УДК 537.874.6 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.18**

Л. М. ІЛЛЯШЕНКО, О. Г. НЕРУХ

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ МЕТОДІВ КРАЙОВИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ СТВОРЕННЯ НАНООПТИЧНИХ ПРИЛАДІВ

Ефективність моделювання оптичних наноструктур залежить не тільки від того, наскільки точно описані нові фізичні процеси, що відбуваються в нових конфігураціях резонансно-розсіюючих та резонансно-поглинаючих структур, а і від того, наскільки вірно підібрані алгоритми розв'язку відповідних математичних задач і наскільки точно вибрані чисельні параметри моделювання в залежності від параметрів елементів. Тому для розв'язання проблемних питань моделювання складних електродинамічних резонансно-розсіюючих та резонансно-поглинаючих структур необхідне глибоке вивчення всієї сукупності нових невідомих ефектів. В роботі створено чисельно-аналітичний алгоритм на основі параметризованого прийомами конформного відображення методу граничних інтегральних рівнянь з аналітичною регуляризацією у вигляді віднімання сингулярності, посилений швидкими перетвореннями Фур'є, який на відміну від класичних схем, основаних на методах скінчених різниць та скінчених елементів, дозволяє прийняти до уваги комплекснозначну функціональну залежність діелектричної проникності плазмонних матеріалів від довжини хвилі, навіть таку, яка задана таблично, а також дозволити розв'язок задач зі статичними та динамічними сингулярностями інтегральних рівнянь. Оскільки, завдяки чутливості плазмонних резонансів до змін в зовнішньому середовищі плазмонно-резонансні наноструктури використовують в сучасній медицині, фармацевтиці, а також при створенні хімічних та біологічних сенсорів, в цій роботі основні зусилля спрямовані на створення алгоритму дослідження діелектричних структур зі статичними сингулярностями.

Ключові слова: спектральна дискретизація, граничні інтегральні рівняння, віднімання сингулярностей, статичні сингулярності, динамічні сингулярності, швидкі перетворення Фур'є, метод Гальоркіна, поліноми Фур'є, плазмонні резонанси.

Л. Н. ИЛЬЯШЕНКО, А. Г. НЕРУХ

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СОЗДАНИЯ НАНООПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Эффективность моделирования оптических наноструктур зависит не только от того, насколько точно описаны новые физические процессы, которые происходят в новых конфигурациях резонансно-рассеивающих и резонансно-поглощающих структур, а и от того, насколько верно подобраны алгоритмы решения соответствующих математических задач и насколько точно выбраны численные параметры моделирования в зависимости от параметров элементов. Поэтому для решения проблемных задач моделирования сложных электродинамических резонансно-россеивающих и резонансно-поглощающих структур необходимо глубокое изучение всей совокупности новых неизвестных эффектов. В работе создан численно-аналитический алгоритм на основе параметризованного приемами конформного отображения метода граничных интегральных уравнений с аналитической регуляризацией в виде вычитания сингулярности, усиленный быстрыми преобразованиями Фурье, который в отличие от классических схем, основанных на методах конечных разностей и конечных элементов, позволяет принять во внимание комплекснозначную функциональную зависимость диэлектрической проницаемости плазмонных материалов от длины волны, даже такую, которая задана таблично, а также позволяет решать задачи со статическими и динамическими сингулярностями интегральных уравнений. Поскольку, благодаря чувствительности плазмонных резонансов к изменениям во внешней среде, плазмонно-резонансные наноструктуры используют в современной медицине, фармацевтике, а также при создании химических и биологических сенсоров, в этой работе основные усилия направлены на создание алгоритма для исследования диэлектрических структур со статическими сингулярностями.

Ключевые слова: спектральная дискретизация, граничные интегральные уравнения, вычитание сингулярностей, статические сингулярности, динамические сингулярности, быстрые преобразования Фурье, метод Галеркина, полиномы Фурье, плазмонные резонансы.

L. M. ILLYASHENKO, O. G. NERUKH

APPLICATION OF SPECTRAL METHODS OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR MODELING OF NANOOPTICAL DEVICES

Efficiency of modeling of optical nanostructures depends not only on the accuracy of the description of the new physical processes which appear in the new configurations of resonantly scattering and resonantly absorbing structures, but also on the selection of appropriate algorithms for solving the corresponding mathematical problem and numerical parameters of modeling depending on parameters of elements. This is why solving complicated problems of modeling complex resonantly scattering and resonantly absorbing electrodynamic nanostructures involves deep learning of all groups of new unknown effects. In this work a semi-analytical algorithm is developed based on parametrized by conformal mapping techniques spectral method of boundary integral equations with analytical regularization based on singularity subtraction enhanced by Fast Fourier transform, that contrary to the classical schemes, which are based on finite difference and finite element methods, allows to take into account the complex-valued functional dependence of dielectric permittivity of plasmonic materials on the wavelength (even when its value is tabulated) and to solve the problems with static and dynamic singularities in integral equations. Due to sensibility of plasmon resonances to changes in external medium such nanostructures are used in modern medicine, pharmacy and also as chemical and biological sensors. In this work main efforts are directed on generation of algorithm for investigation of dielectric nanostructures with static singularities.

Key words: spectral discretization, boundary integral equations, singularity subtraction, static singularities, dynamic singularities, fast Fourier transform, Galerkin method, Fourier polynomials, plasmon resonances.

Вступ. Завдяки *науково-технічному прогресу* прилади стають компактніше, легше, дешевше. Це стає можливим внаслідок використання різноманітних матеріалів для виготовлення приладів, а саме – діелектриків, напівпровідників та металів. В багатокутних циліндричних діелектричних структурах можуть виникати *хвилі шепочучої галереї*, що почало використовуватися для створення *оптичних лазерів* [1]. Комбінація двох діелектриків в одній структурі дозволила створення *фотонних кристалів*, що стало основою для багатьох *оптичних приладів* [2]. В *наночастках деяких металів*, включаючи Ag , Al , Au , Cu , Co , Pt , Pd [3], можуть збуджуватись електромагнітні резонанси, які відомі як *плазмонні резонанси*. Завдяки чутливості таких резонансів до змін в зовнішньому середовищі пріоритетним стало використання плазмонно-резонансних наноструктур в сучасній медицині [4], фармацевтиці [5], а також при створенні хімічних [6] та біологічних [7] сенсорів. В той же час відомі наближені і строгі *електродинамічні методи* не задовольняють сучасним вимогам розв'язання нових задач при *математичному моделюванні* та дослідженні процесів, що виникають в нанооптичній техніці та технологіях. Одні методи не мають достатньої точності, особливо у випадках присутності «гарячих точок» в *плазмонній структурі*, амплітуда поля в дуже маленькій комірці простору може стати в тисячі разів більше, ніж амплітуда поля від джерела випромінювання. Інші не дозволяють врахувати *комплекснозначні параметри матеріалів*, особливо, коли вони ще і залежать від довжини хвилі [3, 7]. Деякі не дозволяють врахувати вплив характеристик зовнішнього середовища, тому що були розроблені для розв'язку задач розсіювання електромагнітних хвиль тілами у вакуумі. Таким чином, для математичного моделювання процесів та явищ нанооптики, включаючи використання електромагнітних ефектів різних структур, наявною стала проблема створення нових чисельних алгоритмів для дослідження діелектричних тіл, включаючи елементи з принципово нових для приладобудування матеріалів, які мають нові функціональні можливості формування частотних і поляризаційних характеристик розсіяного та поглинутого поля, та видів і форм просторового розподілу електромагнітного поля, включаючи *резонансно-розсіюючі* та *резонансно-поглинаючі елементи*.

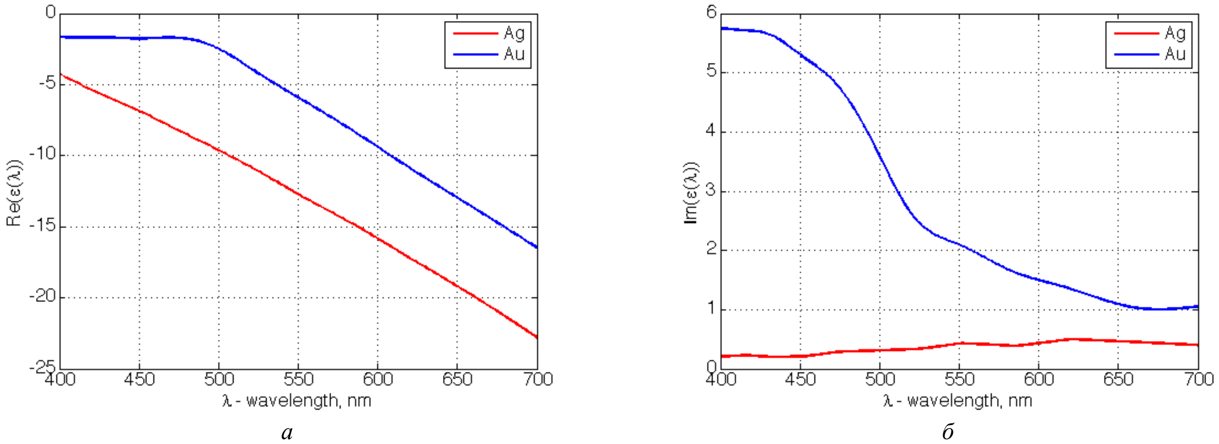
Плазмонні ефекти використовувались ще в IV столітті. Один з прикладів такого використання – *кубок Лікурга*, що, завдяки присутності металевих наночасток в склі, змінює колір в залежності від того, під яким кутом світло потрапляє на нього [8]. Сьогодні відомо, що засоби маніпулювати *резонансно-розсіянним* та *резонансно-поглинутим* електромагнітним полем металевих наночастинок дозволяють спеціальний синтез структур, а саме:

- інтенсивне поглинання *енергії світла* металевими наночастинками приводить до їх швидкого нагрівання, що дозволяє використовувати *резонансно-поглинаючі* частинки для створення *сонячних елементів живлення* і, навіть, для терапії раку та інфекційних захворювань.
- інтенсивне розсіювання дозволяє їх побачити та, навіть, ідентифікувати резонансну довжину хвилі за кольором, що дає змогу використовувати резонансно-розсіюючі частинки для надчутливої візуалізації процесів в речовині.

В цій роботі основну увагу приділено дослідженню ефектів електромагнітного поля в діелектричних структурах, включаючи резонансні ефекти плазмонно-розсіюючих та плазмонно-поглинаючих наночастинок, які знаходяться в *діелектричній оболонці*.

Постановка задачі. Ефективність *моделювання діелектричних наноструктур* залежить не тільки від того, наскільки точно описані фізичні процеси, що відбуваються в нових конфігураціях, а і від того, наскільки вірно підібрані математичні методи для створення алгоритму розв'язку відповідних математичних задач і наскільки точно вибрані чисельні параметри моделювання в залежності від параметрів елементів.

Найбільш розповсюдженими для створення наноприладів є наночастинки розмірами від 30 до 400 нм. Плазмонні резонанси найбільш корисні, коли вони виникають в видимій частині електромагнітного спектру, тобто збуджуються електромагнітними коливаннями з довжиною хвилі від 400 до 700 нм. Таким чином, не звертаючи уваги на те, що наночастинки значно менше довжини хвилі джерела збудження їх резонансів, вони «діелектрично великі» завдяки тому, що діелектрична проникність плазмонного матеріалу на оптичній полосі частот може стати за модулем великою величиною (рис. 1).



а *б*

Рис. 1 – Функціональна залежність діелектричної проникності золота та срібла від довжини хвилі джерела світла: *а* – дійсна частина; *б* – уявна частина.

Розглядаючи функціональну залежність діелектричної проникності золота та срібла від довжини хвилі, зрозуміло, що при розв'язанні задач за допомогою чисельних алгоритмів, основаних на використанні *методів скінчених різниць* та *скінчених елементів*, знайти плазмонні резонанси дуже важко, тому що такі алгоритми, як правило, розроблені для таких випадків, коли довжина хвилі збудження тіла та його діелектрична проникність є сталими величинами. Зробити поглинаючі граничні умови для тіл, створених з такого матеріалу, де діелектрична проникність є комплекснозначною та ще й залежить від довжини хвилі, дуже важко. І, навіть, коли створено один раз, то треба повторити це багато разів, щоб враховувати функціональну залежність діелектричної проникності від довжини хвилі.

Але декілька зусиль вже було спрямовано на дизайн наноприладів, принцип дії яких засновано на використанні плазмонних резонансів. Значна частина з них створена з простих деталей, однорідних трубок і сфер та шаруватих трубок і сфер, тому що такі експериментальні дослідження можуть бути підтримані теоретичними дослідженнями, що базуються на використанні аналітичних методів [9]. Але використання деталей іншої форми призводить до проблем, тому що багато часу має витрачатись на отримання таких надійних чисельних результатів, які неможливо отримати при експериментальних дослідженнях.

Питання взаємодії електромагнітних полів в речовинах з тілами, що в них знаходяться, відносяться до найважливіших питань розділу фізики, що називається «Обчислювальний електромагнетизм». В цій роботі дослідження торкаються тіл, зроблених з діелектричних та плазмонних металів, завдяки тому, що вони мають особливі властивості при взаємодії зі світловими електромагнітними хвилями.

Використовуючи властивості матеріалів та середовища, в якому вони знаходяться, а саме –діелектрики в діелектричному середовищі, всі задачі фізики в цій роботі можуть бути описані за допомогою *рівнянь Максвела в однорідних середовищах*, що характеризуються магнітною та діелектричною проникностями. В такому випадку рівняння Максвела мають вигляд:

$$\nabla\times\vec{E}-i\omega\mu\,\vec{H}=0\,;\quad \nabla\times\vec{H}+i\omega\varepsilon\,\vec{E}=0\,; \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0\,;\quad \nabla\cdot\vec{H}=0\,. \tag{2}$$

Введемо позначення $k^2=\omega^2\varepsilon\,\mu$ і Δ – для *оператора Лапласа*. Тоді, комбінуючи вирази (1) – (2), після перетворень отримаємо:

$$\Delta\vec{E}+k^2\vec{E}=0\,;\quad \Delta\vec{H}+k^2\vec{H}=0\,. \tag{3}$$

Ці рівняння, відомі як *рівняння Гельмгольця*, досліджені в даній роботі.

В багатьох випадках задачу нанооптики можна звести до математичної задачі, яка включає *рівняння Гельмгольця*, після отримання розв'язку якої можна зробити висновки про фізичні процеси, що розглядаються.

Дійсно, найпоширенішим при розгляді задач нанооптики є рівняння Гельмгольця (3), для розв'язання якого додають крайові умови. Відомі *крайові умови* [10] *типу Діріхле*, крайові умови *типу Неймана*, крайові умови *типу Леонтовича (імпедансні)*, *умови спряження* та *умови електромагнітного спряження*.

Для того, щоб електромагнітна хвиля відходила від випромінювача затухаючи, додають ще й *умови випромінювання Зомерфельда* [10]. При розв'язанні рівняння (3) часто використовуються ще й *умови Мейкснера на ребрі* (тоді, коли тіло має задирки, гострі краї або виступи). При цьому задача ускладнюється.

Для розв'язання таких систем рівнянь було запропоновано багато алгоритмів, серед яких алгоритми, що базуються на дискретизації областей, включаючи *Метод Скінченних Різниць (МСР)* та *Метод Скінченних Елементів (МСЕ)*, а також *методи дискретизації границь*, включаючи класичний *Метод Граничних Елементів (МГЕ)*.

В той час, коли було доведено, що методи скінченних різниць та методи скінченних елементів менш ефективні, ніж *методи граничних інтегральних рівнянь (ГІР)*. Необхідно відмітити, що ГІР являються *сингулярними інтегральними рівняннями*. Сингулярності бувають *динамічними* та *статичними (геометричними)*.

Геометрія задачі та граничні умови. Задачу можна спростити, зводячи її до двовимірної, досліджуючи лише переріз системи площиною. В таких задачах можна розглядати $H-$ або $E-$*поляризацію* окремо, отримуючи дві множини розв'язків, що мають різні поляризаційні властивості електромагнітних хвиль. Першу множину утворюють $H-$*поляризовані моди*, для яких вектор електричного поля належить площині XOY, а вектор магнітного поля напрямлений вздовж осі OZ:

$$\vec{E}=(E_x,E_y,0)\,;\quad \vec{H}=(0,0,H_z)\,. \tag{4}$$

Тоді система рівнянь Максвела зводиться до скалярного рівняння Гельмгольця для компоненти H_z вектора магнітного поля:

$$\Delta H_z(\vec{r}) + k^2 H_z(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} = (x, y) \in \Re^2 . \tag{5}$$

Компоненти вектору електричного поля E_x і E_y виражаються через компоненту вектору магнітного поля H_z таким чином:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial y}; \quad E_y(\vec{r}) = -\frac{i}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z(\vec{r})}{\partial x} . \tag{6}$$

Завдяки тому, що плазмонні резонанси зустрічаються лише у випадку $H-$поляризації, другу множину розв'язків, що складається з $E-$поляризованих мод, $TM-$мод, в цій роботі розглядати не потрібно.

Для розв'язку задач нанооптики необхідно дослідити частинки, що знаходяться під впливом світлової електромагнітної хвилі (рис. 2), та з'ясувати їх властивості в залежності від форми, розмірів, орієнтації по відношенню до джерела освітлення та властивостей зовнішнього середовища. Часто присутні дві границі розділу трьох середовищ $\Gamma_1 \subset \Re^2$ і $\Gamma_2 \subset \Re^2$. Середовище Ω_1, що містить джерело випромінювання, є нескінченним, а інші середовища Ω_2 і Ω_3 – скінченними, при цьому $\Omega_2 = \Re^2 / \bar{\Omega}_2$. В присутності такої перешкоди падаюче магнітне поле $H^{inc}(\vec{r})$ створює відбиті хвилі $H_1^+(\vec{r})$, які розповсюджуються в області Ω_1, і заломлені хвилі $H_1^-(\vec{r})$, які розповсюджуються в області Ω_2. Далі магнітне поле $H_1^-(\vec{r})$ створює хвилі, відбиті від границі $\Gamma_2 \subset \Re^2$, які розповсюджуються в області Ω_2 і заломлені хвилі $H_2^-(\vec{r})$, які розповсюджуються в області Ω_3. Треба відмітити, що в середовищі Ω_1 відбиті хвилі $H_1^+(\vec{r})$ змішуються з первинним полем $H^{inc}(\vec{r})$, а в середовищі Ω_2 відбиті хвилі $H_2^+(\vec{r})$ змішуються з хвилями $H_1^-(\vec{r})$. Тоді поле в усьому просторі може бути представлено у вигляді:

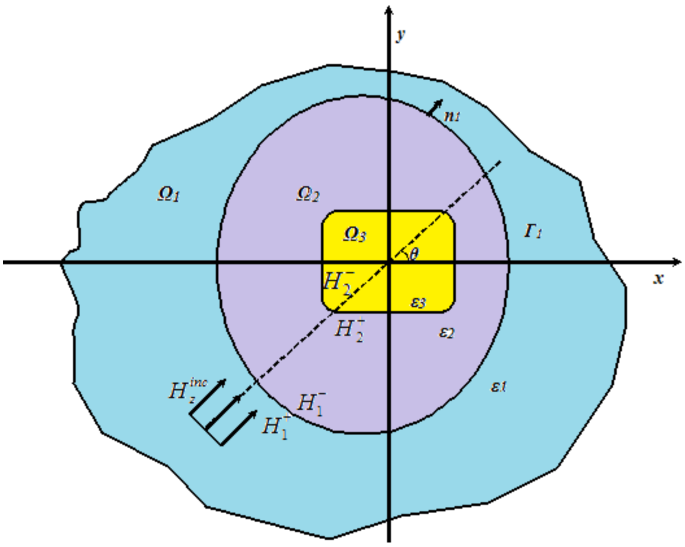


Рис. 2 – Геометрія задач розсіювання електромагнітних хвиль у випадку $H-$поляризації.

$$H^{tot}(\vec{r}) = \begin{cases} H^{inc}(\vec{r}) + H_1^+(\vec{r}), & \vec{r} \in \Omega_1; \\ H_1^-(\vec{r}) + H_2^+(\vec{r}), & \vec{r} \in \Omega_2; \\ H_2^-(\vec{r}), & \vec{r} \in \Omega_3. \end{cases} \tag{7}$$

Нехай $G_1(\vec{r}, \vec{r}')$, $G_2(\vec{r}, \vec{r}')$ та $G_3(\vec{r}, \vec{r}')$ – *функції Гріна*, які в двовимірному випадку мають вигляд:

$$G_i(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(k_i |\vec{r} - \vec{r}'|\right), \quad \vec{r}, \vec{r}' \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{8}$$

та залежать від двох точок площини $\vec{r}, \vec{r}' \in \Re^2$ (де $|\vec{r} - \vec{r}'|$ відстань між ними), а $H_0^{(1)}$ – *функція Ханкеля першого роду порядку нуль*.

Функції (8) є фундаментальними розв'язками рівнянь Гельмгольця в кожному з трьох середовищ, при цьому в зовнішній області $G_1(\vec{r}, \vec{r}')$ задовольняє умові Зоммерфельда на нескінченності.

Завдяки тому, що фундаментальним розв'язком рівняння (3) є функція Гріна, а саме – функція Ханкеля першого роду порядку нуль, то вибір методів, які базуються на використанні функції Гріна, дозволяють уникнути перших ускладнень, що з'являються завдяки умові Зоммерфельда. При використанні функції Гріна ця умова виконується автоматично. Тоді при відсутності умови Мейкснера і при наявності параметризації границі у вигляді:

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) : [0, 2\pi) \to \Gamma \subset \Re^2 \text{ при } |\vec{r}'(t)| \neq 0 \text{, для } t \in [0, 2\pi), \tag{9}$$

був запропонований та розвинений *Спектральний Метод Граничних Інтегральних Рівнянь (СМГІР)* з аналітичною регуляризацією у вигляді віднімання сингулярності [11].

Такий метод можна застосовувати тоді і лише тоді, коли (9) є кривою з неперервною першою похідною, для того щоб використовувати аналітичну регуляризацію, запропоновану в [11]. Цей метод отримав ще одну назву – *параметризований МГЕ*. Але його використання для розв'язку задач при наявності багатокутних областей дискретизації було неможливе, і не лише завдяки відсутності параметризації, а і завдяки наявності задирок, гострих країв або виступів (геометричних сингулярностей), що потребують виконання умови Мейкснера разом з умовами електромагнітного спряження та умовою Зоммерфельда.

Винахід *методу конформного відображення* для створення параметризації [12] дозволив отримати розв'язок багатьох задач нанооптики, завдяки чому новий метод отримав назву *параметризований прийомами конформного відображення метод граничних інтегральних рівнянь з аналітичною регуляризацією у вигляді віднімання сингулярності*, *посилений швидкими перетвореннями Фур'є.*

Розвинення методу [12] дозволяє застосування СМГІР для розв'язання багатьох задач нанооптики, оскільки конформні відображення різних областей на внутрішність круга можливі. Найцікавішими для розв'язання задач нанооптики є правильні багатокутники, оскільки їх використання дозволяє створення лазерів [1], фотонних кристалів з багатокутними елементами [2] та плазмонних матеріалів.

Після застосування прийомів конформного відображення контур $p-$ кутника можна представити у вигляді:

$$x(t)=d\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^p\sin(p(k-1)-1)t,\quad y(t)=d\sum_{k=1}^{+\infty}a_k^p\cos(p(k-1)-1)t; \tag{10}$$

$$a_k^p=\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(2-p\cdot(j-1))}{M_p\, p^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot\left(p\cdot(k-1)-1\right)}. \tag{11}$$

Обрахувати складові частини формул (10) – (11) до нескінченості неможливо, але при додаванні кожного наступного члену ряду точність опису контуру багатокутника покращується і стає менш ніж числа, помітні комп'ютером ($\approx 10^{-12}$). Кожен член ряду є функцією з неперервною першою похідною, тоді і їх сума має неперервну першу похідну. Функції (10) – (11) – гладкі криві, і такі параметризації можна використовувати у сукупності з СМГІР. Таким чином, і друге ускладнення, викликане наявністю умови Мейкснера, зникає також.

Висновки. В роботі була розширена область застосування СМГІР, який раніше можна було застосовувати лише включаючи криві з заданою параметризацією. Із курсу геометрії відомо тільки три криві другого порядку: еліпс, гіпербола та парабола. Серед них тільки еліпс є замкненою кривою. Відомі також параметричні рівняння астроїди та епіциклоїди, включаючи рівняння кардіоїди та нефроїди, але в загальному випадку метод СМГІР застосовувати для розв'язку задач нанооптики неможливо. В цій роботі метод СМГІР був розвинутий так, що можна застосовувати його і для дослідження інших форм елементів оптичних приладів. При цьому, незважаючи на те, що СМГІР був призначений для розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь на замкненому гладкому контурі, знайдено спосіб використовувати для розв'язку задач наноптики не лише такі сингулярні інтегральні рівняння, де є лише динамічні сингулярності, а і справлятись зі статичними (геометричними) сингулярностями, тобто багатокутниками. Для успішного застосування СМГІР розроблено метод представлення багатокутної структури у вигляді нескінченної сукупності гладких структур. Чисельний метод, створений з використанням СМГІР в комбінацій з новою методикою параметризації кривих, отримав назву *параметризований прийомами конформного відображення метод граничних інтегральних рівнянь з аналітичною регуляризацією у вигляді віднімання сингулярності, посилений швидкими перетвореннями Фур'є.*

Список літератури

1. *Wiersig J.* Hexagonal dielectric resonators and microcrystal lasers // Phys. Rev. A. – 2003. – Vol. 67. – № 2. – ID 023807. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.023807.
2. *Shaari S.*, *Adnan A. J. M.* Photonic Crystal Multiplexer/Demultiplexer Device for Optical Communications. In Frontiers in Guided Wave Optics and Optoelectronics – IntechOpen, 2010. – P. 621 – 646. http://dx.doi.org/10.5772/39535.
3. *Palic E. D.* Handbook of optical constants of solids. – New York : Academic Press, 1995. – 804 p.
4. *Masson J.-F.* Surface Plasmon Resonance Clinical Biosensors for Medical Diagnostics // ACS Sensors. – 2017. – № 2. – P. 16 –30. https://doi.org / 10.1021/ acssensors.6b00763.
5. *Chain C Y.*, *Dazai Millone M. A.*, *Cisneros J. S.*, Ramirez *E. A.*, Vela *M. E.* Surface plasmon resonance as a characterization tool for lipid nanoparticles used in drug delivery // Frontiers in Chemistry. – 2021. – № 8. – 605307. https://doi.org/10.3389/fchem.2020.605307.
6. *Nixon R.*, *Contreras E.*, *Jain P. K.* Electrochemistry with plasmons // Trends in Chemistry. – 2023. – В печати. https://doi.org/10.1016/j.trechm.2023.04.002.
7. *Hirbodvash Z.*, *Berini P.* Surface plasmon electrochemistry: Tutorial and Review // Chemosensors. – 2023. – № 11(3). – 196. http://dx.doi.org/10.3390/chemosensors11030196.
8. *Freestone I.*, *Meeks N.*, *Sax M.*, *Higgitt C.* The Lycurgus Cup-A Roman Nanotechnology // Gold Bulletin. – 2007. – № 40. – P. 270 – 277. http://dx.doi.org/10.1007/BF03215599.

9. *Stognii N. P., Sakhnenko N. K.* Bright plasmons of triangular or quadrangle cluster of noble metal wires // Telecommunication and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). – 2018. – № 77(5). – P. 383 – 389. http://dx.doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i5.20.

10. *Gandel Y. V.* Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models // Journal of Mathematical sciences. – 2010. – № 171(1). – P. 74 – 88. http://dx.doi.org/10.1007/s10958-010-0127-3.

11. *Atkinson K. E.* The numerical solution of integral equations of the second kind. – Cambridge : Cambridge University Press, 2009. – 572 p.

12. *Ильяшенко Л. Н.* Решение задач дифракции волн на диэлектрическом цилиндре с применением теории конформного отображения // Радиофизика и электроника : Сб. науч. тр. ИРЭ НАНУ. – 2002. – Т. 7. – № 3. – С. 468 – 473.

References (transliterated)

1. Wiersig J. Hexagonal dielectric resonators and microcrystal lasers. *Phys. Rev. A*. 2003, vol. 67, no. 2, ID 023807. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.023807.

2. Shaari S., Adnan A. J. M. Photonic Crystal Multiplexer/Demultiplexer Device for Optical Communications. In *Frontiers in Guided Wave Optics and Optoelectronics*. IntechOpen. 2010, pp. 621–646.

3. Palic E. D. *Handbook of optical constants of solids*. New York, Academic Press, 1995. 804 p.

4. Masson J.-F. Surface Plasmon Resonance Clinical Biosensors for Medical Diagnostics. *ACS Sensors*. 2017, no. 2, pp. 16–30. https://doi.org/10.1021/acssensors.6b00763.

5. Chain C Y., Dazai Millone M. A., Cisneros J. S., Ramirez E. A., Vela M. E. Surface plasmon resonance as a characterization tool for lipid nanoparticles used in drug delivery. *Frontiers in Chemistry*. 2021, no. 8, 605307. https://doi.org/10.3389/fchem.2020.605307.

6. Nixon R., Contreras E., Jain P. K. Electrochemistry with plasmons. *Trends in Chemistry*. 2023, in press. https://doi.org/10.1016/j.trechm.2023.04.002.

7. Hirbodvash Z., Berini P. Surface plasmon electrochemistry: Tutorial and Review. *Chemosensors*. 2023, no. 11(3), 196. http://dx.doi.org/10.3390/chemosensors11030196.

8. Freestone I., Meeks N., Sax M., Higgitt C. The Lycurgus Cup-A Roman Nanotechnology. *Gold Bulletin*. 2007, no. 40, pp. 270–277. http://dx.doi.org/10.1007/BF03215599.

9. Stognii N. P., Sakhnenko N. K. Bright plasmons of triangular or quadrangle cluster of noble metal wires. *Telecommunication and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*. 2018, no. 77(5), pp. 383–389. http://dx.doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i5.20.

10. Gandel Y. V. Boundary-value problems for the Helmholtz equation and their discrete mathematical models. *Journal of Mathematical sciences*. 2010, no. 171(1), pp. 74–88. http://dx.doi.org/10.1007/s10958-010-0127-3.

11. Atkinson K. E. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge, Cambridge University Press, 2009. 572 p.

12. Illyashenko L. N. Reshenie zadach difraktsii voln na dielektrycheskom tsilindre s primeneniem teorii konformnogo otobrazheniya [Solution to the problem of wave diffraction on a dielectric cylinder by applying the conformal mapping theory]. *Radiofizika i elektronika : Cb. nauch. tr. IRE NANU* [Radiophysics and Electronics : Collection of scientific papers. Institute of Radioelectronics of the National Academy of science of Ukraine]. 2002, vol. 7, no. 3, pp. 468–473.

Надійшла (received) 18.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ілляшенко Людмила Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри фундаментальних дисциплін, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (096) 150-63-17; e-mail: mila.illyashenko@gmail.com.

Ильяшенко Людмила Николаевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальных дисциплин, Национальная академия Национальной гвардии Украины, г. Харьков; тел.: (096) 150-63-17; e-mail: mila.illyashenko@gmail.com.

Illyashenko Ludmila Mykolaivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Teaching Fellow at the Department of Fundamental Disciplines, National Academy of National Guard of Ukraine, Kharkiv; tel.: (096) 150-63-17; e-mail: mila.illyashenko@gmail.com.

Нерух Олександр Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Харківський Національний Університет Радіо Електроніки, м. Харків; тел.: (057) 702-13-72; e-mail: nerukh@gmail.com.

Нерух Александр Георгиевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры высшей математики, Харьковский Национальный Университет Радио Электроники, г. Харьков; тел.: (057) 702-13-72; e-mail: nerukh@gmail.com.

Nerukh Alexander Georgievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv; tel.: (057) 702-13-72; e-mail: nerukh@gmail.com.