УДК 517.95 : 517.988 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.20**

О. С. КОНЧАКОВСЬКА, М. В. СИДОРОВ

МЕТОД КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ

Роботу присвячено розробці на основі використання квазіфункції Гріна – Рвачова двостороннього ітераційного методу чисельного аналізу однієї електростатичної мікроелектромеханічної системи. Мікроелектромеханічні системи – мініатюрні пристрої, що поєднують електронні та механічні компоненти мікронних розмірів. Електростатично активовані мікроелектромеханічні системи мають певні недоліки, що обмежують діапазон їх роботи. Одним із них є явище нестабільності відхилення функціональних компонентів системи, яке виникає, якщо різниця прикладеної напруги вище певного критичного значення. Математичною моделлю системи, що розглядається у роботі, є напівлінійне еліптичне рівняння з оператором Лапласа та умовою Діріхле. Для побудови наближеного розв'язку задачі пропонується використовувати методи нелінійного аналізу в напівупорядкованих просторах, зокрема, результати В. І. Опойцева про розв'язність нелінійних операторних рівнянь з гетеротонним оператором. Крайова задача, що моделює найпростішу мікроелектромеханічну систему під дією зовнішнього тиску, методом квазіфункцій Гріна – Рвачова зводиться до інтегрального рівняння Урисона, що дозволяє розширити застосування методу двосторонніх наближень для задач у областях досить довільної геометрії. У роботі обгрунтовано можливість побудови ітераційних послідовностей з двобічним характером збіжності до додатного розв'язку задачі, а саме: наведено обчислювальну схему, отримано умови її збіжності до шуканого розв'язку, а також отримано апостеріорну оцінку похибки. Метод проілюстровано обчислювальнім експериментом для задачі, що розглядається у прямокутній області. Результати обчислювального експерименту представлено у вигляді поверхні та ліній рівня наближеного розв'язку, а також графічно проілюстровано двобічних характер збіжності запропонованого методу.

Ключові слова: метод двосторонніх наближень, метод квазіфункцій Гріна – Рвачова, додатний розв'язок крайової задачі, рівняння Урисона, напівупорядкований простір, сильно інваріантний конусний відрізок, гетеротонний оператор, мікроелектромеханічна система.

О. С. КОНЧАКОВСКАЯ, М. В. СИДОРОВ

МЕТОД КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА-РВАЧЕВА В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Работа посвящена разработке на основе использования квазифункции Грина – Рвачева двустороннего итерационного метода численного анализа одной электростатической микроэлектромеханической системы. Микроэлектромеханические системы – миниатюрные устройства, совмещающие электронные и механические компоненты микронных размеров. Электростатически активированные микроэлектромеханические системы имеют некоторые недостатки, ограничивающие диапазон их работы. Одним из них является явление нестабильности отклонения функциональных компонентов системы, возникающее, если разность приложенного напряжения выше определенного критического значения. Математическая модель рассматриваемой в работе системы – полулинейное эллиптическое уравнение с оператором Лапласа и условием Дирихле. Для построения приближенного решения задачи предлагается использовать методы нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах, в частности результаты В. И. Опойцева о решении нелинейных операторных уравнений с гетеротонным оператором. Краевая задача, моделирующая простейшую микроэлектромеханическую систему под действием внешнего давления, методом квазифункций Грина – Рвачева сводится к интегральному уравнению Урисона, что позволяет расширить применение метода двусторонних приближений для задач в областях достаточно произвольной геометрии. В работе обоснована возможность построения итерационных последовательностей с двусторонним характером сходимости к положительному решению задачи, а именно: приведена вычислительная схема, получены условия ее сходимости к искомому решению, а также получена апостериорная оценка погрешности. Метод проиллюстрирован вычислительным экспериментом для рассматриваемой задачи в прямоугольной области. Результаты вычислительного эксперимента представлены в виде поверхности и линий уровня приближенного решения, а также графически проиллюстрирован двусторонний характер сходимости предложенного метода.

Ключевые слова: метод двусторонних приближений, метод квазифункций Грина – Рвачева, положительное решение краевой задачи, уравнение Урисона, полуупорядоченное пространство, сильно инвариантный конусный отрезок, гетеротонный оператор, микроэлектромеханическая система.

O. S. KONCHAKOVSKA, M. V. SIDOROV

THE GREEN-RVACHOV QUASI-FUNCTION METHOD IN THE NUMERICAL ANALYSIS OF MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS USING TWO-SIDED APPROXIMATIONS

The work is devoted to developing a bilateral iterative method of numerical analysis of one electrostatic microelectromechanical system based on the use of the Green – Rvachev quasi-function. Microelectromechanical systems are miniature devices that combine electronic and mechanical components of micron size. Electrostatically activated microelectromechanical systems have certain disadvantages that limit the range of their operation. One of these is the pull-in instability of the functional components of the system, which occurs if the applied voltage difference is above a particular critical value. The mathematical model of the system under consideration in the work is a semi-linear elliptic equation with the Laplace operator and the Dirichlet condition. To construct an approximate solution of the problem, it is proposed to use the methods of nonlinear analysis in semi-ordered spaces, particularly the results of V. I. Opoitsev on the solvability of nonlinear operator equations with a heterotonic operator. The boundary value problem simulating the most straightforward microelectromechanical system under the action of external pressure is reduced to the Urison integral equation using the Green – Rvachev quasi-function method, which makes it possible to expand the application of the method of two-sided approximations for problems in areas of somewhat arbitrary geometry. The paper substantiates the possibility of constructing iterative sequences with two-sided convergence to a positive solution of the problem: the computational scheme is given, the conditions for its convergence to the desired solution are obtained, and the a posteriori error estimate is derived. The method is illustrated by a computational experiment for a problem considered in a rectangular area. The computational experiment results are presented in the form of the surface and lines of the level of the approximate solution, and the two-sided nature of the convergence of the proposed method is also graphically illustrated.

Key words: the method of two-sided approximations, the Green – Rvachev quasi-function method, the positive solution of a boundary value problem, the Urison equation, semi-ordered space, strongly invariant conic segment, heterotonic operator, microelectromechanical system.

Вступ. *Мікроелектромеханічні системи (МЕМС)* відіграють ключову роль у багатьох сучасних *електронних пристроях*: оптичні перемикачі і модулятори, акселерометри та гіроскопи, біомедичні датчики тощо [1]. Однією з особливостей функціонування електростатичних мікроелектромеханічних систем є *явище нестабільності відхилення їх функціональних компонентів*. Такі системи складаються з еластичної пластини, що розташована над фіксованою заземленою пластиною, закріпленої вздовж межі. Внаслідок подачі напруги *сила Кулона* відхиляє еластичну пластину і, якщо різниця напруги вище певного критичного значення, стабільна конфігурація системи втрачається.

Для *математичного моделювання* МЕМС використовують такі чисельні методи, як *метод скінченних різниць*, *метод скінченних елементів*, *різні ітераційні методи* [2]. Серед ітераційних методів особливе місце займають так звані *двосторонні ітераційні методи*, які дають ітераційну послідовність з двобічним характером збіжності до шуканого розв'язку [3 – 8]. Для дослідження крайової задачі, що моделює електростатичну мікроелектромеханічну систему, такі методи були застосовані у роботах [4 – 8]. Дана робота продовжує розпочаті в них дослідження.

Постановка задачі. Математичною моделлю найпростішої електростатичної мікроелектромеханічної системи є наступна *крайова задача* [9, 10]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{1}$$

$$0 < u(\mathbf{x}) < 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{2}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3}$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; u – величина прогину мембрани; $P(\mathbf{x})$ – зовнішній тиск; $f(\mathbf{x})$ – функція, що описує діелектричні властивості мембрани; λ – параметр, що характеризує сили Кулона; функції $f(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ є неперервними і невід'ємними при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

Традиційним підходом до розв'язання задачі (1) – (3) *методом двосторонніх наближень* є перехід від неї за допомогою *функції Гріна* до еквівалентного *інтегрального рівняння Гаммерштейна*, яке розглядається як *операторне рівняння другого роду* у просторі неперервних функцій $C(\overline{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій. Практична реалізація такого підходу натикається на труднощі, пов'язані з тим, що аналітичні вирази функції Гріна відомі лише для обмеженої кількості областей доволі простої геометрії. Альтернативним підходом може бути побудова еквівалентного задачі (1) – (3) *інтегрального рівняння Урисона* на основі використання *квазіфункції Гріна – Рвачова*. Зазначена квазіфункція може бути побудована в явному вигляді для областей досить довільної геометрії з використанням конструктивного апарату *теорії R – функцій* [4, 11].

Отже, актуальним є розробка нових та вдосконалення існуючих двосторонніх ітераційних методів розв'язання крайових задач для *напівлінійних еліптичних рівнянь*, які є математичними моделями різних процесів. Відповідно до цього **метою** даної роботи є розробка та практична реалізація для розв'язання задачі (1) – (3) двостороннього ітераційного методу, заснованого на використанні квазіфункції Гріна – Рвачова.

Метод дослідження. Припустимо, що межа області $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості ділянок ліній, які задано рівняннями $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, ..., r$, де кожна з $\sigma_i(\mathbf{x})$ є елементарною функцією. У цьому випадку, користуючись конструктивними засобами теорії R – функцій [11], можна побудувати елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$, що описує геометрію області Ω, тобто:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω; б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$; в) $\left|\nabla\omega(\mathbf{x})\right| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Означення 1. Функція вигляду:

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}, \tag{4}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$; $r = \left|\mathbf{x} - \mathbf{s}\right| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$; $\omega(\mathbf{x})$ – функція, що описує геометрію області Ω, називається *квазіфункцією Гріна – Рвачова задачі Діріхле для оператора* $-\Delta$ у $\mathbb{R}^2$.

Квазіфункція Гріна – Рвачова $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ вигляду (4) є симетричною функцією своїх змінних $\mathbf{x}$ і $\mathbf{s}$, яка є додатною при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ [4].

Класичний розв'язок $u(\mathbf{x})$ задачі (1) – (3) задовольняє інтегральне рівняння:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \tag{5}$$

де $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\Delta_{\mathbf{s}} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \right) \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$; $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}$.

Нелінійне інтегральне рівняння (5) запишемо як *рівняння Урисона*:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s},$$

де

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) = K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) + Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right].$$

Рівняння (5) будемо розглядати у *банаховому просторі* $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$, з нормою $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$. Виділимо у просторі $C(\bar{\Omega})$ конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \ \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ невід'ємних функцій, за допомогою якого введемо у просторі $C(\bar{\Omega})$ напівупорядкованість за правилом [12, 13]:

$$\text{для } \ u, v \in C(\bar{\Omega}) \quad u \leqslant v, \ \text{ якщо } \ v - u \in \mathcal{K}_+,$$

тобто $u \leqslant v$, якщо $u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Конус $\mathcal{K}_+$ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим), тобто з $u \leqslant v$ випливає, що $\|u\| \leqslant \|v\|$.

Отже, у випадку існування класичного розв'язку задачі (1) – (3), він задовольняє також рівняння (5). Якщо ж задача (1) – (3) класичного розв'язку не має, то рівняння (5) можна використати для введення поняття *узагальненого розв'язку задачі* (1) – (3).

Означення 2. Розв'язком (узагальненим) крайової задачі (1) – (3) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (5).

Побудуємо процес двобічних наближень знаходження розв'язку інтегрального рівняння (5) (а отже, і розв'язку крайової задачі (1) – (3)), використовуючи *методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах* [12, 13].

Введемо до розгляду нелінійний оператор T, що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом:

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{s}, u(\mathbf{s})) \, d\mathbf{s}. \tag{6}$$

Позначимо $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$, $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$. Тоді $K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$, $K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$ при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \Omega$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$), причому $K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, $|K(\mathbf{x}, \mathbf{s})| = K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, і оператор T вигляду (6) набуде наступного вигляду:

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}. \tag{7}$$

Оскільки функція $F(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1 - u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x})$ при $0 < u < 1$ монотонно зростає за u для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, то оператор T вигляду (7) буде *гетеротонним* з супровідним оператором:

$$\hat{T}(v, w)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - v(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}. \tag{8}$$

Оператори T і $\hat{T}$ є цілком неперервними.

Виділимо у конусі $\mathcal{K}_+$ сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0, w^0 >$ умовами $\hat{T}(v^0, w^0) \geq v^0$, $\hat{T}(w^0, v^0) \leq w^0$, які для оператора $\hat{T}$, що визначається рівністю (8), набувають такого вигляду для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$:

$$\int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - v^0(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} \geq v^0(\mathbf{x}); \tag{9}$$

$$\int_{\Omega} K^+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w^0(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K^-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v^0(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - w^0(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} \leq w^0(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Далі сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathbf{s})\left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v^{(k)}(\mathbf{s}))^2}+P(\mathbf{s})\right]d\mathbf{s}\,,\ k=0,1,2,\ldots; \quad (11)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega}K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})w^{(k)}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}-\int\limits_{\Omega}K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})v^{(k)}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}+\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathbf{s})\left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-w^{(k)}(\mathbf{s}))^2}+P(\mathbf{s})\right]d\mathbf{s}\,,\ k=0,1,2,\ldots; \quad (12)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x})=v^{0}(\mathbf{x})\,,\quad w^{(0)}(\mathbf{x})=w^{0}(\mathbf{x})\,. \quad (13)$$

Через сильну інваріантність конусного відрізка $<v^0, w^0>$ послідовність $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$. Крім того, з нормальності конуса $\mathcal{K}_+$ і повної неперервності оператора $\hat{T}$ випливає існування границь $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей. Тоді спрацьовує ланцюг нерівностей:

$$v^0=v^{(0)}\leqslant v^{(1)}\leqslant\ldots\leqslant v^{(k)}\leqslant\ldots\leqslant v^*\leqslant w^*\leqslant\ldots\leqslant w^{(k)}\leqslant\ldots\leqslant w^{(1)}\leqslant w^{(0)}=w^0\,.$$

Якщо $v^*=w^*$, то $u^*:=v^*=w^*$ є єдиною на конусному відрізку $<v^0, w^0>$ нерухомою точкою оператора T, а отже, u^* є єдиним на $<v^0, w^0>$ розв'язком крайової задачі (1) – (3).

Умовою, яка забезпечить рівність $v^*=w^*$, є умова існування такого $\gamma\in(0;1)$, що:

$$\left\|\hat{T}(v,w)-\hat{T}(w,v)\right\|\le\gamma\left\|v-w\right\| \quad (14)$$

для всіх $v, w\in<v^0, w^0>$ [14].

Нехай $0<v, w<M_0$, де $M_0=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}w^0(\mathbf{x})$, $M_0<1$. Тоді:

$$\left\|\hat{T}(v,w)-\hat{T}(w,v)\right\|=\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\left|\hat{T}(v,w)(\mathbf{x})-\hat{T}(w,v)(\mathbf{x})\right|\le\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\left|\int\limits_{\Omega}[K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})+K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})][w(\mathbf{s})-v(\mathbf{s})]d\mathbf{s}\right|+$$

$$+\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\left|\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathbf{s})[F(\mathbf{s},v(\mathbf{s}))-F(\mathbf{s},w(\mathbf{s}))]d\mathbf{s}\right|\le\left[M_1+\frac{2\lambda\tilde{M}_f}{(1-M_0)^3}\right]\cdot\left\|v-w\right\|=\gamma\left\|v-w\right\|,$$

де позначено $M_1=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int\limits_{\Omega}[K^{+}(\mathbf{x},\mathbf{s})+K^{-}(\mathbf{x},\mathbf{s})]\,d\mathbf{s}$, $\tilde{M}_f=\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int\limits_{\Omega}Q(\mathbf{x},\mathbf{s})f(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}$, $\gamma=M_1+\dfrac{2\lambda\tilde{M}_f}{(1-M_0)^3}$.

Далі, з огляду на нерівність (14), отримаємо:

$$\left\|w^{(k+1)}-v^{(k+1)}\right\|=\left\|\hat{T}(v^{(k)},w^{(k)})-T(w^{(k)},v^{(k)})\right\|\le$$

$$\le\gamma\left\|w^{(k)}-v^{(k)}\right\|=\gamma\left\|\hat{T}(v^{(k-1)},w^{(k-1)})-T(w^{(k-1)},v^{(k-1)})\right\|\le\gamma^2\left\|w^{(k-1)}-v^{(k-1)}\right\|\le\ldots\le\gamma^{k+1}\left\|w^{(0)}-v^{(0)}\right\|\le\gamma^{k+1}M_0\,,$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|w^{(k+1)}-v^{(k+1)}\right\|=0$, тобто $v^*=w^*$, якщо $\gamma<1$. Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $<v^0, w^0>$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T вигляду (7) з супровідним оператором $\hat{T}$ вигляду (8) і має місце умова $\gamma<1$. Тоді ітераційний процес (11) – (13) збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $<v^0, w^0>$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1) – (3), причому має місце ланцюг нерівностей*:

$$v^0=v^{(0)}\leqslant v^{(1)}\leqslant\ldots\leqslant v^{(k)}\leqslant\ldots\leqslant u^*\leqslant\ldots\leqslant w^{(k)}\leqslant\ldots\leqslant w^{(1)}\leqslant w^{(0)}=w^0\,. \quad (15)$$

Зауважимо, що ланцюг нерівностей (15) як раз і характеризує ітераційний процес (11) – (13) як метод двосторонніх наближень.

На k – й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (1) – (3) слід взяти функцію:

$$u^{(k)}(\mathbf{x})=\frac{w^{(k)}(\mathbf{x})+v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}\,. \quad (16)$$

Тоді для похибки наближеного розв'язку (16) матимемо зручну апостеріорну оцінку:

$$\left\|u^*-u^{(k)}\right\|\le\frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x})-v^{(k)}(\mathbf{x}))\,. \quad (17)$$

Наявність оцінки вигляду (17) є безумовною перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу.

Якщо задано точність $\varepsilon>0$, то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності:

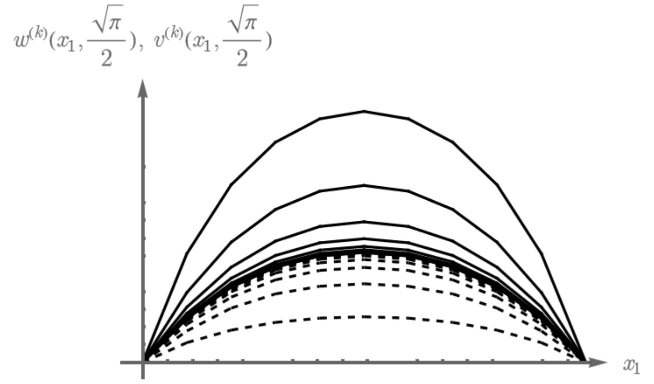
$$\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(k)}(\mathbf{x})-v^{(k)}(\mathbf{x}))<2\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

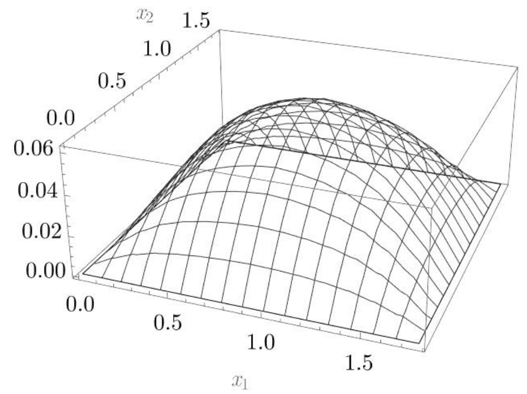
З огляду на крайову умову (2), можна рекомендувати шукати кінці v^0 , w^0 сильно інваріантного конусного відрізка $< v^0, w^0 >$ у вигляді $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$, $0 < \alpha < \beta$, де $u_0(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$.

Результати обчислювального експерименту. Розглянемо задачу (1) – (3) у квадраті Ω зі стороною $\sqrt{\pi}$. Функцію $f(\mathbf{x})$ для опису діелектричних властивостей пластин оберемо у вигляді [15]:

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\left(x_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2} .$$



а



б

Рис. 1 – *а* – графіки верхніх та нижніх наближень до розв’язку задачі у перерізі $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

б –графік поверхні наближеного розв’язку.

Тоді квазіфункція Гріна – Рвачова $Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ задачі (1) – (3) у прямокутній області Ω визначається формулою (4), де функція $\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2)$ має вигляд:

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{(\sqrt{\pi} - x_1)x_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)x_2}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{\pi} - x_1)^2 x_1^2}{\pi} + \frac{(\sqrt{\pi} - x_2)^2 x_2^2}{\pi}} .$$

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка шукатимемо у вигляді $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$, де $0 < \alpha < \beta$, $u_0(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$.

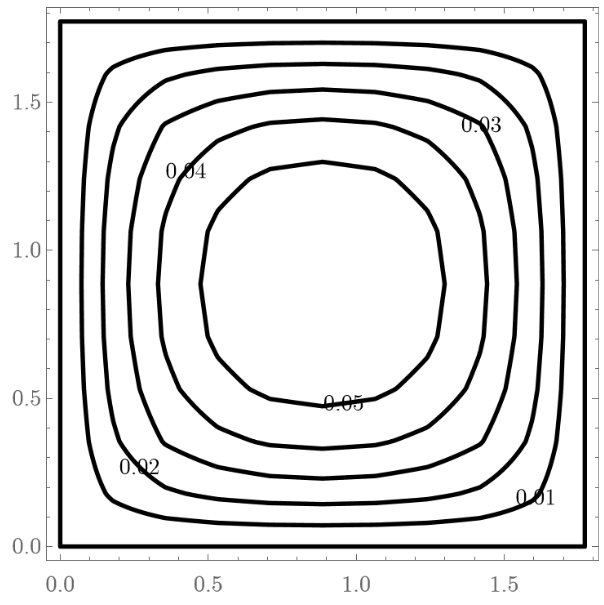


Рис. 2 – Лінії рівня наближеного розв’язку.

Нехай $P = 0,25$, $\lambda = 0,1$, $\delta = 3$. Було підібрано, що $v^0(\mathbf{x}) = \alpha u_0(\mathbf{x})$, $w^0(\mathbf{x}) = \beta u_0(\mathbf{x})$ функції задовольняють умови (9) – (10), якщо $\alpha = 0,2$, $\beta = 1,1$. Тоді знаходимо, що $M_0 = 0,1414$, $M_1 = 0,7082$, $\tilde{M}_f = 0,1286$ і $\gamma = 0,7488$. Оскільки, $\gamma < 1$, то, згідно з теоремою 1, послідовні наближення, що формуються за схемою (11) – (13) двобічно збігаються до розв'язку задачі (1) – (3), що розглядається в квадраті Ω.

Оскільки $\max_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}(w^{(9)}(\mathbf{x}) - v^{(9)}(\mathbf{x})) = 0,25\cdot 10^{-3}$, то з точністю $0,50\cdot 10^{-4}$ отримаємо, що:

$$u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(9)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(9)}(\mathbf{x}) + v^{(9)}(\mathbf{x})}{2}.$$

Тоді $\left\| u^{(9)} \right\| = 0,0619$. Двобічний характер збіжності послідовних наближень проілюстровано на рис. 1, *а*, де представлено графіки верхніх (суцільна лінія) та нижніх (пунктирна лінія) наближень до розв'язку задачі при $x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(9)}(\mathbf{x})$ зображені на рис. 1, *б* та рис. 2 відповідно.

Висновки. У роботі вперше обґрунтовано можливість побудови методу двосторонніх наближень (на основі використання методу квазіфункцій Гріна – Рвачова) для розв'язання першої крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння, що виникає при моделюванні електростатичних мікроелектромеханічних систем під дією зовнішнього тиску. Застосування методу послідовних наближень з двобічним характером збіжності до розв'язання задачі дозволяє побудувати обчислювальний алгоритм зі зручною апостеріорною оцінкою похибки на кожній ітерації та простою програмною реалізацією. Роботу запропонованого методу проілюстровано обчислювальним експериментом у прямокутній області для тестових значень параметрів, що підтвердило його ефективність. З огляду на це, перспективним є застосування розробленого методу для розрахунку реальних мікроелектромеханічних систем. Розроблений метод базується на загальних принципах побудови двосторонніх наближень, викладених, зокрема, у [16], але й має певні відмінності. Так, у поточній роботі права частина задана на інтервалі зміни u і має сингулярність, проте це не стає перешкодою ані для застосування методу двосторонніх наближень, ані для доведення його збіжності.

Список літератури

1. *Pelesko J. A.*, *Bernstein D. H.* Modeling MEMS and NEMS. – CRC Press, 2002. – 384 p. http://dx.doi.org/10.1201/9781420035292.
2. *Nayfeh A. H.*, *Younis M. I.*, *Abdel-Rahman E. M.* Reduced-order models for MEMS applications // Nonlinear dynamics. – 2005. – Vol. 41. – No. 1. – P. 211 – 236. http://dx.doi.org/10.1007/s11071-005-2809-9.
3. *Кончаковська О. С.* Використання методу квазіфункцій Гріна – Рвачова у чисельному аналізі однієї електростатичної наноелектромеханічної системи // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – 2022. – № 2 (8). – С. 9 – 15. https://doi.org/10.20998/2079-0023.2022.02.02.
4. *Sidorov M. V.* Green – Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – Vol. 10. – No. 2. – P. 360 – 375. http://dx.doi.org/10.15330/cmp.10.2.360-375.
5. *Кончаковская О. С.*, *Сидоров М. В.* Численный анализ одного нелинейного эллиптического уравнения, возникающего при моделировании микроэлектромеханических систем // Радиоэлектроника и информатика. – 2016. – Т. 73. – №. 2. – С. 23 – 28.
6. *Кончаковская О. С.*, *Сидоров М. В.* Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. – 2017. – Т. 88. – №. 1. – С. 60 – 64.
7. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2018. – Вип. 39. – С. 33 – 41.
8. *Konchakovska O.*, *Sidorov M.* Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM). – 2020. – Vol. 14. – No. 3 – 4. – P. 17 – 26.
9. *Beckham J. R.*, *Pelesko J. A.* An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure // Mathematical and computer modelling. – 2011. – Vol. 54. – No. 11 – 12. – P. 2686 – 2708. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.051.
10. *Guo Y.*, *Zhang Y.*, *Zhou F.* Singular behavior of an electrostatic–elastic membrane system with an external pressure // Nonlinear Analysis. – 2020. – Vol. 190. – ID 111611. https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.03707.
11. *Рвачев В. Л.* Теория R – функций и некоторые её приложения. – Киев : Наукова думка, 1982. – 552 с.
12. *Опойцев В. И.*, *Хуродзе Т. А.* Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
13. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – Москва : Физматгиз, 1962. – 394 с.
14. *Guo D.*, *Lakshmikantham V.* Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1987. – Vol. 11. – No. 5. – P. 623 – 632. https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90077-0.
15. *Esposito P.*, *Ghoussoub N.*, *Guo Y.* Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS // American Mathematical Soc. – 2010. – Vol. 20. – 256 p. http://dx.doi.org/10.1090/cln/020.
16. *Сидоров М. В.* Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна − Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач // Вісник Запорізького національного університету. Серія : Фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 250 – 259.

References (transliterated)

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. *Modeling MEMS and NEMS*. CRC Press, 2002. 384 p. http://dx.doi.org/10.1201/9781420035292.
2. Nayfeh A. H., Younis M. I., Abdel-Rahman E. M. Reduced-order models for MEMS applications. *Nonlinear dynamics*. 2005, vol. 41, no. 1, pp. 211–236. http://dx.doi.org/10.1007/s11071-005-2809-9.
3. Konchakovs'ka O. S. Vykorystannya metodu kvazifunktsiyi Grina – Rvachova u chysel'nomu analizi odnieyi elektrostatychnoyi nanoelektromekhanichnoyi systemy [Using Green-Rvachev's quasi-function method in the numerical analysis of an electrostatic nanoelectromechanical system]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya : Systemnyy analiz, upravlinnya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: System Analysis, Control and Information Technologies]. 2022, no. 2 (8), pp. 9–15. https://doi.org/10.20998/2079-0023.2022.02.02.
4. Sidorov M. V. Green – Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018, vol. 10, no. 2, pp. 360–375. http://dx.doi.org/10.15330/cmp.10.2.360-375.
5. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Chislennyy analiz odnogo nelineynogo ellipticheskogo uravneniya, voznikayushhego pri modelirovanii mikroelektromekhanicheskikh sistem [Numerical analysis of one nonlinear elliptic equation that modelling microelectromechanical system]. *Radioelektronika i informatika* [Radioelectronics & Informatics]. 2016, vol. 73, no. 2, pp. 23–28.
6. Konchakovskaya O. S., Sidorov M. V. Primenenie metodov nelinejnogo analiza v matematicheskom modelirovanii mikroelektromekhanicheskih system [Mathematical modeling of microelectromechanical systems using methods of nonlinear analysis]. *Bionika intellekta* [Bionics of Intelligence]. 2017. vol. 88. no. 1. pp. 60–64.
7. Konchakovs'ka O. S., Sidorov M. V. Metod dvobichnykh nablyzhen' u chysel'nomu analizi odnieyi mikroelektromekhanichnoyi systemy [The two-sided method in numerical analysis of one microelectromechanical system]. *Visnyk KhNU im. V.N. Karazina. Ser. Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems»]. 2018, vol. 39, pp. 33–41.
8. Konchakovska O., Sidorov M. Numerical Analysis of the One-Dimensional Nonlinear Boundary Value Problem that Modeling an Electrostatic NEMS by Two-Sided Approximations Method. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics (JNAIAM)*. 2020, vol. 14, no. 3–4, pp. 17–26.
9. Beckham J. R., Pelesko J. A. An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure. *Mathematical and computer modelling*. 2011, vol. 54, no. 11–12, pp. 2686–2708. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.051.
10. Guo Y., Zhang Y., Zhou F. Singular behavior of an electrostatic–elastic membrane system with an external pressure. *Nonlinear Analysis*. 2020, Vol. 190, ID 111611. https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.03707.
11. Rvachev V. L. *Teoriya R – funktsiy i nekotorye eyo prilozheniya* [Theory of R – functions and its Some Applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1982. 552 p.
12. Opoytsev V. I., Khurodze T. A. *Nelineynye operatory v prostranstvakh s konusom* [Nonlinear Operators in Spaces with a Cone]. Tbilisi, Izd-vo Tbilis. un-ta Publ., 1984. 246 p.
13. Krasnosel'skiy M. A. *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravneniy* [Positive Solutions of Operator Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 394 p.
14. Guo D., Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1987, vol. 11, no. 5, pp. 623–632. https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90077-0.
15. Esposito P., Ghoussoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. *American Mathematical Soc.* 2010, vol. 20, 256 p. http://dx.doi.org/10.1090/cln/020.
16. Sidorov M. V. Zastosuvannya metodiv funktsiyi Grina ta Grina − Rvachova dlya pobudovy dvobichnykh iteratsiynykh protsesiv rozv"yazannya neliniynykh krayovykh zadach [Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachov]. *Visnyk Zaporiz'kogo natsional'nogo universytetu. Seriya : Fizyko-matematychni nauky* [Bulletin of the Zaporizhzhia National University. Series : Physical and mathematical Sciences]. 2017, no. 2, pp. 250–259.

Надійшла (received) 22.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кончаковська Оксана Сергіївна – аспірант кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (057) 702-14-36; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua.

Кончаковская Оксана Сергеевна – аспирант кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (057) 702-14-36; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua.

Konchakovska Oksana Serhiivna – postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (057) 702-14-36; e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua.

Сидоров Максим Вікторович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків; тел.: (050) 947-64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Сидоров Максим Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков; тел.: (050) 947-64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.

Sidorov Maxim Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (050) 947-64-44; e-mail: maxim.sidorov@nure.ua.