задачи предложено использовать два варианта метода двусторонних приближений. Оба метода основаны на переходе от дифференциальной задачи к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению (при помощи функции Грина или при помощи квазифункции Грина – Рвачёва), которое анализируется методами теории нелинейных операторов в полуупорядоченных банановых пространствах. Выводы о существовании положительных решений построенных интегральных уравнений и двусторонней сходимости к этим решениям последовательных приближений делаются на основании результатов В. И. Опойцева о решении нелинейных уравнений с гетеротонным оператором. Практическая реализация метода двусторонних приближений на основе использования функции Грина имеет определённые ограничения, связанные с необходимостью иметь в наличии явное выражение этой функции, что сужает круг областей, в каких этот метод может быть фактически применён. Свободным от этого недостатка есть метод двусторонних приближений, основанный на использовании квазифункции Грина – Рвачёва, которая может быть построена при помощи аппарата R – функций для областей довольно произвольной геометрии. Предложенные методы проиллюстрированы вычислительными экспериментами для эллиптических уравнений с операторами Лапласа и Гельмгольца и гетеротонной степенной нелинейностью в ряде дву- и трёхмерных областей. Результаты работы обеих методов двусторонних приближений сравнили между собой.

Ключевые слова: краевая задача для полулинейного эллиптического уравнения, метод двусторонних приближений, метод функций Грина, метод квазифункций Грина – Рвачева, положительное решение краевой задачи, гетеротонный оператор.

S. M. LAMTYUGOVA, A. O. POLYAKOV, M. V. SIDOROV

A CONSTRUCTIVE INVESTIGATION BY THE METHODS OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND-ORDER SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

The paper considers the first boundary value problem for a second-order semilinear elliptic equation. Problems of this class arise often in the modeling of processes occurring in chemistry, physics, biology, etc. A special place among the methods of analysis of the problems under consideration is occupied by the so-called constructive research methods, which allow not only to prove the existence of a problem solution, but also offer an algorithm for finding it with a given accuracy. For a constructive study of a nonlinear boundary value problem, it is proposed to use two versions of the method of two-sided approximations. Both methods are based on the transition from a differential problem to an equivalent nonlinear integral equation (using Green's function or using Green – Rvachev's quasi-function), which is analyzed by methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces. Conclusions about the existence of positive solutions of the constructed integral equations and the two-sided convergence of successive approximations to these solutions are made on the basis of the results of V.I. Opojcev on the solvability of nonlinear equations with a heterotone operator. The practical implementation of the method of two-sided approximations based on the use of Green's function has certain limitations associated with the need to have an explicit expression for this function, which narrows the range of areas in which the method can actually be applied. The method of two-sided approximations, based on the use of Green – Rvachev's quasi-function, which can be constructed using the apparatus of the R – function theory for regions of sufficiently arbitrary geometry, is free from this shortcoming. The proposed methods are illustrated by computational experiments for elliptic equations with Laplace and Helmholtz operators and heterotone power nonlinearity in a number of two- and three-dimensional domains. The results of both methods of two-sided approximations are compared.

Key words: boundary value problem for a semilinear elliptic equation, method of two-sided approximations, Green's function method, Green – Rvachev's quasi-function method, positive solution of a boundary value problem, heterotone operator.

Вступ. Вивчення *методами математичного моделювання* процесів, що протікають у *нелінійних середови-*

© С. М. Ламтюгова, А. О. Поляков, М. В. Сидоров, 2023

щах, приводить до необхідності розв'язання *крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку*. Зокрема, до таких задач приходять при дослідженні складних явищ та процесів у хімічній кінетиці, фізиці плазми, теорії горіння, біології тощо [1 –3]. Задачі, що виникають у цих галузях, зазвичай не піддаються прямому аналітичному дослідженню, а тому для їх аналізу треба використовувати *методи обчислювальної математики*. Серед усього різноманіття існуючих чисельних методів слід виокремити *двосторонні ітераційні методи* [4, 5]. Ці методи дозволяють будувати дві послідовності функцій, які знизу та зверху *апроксимують* шуканий розв'язок, а отже, при їх реалізації ми матимемо зручну *апостеріорну оцінку похибки* та критерій закінчення ітерацій. Крім того, вони часто дозволяють ще й довести існування розв'язку задачі. Отже, методи двосторонніх наближень мають конструктивний характер, тобто не тільки дозволяють зробити висновок про розв'язність задачі, але й пропонують алгоритм фактичного знаходження розв'язку із заданою точністю. Теоретичним підґрунтям зазначених методів є *теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах* [6]. Таким чином, актуальним є побудова нових та вдосконалення існуючих двосторонніх ітераційних методів розв'язання крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку. Для дослідження зазначених крайових задач методи двосторонніх наближень було застосовано, зокрема, у роботах [5, 7 – 10]. Дана робота продовжує розпочаті в них дослідження і спрямована на їх узагальнення.

Постановка задачі. Математичною моделлю багатьох процесів, що протікають у нелінійних середовищах, є наступна – перша крайова задача для напівлінійного еліптичного рівняння другого порядку:

$$Lu = f(\mathbf{x}, u), \ \mathbf{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \ \mathbf{x} \in \Omega; \tag{2}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3}$$

де $Lu \equiv -\Delta u$ чи $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$; Ω – плоска або просторова область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ або $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Оператор Δ є *оператором Лапласа*, а оператор $\Delta - \kappa^2$ ($\kappa > 0$) є *оператором Гельмгольця*; умова додатності (2) природно виникає з сенсу функції u у тій чи іншій галузі.

Вважатимемо, що функція $f(\mathbf{x}, u)$ є неперервною і додатною при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), $u > 0$, причому $f(\mathbf{x}, u) = \widehat{f}(\mathbf{x}, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, v, w невід'ємна функція $\widehat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$.

Застосування *методів двосторонніх наближень* до дослідження задачі (1) – (3) зазвичай відбувається шляхом переходу від цієї задачі до еквівалентного *нелінійного інтегрального рівняння*, яке аналізується методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих *банахових просторах*. При цьому переході використовується *метод функцій Гріна* чи *метод квазіфункцій Гріна – Рвачова*. **Метою** даної роботи є розробка та порівняння методів двосторонніх наближень, заснованих на використанні функції Гріна та квазіфункції Гріна – Рвачова.

Метод двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна. Нехай $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора L. Тоді задача (1) – (3) *еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна*:

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}. \tag{4}$$

Рівняння (4) розглядатимемо як *операторне рівняння* $u = T(u)$ у просторі $C(\overline{\Omega})$, який напівупорядковано конусом $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}\}$, де

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Напівупорядкованість у просторі $C(\overline{\Omega})$ за допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ введемо за правилом для $u, v \in C(\overline{\Omega})$ $u \leqslant v$, якщо $v - u \in \mathcal{K}_+$, тобто якщо $u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

Покладемо $u_0(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s}$ і через $K(u_0)$, позначимо множину функцій з $\mathcal{K}_+$ таких, що $\alpha u_0 \leqslant u \leqslant \beta u_0$, де $\alpha, \beta > 0$. З властивостей функції Гріна та функцій $f(\mathbf{x}, u)$ і $\widehat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ випливає [10], що оператор T, який діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом (5), є:

– додатним оператором, тобто $T(u) \in \mathcal{K}_+$, якщо $u \in \mathcal{K}_+$;

– u_0 – додатним оператором, тобто $T(u) \in K(u_0)$, якщо $u \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\theta\}$;

– *гетеротонним оператором* з супровідним оператором $\widehat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \widehat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}$;

– u_0 – *псевдоувігнутим оператором*, якщо для будь-яких додатних чисел v, w при будь-якому $\tau \in (0, 1)$:

$$\widehat{f}\left(\mathbf{x}, \tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \widehat{f}(\mathbf{x}, v, w)\,, \quad \mathbf{x} \in \Omega\,. \tag{6}$$

Зауважимо, що гетеротонність оператора T означає, що:

1) з $v_1, v_2 \in C(\overline{\Omega})$, $v_1 \geqslant v_2$ випливає, що $\widehat{T}(v_1, w) \geqslant \widehat{T}(v_2, w)$;

2) з $w_1, w_2 \in C(\overline{\Omega})$, $w_1 \geqslant w_2$ випливає, що $\widehat{T}(v, w_1) \leqslant \widehat{T}(v, w_2)$,

а його u_0 – псевдоувігнутість означає, що він є u_0 – додатним і для будь-яких $u \in K(u_0)$ і $\tau \in (0,1)$ знайдеться таке $\eta = \eta(u,\tau) > 0$, що $T(\tau u) \geqslant \tau(1+\eta)T(u)$.

Очевидно, що оператори T і $\widehat{T}$ є цілком неперервними.

Якщо існує класичний розв'язок задачі (1) – (3), тобто функція $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ така, що вона задовольняє рівнянню (1) і умови (2), (3), то ця функція також задовольняє і рівнянню (4). Якщо ж класичного розв'язку немає, то інтегральне рівняння (4) можна взяти за основу означення узагальненого розв'язку задачі (1) – (3).

Означення 1. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1) – (3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (4).

Перейдемо до формування обчислювальної схеми методу двосторонніх наближень. У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами $\widehat{T}(v^0, w^0) \geqslant v^0$, $\widehat{T}(w^0, v^0) \leqslant w^0$, які у нашому випадку набувають вигляду для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$:

$$\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \widehat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x})\,, \quad \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \widehat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x})\,.$$

Розглянемо ітераційний процес $v^{(k+1)} = \widehat{T}(v^{(k)}, w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \widehat{T}(w^{(k)}, v^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, який починається з кінців сильно інваріантного конусного відрізка, тобто:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \widehat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{7}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \widehat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{8}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x})\,, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x})\,. \tag{9}$$

Через сильну інваріантність конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ та гетеротонність оператора T можна дійти висновку, що послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Крім того, з нормальності конуса $\mathcal{K}_+$ і повної неперервності оператора $\widehat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей:

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0\,.$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ розв'язок розглядуваної крайової задачі. Умови, які забезпечують рівність $v^* = w^*$, містяться у наступних теоремах.

Теорема 1. *Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для оператора T вигляду (5) і нехай існує таке число $L > 0$, що функція $\widehat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left|\widehat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \widehat{f}(\mathbf{x}, v, w)\right| \leq L|w - v|$, причому $\gamma = LM < 1$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u_0(\mathbf{x})$. Тоді ітераційний процес (7) – (9) двосторонньо збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3) і має місце оцінка $\left\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\right\| \leq \gamma^{k+1} \left\|w^{(0)} - v^{(0)}\right\|$.*

Теорема 2. *Нехай $< v^0, w^0 > \subset K(u_0)$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (5) і має місце умова (6). Тоді ітераційний процес (7) – (9) двосторонньо збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3).*

Метод двосторонніх наближень на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова. Нехай $Q(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – квазіфункція Гріна Рвачова першої крайової задачі для оператора L [9]. Тоді задача (1) – (3) еквівалентна *інтегральному рівнянню Урисона*:

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,, \tag{10}$$

де

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) = K(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s}) + Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\,.$$

Тут $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = L_{\mathbf{s}} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, а $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = g\left(\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right)$, де $g(r)$ – фундаментальний розв'язок рівняння $Lu = 0$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$, $\omega(\mathbf{x})$ – функція, що описує геометрію області Ω.

Рівняння (10) також розглядатимемо як операторне рівняння $u = T(u)$ у просторі $C(\bar{\Omega})$, який напівупорядковано конусом $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \ge 0,\ \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$, де $T(u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}$. Оператор T запишемо у вигляді:

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,, \tag{11}$$

де $K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$, $K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$.

З властивостей квазіфункції Гріна – Рвачова та функцій $f(\mathbf{x}, u)$ і $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ випливає [9], що оператор T, який діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом (11), є гетеротонним оператором з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v(\mathbf{s}), w(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,.$$

Зрозуміло, що оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Так само, як і для рівняння (4), якщо існує класичний розв'язок задачі (1) – (3), то він також задовольняє і рівнянню (10). Якщо ж класичного розв'язку немає, то інтегральне рівняння (10) покладемо в основу означення узагальненого розв'язку задачі (1) – (3).

Означення 2. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1) – (3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (10).

Тепер перейдемо до формування обчислювальної схеми методу двосторонніх наближень на основі рівняння (10). У конусі $\mathcal{K}_+$ виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$:

$$\int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^0(\mathbf{s}), w^0(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s} \ge v^0(\mathbf{x})\,;$$

$$\int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^0(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^0(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^0(\mathbf{s}), v^0(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s} \le w^0(\mathbf{x})\,.$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,,\quad k = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{12}$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})\, d\mathbf{s} + \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s}))\, d\mathbf{s}\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{13}$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x})\,,\ w^{(0)}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x})\,. \tag{14}$$

З аналогічних попередньому пункту міркувань можна зробити висновок, що послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ і послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ відповідно не спадає і не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$, а також існують границі $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей і:

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant v^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0\,.$$

Якщо $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $< v^0, w^0 >$ нерухома точка оператора T, то u^* – єдиний на $< v^0, w^0 >$ розв'язок крайової задачі, що розглядається. Умови, які забезпечують рівність $v^* = w^*$, містяться у наступній теоремі.

Теорема 3. *Нехай $< v^0, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для оператора T вигляду (11) і нехай існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх чисел v, w таких, що $0 < v, w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left|\hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w)\right| \le L|w - v|$, причому $\gamma = M_1 + LM < 1$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})\, d\mathbf{s}$, $M_1 = \max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int\limits_{\Omega} [K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s})]\, d\mathbf{s}$. Тоді ітераційний процес (12) – (14) двосторонньо збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі*

(1) – (3) і має місце оцінка $\left\| w^{(k+1)} - v^{(k+1)} \right\| \le \gamma^{k+1} \left\| w^{(0)} - v^{(0)} \right\|$.

Зауважимо, що двобічна збіжність побудованих ітераційних послідовностей означає виконання ланцюга нерівностей:

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant ... \leqslant v^{(k)} \leqslant ... \leqslant u^* \leqslant ... \leqslant w^{(k)} \leqslant ... \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0 .$$

При практичній реалізації методу двосторонніх наближень на k – й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (1) – (3) доцільно взяти функцію:

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2} . \tag{15}$$

Тоді похибка наближеного розв'язку (15) оцінюється нерівністю:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \le \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) \tag{16}$$

і, якщо задано точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності:

$$\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon \tag{17}$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

Наявність оцінки похибки (16) і критерію закінчення обчислень (14) є безумовною перевагою запропонованих двосторонніх ітераційних методів.

Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (1) – (3) для $Lu \equiv -\Delta u$ і $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$ та $f(\mathbf{x}, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ за різних значень параметрів λ, μ, p, q та у різних дво- та тривимірних областях Ω.

У табл. 1 наведено порівняння результатів, отриманих методами двобічних наближень на основі використання функції Гріна та на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова для задачі (1) – (3) з оператором $Lu \equiv -\Delta u$, а табл. 2 містить аналогічне порівняння для задачі (1) – (3) з оператором $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$. Тут u_G – розв'язок відповідної крайової задачі, отриманий методом двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна, а u_Q – розв'язок, отриманий методом двосторонніх наближень на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова, N_G – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (7) – (9), а N_Q – кількість ітерацій, виконаних за ітераційними формулами (12) – (14) до досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблиця 1 – Порівняння результатів, отриманих методами двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна – Рвачова для задачі (1) – (3) з $Lu \equiv -\Delta u$

Область Ω	N_G	$\|u_G\|$	N_Q	$\|u_Q\|$	Абсолютна похибка $\|u_G - u_Q\|$	Відносна похибка $\frac{\|u_G - u_Q\|}{\|u_Q\|} \cdot 100\%$
Одиничний квадрат	11	0,2202	28	0,2194	$0,97 \cdot 10^{-3}$	0,44%
Половина одиничного круга	10	0,2582	17	0,2533	$0,94 \cdot 10^{-2}$	3,64%
Одиничний куб	11	0,1575	29	0,1651	$0,76 \cdot 10^{-2}$	4,60%

Таблиця 2 – Порівняння результатів, отриманих методами двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна та використання квазіфункції Гріна – Рвачова для задачі (1) – (3) з $Lu \equiv -\Delta u + \kappa^2 u$

Область Ω	N_G	$\|u_G\|$	N_Q	$\|u_Q\|$	Абсолютна похибка $\|u_G - u_Q\|$	Відносна похибка $\frac{\|u_G - u_Q\|}{\|u_Q\|} \cdot 100\%$
Одиничний круг	12	0,4853	14	0,4857	$0,52 \cdot 10^{-3}$	0,11%
Одиничний квадрат	11	0,1901	25	0,1903	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,15%
Половина одиничного круга	10	0,2582	17	0,2533	$0,94 \cdot 10^{-2}$	3,64%
Одинична куля	12	0,3194	12	0,3217	$0,74 \cdot 10^{-2}$	2,30%
Одиничний куб	11	0,1512	28	0,1595	$0,83 \cdot 10^{-2}$	5,20%

Як бачимо з табл. 1 і 2, результати, отримані обома методами двосторонніх наближень, добре узгоджені між собою і дозволяють знайти розв’язок поставленої задачі із заданою точністю. Але все ж таки, на нашу думку, перевагу слід віддати методу двобічних наближень на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова, оскільки при його обчислювальній реалізації всі вирази у розрахункових формулах враховуються точно, на відміну від методу двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна, де функція Гріна (за умови, що вона відома) при обчисленнях заміняється частковою сумою відповідного *ряду Фур’є*.

Висновки. У роботі отримали подальший розвиток методи двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна та квазіфункції Гріна – Рвачова. Роботу цих методів порівняно за результатами обчислювальних експериментів у різних дво- та тривимірних областях для степеневої гетеротонної правої частини. Проведений аналіз показав ефективність використання методів двосторонніх наближень, при цьому більш перспективним є використання методу двосторонніх наближень на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова через те, що він є застосований для ширшого набору областей на відміну від метода двосторонніх наближень на основі використання функції Гріна, використання якого є можливим лише за умови явної побудови функції Гріна.

Список літератури

1. *Самарский А. А.*, *Михайлов А. П.* Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры. – Москва : Физматлит, 2001. – 320 с.
2. *Франк-Каменецкий Д. А.* Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2008. – 408 с.
3. *Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. – New York : Plenum Press, 1992. – 794 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3034-3.
4. *Шувар Б. А.*, *Копач М. І.*, *Ментинський С. М.*, *Обшта А. Ф.* Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ : ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.
5. *Сидоров М. В.* Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння // Радіоелектроніка та інформатика. – 2018. – № 3 (82). – С. 50 – 56.
6. *Опойцев В. И.*, *Хуродзе Т. А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
7. *Колосова С. В.*, *Луханин В. С.*, *Сидоров М. В.* О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане – Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 107 – 120.
8. *Сидоров М. В.* Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв’язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного университету. Серія : фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 250 – 259.
9. *Sidorov M. V.* Green – Rvachev’s quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10. – No. 2. – P. 360 – 375. http://doi.org/10.15330/cmp.10.2.360-375.
10. *Gybkina N. V.*, *Lamtyugova S. M.*, *Sidorov M. V.* Two-sided approximations method based on the Green’s functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2021. – № 3 (58). – С. 26 – 41. https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-3-3.

References (transliterated)

1. Samarskiy A. A., Mihaylov A. P. *Matematicheskoe modelirovanie : Idei. Metody. Primery* [Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 320 p.
2. Frank-Kamenetskiy D. A. *Osnovy makrokinetiki. Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike* [Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics]. Dolgoprudny, Izdatel'skiy Dom «Intellekt» Publ., 2008. 408 p.
3. Pao C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. New York, Plenum Press, 1992. 794 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3034-3.
4. Shuvar B. A., Kopach M. I., Mentyns'kyy S. M., Obshta A. F. *Dvostoronni nablyzheni metody* [Two-sided approximation methods]. Ivano-Frankivsk, VDV TsIT Publ., 2007. 515 p.
5. Sidorov M. V. Dvobichni iteratsiyni metody chysel'nogo analizu pershoyi krayovoyi zadachi dlya napivliniynogo eliptychnogo rivnyannya [Two-sided iterative methods of numerical analysis for the first boundary value problem for a semilinear elliptic equation]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2018, no. 3 (82), pp. 50–56.
6. Opoycev V. I., Khurodze T. A. *Nelineynye operatory v prostranstvakh s konusom* [Nonlinear Operators in Spaces with a Cone]. Tbilisi, Izd-vo Tbilis. un-ta Publ., 1984. 246 p.
7. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. O postroenii dvustoronnikh priblizheniy k polozhitel'nomu resheniyu uravneniya Lane – Jemdena [On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation]. *Visnyk Zaporiz'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Visnyk of the Zaporizhzhya National University. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2015, no. 3, pp. 107–120.
8. Sidorov M. V. Zastosuvannya metodiv funktsiyi Grina ta kvazifunktsiyi Grina – Rvachova dlya pobudovy dvobichnykh iteratsiynykh protsesiv rozv"yazannya neliniynykh krayovykh zadach [Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green’s functions and the quasi-functions of Green-Rvachev]. *Visnyk Zaporiz'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya: fizyko-matematychni nauky* [Visnyk of the Zaporizhzhya National University. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2017, no. 2, C. 250–259.
9. Sidorov M. V. Green – Rvachev’s quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018, vol. 10, no. 2. pp. 360–375. http://doi.org/10.15330/cmp.10.2.360-375.
10. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green’s functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Radioelektronika*, *informatyka*, *upravlinnya* [Radio Electronics, Computer Science, Control]. 2021, no. 3 (58), pp. 26–41. https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-3-3.

Надійшла (received) 23.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ламтюгова Світлана Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, м. Харків; тел.: (095) 899-97-39; e-mail: Svitlana.Lamtyugova@kname.edu.ua.

Ламтюгова Светлана Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А. Н. Бекетова, г. Харьков; тел.: (095) 899-97-39; e-mail: Svitlana.Lamtyugova@kname.edu.ua.

Lamtyugova Svitlana Mykolaivna – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modeling, O.M. Beketov Kharkiv National University of Urban Economy, Kharkiv; tel.: (095) 899-97-39; e-mail: Svitlana.Lamtyugova@kname.edu.ua.

Сидоров Максим Вікторович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (050) 947-64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Сидоров Максим Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (050) 947 -64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Sidorov Maxim Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (050) 947-64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Поляков Андрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (099) 415-12-00; e-mail: andrii.poliakov@m.hneu.edu.ua.

Поляков Андрей Александрович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем, Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца, г. Харьков; тел.: (099) 415-12-00; e-mail: andrii.poliakov@m.hneu.edu.ua.

Polyakov Andrii Oleksandrovich – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Systems, Semen Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv; tel.: (099) 415-12-00; e-mail: andrii.poliakov@m.hneu.edu.ua.