

В. Д. ДУШКІН, С. В. ЖУЧЕНКО

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗСПІВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА РЕШІТКАХ З ОДНОВІМІРНОЮ КВАЗИФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ПЕРІОДУ

Проведено чисельне моделювання властивостей E – поляризованих та H – поляризованих хвиль, що були розсіяні на періодичних екранованих квазіфрактальних решітках. На кожному періоді розташування системи смуг визначається за принципом побудови узагальненої симетричної канторової множини на певному кроці алгоритму. Для проведення дослідження була використана математична модель задач, яка базується на системах граничних сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Ці системи рівнянь було отримано за допомогою методу параметричних подань сингулярних та гіперсингулярних інтегральних операторів. Чисельне розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь виконується за допомогою обчислювальних схем методу дискретних особливостей. Через розв'язки цих рівнянь виражаються основні характеристики електричного та магнітного поля. Експеримент довів можливість використання обчислювальної схеми (МДО) до аналізу систем, що містять на періоді 8 – 16 смуг, що знаходяться на різній відстані одна від одної. Отримано графіки залежності модулів амплітуд гармонік від хвильового числа, точкові графіки абсолютних значень усіх ненульових гармонік при резонансних значеннях хвильового числа та мапи компонент електричних та магнітних полів в області над решіткою. Підтверджено, що на загальну структуру поля у випадку нормального падіння мають суттєвий вплив усі гармоніки з абсолютними номерами від 0 до 50. Гармоніки мали велику кількість резонансів, які спостерігались при різних значеннях хвильового числа. Це обумовило складну структуру ізоліній абсолютних значень амплітуди розсіяного електричного та магнітного полів у області над структурою, значний перепад значень амплітуд при невеликих змінах координат. У подальшому планується проведення комп'ютерного моделювання для неідеально провідних структур і порівняння результатів з числовими результатами для ідеального випадку, що було розглянуто у цій статті. Запропонована структура може представляти цікавість для проектування багатомодових широкополосних антен.

Ключові слова: квазіфрактальна антена, узагальнена симетрична канторова множина, моделювання розсіювання хвиль, метод дискретних особливостей, сингулярні інтегральні рівняння, метод параметричних подань сингулярних інтегральних операторів.

В. Д. ДУШКІН, С. В. ЖУЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА РЕШЕТКАХ С ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ ПЕРИОДА

Проведено численное моделирование свойств E – поляризованных и H – поляризованных волн, рассеянных на периодических экранированных квазіфрактальных решетках. На каждом периоде расположение системы полос определяется по принципу построения обобщенного симметричного канторового множества на определенном шаге алгоритма. Для проведения исследования была использована математическая модель задач, основанная на системах граничных сингулярных интегральных уравнений первого рода. Эти системы уравнений были получены с помощью метода параметрических представлений сингулярных и гиперсингулярных интегральных операторов. Численное решение систем сингулярных интегральных уравнений выполняется с помощью вычислительных схем метода дискретных особенностей (МДО). Через решения этих уравнений выражаются основные характеристики электрического и магнитного поля. Эксперимент доказал возможность использования вычислительной схемы МДО к анализу систем, содержащих на периоде 8 – 16 полос, находящихся на разном расстоянии друг от друга. Получены графики зависимости модулей амплитуд гармоник от волнового числа, точечные графики абсолютных значений всех ненулевых гармоник при резонансных значениях волнового числа и карты компонент электрических и магнитных полей в области над решеткой. Подтверждено, что на общую структуру поля в случае нормального падения имеют существенное влияние все гармоники с абсолютными номерами от 0 до 50. Гармоники имели большое количество резонансов, которые наблюдались при разных значениях волнового числа. Это обусловило сложную структуру изолиний абсолютных значений амплитуды рассеянного электрического и магнитного полей в области над структурой, значительный перепад значений амплитуд при небольших изменениях координат. В дальнейшем планируется проведение компьютерного моделирования для неидеально проводящих структур и сравнение результатов с числовыми результатами для идеального случая, который был рассмотрен в этой статье. Предложенная структура может представлять интерес для проектирования многомодовых широкополосных антен.

Ключевые слова: квазіфрактальная антенна, обобщенное симметричное канторово множество, моделирование рассеивания волн, метод дискретных особенностей, сингулярные интегральные уравнения, метод параметрических представлений сингулярных интегральных операторов.

V. D. DUSHKIN, S. V. ZHUCHENKO

NUMERICAL MODELLING OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING ON GRATINGS WITH ONE-DIMENSIONAL QUASI-FRACTAL PERIOD STRUCTURE

Numerical modelling of the properties of E – polarised and H – polarised waves scattered on periodic screened quasi-fractal gratings is carried out. The location of the band system at each period is determined by the principle of constructing a generalized symmetric Cantor set at a certain step of the algorithm. A mathematical model of the problems based on systems of boundary singular integral equations of the first kind was used in the study. These systems of equations were obtained using the method of parametric representations of singular and hypersingular integral operators. The systems of singular integral equations were solved numerically using the computational schemes of the method of discrete singularities. The solutions of these equations are used to obtain the main characteristics of the electric and magnetic fields. This experiment proved the possibility of using the MDS computational scheme to analyse systems containing 8 – 16 bands at different distances from each other. Graphs of the dependence of harmonic amplitudes on the wavenumber, point plots of absolute values of all non-zero harmonics at resonant wavenumber values, and maps of electric and magnetic field components in the region above the grating were obtained. It is confirmed that the overall field structure in the case of normal incidence is significantly influenced by all harmonics with absolute numbers from 0 to 50. The harmonics had a large number of resonances that were observed at different values of the wavenumber. This led to a complex structure of the isolines of absolute values of the scattered electric and magnetic field amplitudes in the region above the structure, and a significant difference in amplitude values with small changes in coordinates. In the future, it is planned to carry out computer simulations for imperfectly conducting structures and compare the results with the numerical results for the ideal case considered in this paper. The proposed structure may be of interest for the design of multimode broadband antennas.

Key words: quasi-fractal antenna, generalized symmetric Cantor set, wave scattering modeling, method of discrete singularities, singular integral equations, method of parametric representations of singular integral operators.

Вступ. Фрактальні антени широко використовуються у мобільному зв'язку, телебаченні, системах супутникового позиціонування та радіочастотної ідентифікації [1 – 3]. Інтерес до цього класу антен викликаний їх унікальними властивостями, а саме – *широкополосністю* та *багатодіапазонністю*. Цей клас антен використовується і у військовій сфері для вирішення *задач радіоелектронної боротьби, електронного маскування та здійснення завадозахищеного радіозв'язку* [4 – 6]. Також суттєвою перевагою фрактальних антен є їх мініатюрність, що передбачає як малі геометричні розміри, так і вагу. Саме ці властивості є важливими для використання окремими військовослужбовцями. Антени, які використовуються ними, повинні бути тонкими, легкими і дешевими у виготовленні, їх робота не повинна залежати від активності користувача. Зокрема їх робота не повинна залежати від зміни геометричної форми одягу, у який інтегрована антена.

У різних практичних застосуваннях, з моменту їх створення, зазвичай використовувались *2D* та *3D* *предфрактальні* та *квазіфрактальні антени*. Однак, схожі властивості багатомодовості і широкополосності мають і *одновимірні напівпрозорі періодичні квазіфрактальні решітки*. Тому актуальною задачею є дослідження властивостей *екранованих періодичних квазіфрактальних решіток*.

Аналіз останніх досліджень. Двовимірні структури, що складаються зі стрічок та екранів, досліджувались у великій кількості робіт [7 – 11]. У більшості випадків у них розглядалися структури, що містили невелику кількість елементів на періоді. Структури, що розглядаються у цій роботі, містять більше десяти елементів на періоді, розміри елементів та відстані між ними можуть відрізнятись у багато разів. Тому для дослідження таких структур варто використовувати підходи, що дозволяють не виконувати додаткової аналітичної роботи при зміні кількості елементів на періоді, зміні їх взаємного розташування, а також бути несуттєво чутливими до довжини стрічок та ширини щілин.

Цим вимогам задовольняє підхід, що було запропоновано у *роботах Ю. В. Ганделя* [12 – 14], який довів свою ефективність при розв'язанні багатьох *задач електродинаміки* [15 – 22]. Він базується на знаходженні характеристик електромагнітних полів, за допомогою числового розв'язання *систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) методом дискретних особливостей (МДО)* [12, 23 – 25]. Системи граничних інтегральних рівнянь отримані за допомогою *методу параметричних подань інтегральних операторів*. Існування математичного обґрунтування збіжності процесу наближених розв'язків систем СІР до точних є ще однією з переваг цього методу [26].

У роботах [26 – 28] за допомогою цього методу досліджувались властивості напівпрозорих предфрактальних та квазіфрактальних решіток. Однак, чисельного дослідження екранованих квазіфрактальних решіток методом дискретних особливостей проведено не було.

Мета статті – дослідження можливостей використання обчислювальної схеми МДО для числового розв'язання задач розсіювання електромагнітних хвиль на екранованих періодичних квазіфрактальних решітках.

Постановка задачі. У роботі розглядаються *ідеально провідні відбиваючі структури*, що складаються з *2l* – періодичної вздовж осі *OY* системи смуг, що лежить у площині *XOY*, та екрана, який розташований на відстані *d'* під системою смуг. Переріз смуг площиною *YOZ* є системою відрізків, довжина яких та розташування на періоді визначаються наступним алгоритмом. На нульовому кроці симетрично відносно кінців відрізка знаходиться смуга довжини $2l\theta_0$, $0 < \theta_0 < 1$. На наступних кроках алгоритму із кожної смуги, що була отримана на попередньому етапі, видаляється центральний інтервал відносної ширини *q*. На *n* – ому етапі алгоритму ми маємо 2^n стрічок та 2^n щілин. Довжина кожної стрічки дорівнює $(1-q)^n \cdot 2l\theta_0$, відносне заповнення періоду металом дорівнює $(1-q)^n \cdot \theta_0$, сумарна довжина усіх стрічок $(1-q)^n \cdot 2l\theta_0$. Ширини щілин різні, довжина щілини, утвореної на нульовому кроці, дорівнює $(1-\theta_0) \cdot 2l$. Ширини інших щілин можуть приймати значення $(1-q)^{k-1} \cdot 2^{1-k} \cdot 2lq\theta_0$, де $k = 1, \dots, n$. Змінюючи параметри *q* та θ_0 , можна отримати бажані співвідношення між шириною щілин та відносним заповненням періоду металом.

Із верхнього півпростору на решітку падає плоска лінійно поляризована електромагнітна хвиля:

$$E^{(initial)} = E_0 \cdot \exp(ik(n \cdot r)) \cdot \exp(-i\omega t), \quad H^{(initial)} = H_0 \cdot \exp(ik(n \cdot r)) \exp(-i\omega t),$$

де *r* – радіус-вектор точки спостереження; $n = (0, n_y, n_z)$ – нормаль до фронту хвилі, причому $n_z < 0$.

Відомо, що повне поле можна подати у вигляді суми *E* – поляризованої та *H* – поляризованої хвиль, і загальна просторова задача зводиться до двох скалярних задач знаходження компонент E_x та H_x . Ці компоненти повинні бути розв'язками *рівняння Гельмгольца* в області над екраном і зовні відбивачів, що задовольняють умовам *квазіперіодичності Флоке, умовам випромінювання, умовам Майкснера*. Окрім цього, у випадку ідеальнопровідної структури, на поверхні стрічок та екрана компонента поля E_x повинна задовольняти *граничним умовам Дірихле*, а компонента поля H_x повинна задовольняти *граничним умовам Неймана*.

Випадок H – поляризації. У випадку падіння на структуру *H* – поляризованої плоскої електромагнітної хвилі $H_x(y', z') = \exp(ik(y' \sin \varphi - z' \cos \varphi))$, повне поле можна шукати у вигляді:

$$H_x^{(total)}(y', z') = H_x(y', z') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^+ \cdot e^{-y'_n z'} \cdot e^{i \cdot p'_n y'}, \quad p'_n = k \cdot \sin \varphi + \pi n (l')^{-1}, \quad y'_n = \sqrt{(p'_n)^2 - k^2}, \quad n \in Z.$$

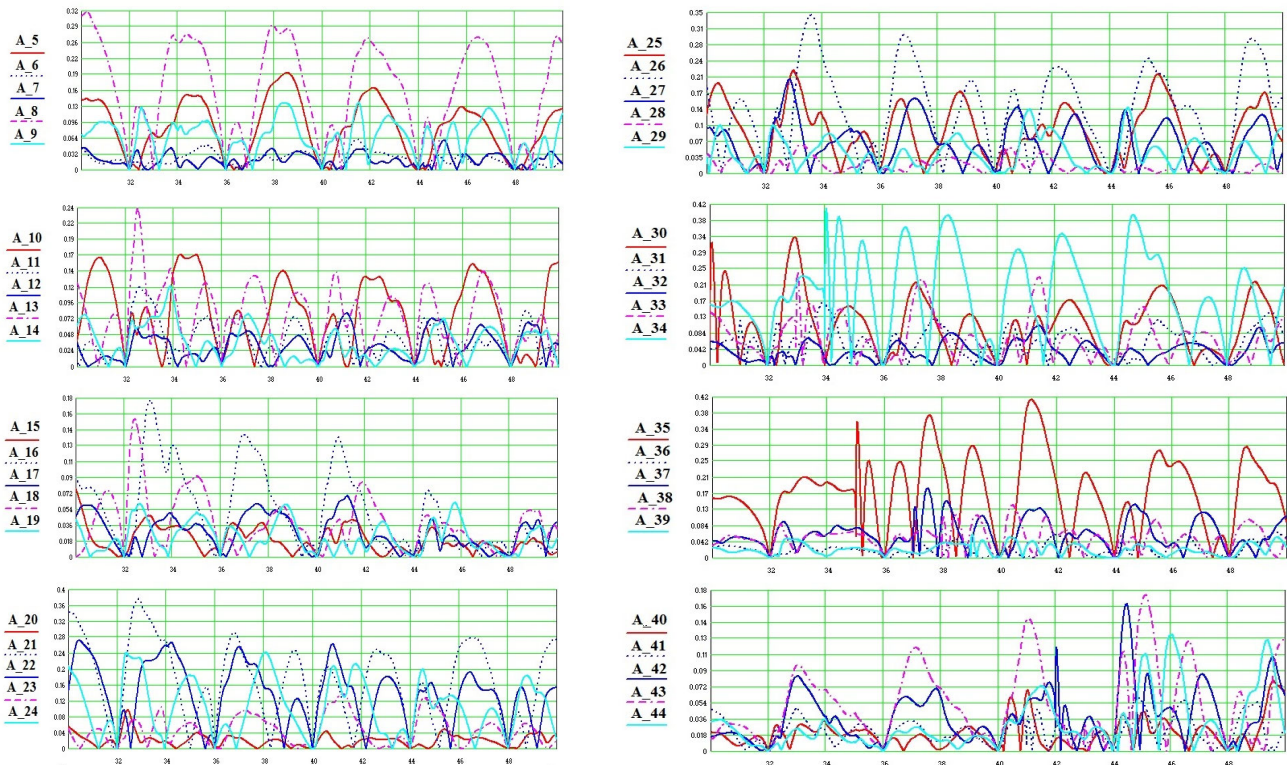


Рис. 1 – Графіки залежності модулів амплітуд гармонік від хвильового числа
(H – поляризація, $q = 0.25$; $\theta_0 = 0.999$; $d = 0.251$).

З результатів роботи [22] випливає, що у випадку структури, що містить M стрічок $[a_q, b_q] \pi \cdot l^{-1}$, $q = 1, \dots, M$ на періоді, коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$a_n^+ = \delta_{0,n} - \frac{1}{2\pi\gamma_n} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 \exp(-ip_n \cdot g_p(\tau)) \frac{W_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad n \in Z;$$

$$\kappa = l' \cdot k \cdot (\pi)^{-1}, \quad \gamma_n = \gamma'_n \cdot l' (\pi)^{-1}, \quad p_n = \kappa \cdot \sin \varphi + \pi n, \quad n \in Z; \quad g_q(\tau) = \frac{b_q - a_q}{2} \tau + \frac{b_q + a_q}{2}, \quad (q = 1, \dots, M),$$

де функції $W_p(\tau)$ задовольняють системі інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{g_q(\tau) - g_q(\xi)} \frac{W_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{2,q,p}(\xi, \tau) \frac{W_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{i\kappa \sin \varphi}{2} \cdot e^{i\kappa \cdot g_q(\xi) \cdot \sin \varphi}, \quad |\xi| < 1;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi_q| \frac{W_q(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^M \int_{-1}^1 K_{1,q,p}(\xi_q, \tau) \frac{W_p(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\exp(i\kappa \cdot g_q(\xi_q) \cdot \sin \varphi), \quad (q = 1, \dots, M),$$

у якій

$$K_{1,q,p}(\xi, \tau) = -R_1(g_q(\xi), g_p(\tau)) - \delta_{p,q} \cdot \ln|\tau - \xi|, \quad K_{2,q,p}(\xi, \tau) = R_2(g_q(\xi), g_p(\tau)) - \frac{\delta_{p,q}}{g_q(\tau) - g_q(\xi)};$$

$$R_1(y, t) = Q(y, t) + i\kappa \sin \varphi \cdot e^{i\kappa \sin \varphi (y-t)} \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds - e^{i\kappa \sin \varphi (y-t)} \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right|;$$

$$R_2(y, t) = \frac{\partial R_1(y, t)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} Q(y, t) + (\kappa \sin \varphi)^2 e^{i\kappa \sin \varphi (y-t)} \int_0^{y-t} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds + \frac{e^{i\kappa \sin \varphi (y-t)}}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{t-y}{2} \right);$$

$$Q(y, t) = \frac{e^{i\kappa \sin \varphi (y-t)}}{4} \cdot \left(\frac{1 + \operatorname{cth}(\gamma'_n d')}{\gamma_n} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1 + \operatorname{cth}(\gamma'_n d')}{\gamma_n} - \frac{2}{|n|} \left(1 - \kappa \sin \varphi \cdot \frac{1}{n} \right) \right) \cdot \exp(in(y-t)) \right).$$

Для знаходження наближених значень амплітуд розсіяного поля використовувалась обчислювальна схема метода дискретних особливостей. На рис. 1 зображені графіки залежності амплітуд гармонік з додатними номерами у випадку нормального падіння H – поляризованої хвилі на відбиваючу структуру, що складалась із шістнадцяти елементів. Наведені результати підтверджують, що на загальну структуру поля у випадку нормального падіння, мають суттєвий вплив гармоніки з абсолютними номерами більше двадцяти, і їх внеском у загальну структуру поля не можна нехтувати. Значна кількість гармонік мала велику кількість резонансів у широкому діапазоні значень хвильового числа. В певних інтервалах значень хвильового числа відразу декілька гармонік мали максимуми амплітуди (рис. 2).

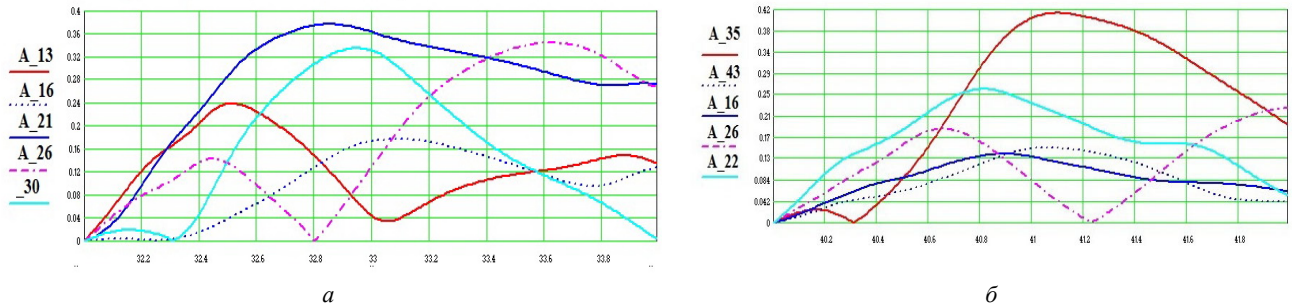


Рис. 2 – Графіки залежності модулів амплітуд гармонік від хвильового числа поблизу максимумів 21 та 35 гармонік (H – поляризація, $q = 0.25$; $\theta_0 = 0.999$; $d = 0.251$): a – максимум 21 гармоніки; b – максимум 35 гармоніки.

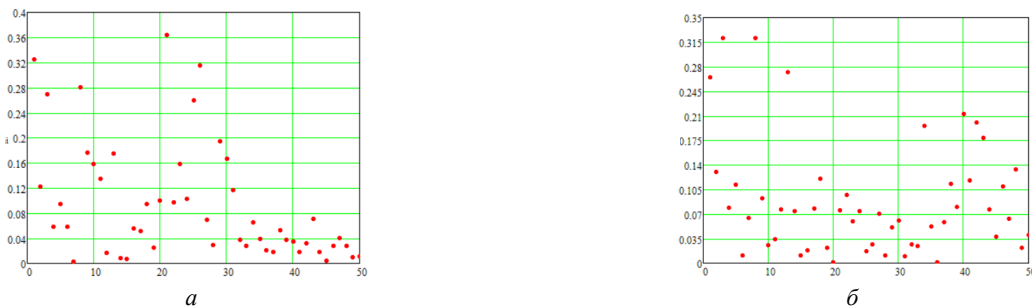


Рис. 3 – Залежність величин $|a_n^+|$ від номеру гармоніки (E – поляризація, $q = 0.25$; $\theta_0 = 0.999$; $d = 0.51$): a – $\kappa = 21.081$; b – $\kappa = 41.18$.

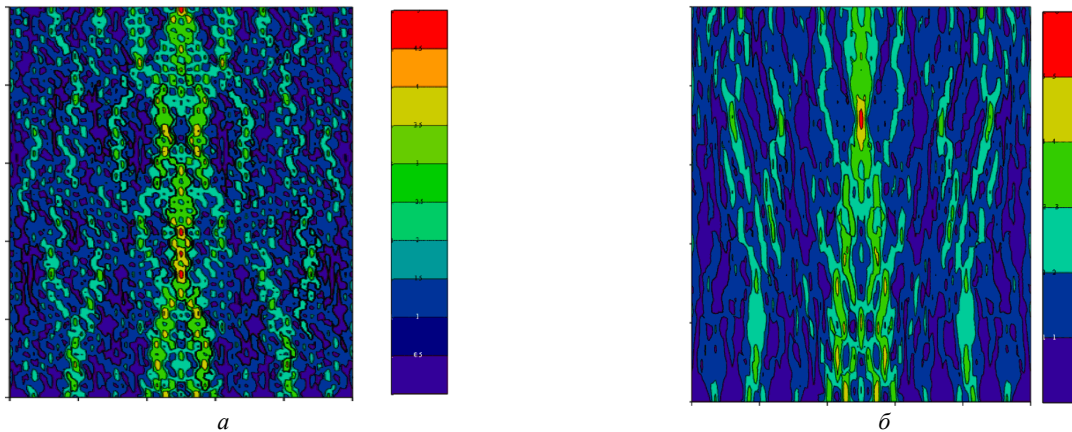


Рис. 4 – Карти розподілу в області $[0, 2l] \times [0, 2l]$ абсолютних значень розсіяного поля (E – поляризація, $q = 0.25$; $\theta_0 = 0.999$; $d = 0.51$): a – $\kappa = 21.081$; b – $\kappa = 41.18$.

Випадак E – поляризації. Числовий експеримент проводився за обчислювальною схемою, викладеною у монографії [22]. Властивості багатомодовості та ширококутовості, які спостерігались у випадку H – поляризації на шістнадцятиелементній структурі, у випадку E – поляризації спостерігались на структурі з восьми елементів. Для цих структур була характерною велика варіація амплітуд гармонік поблизу точок резонансу. Структуру поля у цьому випадку визначала велика кількість гармонік з двозначними номерами (рис. 3). Це обумовило складну структуру ізоліній абсолютних значень амплітуди розсіяного електричного та магнітного полів у області над структурою, значний перепад значень амплітуд при невеликих змінах координат (рис. 4). Також характерною була наявність невеликих за розмірами областей зі значним збільшенням амплітуди розсіяного поля.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Доведено можливість застосування обчислювальної Вісник Національного технічного університету «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, № 1 ' 2023.

схеми методу дискретних особливостей для комп'ютерного моделювання розсіяння електромагнітних хвиль на відбиваючій періодичній квазіфрактальній структурі, що містить 16 смуг на періоді. Отримані чисельні результати доводять, що структура, яка побудована за запропонованим принципом, має властивості ширококутовості та багатомодовості для досліджуваних значень параметрів структури. Підтверджено, що на загальну структуру поля у випадку нормального падіння мають суттєвий вплив гармоніки з абсолютними номерами від 0 до 50. Окремі гармоніки мали велику кількість резонансів, які спостерігались при різних значеннях хвильового числа. Це обумовило складну структуру ізоляцій абсолютних значень амплітуди розсіяного електричного та магнітного полів у області над структурою, значний перепад значень амплітуд при невеликих змінах координат. У подальшому планується проведення комп'ютерного моделювання для неідеально провідних структур і порівняння результатів з числовими результатами для ідеального випадку, що було розглянуто у цій статті. Запропонована структура може представляти цікавість для проектування багатомодових широкополосних антен.

Список літератури

1. Cohen N. Fractal antenna applications in wireless telecommunications. // In Professional Program Proceedings. Electronic Industries Forum of New England. –1997. – P. 43 – 49. <https://doi.org/10.1109/EIF.1997.605374>.
2. Werner D., Ganguly S. An overview of fractal antenna engineering // *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*. – 2003. – vol. 45. – P. 38 – 57.
3. Cohen N. Fractals' New Era in Military Antenna Design // *RF Design*. – 2005. – P. 12 – 17.
4. Reddy B., Prasad N. Wearable Circularly Polarized Fractal-Shaped Antenna for Wireless and Defence Applications // *Proceedings of International Conference on Wireless Communication*. – 2020. – P. 103 – 111. http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-1002-1_12.
5. Chitra R. J., Nagarajan V., Mukesh D. Design of Wearable Pentagonal Fractal Antenna for Soldier Location Tracking // *2020 International Conference on Communication and Signal Processing (ICCSP)*. – Chennai, India, 2020. – P. 1638 – 1642. <http://dx.doi.org/10.1109/ICCSP.2020.9182179>.
6. Sawant V., Gharat N., Gopale B., Gujar T., Mohan A. Design of Textile Antenna for Military Applications // *2nd Asian Conference on Innovation in Technology (ASIANCON)*. – Ravet, India, 2022. – pp. 1 – 5. <https://doi.org/10.1109/ASIANCON55314.2022.9908866>.
7. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Солозуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков : Издательство ХГУ, 1973. – 287 с.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев : Наук. думка, 1984. – 344 с.
9. Zinenko T. L., Nosich A. I., Okuno Y. Plane wave scattering and absorption by resistive-strip and dielectric-strip periodic gratings. // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1998. – vol. 46. – no. 10. – P. 1498 – 1505.
10. Lytvynenko L. M., Prosvirnin S. L. Wave Diffraction by Periodic Multilayer Structures: Kharkov Series in Physics and Mathematics. – Cambridge : Cambridge Scientific Publishers, 2012. – 158 p.
11. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Погарский С. А., Калиберда М. Е. Дифракция волн на периодических многослойных структурах. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. – 268 с.
12. Гандель Ю. В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // *Вопросы кибернетики*. – 1986. – №. 124. – С. 166 – 183.
13. Gandel Yu. V. Parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems // *10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, 2004. – Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – pp. 57 – 62.
14. Gandel Yu. V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2010. – vol. 171(1). 2010. – P. 74 – 88.
15. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaginaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamic structures // *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of *Elektrosvyaz* and *Radiotekhnika*)*. – 2000. – vol. 54. – no. 7. – P. 36 – 48.
16. Gandel Y. V., Zaginaylov G. I., Steshenko S. A. Rigorous electrodynamic analysis of resonator systems of coaxial gyrotrons // *Tech. Phys.* – 2004. – vol. 49 (2004). – P. 887 – 894. <https://doi.org/10.1134/1.1778864>.
17. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert // *Int J Infrared Milli Waves*. – 2007. – vol. 28 (2007). – P. 267–274. <http://dx.doi.org/10.1007/s10762-007-9198-8>.
18. Nosich A. A., Gandel Y. V. Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2007. – vol. 55. – no. 2. – P. 399 – 406. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2006.889811>.
19. Bulygin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 2012. – vol. 60. – no. 10. – pp. 4710 – 4718. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2012.2209194>.
20. Gandel Yu. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – vol. 212. – no. 2. – P. 156 – 166. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2656-2>.
21. Dukhopelnykov S. V. Control of backscattering of H-polarized plane wave by a circular dielectric rod with partial graphene cover. // *Proc. Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018)*. – Tbilisi, 2018. – P. 51 – 54. <https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543283>.
22. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей : монография. – Х. : Акад. ВВ МВД України, 2012. – 544 с.
23. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. Method of Discrete Vortices. – CRC Press, New York, 1993. – 464 p.
24. Lifanov I. K. "Singular integral equations and discrete vortices". – Utrecht (the Netherlands) : VSP VB, 1996. – 475 p.
25. Довгий С. А., Лифанов И. К., Черный Д. И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии. – К. : Издательство «Остион», 2016. – 380 с.
26. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems // *Differential Equations*. – 2003. – vol. 39 (2003). – P. 1295 – 1307. <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012697.36651.0d>.
27. Nesvit K. V. Discrete mathematical model of diffraction on pre-Cantor set of slits in impedance plane and numerical experiment // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2013. – Issue 11. – Vol. 7. – P. 897 – 906.
28. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips // *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*. – Kharkiv, Ukraine, 2020. – pp. 625 – 629.
29. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. Modeling Wave Scattering by GC-like Periodic Structures // *2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. – Tbilisi, Georgia, 2021. – pp. 59 – 63. <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552304>.

References (transliterated)

1. Cohen N. Fractal antenna applications in wireless telecommunications. *In Professional Program Proceedings. Electronic Industries Forum of New England*. 1997. pp. 43–49. <https://doi.org/10.1109/EIF.1997.605374>.
2. Werner D., Ganguly S. An overview of fractal antenna engineering. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*. 2003, vol. 45, pp. 38–57.
3. Cohen N. Fractals' New Era in Military Antenna Design. *RF Design*. 2005. pp. 12–17.
4. Reddy B., Prasad N. Wearable Circularly Polarized Fractal-Shaped Antenna for Wireless and Defence Applications. *Proceedings of International*

- Conference on Wireless Communication. 2020, pp. 103–111. http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-1002-1_12.
5. Chitra R. J., Nagarajan V., Mukesh D. Design of Wearable Pentagonal Fractal Antenna for Soldier Location Tracking. *2020 International Conference on Communication and Signal Processing (ICCCSP)*. Chennai, India, 2020. pp. 1638–1642. <http://dx.doi.org/10.1109/ICCCSP48568.2020.9182179>.
 6. Sawant V., Gharat N., Gopale B., Gujar T., Mohan A. Design of Textile Antenna for Military Applications. *2nd Asian Conference on Innovation in Technology (ASIANCON)*. Ravet, India, 2022. pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ASIANCON55314.2022.9908866>.
 7. Shestopalov V. P., Litvinenko L. N., Maslov S. A., Sologub V. G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Wave diffraction on gratings. Kharkov, Izdatel'stvo KhGU Publ., 1973. 287 p.
 8. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Nazarchuk Z. T. *Metod syngulyarnykh integral'nykh uravneniy v dvumernykh zadachakh difraktsii* [Methods of singular integral equations for two-dimensional diffraction problem]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1984. 344 p.
 9. Zinenko T. L., Nosich A. I., Okuno Y. Plane wave scattering and absorption by resistive-strip and dielectric-strip periodic gratings. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1998, vol. 46, no. 10, pp. 1498–1505.
 10. Lytvynenko L. M., Prosvirnin S. L. *Wave Diffraction by Periodic Multilayer Structures: Kharkov Series in Physics and Mathematics*. Cambridge, Cambridge Scientific Publishers, 2012. 158 p.
 11. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L., Pogarskiy S. A., Kaliberda M. E. *Difraktsiya voln na periodicheskikh mnogoslonykh strukturakh* [Wave diffraction on periodic multilayered structures]. Kharkov, KhNU imeni V. N. Karazina Publ., 2017. 268 p.
 12. Gandel' Yu. V. Metod dyskretnykh osobennostey v zadachakh elektrodinamiki [Method of discrete singularities in the problems of electro-dynamics]. *Voprosy kibernetiki* [Problems of Cybernetics]. 1986, no. 124, pp. 166–183.
 13. Gandel Yu. V. Parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems. *10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 2004*. Dnepropetrovsk, Ukraine, 2004. pp. 57–62.
 14. Gandel Yu. V. Parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems. *10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 2004*. Dnepropetrovsk, Ukraine, 2004. pp. 57–62.
 15. Gandel Y. V., Dushkin V. D., Zaginaylov G. I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electro-dynamical structures. *Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika)*. 2000, vol. 54, no. 7, pp. 36–48.
 16. Gandel Y. V., Zaginaylov G. I., Steshenko S. A. Rigorous electrodynamic analysis of resonator systems of coaxial gyrotrons. *Tech. Phys.* 2004, vol. 49 (2004), pp. 887–894. <https://doi.org/10.1134/1.1778864>.
 17. Kononenko O. S., Gandel Y. V. Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert. *Int J Infrared Milli Waves*. 2007, vol. 28 (2007), pp. 267–274. <http://dx.doi.org/10.1007/s10762-007-9198-8>.
 18. Nosich A. A., Gandel Y. V. Numerical Analysis of Quasioptical Multireflector Antennas in 2-D With the Method of Discrete Singularities: E-Wave Case. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007, vol. 55, no. 2, pp. 399–406. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2006.889811>.
 19. Bulynin V. S., Nosich A. I., Gandel Y. V. Nystrom-Type Method in Three-Dimensional Electromagnetic Diffraction by a Finite PEC Rotationally Symmetric Surface. *In IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2012, vol. 60, no. 10, pp. 4710–4718. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2012.2209194>.
 20. Gandel Yu. V., Dushkin V. D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 212, no. 2, pp. 156–166. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2656-2>.
 21. Dukhopelnykov S. V. Control of backscattering of H-polarized plane wave by a circular dielectric rod with partial graphene cover. *Proc. Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2018)*. Tbilisi, 2018. pp. 51–54. <https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543283>.
 22. Gandel' Yu. V., Dushkin V. D. *Matematicheskie modeli dvukhmernykh zadach difraktsii : singulyarnye integral'nye uravneniya I chislennye metody diskretnykh osobennostey : monografiya* [Mathematical models of two-dimensional problems of diffraction : singular integral equations and numerical methods of discrete singularities : monograph]. Kharkov, Akad. VV MVD Ukrainy Publ., 2012. 544 p.
 23. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Method of Discrete Vortices*. CRC Press, New York, 1993. 464 p.
 24. Lifanov I. K. "Singular integral equations and discrete vortices". Utrecht (the Netherlands), VSP VB, 1996. 475 p.
 25. Dovgvy S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i vychislitel'nye tekhnologii* [Method of singular integral equations and computing technologies]. Kyiv, Izdatel'stvo «Yustinion», 2016. 380 p.
 26. Gandel' Yu. V., Polyanskaya T. S. Justification of a Numerical Method for Solving Systems of Singular Integral Equations in Diffraction Grating Problems. *Differential Equations*. 2003, vol. 39 (2003), pp. 1295–1307. <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000012697.36651.0d>.
 27. Nesvit K. V. Discrete mathematical model of diffraction on pre-Cantor set of slits in impedance plane and numerical experiment. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013, issue 11, vol. 7, pp. 897–906.
 28. Dushkin V. D., Zhuchenko S. V., Kostenko O. V. Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips. *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW)*. Kharkiv, Ukraine, 2020. pp. 625–629.
 29. Dushkin V. D., Kostenko O. V., Zhuchenko S. V. Modeling Wave Scattering by GC-liked Periodic Structures. *2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*. Tbilisi, Georgia, 2021. pp. 59–63. <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552304>.

Надійшла (received) 11.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Душкін Володимир Давидович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент, Національна академія Національної гвардії України, м. Харків; тел.: (097) 386-64-59; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

Душкін Володимир Давидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Национальная академия Национальной гвардии Украины, г. Харьков; тел.: (097) 386-64-59; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

Dushkin Volodymyr Davidovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, National Academy of National Guard of Ukraine, Kharkiv; tel.: (097) 386-64-59; e-mail: dushkinvdv@gmail.com.

Жученко Станіслав Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 685-25-20; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net.

Жученко Станіслав Володимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (050) 685-25-20; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net.

Zhuchenko Stanislav Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher in the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv; tel.: (050) 685-25-20; e-mail: stanislavzhuchenko@ukr.net.