УДК 519.6 DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.17

І. О. ЗЕЛЕНСЬКА

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

В даній роботі розглянуто систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь 4-го порядку з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту. Точка звороту $x=0$ є крайньою точкою відрізку, що розглядається $[-l;0]$. Коефіцієнти заданої матриці є нескінченно диференційованими функціями на заданому відрізку. Мета – побудувати рівномірну асимптотику розв'язку для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту на відрізку $[-l;0]$. В даному випадку спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Рівномірний асимптотичний розв'язок побудовано методом істотно особливих функцій з використанням функцій Ейрі $[0;l]$ та їх похідних. Дослідження показали, що для побудови рівномірного асимптотичного розв'язку задач з точками звороту апарат функцій та модельних рівнянь Ейрі є досить ефективним. Також було встановлено, що для виділення цих функцій поряд з незалежною змінною необхідно ввести нову змінну t на відрізку $[0;l]$. В результаті було одержано розширену задачу, що дасть можливість формально побудувати розв'язок у вигляді рядів за малим параметром. Конструкції розв'язків одержано шляхом послідовного розв'язання систем ітераційних рівнянь, які на певному кроці ітерацій дозволяють визначити всі компоненти шуканих вектор-функцій з точністю до двох скалярних множників, які утворюють довільний вектор. Регуляризуючу функцію вибрано таким чином, що функція Ейрі $B_i(t)$ необмежено зростає, коли $t\to\infty$. Проведені дослідження показали, при жодному співвідношенні знаків коефіцієнта матриці, біля якого знаходиться точка звороту, не можна записати гладкий розв'язок у вигляді одного аналітичного виразу. Розв'язок виродженого векторного рівняння у загальному випадку має розрив другого роду в точці звороту, тому для побудови асимптотичного розв'язку даної задачі в явному вигляді його використовувати не можна. З цією метою було застосовано прийом з класичної теорії лінійних диференціальних рівнянь і одержано розв'язки для виродженого рівняння 2-го порядку.

Ключові слова: сингулярно збурені диференціальні рівняння, малий параметр, рівномірна асимптотика, простір безрезонансних розв'язків, функції Ейрі, точка звороту.

И. А. ЗЕЛЕНСКАЯ

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ ПОВОРОТА

В данной работе рассмотрена система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений 4-го порядка с малым параметром при старшей производной и точкой поворота. Точка поворота $x=0$ является крайней точкой рассматриваемого отрезка $[-l;0]$. Коэффициенты заданной матрицы являются бесконечно дифференцированными функциями на заданном отрезке. Цель – построить равномерную асимптотику решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дифференциальной точкой поворота на отрезке $[-l;0]$. В данном случае спектр предельного оператора содержит кратные и тождественно равные нулю элементы. Равномерное асимптотическое решение построено методом существенно особых функций с использованием функций Эйри $[0;l]$ и их производных. Исследования показали, что для построения равномерного асимптотического решения задач с точками оборота аппарат функций и модельных уравнений Эйри достаточно эффективен. Также было установлено, что для выделения этих функций наряду с независимой переменной необходимо ввести новую переменную t на отрезке $[0;l]$. В результате будет получена расширенная задача, что позволит формально построить решение в виде рядов по малому параметру. Конструкции решений получены путем последовательного решения систем итерационных уравнений, которые на определенном шаге итераций позволяют определить все компоненты искомых векторных функций с точностью до двух скалярных множителей, которые образуют произвольный вектор. Регуляризирующая функция выбрана таким образом, что функция Эйри $B_i(t)$ неограниченно возрастает, когда $t\to\infty$. Проведенные исследования показали, что ни при каком соотношении знаков коэффициента матрицы, возле которого находится точка поворота, нельзя записать гладкое решение в виде одного аналитического выражения. Решение вырожденного векторного уравнения в общем случае имеет разрыв второго рода в точке поворота, поэтому для построения асимптотического решения данной задачи в явном виде его использовать нельзя. С этой целью был применен прием по классической теории линейных дифференциальных уравнений и получены решения для вырожденного уравнения 2-го порядка.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, малый параметр, равномерная асимптотика, пространство безрезонансных решений, функции Эйри, точка поворота.

I. O. ZELENSKA

CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF THE SYSTEM OF SINGULARLY PERTURBATED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A DIFFERENTIAL TURNING POINT

In this work, a system of singularly perturbed differential equations of the 4th order with a small parameter at the highest derivative and a turning point is considered. The turning point $x=0$ is located in the end of the segment $[-l;0]$ under consideration. The coefficients of a given matrix are infinitely differentiable functions on a given interval. The goal is to construct a uniform solution asymptotics for a system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point on the segment $[-l;0]$. In this case, the spectrum of the limit operator contains multiple and identically zero elements. The uniform asymptotic solution is constructed by the method of essential-singular functions using the Airy functions $[0;l]$ and their derivatives. Studies have shown that the Apparatus of Airy functions and model equations is quite effective for constructing a uniform asymptotic solution of problems with turning points. It was also established that in order to select these functions along with the independent variable it is necessary to introduce a new variable t of the segment $[0;l]$. As a result, an extended problem will be obtained, which will make it possible to formally find the solution in the form of series with a small parameter. The constructions of the solutions are obtained by sequentially solving the systems of iterative equations, which at a certain step of the iterations make it possible to determine all the components of the sought-after vector functions with an accuracy of two scalar factors that form an arbitrary vector. The regularizing function $B_i(t)$ is chosen in such a way that the function increases indefinitely when

$t \to \infty$. The conducted studies showed that for any ratio of the signs of the matrix coefficient near which the inflection point is located, it is not possible to write down a smooth solution in the form of a single analytical expression. The solution of a degenerate vector equation in the general case has a discontinuity of the second kind at the inflection point, so it cannot be used explicitly to construct the asymptotic solution of this problem. For this purpose, a technique from the classical theory of linear differential equations was applied and solutions for a degenerate equation of the 2nd order were obtained.

Key words: singularly perturbed differential equations, small parameter, uniform asymptotics, space of resonance-free solutions, Airy functions, turning point.

Вступ. Багато явищ реального життя в різних галузях науки моделюються за допомогою *систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР)*. Виникає цей тип рівнянь в таких наукових галузях як фізика, біонауки, екологія тощо. При моделюванні процесу, ми повинні діяти відповідно до поведінки точок у визначеному інтервалі, незалежно від того, обмежений він чи ні. Як наслідок, *сингулярна задача*, завдяки своїм особливостям, становить великий дослідницький полігон для математиків [1]. *Асимптотична теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь* включає *теорію задач з точками звороту* як підрозділ дослідження. Вкрай важливо досліджувати ці феномени для розуміння асимптотичної поведінки розв'язків такого типу диференціальних рівнянь. Вивчення особливостей поведінки аналітичних функцій є єдиним способом їх зрозуміти, а розташування та поведінка функцій в околі точок звороту мають значний вплив на розв'язки звичайних диференціальних рівнянь. Крім того, багато фізичних та інженерних проблем включають задачі точок звороту у їх математичному формулюванні, що було основною мотивацією більшості піонерських досліджень [2 – 5, 6, 7]. Через різноманітність застосувань надзвичайно важливо вивчити випадок зміни знака (також відомий як точка звороту) для диференціальних рівнянь з точками звороту.

Аналіз останніх досліджень. Останні дослідження вказують на те, що теорія задач з точками звороту є не до кінця дослідженою. Достатньо складною є побудова загальної теорії, оскільки кожен тип рівнянь з точками звороту вимагає глибокого дослідження і власних інструментів дослідження для побудови рівномірної асимптотики розв'язку [8]. Тому актуальною є задача дослідження такого типу математичних моделей з різними типами точок звороту і особливостями конструювання асимптотики.

Постановка задачі. Маємо систему:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = 0. \tag{1}$$

Тут

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

– відома матриця, а $y(x,\varepsilon) = colon(y_1(x,\varepsilon)),(y_2(x,\varepsilon)),(y_3(x,\varepsilon)),(y_4(x,\varepsilon))$ – шукана *вектор-функція*.

Систему рівнянь (1) будемо досліджувати за умови, що:

$$\tilde{a}(x) < 0. \tag{3}$$

В даному випадку розв'язок виродженого рівняння не є гладким в околі точки звороту $x = 0$:

$$-x\,\tilde{a}(x)\omega''(x) + b(x)\omega'(x) + c(x)\omega(x) = 0. \tag{4}$$

Тому у явному вигляді його розв'язок не можна використати для побудови рівномірної асимптотики розв'язку досліджуваного рівняння. До того ж, при виконанні умови $\tilde{a}(x) < 0$ при $x \in [-l;0]$, точка звороту $x = 0$ є нестабільною. В цьому випадку будемо використовувати іншу модифікацію *функцій Ейрі* [2].

Характеристичним рівнянням, що відповідає системі (1), є рівняння:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2 - x\tilde{a}(x)\right). \tag{5}$$

Коренями цього рівняння є:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}. \tag{6}$$

Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь. Для побудови *рівномірної асимптотики розв'язку (РАР)* системи (1) застосуємо метод, запропонований для систем СЗДР з диференціальною точкою звороту в роботі [6]. З метою виділення всіх *істотно особливих функцій (ІОФ)*, що виникають в розв'язку системи (1) за рахунок особливої точки $\varepsilon = 0$, введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \phi(x) \equiv \Phi(x,\varepsilon)$, де показник p і регуляризуюча функція $\phi(x)$ підлягають визначенню. Розширення будемо проводити таким чином, щоб виконувалась тотожність:

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv y(x,\varepsilon).$$

Для визначення «розширеної» функції одержимо «розширене» векторне рівняння:

$$\tilde{L}_\varepsilon\, \tilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\phi'(x)\frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (7) будуємо у вигляді:

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon) . \tag{8}$$

Тут

$$D_k(x,t,\varepsilon) = \alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t); \tag{9}$$

$$\theta_k(x,\varepsilon) \equiv colomn\big(\theta_{i1}(x,\varepsilon),\ \theta_{i2}(x,\varepsilon),\ \theta_{i3}(x,\varepsilon),\ \theta_{i4}(x,\varepsilon)\big),\ \ i=1,2, \tag{10}$$

де компоненти $\theta_{is}(x,\varepsilon) \equiv \{\alpha_{is}(x,\varepsilon), \beta_{is}(x,\varepsilon)\}$, $s=\overline{1;4}$ векторів $\theta_k(x,\varepsilon)$ є аналітичними функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$ і нескінченно диференційованими за змінною $x\in[-l;0]$, які необхідно визначити, $U_i(t),\ i=1,2$ – *функції Ейрі – Лангера* [2, 9]

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (7). Отримаємо рівність:

$$\tilde{L}_\varepsilon\left(\alpha_k(x,\varepsilon)U_i(t) + \varepsilon^\gamma\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)\right) = \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\phi'(x)U_i'(t) +$$
$$+\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\phi'(x)\phi(x)U_i(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t) -$$
$$-\varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U'_i(t) + \varepsilon\alpha'_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta'_{ik}(x)U'_i(t) = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля ІОФ $U_i(t),\ i=1,2$ та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння ($i=1,2$):

$$U'_i(t):\varepsilon^{1-p}\phi'(x)\alpha_k(x,\varepsilon) - \varepsilon^\gamma\left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\beta_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta'_{ik}(x,\varepsilon); \tag{11}$$

$$U_i(t):\varepsilon^{1+\gamma-2p}\phi(x)\phi'(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon) - \left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha'_{ik}(x,\varepsilon). \tag{12}$$

Нагадаємо, що ми хочемо, щоб $\alpha_{ik}(x,\varepsilon),\ \beta_{ik}(x,\varepsilon),\ k=1,2$ – були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Тому будемо вимагати, щоб отримані алгебраїчні системи рівнянь (13) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Ці умови будуть виконані, якщо показники степенів малого параметра в лівих частинах рівнянь (11) і (12) будуть однакові, тобто повинно пройти скорочення малого параметру за цими степенями. Після певних перетворень отримаємо:

$$p=\frac{2}{3},\ \ \gamma=\frac{1}{3}. \tag{13}$$

З врахуванням (13) векторні рівняння (11) і (12) запишемо у вигляді $\left(\mu=\varepsilon^{1/3}\right)$:

$$U_i'(t):\phi'(x)\alpha_{ik}(x,\varepsilon) - A_0(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{ik}'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\beta_{ik}(x,\varepsilon); \tag{14}$$

$$U_i(t):\phi(x)\phi'(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon) - A_0(x)\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_{ik}'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\alpha_{ik}(x,\varepsilon). \tag{15}$$

При показниках (13) векторні рівняння (14), (15) можна записати у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь $(i=1,2)$:

$$\begin{cases}
\phi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\beta_{i2}(x,\varepsilon) - \beta'_{i1}(x,\varepsilon)\right];\\
\phi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\beta_{i3}(x,\varepsilon) - \beta'_{i2}(x,\varepsilon)\right];\\
\phi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) - \beta_{i4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x,\varepsilon);\\
\phi'(x)\alpha_{i4}(x,\varepsilon) + c(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i4}(x,\varepsilon);\\
\phi(x)\phi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\alpha_{i2}(x,\varepsilon) - \alpha'_{i1}(x,\varepsilon)\right];\\
\phi(x)\phi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\left[\alpha_{i3}(x,\varepsilon) - \alpha'_{i2}(x,\varepsilon)\right];\\
\phi(x)\phi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) - \alpha_{i4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\alpha'_{i3}(x,\varepsilon);\\
\phi(x)\phi'(x)\beta_{i4}(x,\varepsilon) + c(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) + b(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) + a(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\alpha'_{i4}(x,\varepsilon),
\end{cases} \tag{16}$$

тобто дана система рівнянь вже є регулярно збуреною системою.

Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи. Вище було показано, що розширений оператор $\tilde{L}_\varepsilon$ регулярний за малим параметром. Тому асимптотику розв'язку розширеної системи (16) будемо будувати у вигляді рядів:

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x),\ \ \beta_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x),\quad i=1;2,\quad k=\overline{1;4}. \tag{17}$$

Для визначення коефіцієнтів цих рядів отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{kr}(x)=0,\ \ r=0,1,2\ \ \ \Phi(x)Z_{kr}(x)=FZ_{k(r-3)}(x),\quad r\ge 3. \tag{18}$$

Тут $Z_{kr}(x)=colomn\left(\alpha_{i1r}(x),\alpha_{i2r}(x),\alpha_{i3r}(x),\alpha_{i4r}(x),\beta_{i1r}(x),\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x),\beta_{i4r}(x)\right)$, а

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\phi'(x)&0&0&0&0&0&0&0\\0&\phi'(x)&0&0&0&0&0&0\\0&0&\phi'(x)&0&0&0&0&-1\\0&0&0&\phi'(x)&c(x)&b(x)&-x\tilde{a}(x)&0\\0&0&0&0&\phi(x)\phi'(x)&0&0&0\\0&0&0&0&0&\phi(x)\phi'(x)&0&0\\0&0&0&-1&0&0&\phi(x)\phi'(x)&0\\c(x)&b(x)&-x\tilde{a}(x)&0&0&0&0&\phi(x)\phi'(x)\end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$FZ_{k(r-3)}(x)=colomn\begin{pmatrix}\left[\alpha'_{i1(r-3)}(x)-\alpha_{i2(r-3)}(x)\right],\ \left[\alpha'_{i2(r-3)}(x)-\alpha_{i3(r-3)}(x)\right],\ \alpha'_{i3(r-3)}(x),\ \alpha'_{i4(r-3)}(x);\\ \left[\beta'_{i2(r-3)}(x)-\beta_{i1(r-3)}(x)\right],\ \left[\beta'_{i3(r-3)}(x)-\beta_{i2(r-3)}(x)\right],\ -\beta'_{i3(r-3)}(x),\ -\beta'_{i4(r-3)}(x).\end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник цієї системи. Маємо:

$$\det\Phi(x)=\left[\phi(x)\phi'(x)\right]^2\cdot\left[\phi(x)\phi'^4(x)+a(x)\right]\cdot\left[\phi(x)\phi'^2(x)+a(x)\right]=0.$$

На даний момент регуляризуюча функція $\phi(x)$ ще не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі:

$$\phi(x)\phi'^2(x)=-a(x)\equiv x\tilde{a}(x),\quad \phi(0)=0. \tag{20}$$

Розв'язком задачі (20) буде функція $\phi(x)=\left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^x\sqrt{-a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}$ [10].

При такому виборі регуляризуючої функції $\phi(x)$ визначник матриці (19) дорівнює нулю, тобто

$$\det\Phi(x)\equiv 0.$$

Тоді існує нетривіальний розв'язок однорідної системи рівнянь $\Phi(x)Z_{kr}(x)=0$, при $r=\overline{0;2}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x)=colomn\left(0,\ 0,\frac{1}{\phi'(x)}\beta_{i4r}(x),\phi(x)\phi'(x)\beta_{i3r}(x),0,0,\beta_{i3r}(x),\beta_{i4r}(x)\right), \tag{21}$$

де $\beta_{ikr}(x)$, $i=1;2$, $k=3;4$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x\in[-l;0]$.

Далі розв'яжемо неоднорідні системи (18). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r=3$. Врахувавши одержаний розв'язок однорідної системи (21), коли $r=0$, неоднорідну систему (18) запишемо у вигляді двох систем вигляду:

$$\begin{cases}\phi'(x)\alpha_{i13}(x)=\beta_{i20}(x)-\beta'_{i10}(x)\equiv 0;\\ \phi'(x)\alpha_{i23}(x)=\beta_{i30}(x)-\beta'_{i20}(x)\equiv\beta_{i30}(x);\\ \phi'(x)\alpha_{i33}(x)-\beta_{i43}(x)=-\beta'_{i30}(x);\\ \phi'(x)\alpha_{i43}(x)+a(x)\beta_{i33}(x)=-\beta'_{i40}(x)\end{cases} \tag{22}$$

та

$$\begin{cases} \phi(x)\phi'(x)\beta_{i13}(x) = \alpha_{i20}(x) - \alpha'_{i10}(x) \equiv 0; \\ \phi(x)\phi'(x)\beta_{i23}(x) = \alpha_{i30}(x) - \alpha'_{i20}(x) \equiv \alpha_{i30}(x) \equiv \left[\phi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x); \\ \phi(x)\phi'(x)\beta_{i33}(x) - \alpha_{i43}(x) = -\alpha'_{i30}(x) \equiv -\left(\left[\phi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x)\right)'; \\ \phi(x)\phi'(x)\beta_{i43}(x) + a(x)\alpha_{i33}(x) = -\alpha'_{i40}(x) \equiv -\left(\phi(x)\phi'(x)\beta_{i30}\right)'. \end{cases} \tag{23}$$

З першого і другого рівнянь систем (22) і (23) визначимо наступні функції:

$$\alpha_{i13} \equiv 0, \ \beta_{i13}(x) \equiv 0 \ \text{ та } \ \alpha_{i23}(x) = \left[\phi'(x)\right]^{-1}\beta_{i30}(x) \ \text{ та } \ \beta_{i23}(x) = \left[\phi'(x)\right]^{-2}\left[\phi(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x).$$

Регуляризуюча функція $\phi(x)$ визначена як розв'язок задачі (20) [1]. Тому визначники цих систем однакові і тотожно рівні нулю, тобто

$$\Delta(x) = \left[\phi'(x)\right]^2\phi(x) + a(x) \equiv 0.$$

Отже, в загальному випадку не існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (22) і (23). Тому необхідно дослідити більш детально праві частини цих систем. Згідно *теоремі Кронеккера – Капеллі*, для того, щоб існував нетривіальний розв'язок систем (24) і (25), необхідно і достатньо, щоб ранги розширених матриць співпадали з відповідними рангами матриць цих систем. Для виконання цих умов скористаємось довільністю функцій $\beta_{ik0}(x)$.

Оскільки маємо системи двох рівнянь, то умови теореми Кронеккера – Капеллі для існування розв'язків цих неоднорідних систем двох алгебраїчних рівнянь еквівалентні виконанню умов:

$$\frac{\phi'(x)}{a(x)} \equiv \frac{\phi'(x)}{-\phi(x)\phi'^2(x)} \equiv \frac{1}{-\phi(x)\phi'(x)} = \frac{-1}{\phi(x)\phi'(x)} = \frac{\beta'_{i30}(x)}{\left(\phi(x)\phi'(x)\beta_{i30}(x)\right)'}; \tag{24}$$

$$\frac{\phi'(x)}{-1} = \frac{a(x)}{\phi(x)\phi'(x)} \equiv \frac{-\phi(x)\phi'^2(x)}{\phi(x)\phi'(x)} \equiv \phi'(x) = \frac{-\beta'_{k40}(x)}{\left(\dfrac{\beta_{k40}(x)}{\phi'(x)}\right)'}. \tag{25}$$

З (24) і (25) при фіксованому $i = 1, 2$ отримаємо наступні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$\beta_{i30}(x) = \frac{\beta^0_{k30}}{\sqrt{\phi(x)\phi'(x)}}; \tag{26}$$

$$\beta_{i40}(x) = \beta^0_{k40}\sqrt{\phi'(x)}, \tag{27}$$

де β^0_{ik0} $(i = 3, 4)$ – довільні сталі.

Отже, на даному етапі розв'язку системи, кожна з вектор-функцій $Z_{k0}(x)$, $k = 1, 2$ визначена відповідно до двох довільних сталих множників β^0_{ik0}, $k = 3, 4$.

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$, $k = 1, 2$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (24) та (25) вигляду:

$$Z_{k3} \equiv colomn\left(0, \frac{\beta_{k30}(x)}{\phi'(x)}, \frac{\beta_{k43}(x) - \beta'_{k30}(x)}{\phi'(x)}, \left(\frac{\beta_{k40}(x)}{\phi'(x)}\right)' - \phi(x)\phi'^2(x)\beta_{k33}, 0, -\frac{\beta_{k40}(x)}{\phi(x)\phi'^2(x)}, \beta_{k33}, \beta_{k43}\right),$$

де β^0_{ikr}, $k = 3, 4$, $i = 1, 2$ до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0, l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (24) і (25) при $r \geq 3$, *методом математичної індукції* можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому сенсі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (24) і (25) при $r = \overline{0; q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0; q-1}$ і фіксованому $k = 1; 2$ визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta^0_{i3r}(x)$ і $\beta^0_{i4r}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ir} = colomn\left(\beta^0_{i1r}, \beta^0_{i2r}, \beta^0_{i3r}, \beta^0_{i4r}\right)$.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними подальші дослідження і ставлять собі за мету узагальнити отримані результати на ССЗДР з диференціальною точкою звороту на системи вищих порядків.

Висновки. Таким чином, розв'язуючи поступово системи рівнянь (24) і (25), отримаємо формальні розв'язки розширеного векторного рівняння (7) вигляду:

$$D_k\left(x,t,\varepsilon\right)=\sum_{r=o}^{\infty}\varepsilon^r\left[\alpha_{ik}\left(x\right)U_i\left(t\right)+\varepsilon^{1/3}\beta_{ik}\left(x,\varepsilon\right)U_i'\left(t\right)\right],\quad i=1;2\,, \tag{28}$$

де

$\alpha_{kr}\left(x\right)=colomn\left(\alpha_{k1r}\left(x\right),\alpha_{k2r}\left(x\right),\alpha_{k3r}\left(x\right),\alpha_{k4r}\left(x\right)\right)$ та $\beta_{kr}\left(x\right)=colomn\left(\beta_{k1r}\left(x\right),\beta_{k2r}\left(x\right),\beta_{k3r}\left(x\right),\beta_{k4r}\left(x\right)\right)$ відомі вектор-функції.

Проведемо звуження в отриманих формальних розв'язках (28) при $t=\varepsilon^{-2/3}\cdot\phi\left(x\right)$. Тоді отримаємо два формальні розв'язки досліджуваного векторного рівняння (1) вигляду:

$$D_k\left(x,\varepsilon^{-2/3}\phi\left(x\right),\varepsilon\right)=\sum_{r=o}^{\infty}\varepsilon^r\left[\alpha_{kr}\left(x\right)U_k\left(\varepsilon^{-2/3}\phi\left(x\right)\right)+\varepsilon^{1/3}\beta_k\left(x,\varepsilon\right)U_k'\left(t\right)\Big|_{t=\varepsilon^{-2/3}\phi\left(x\right)}\right],\ k=1;2\,. \tag{29}$$

Список літератури

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М., 1981. – 400 с.
2. *Бобочко В. М.*, *Перестюк М. О.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Киев : Наукова думка, 2002. – 310 с.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. : Мир, 1968. – 464 с.
4. *Вазов В.* Линейная теория точек поворота. – Springer-Verlaq New York Ins., 1985. – 243 p.
5. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. –Т. 27. – Вып. 6(52). – С. 3 – 96.
6. *Zelenska I.* The system of singular perturbed differential equations with turning point of the first order // *Izvestiya vuzov. Matematika*. – 2015. – № 3. – P. 63–74. DOI: 10.3103/S1066369X15030068.
7. *Rubenfeld L. A.*, *Willner B.* Рівномірні асимптотичні розв'язки для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з точками повороту: формальна теорія // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1977. – №. 1. – P. 21 – 38.
8. *Nijimbere V.* Asymptotic Approximation of the Eigenvalues and the Eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld Equation on Infinite Intervals // Advances in Pure Mathematics. – 2019. – № 9. – P. 967 – 989. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
9. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 226. – P. 227 – 241.
10. *Langer R. E.* The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 90. – P. 113 – 142.

References (transliterated)

1. Lomov S. A. *Vvedenie v obshhuyu teoriyu cingulyarnykh vozmushheniy* [Introduction to the general theory of singular perturbed]. Moscow, 1981. 400 p.
2. Bobochko V. M., Perestyuk M. O. *Asymptotychne integruvannya rivnyannya Liuvillya z tochkamy zvorotu* [Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 310 p.
3. Vazov V. *Asimptotichesciye razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1968. 464 p.
4. Vazov V. *Lineynaya teoriya tochek povorota* [Linear turning point theory]. Springer-Verlaq New York Ins., 1985. 243 p.
5. Dorodnitsyn A. A. Asimptoticheskie zakony raspredeleniya sobstvennykh znacheniydlya nekotorykh osobykh vidov differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadra [Asymptotic laws of the distribution of eigenvalues for some special types of differential equations of the second order]. *UMN* [Successes of Mathematical Sciences]. 1952, vol. 27, no. 6(52), pp. 3–96.
6. Zelenska I. The system of singular perturbed differential equations with turning point of the first order. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2015, no. 3, pp. 63–74. DOI: 10.3103/S1066369X15030068.
7. Nijimbere V. Asymptotic Approximation of the Eigenvalues and the Eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld Equation on Infinite Intervals. *Advances in Pure Mathematics*. 2019, vol. 9, pp. 967–989. DOI: 10.4236/apm.2019.912049.
8. Langer R. E. The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1959, vol. 90, pp. 113–142.
9. Rubenfeld L. A., Willner B. Uniform Asymptotic Solutions for Linear Second Order Ordinary Differential Equations with Turning Points: Formal Theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1977, no. 1, pp. 21–38.
10. Olver F. Asymptotics and special functions. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1977, vol. 226, pp. 227–241.

Надійшла (received) 05.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Зеленська Ірина Олександрівна – аспірант, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (095) 757-43-80; e-mail: Kopchuk@gmail.com.

Зеленская Ирина Александровна – аспирант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (095) 757-43-80; e-mail: Kopchuk@gmail.com.

Zelenska Iryna Oleksandrivna – postgraduate student, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (095) 757-43-80; e-mail: Kopchuk@gmail.com.