УДК 539.3 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.13**

Н. С. ГОРОДЕЦЬКА, І. В. СТАРОВОЙТ, Т. М. ЩЕРБАК

МЕТОДИ УПРАВЛІННЯ ПРОЗОРІСТЮ МЕЖІ В НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЕВОДАХ

Робота присвячена розробці методів керування ефективністю передачі енергії в складеному пружному хвилеводі. На основі аналізу розсіяного поля на межі ступінчатого хвилеводу, утвореного жорстким контактом двох півшарів з однаковими механічними характеристиками, але різної товщини, встановлено основні фактори, які впливають на прозорість межі розділу. Розглядалися гармонічні коливання, породжені розсіянням першої нормальної хвилі, що поширювалась з нескінченності у вужчому півшарі. Математичні труднощі поставленої граничної задачі обумовлені наявністю степеневої особливості по напруженням в точці зміни граничних умов на межі двох півшарів. Розв'язок будується методом суперпозиції, який дозволяє врахувати локальну особливість через асимптотичні особливості невідомих. Критерієм якості отриманого розв'язку був контроль точності виконання умов спряження на межі двох півшарів. Основна увага в роботі зосереджена на встановленні умов зміни прозорості межі в залежності від частот, симетрії коливань і співвідношення товщин півшарів. В роботі було показано, що як для симетричних, так і для антисиметричних коливань ступінчатого хвилеводу існують частотні діапазони, в яких прозорість межі суттєво змінюється. Для обох видів симетрії в діапазоні частот до критичної частоти для третьої поширюваної нормальної хвилі існує два частотних діапазони, в яких прозорість межі досить різко зростає. Частоти, на яких спостерігаються локальні максимуми енергії у відбитому полі, для симетричних і антисиметричних коливань різні. Для симетричних коливань перший максимум енергії у відбитому полі спостерігається на частоті, коли в обох півшарах може поширюватись тільки одна хвиля. Цей ефект обумовлений збільшенням ролі неоднорідних хвиль у пройденому полі. Другий максимум енергії у відбитому полі обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в поширюванні хвилі вищих порядків. При антисиметричних коливаннях обидва максимуми обумовлені енергетичними особливостями поширюваних хвиль вищих порядків. Добротність резонансу енергії у відбитому полі виявилась також значно залежною від симетрії коливань. Встановлені особливості розсіяного поля дозволяють розробляти рекомендації щодо управління прозорістю межі в ступінчатому хвилеводі.

Ключові слова: пружні хвилі, хвилевод, прозорість межі розділу, енергетичний аналіз, метод суперпозиції, асимптотичні особливості невідомих, добротність резонансу.

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ, И. В.СТАРОВОЙТ, Т. Н.ЩЕРБАК

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЗРАЧНОСТЬЮ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА В НЕОДНОРОДНЫХ УРУГИХ ВОЛНОВОДАХ

Статья посвящена анализу рассеянного поля на границе ступенчатого волновода, образованного жестким контактом двух полуслоев с одинаковыми механическими характеристиками, но с разными ширинами. Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, которая распространяется из бесконечности в более узком полуслое. Математические трудности поставленной граничной задачи обусловлены наличием степенной особенности по напряжениям в точке изменения типа граничных условий на границе двух полуслоев. Решение строится методом суперпозиции, который позволяет учесть локальную особенность через асимптотические свойства неизвестных. В работе было показано, что как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний ступенчатого волновода существуют частотные диапазоны, в которых прозрачность границы существенно изменяется. Частоты, на которых наблюдаются локальные максимумы энергии в отраженном поле, для симметричных и антисимметричных колебаний разные и обусловлены уровнем возбуждения различных нормальных волн.

Ключевые слова: упругие волны; прозрачность границы раздела, энергетический анализ, метод суперпозиции, асимптотические свойства неизвестных, добротность резонанса.

N. S. GORODETSKA, I. V. STAROVOIT, T. M. SHCHERBAK

METHODS OF CONTROLLING BOUNDARY TRANSPARENCY IN NON-HOMOGENOUS ELASTIC WAVEGUIDES

The work is devoted to the development of methods for controlling the efficiency of energy transfer in a composite elastic waveguide. Based on the analysis of the scattered field at the boundary of the stepped waveguide, formed by the rigid contact of two half-layers with the same mechanical characteristics, but with the different thicknesses, the main factors that affect the transparency of the interface were established. Harmonic oscillations generated by the first normal wave propagating from infinity in the narrower half-layer were considered. Mathematical difficulties of the posed boundary problem are due to the presence of a local singularity in the stresses at the point of change of the boundary conditions at the boundary of the two hemispheres. The solution is built by the superposition method, which allows taking into account the local singularity due to the asymptotic features of the unknowns. The quality criterion of the obtained solution was the control of the accuracy of the fulfillment of the conjugation conditions at the boundary of the two half-layers. The main attention in the work is focused on establishing the conditions for changing the transparency of the boundary depending on the frequencies, the symmetry of the oscillations, and the ratio of the half-layer widths. It was shown in the work that for both symmetric and antisymmetric oscillations of a stepped waveguide, there are frequency ranges in which the transparency of the boundary changes significantly. For both types of symmetry, in the frequency range up to the critical frequency for the third propagating normal wave, there are two frequency ranges in which the transparency of the boundary increases rather sharply. The frequencies at which local energy maxima are observed in the reflected field are different for symmetric and anti-symmetric oscillations. For symmetric oscillations, the first energy maximum in the reflected field is observed at the frequency when only one wave can propagate in both half-layers. This effect is due to the increase in the role of inhomogeneous waves in the transmitted field. The second energy maximum in the reflected field is due to the transformation of the energy of the incident wave into propagating waves of higher orders. In the case of antisymmetric oscillations, both maxima are due to the energy features of propagating waves of higher orders. The quality of energy resonance in the reflected field depends significantly on the symmetry of the oscillations. The established features of the scattered field make it possible to develop recommendations for controlling the transparency of the boundary in a stepped waveguide.

Key words: elastic waves; interface transparency, energy analysis, superposition method, asymptotic properties of unknowns, resonance quality factor.

Вступ. *Методи управління ефективністю проходження і відбиття енергії* на межі розділу в неоднорідних обмежених *пружних хвилеводах* в заданих частотних діапазонах є актуальними в *акустоелектроніці* при розроб

© Н. С. Городецька, І. В. Старовойт, Т. М. Щербак, 2023

ці різних видів фільтрів. До останнього часу управління прозорістю межі в неоднорідних хвилеводах здійснювалось за рахунок взаємодії електричних і механічних полів. Робота [1] є однією з перших, в якій було знайдено явище різкого збільшення ефективності проходження енергії в *пьезокерамічній пластині* в область, на якій були нанесені електроди. Було експериментально знайдено, що на певних частотах збудження електричного поля область інтенсивних коливань пластини практично збігалася із областю пластини, покритої електродами. Коливання сусідніх неелектродованих частин пластини мали суттєво меншу амплітуду. Таке явище отримало назву *захоплення енергії*. Оскільки в пьезокерамічній пластині механічні властивості в області під електродами і без електродів різняться, то аналогічне явище буде мати місце на межі розділу складених пружних хвилеводів з різними механічними властивостями. Добре відомо, що в пружних напівобмежених хвилеводах в області високих частот, коли з'являються хвилі вищих порядків, відбувається суттєва трансформація енергії падаючої хвилі в хвилі інших порядків. Такий ефект обумовлений *спектральними особливостями задачі*. Дисперсійний характер нормальних хвиль в пружних хвилеводах і можливість варіювати критичні частоти в хвилеводних конструкціях, утворених з'єднанням різних елементів, за рахунок зміни механічних і геометричних характеристик окремих частин дозволяє сподіватись на можливість управління прозорістю границі на заданих частотах.

Аналіз останніх досліджень. Розробка методів керування передачі енергії в хвилеводах складної конфігурації є актуальною проблемою в різних областях фізики. Зокрема для *електромагнітних* [2], *акустичних* [3] та *пружних систем* [4] відомі різні *методи керування переносом енергії*. Зазначимо, що аналіз фізичних причин зміни інтенсивності передачі енергії в хвилеводах складної конфігурації найпростіше провести на пружних хвилеводах, оскільки в них зміни в *дисперсійних властивостях* окремих компонентів системи при зміні механічних характеристик і типу симетрії коливань добре відомі. Це дозволяє реалізовувати різноманітні режими роботи і варіювати конфігурацією хвилеводу. Зокрема, в [5], [6] запропоновані конструкції пружних хвилеводів, які показують принципову можливість управління потоком енергії за рахунок трансформації одного типу хвиль в інший при зміні симетрії хвилеводу.

Дана робота присвячена *аналізу розсіяного поля* в пружному неоднорідному хвилеводі, утвореному жорстким контактом двох півшарів з однакових матеріалів, але різної товщини, в залежності від частоти і типу симетрії коливань.

Постановка задачі. Розглядається модельна задача про збудження гармонічного хвильового поля в пружному ізотропному складеному хвилеводі. Бічні поверхні хвилеводу вільні від напружень. Фізичні властивості середовища задаються *коефіцієнтом Пуассона* ν і модулем зсуву μ. Коливання породжуються першою нормальною хвилею, яка поширюється з $+\infty$ у вужчому півшарі (h) і позначається індексом (0). Всі величини нормовані на ширину більшого півшару H .

Знаходимо хвильове поле $\vec{u}(y, z)$, яке задовольняє *векторному рівнянню Ламе*:

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)grad\, div\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

і додатковим умовам спряження на поверхні $z = 0$, які мають вигляд:

$$\tilde{\sigma}^r_{zz}(y,0) + \sigma^{(0)}_{zz}(y,0) = \begin{cases}\sigma^t_{zz}(y,0), & |y| \le \alpha,\\ 0, & \alpha < |y| \le 1,\end{cases} \quad \tilde{\tau}^r_{zz}(y,0) + \tau^{(0)}_{zz}(y,0) = \begin{cases}\tau^t_{zz}(y,0), & |y| \le \alpha,\\ 0, & \alpha < |y| \le 1;\end{cases}$$

$$u^t_z(y,0) = \tilde{u}^r_z(y,0) + u^{(0)}_z(y,0), \quad |y| \le \alpha, \quad u^t_y(y,0) = \tilde{u}^r_y(y,0) + u^{(0)}_y(y,0), \quad |y| \le \alpha. \tag{2}$$

Індекс t відповідає пройденому полю, а $r-$ відбитому.

Бічні поверхні вільні від напружень:

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \quad \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0, \quad -\infty < z \le 0, \quad \sigma_{yy}(\pm\alpha, z) = 0, \quad \tau_{zy}(\pm\alpha, z) = 0, \quad 0 \le z < \infty. \tag{3}$$

Переміщення для падаючої хвилі мають вигляд:

$$u^{(a,s)}_z = -U^{(a,s)}_z(\xi_1, y)\ell^{-i\xi z}, \quad u^{(a,s)}_y = iU^{(a,s)}_y\ell^{-i\xi z}, \tag{4}$$

де ξ – стала поширення, яка дорівнює першому дійсному кореню дисперсійного рівняння:

а) симетричні коливання $\Delta(\tau) = \left(2\tau^2 - \Omega_2^2\right)^2 p_1 th\, p_1 - 4\tau^2 p_1^2 p_2\, th\, p_2 = 0$,

б) антисиметричні коливання $\Delta(\tau) = \left(2\tau^2 - \Omega_2^2\right)^2 p_1 cth\, p_1 - 4\tau^2 p_1^2 p_2\, cth\, p_2 = 0$, (5)

Коливання симетричні або антисиметричні відносно площини $y = 0$.

Метод розв'язання. В даній роботі для розв'язання поставленої граничної задачі використовувався *метод суперпозицій* [7], відповідно до якого хвильове поле може бути представлено у вигляді:

а) симетричне поле:

$$u_z = iA_0\Omega_1 e^{\Omega_1 z} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}\right)\cos\beta_k y + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{(s)}(\tau)U_z^{(s)}(\tau, y)e^{it z}d\tau;$$

$$u_y = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}\right)\sin\beta_k y + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{(s)}(\tau)U_y^{(s)}(\tau, y)e^{i\tau z}d\tau,\ \ \beta_k = k\pi;$$

$$U_z^{(s)}(\tau, y) = \tau\left(p_2\frac{ch\ p_2 y}{sh\ p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2p_1}\frac{ch\ p_1 y}{sh\ p_1}\right),\quad U_y^{(s)}(\tau, y) = \tau^2\frac{sh\ p_2 y}{sh\ p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2}\frac{sh\ p_1 y}{sh\ p_1}. \tag{6}$$

б) антисиметричне поле:

$$u_z = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}\right)\sin\beta_k y + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)}(\tau)U_z^{(a)}(\tau, y)e^{it z}d\tau;$$

$$u_y = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}\right)\cos\beta_k y + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)}(\tau)U_y^{(a)}(\tau, y)e^{i\tau z}d\tau,\ \ \beta_k = \frac{2k-1}{2}\pi.$$

Для антисиметричних коливань вираз для $U_z^{(a)}$ у виразах для $U_z^{(s)}$ $sh\ p_i$ змінюється на $ch\ p_i$, а для $U_y^{(s)}$ в $U_y^{(a)}$ змінюємо $sh\ p_i y / sh\ p_i$ на $ch\ p_i y / ch\ p_i$.

Введені позначення $\Omega_i = \omega H / c_i$, c_i – швидкість поздовжніх $(i = 1)$ і поперечних $(i = 2)$ хвиль:

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & \beta_k \ge \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & \beta_k < \Omega_j; \end{cases} \quad p_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \ge \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Напруження, що відповідають цим переміщенням, знаходяться з *закону Гука*.

В поставленій граничній задачі в кутовій точці $z = 0,\ y = \alpha$ існує локальна степенева особливість по напруженням, показник (ε) якої визначається з рівняння і не залежить від типу симетрії коливань:

$$\sin^2 3\varepsilon\pi / 2 - \varepsilon^2 = 0.$$

З огляду на характер особливості в околі кута, нормальне $\sigma_{zz}(y = \pm\alpha, 0)$ і дотичне $\tau_{zy}(\pm\alpha, 0)$ напруження можуть бути представлені у вигляді:

$$\frac{\sigma_{zz}(\pm\alpha, z)}{2\mu} = \frac{\sigma^{(+)}}{\left(1 - y^2\right)^{1-\varepsilon}} + \psi(y),\quad \frac{\tau_{zy}(\pm\alpha, z)}{2\mu} = \frac{\tau^{(+)}}{\left(1 - y^2\right)^{1-\varepsilon}} + \psi_1(y),$$

де $\sigma^{(+)},\ \tau^{(+)}$ – постійні величини, а $\psi(y),\ \psi_1(y)$ – гладкі функції.

Припускаючи, що при великих значеннях k (більших деякого N) характер коефіцієнтів A_k, B_k (для пройденого і відбитого полів) визначається поведінкою напружень в околі кутової точки і, використовуючи вирази для напружень, знаходимо асимптотичні вирази для коефіцієнтів A_k, B_k.

Визначивши асимптотичну поведінку невідомих у пройденому та відбитому полях і виконавши умови спряження (2), отримаємо рівняння у вигляді системи $4N + 4$ лінійних алгебраїчних рівнянь з відповідним числом невідомих. При проведенні чисельних розрахунків з обмеженням числа членів рядів до $N = 60$, похибка виконання закону збереження енергії не перевищувала $0,7$ % енергії падаючої хвилі, а умови спряження виконувались з такими похибками

$$u_z, u_y \text{ до } 4\%u_z^{(0)},\ \tau_{yz} \text{ до } 0.2\%\,\sigma_{zz}^{(0)},\ |y| < \alpha,\ \sigma_{zz} < 8\%\sigma_{zz}^{(0)},\ |y| < 0.98\alpha.$$

Аналіз результатів. Для оцінки особливостей розсіяного на границі розділу поля в складеному хвилеводі, проаналізуємо енергетичні характеристики пройденого і відбитого полів. Відомо, що тільки хвилі, які поширюються, переносять енергію або середній за період потік потужності через поперечний переріз в дальнє поле. Середній за період потік потужності через поперечний переріз дорівнює сумі потужностей, які переносять окремо поширювані моди.

Для відбитого поля потік потужності (W_z) вздовж осі хвилеводу знаходиться із співвідношення:

$$E_z = \sum_{k=1}^{K} E_z^{(k)};\ E_z^{(k)} = \frac{i\omega}{2}|C_k|^2 \cdot \int_{-h}^{h}\left[\sigma_{zz}(\xi_k, y)u_z(\xi_k, y) - \tau_{zy}(\xi_k, y)u_y(\xi_k, y)\right]dy,$$

де $E_z^{(k)}$ – потужність; $C_k = \operatorname*{Res}_{t\to\xi_k} x(\tau)$ – амплітуда k – ї поширюваної моди.

Розсіяне поле на межі розділу в складеному хвилеводі значною мірою залежать від співвідношення спектральних характеристик окремих складових системи. При цьому вирішальне значення мають критичні частоти,

на яких з'являються поширювані хвилі вищих порядків, оскільки саме на цих частотах відбувається суттєва перебудова хвильового поля. Крім того, при симетричних коливаннях спостерігається резонанс на неоднорідних хвилях, який також значно впливає на структуру хвильового поля. Зміну прозорості межі розділу в даній задачі будемо оцінювати по середньому за період потоку потужності через поперечний переріз для кожного півшару.

Почнемо з антисиметричних коливань [8]. Кількісні обчислення виконані з метою вивчення впливу зміни геометричних розмірів ступінчатого хвилеводу на трансформацію енергії падаючої хвилі у відбиту і пройдену.

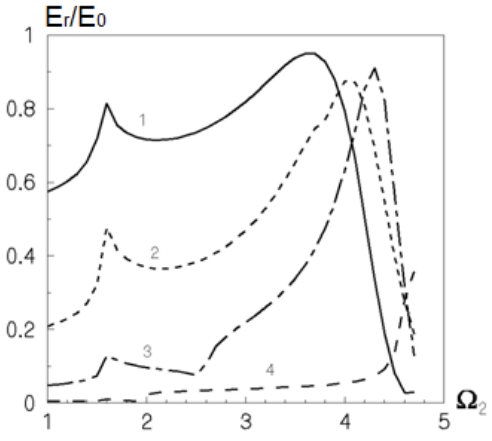


Рис. 1 – Частотна залежність потоку потужності у відбитому полі, нормована на потік падаючої хвилі (антисиметричні коливання).

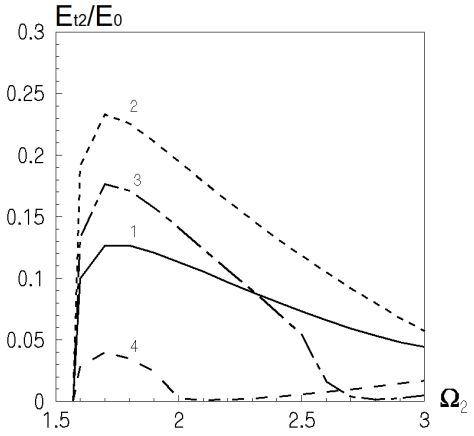


Рис. 2 – Процентний вміст потоку потужності другої пройденої хвилі в залежності від частоти для різних величин α.

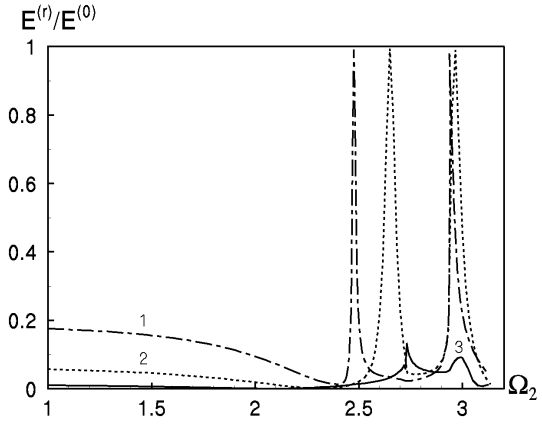
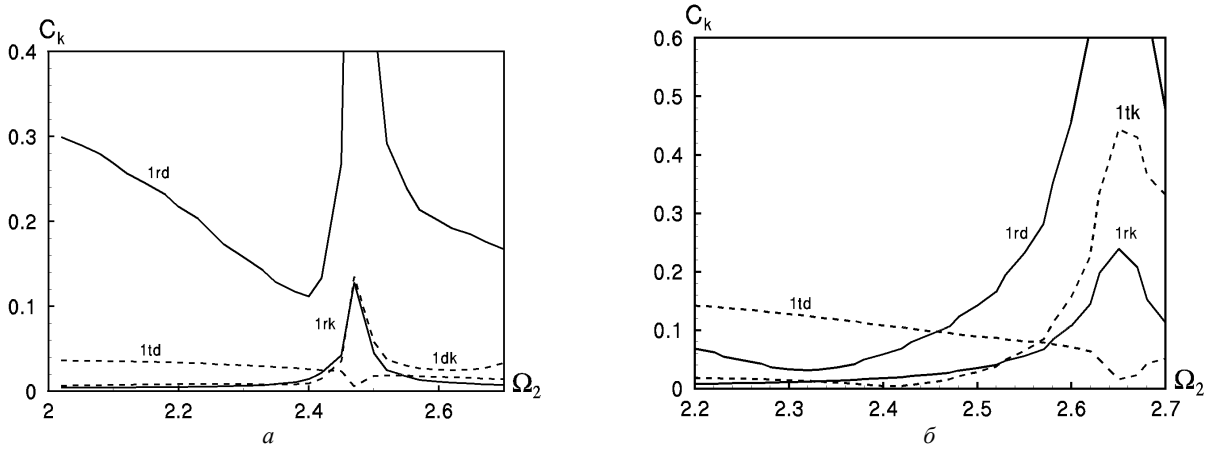


Рис. 3 – Частотна залежність середнього за період потоку потужності у відбитому полі (симетричні коливання).

Розрахунки виконані для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$, для діапазону частот нижче критичної частоти для третьої поширюваної моди. Для запропонованої геометрії хвилеводу у пройденому полі з'являються поширювані хвилі вищих порядків раніше, ніж у відбитому. На рис. 1 представлено залежність нормованого потоку потужності від частоти у відбитому полі. Номер кривої відповідає різним величинам α. Крива 1 відповідає $\alpha = 0.2$, $2 - 0.4$, $3 - 0.6$, $4 - 0.8$. Як видно з рис. 1, енергія відбитого поля має два локальних максимуми, перший з яких спостерігається на критичній частоті $\Omega_2 = \pi/2$ для пройденого поля, коли друга нормальна хвиля стає такою, що поширюється. Як можна бачити на рис. 2, на даній частоті друга поширювальна хвиля стає домінуючою. Саме тому, перший максимум енергії у відбитому полі обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі у другу нормальну хвилю, що поширюється у пройденому полі. При цьому друга нормальна хвиля у пройденому полі переносить не більше 30 % потоку потужності падаючої хвилі. Слід відмітити, що зростання енергії відбитого поля в околі частоти першого максимуму також не перевищує 30 % енергії падаючої хвилі. Розсіяне поле, в основному, визначається першою відбитою хвилею. Відзначимо, що при збільшенні α зменшується як максимальна величина потоку потужності, який переносить перша хвиля, так і загальний потік у відбитому полі. З рис. 1 видно, що частота першого локального максимуму однакова для всіх α, а рівень відбитої енергії зменшується з ростом α. Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений зростанням енергоємності першої відбитої поширюваної хвилі. При цьому, як частота другого максимуму, так і величина відбитої енергії залежать від α. Відзначимо, що для всіх величин α в околі частоти другого максимуму енергії у пройденому полі поширюються дві нормальні хвилі. У відбитому полі, в розглянутому частотному діапазоні, можуть поширюватися одна або дві хвилі, в залежності від величини α. Для вибраного коефіцієнту Пуассона $\nu = 0.3$ у всьому розглянутому частотному діапазоні неоднорідна хвиля з першим комплексним хвильовим числом дисперсійного рівняння, як у відбитому, так і в пройденому полях, збуджується слабо і не має резонансних властивостей, коли частота максимального значення модуля амплітуди співпадає зі зміною знака фази.

Розглянемо симетричні коливання. Добре відомо, що спектри симетричних і антисиметричних коливань хвилеводів суттєво відрізняються. Для пружних хвилеводів при симетричних коливаннях існують спектральні криві з від'ємною кривизною, які в даному частотному діапазоні описують «обернену» хвилю. Частота, на якій з'являється «обернена» хвиля, менше критичної частоти для другої нормальної хвилі, що поширюється. Крім того, при симетричних коливаннях в області частот, де може поширюватись лише одна нормальна хвиля, існує частота, на якій може відбуватися значне збудження неоднорідних хвиль. Зокрема, для півшару з вільним торцем таке явище отримало назву крайового резонансу. На рис. 3 представлено частотну залежність середнього за період потоку потужності у

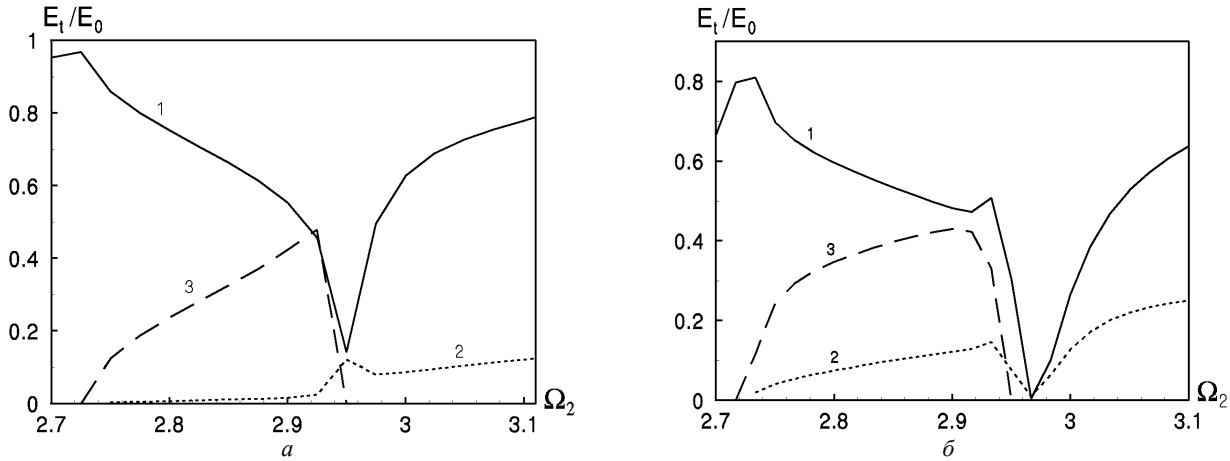
відбитому полі. Крива **1** відповідає $\alpha = 0.4$, **2** – $\alpha = 0.6$, **3** – $\alpha = 0.8$. На частоті $\Omega_2 = 2.72$ у пройденому полі з'являються поширювані хвилі вищих порядків. У відбитому полі в діапазоні частот, що розглядається, поширюється тільки одна нормальна хвиля. На відміну від антисиметричних коливань, (рис. 1) для всіх кривих існує частота, на якій практично вся енергії падаючої хвилі проходить у ширший хвилевід (енергія відбитого поля прямує до 0). На цій частоті, як у відбитому, так і в пройденому полі, поширюється тільки одна нормальна хвиля. Частота, на якій спостерігається даний ефект, зменшується зі зростанням α. Як і при антисиметричних коливаннях, в даному випадку спостерігається два локальних максимуми енергії у відбитому полі. На відміну від антисиметричних коливань, перший максимум має місце на частоті, коли у відбитому і пройденому полях можуть поширюватись тільки по одній нормальній хвилі. Таких ефект не пов'язаний із трансформацією енергії падаючої хвилі в хвилі вищих порядків, що поширюються. Зазначимо, що частота і добротність першого локального максимуму енергії відбитого поля залежить від α: при збільшенні α частота зростає, а добротність резонансу зменшується. Така поведінка розсіяного поля може бути обумовлена тільки збудженням неоднорідних хвиль.



а *б*

Рис. 4 – Частотна залежність модуля амплітуд нормальних хвиль в розсіяному полі: *а* – $\alpha = 0.4$; *б* – $\alpha = 0.6$.

На рис. 4, *а*, *б* представлена частотна залежність модуля амплітуд нормальних хвиль в розсіяному полі. Суцільні криві відповідають відбитому полю, а штрихові – пройденому полю. Криві з позначкою d – першій поширювальній хвилі, а з k – неоднорідній хвилі з першим комплексним коренем дисперсійного рівняння (5). Для $\alpha = 0.4$ – рис. 4, *а*, а рис. 4, *б* – для $\alpha = 0.6$. На обох рисунках на частоті, на якій практично вся енергія падаючої хвилі відбивається від границі розділу в складеному хвилеводі, амплітуди неоднорідної хвилі, як у відбитому, так і в пройденому полі, мають максимальне значення. Крім того, на даній частоті фаза неоднорідної хвилі змінюється. Максимум амплітуди та зміна фази характерна для резонансної ситуації. Для $\alpha = 0.4$ максимальні величини амплітуд неоднорідної хвилі у відбитому та пройденому полях практично співпадають. Для $\alpha = 0.6$ неоднорідна хвиля у пройденому полі збуджується сильніше, ніж у відбитому. При збільшені α резонансна частота зростає і збільшується амплітуда неоднорідної хвилі в пройденому полі.



а *б*

Рис. 5 – Частотна залежність енергії поширювальних хвиль вищих порядків у пройденому полі: *а* – $\alpha = 0.4$; *б* – $\alpha = 0.6$.

Незважаючи на те, що амплітуди неоднорідних хвиль не перевищують амплітуду падаючої хвилі, перший максимум енергії відбитого поля обумовлений перебудовою розсіяного хвильового поля за рахунок резонансу на неоднорідних хвилях.

Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в поширювані хвилі вищих порядків у пройденому полі. На рис. 5, *а*, *б* представлено частотну залежність енергії поширюваних хвиль вищих порядків у пройденому полі. Рис. 5, *а* – для $\alpha = 0.4$, а рис. 5, *б* – для $\alpha = 0.6$. Крива 1 – перша поширювана хвиля, 2 – друга, 3 – «обернена» хвиля. Для $\alpha = 0.4$ другий локальний максимум відбитого поля (рис. 3) відбувається на частоті 2.95. Це частота (рис. 5, *а*), на якій у пройденому полі «обернена» хвиля вироджується в неоднорідну хвилю, а друга поширювана хвиля досягає свого локального максимуму. Для $\alpha = 0.6$ (рис. 5, *б*) максимум відбитого поля спостерігається на частоті 2.97. В даному випадку на цій частоті «обернена» хвиля виродилась в неоднорідну, а друга поширювана хвиля досягає мінімальної величини. Незважаючи на поведінку другої поширюваної хвилі, при зміні α перша поширювана хвиля має мінімальне значення на частоті, на якій спостерігається максимум відбитого поля. Частота другого максимуму енергії відбитого поля зростає (в діапазоні 1 %) при збільшенні α, а добротність резонансу падає. Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в хвилі вищих порядків у пройденому полі. Зміна характеру поведінки другої поширюваної хвилі обумовлена зміною величини радіаційного демпфування при зміні α.

Висновки. В статті проведено аналіз зміни прозорості межі розділу в ступінчатому хвилеводі при зміні співвідношення товщин півшарів і зміні симетрії коливань. Встановлено, що при трансформації енергії падаючої хвилі на межі в ступінчатому хвилеводі існує два діапазони частот, на яких спостерігається максимум енергії відбитого поля. Частота, на якій спостерігаються локальні максимуми, залежить від симетрії коливань і від величини α. При антисиметричних коливаннях перший максимум має місце в околі критичної частоти для другої поширюваної хвилі і обумовлений її появою. При цьому величина енергії зменшується зі збільшенням α. Другий пік енергії відбитого поля спостерігається в області більш високих частот і обумовлений зростанням енергоємності першої відбитої поширюваної хвилі. При цьому як частота другого максимуму, так і величина відбитої енергії залежать від α. При симетричних коливаннях перший максимуму енергії відбитого поля спостерігається на частоті, коли, як в пройденому, так і у відбитому полі, існує тільки одна хвиля, що поширюється. Частота і величина енергії у відбитому полі залежать від α. Даний локальний максимум обумовлений резонансним характером першої неоднорідної хвилі. Відзначимо, що при симетричних коливаннях резонансний характер відбитого поля має місце на більш низьких частотах і має вищу добротність ніж при антисиметричних коливаннях. Другий максимум має місце на більш високих частотах і обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в нормальні хвилі вищих порядків, які поширюються. Як і при антисиметричних коливаннях, частота другого максимуму та його величина залежать від α.

Список літератури

1. *Shockley W.*, *Curran D. R.*, *Koneval D. J.* Trapped energy modes in quartz filter crystals // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1967. – Vol. 41. – №4. – P. 981 – 993.
2. *Khanikaev A. B.*, *Mousavi S. H.*, *Tse W.-K.*, *Kargarian M.*, *MacDonald A. H.*, *Shvets G.* Photonic topological insulators // Nature Materials. – 2012. – Vol. 12. – P. 233 – 239. DOI:10.1038/nmat3520.
3. *Yang Z.*, *Gao F.*, *Shi X.*, *Lin X.*, *Gao Z.*, *Chong Y.*, *Zhang B.* Topological acoustics // Physical Review Letters. – 20 March 2015. – Vol. 114. – Iss. 11. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.114301.
4. *Pagneux V.*, *Maurel A.* Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness // Published By : Royal Society. – 2006. – Vol. 462. – P. 1315 – 1339. DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1612.
5. *De Ponti J. M.*, *Iorio L.*, *Riva E.*, *Ardito R.*, *Braghin F.*, *Corigliano A.* Selective mode conversion and rainbow trapping via graded elastic waveguides // Physical Review Applied. – 15 September 2021. – Vol. 16. – Iss. 3. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.034028.
6. *De Ponti J. M.*, *Iorio L.*, *Ardito R.* Graded elastic meta-waveguides for rainbow reflection, trapping and mode conversion // EPJ Applied Metamaterials. – January 2022 9:6. DOI: 10.1051/epjam/2022004.
7. *Грінченко В. Т.*, *Городецька Н. С.* Метод суперпозиції стосовно граничних задач для неоднорідних хвилеводів // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Том 49. – № 1. – С. 20 – 30.
8. *Городецька Н. С.*, *Неділько О. О.* Трансформація енергії згинної хвилі на сходинці при різних механічних параметрах контактуючих середовищ // Наукоємні технології. Фізика. – 2015. – Том 25. – № 1. – С. 52 – 56. DOI: https://doi.org/10.18372/2310-5461.25.8229.

References (transliterated)

1. Shockley W., Curran D. R., Koneval D. J. Trapped energy modes in quartz filter crystals. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1967, vol. 41, no. 4, pp. 981–993.
2. Khanikaev A. B., Mousavi S. H., Tse W.-K., Kargarian M., MacDonald A. H., Shvets G. Photonic topological insulators. *Nature Materials*. 2012, vol. 12,pp. 233–239. DOI:10.1038/nmat3520.
3. Yang Z., Gao F., Shi X., Lin X., Gao Z., Chong Y., Zhang B. Topological acoustics. *Physical Review Letters*. 20 March 2015, vol. 114, iss. 11. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.114301.
4. Pagneux V., Maurel A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. *Published By: Royal Society*. 2006, vol. 462, pp. 1315–1339. DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1612.

5. De Ponti J. M., Iorio L., Riva E., Ardito R., Braghin F., Corigliano A. Selective mode conversion and rainbow trapping via graded elastic waveguides. *Physical Review Applied*. 15 September 2021, vol. 16, iss. 3. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.034028.

6. De Ponti J. M., Iorio L., Ardito R. Graded elastic meta-waveguides for rainbow reflection, trapping and mode conversion. *EPJ Applied Metamaterials*. January 2022 9:6. DOI: 10.1051/epjam/2022004.

7. Grinchenko V. T., Gorodets'ka N. S. Metod superpozytsiyi stosovno granychnykh zadach dlya neodnoridnykh khvylevodiv [The method of superposition in relation to boundary value problems for inhomogeneous waveguides]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya* [Mathematical methods and physical and mechanical fields]. 2006, vol. 49, no. 1, pp. 20–30.

8. Gorodets'ka N. S., Nedil'ko O. O. Transformatsiya energiyi zgynnoyi khvyli na skhodyntsi pry riznykh mekhanichnykh parametrakh kontaktuyuchykh seredovyssh [Transformation of bending wave energy on a step with different mechanical parameters of contacting media]. *Naukoyemki tekhnologiyi. Fizyka* [Scientific technologies. Physics]. 2015, vol. 25, no. 1, pp. 52–56. DOI: https://doi.org/10.18372/2310-5461.25.8229.

Надійшла (received) 07.03.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Городецька Наталія Сергіївна – доктор фізико-математичних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (093) 504-43-59; e-mail: nsgihm@gmail.com.

Городецкая Наталия Сергеевна – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Института гидромеханики НАН Украины, г. Киев; тел.: (093) 504-43-59; e-mail: nsgihm@ gmail.com.

Gorodetska Natalia Sergeevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Deputy director for scientific work of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (093) 504-43-59; e-mail: nsgihm@gmail.com.

Старовойт Інна Валеріївна – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу гідродинамічної акустики, Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ; тел.: (067) 749-52-66; e-mail: inna-mail@ ukr.net.

Старовойт Инна Валериевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела гидродинамической акустики, Институт гидромеханики НАН Украины, г. Киев; тел.: (067) 749-52-66; e-mail: inna-mail@ ukr.net.

Starovoit Inna Valerievna – PhD of Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow at the Department of Hydrodynamic acoustics of the Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv; tel.: (067) 749-52-66; e-mail: inna-mail@ ukr.net.

Щербак Тетяна Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ; тел.: (096) 936-78-79; e-mail: mirgtanya@gmail.com.

Щербак Татьяна Николаевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры высшей и прикладной математики Национальный университет биоресурсов и природоиспользования Украины, г. Киев; тел.: (096) 936-78-79; e-mail: mirgtanya@gmail.com.

Shcherbak Tatiana Nikolaevna – PhD of Physical and Mathematical Sciences, Assistant at the Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (096) 936-78-79; e-mail: mirgtanya@gmail.com.