

**Ю. П. ГЛУХОВ**

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ШАРУВАТОМУ НЕСТИСЛИВОМУ ПІВПРОСТОРІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Дана робота присвячена вивченню впливу захисного покриття, початкових напружень, механічних характеристик матеріалів, параметрів руху поверхневого навантаження на напружено-деформований стан пружної основи. Актуальність результатів дослідження пов'язана з можливістю їх використання при створенні якісно нових матеріалів, конструкцій і будівельних споруд. Розглядаються і порівнюються дві моделі шаруватого нестисливого півпростору: 1) пружна пластина на пружному півпросторі; 2) верхній шар (захисне покриття) моделюється зосередженими масами. Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю під певним кутом до поверхні півпростору. Розв'язок задачі отриманий із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур'є. Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків кратних та простих коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження. Для числового аналізу розглядався матеріал з потенціалом Бартенева – Хазановича. Розрахунки були проведені в рамках теорії скінченних початкових деформацій. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

**Ключові слова:** шаруватий нестисливий півпростір, початкові напруження, рухоме навантаження, метод інтегральних перетворень Фур'є, матеріал з потенціалом Бартенева – Хазановича, теорія скінченних початкових деформацій.

**Ю. П. ГЛУХОВ**

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТОМ НЕСЖИМАЕМОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ**

Данная работа посвящена изучению влияния защитного покрытия, начальных напряжений, механических характеристик материалов, параметров движения поверхностной нагрузки на напряженно-деформированное состояние упругого основания. Актуальность результатов исследования связана с возможностью их использования при создании качественно новых материалов, конструкций и строительных сооружений. Рассматриваются и сравниваются две модели слоистого несжимаемого полупространства: 1) упругая пластина на упругом полупространстве; 2) верхний слой (защитное покрытие) моделируется сосредоточенными массами. Сосредоточенная сила движется по свободной поверхности защитного слоя с постоянной скоростью под определенным углом к поверхности полупространства. Решение задачи получено с применением метода интегральных преобразований Фурье. Аналитические результаты приведены в общем виде для материалов с произвольным упругим потенциалом, для случаев неравных и равных корней характеристических уравнений, для разных условий сопряжения элементов слоистой среды и для любой скорости движения нагрузки. Для числового анализа рассматривался материал с потенциалом Бартенева – Хазановича. Расчеты были произведены в рамках теории конечных начальных деформаций. Исследовано влияние подвижной нагрузки, начальных напряжений механических параметров элементов слоистого основания на основные характеристики ее напряженно-деформированного состояния.

**Ключевые слова:** слоистое несжимаемое полупространство, начальные напряжения, подвижная нагрузка, метод интегральных преобразований Фурье, материал с потенциалом Бартенева – Хазановича, теория конечных начальных деформаций.

**YU. P. GLUKHOV**

### **MATHEMATICAL MODELLING OF DYNAMIC PROCESSES IN A LAYERED INCOMPRESSIBLE HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD**

This work is devoted to the study of the influence of the protective coating, initial stresses, mechanical characteristics of materials, movement parameters of the surface load on the stress-deformed state of the elastic base. The relevance of the research results is related to the possibility of their use in the creation of qualitatively new materials, structures and building structures. Two models of a layered incompressible half-space are considered and compared: 1) an elastic plate on an elastic half-space; 2) the top layer (protective coating) is modelled by concentrated masses. The concentrated force moves along the free surface of the protective layer at a constant speed at a certain angle to the surface of the half-space. The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transformations. Analytical results are given in a general form for materials with an arbitrary elastic potential, for cases of unequal and equal roots of characteristic equations, for various conditions of combination of elements of a layered medium and for any speed of movement of the load. The material with the Bartenev-Khazanovich potential was considered for numerical analysis. The calculations were carried out within the framework of the theory of finite initial deformations. The impact of the moving load, initial stresses and mechanical parameters of the elements of the layered base on the main characteristics of its stress-strain state was studied.

**Key words:** layered incompressible half-space, initial stresses, moving load, Fourier integral transform method, material with Bartenev – Khazanovich potential, theory of finite initial strains.

**Вступ.** Специфічні інженерні проблеми і закони внутрішнього розвитку фундаментальних досліджень вимагають послідовного і більш повного врахування *фізико-механічних характеристик матеріалів* та інших *власливостей*, притаманних реальним тілам. Дане дослідження спрямовано на вивчення *закономірностей хвильових процесів в пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів*: різних моделей шаруватого покриття, початкових напружень, різних швидкостей руху поверхневого навантаження. Розв'язок вказаних задач передбачає встановлення закономірностей впливу *початкових напружень, швидкості руху навантаження, геометричних та механічних характеристик покриття на напружено-деформований стан пружної основи*. Цілі та задачі дослідження є надзвичайно актуальними як з фундаментальної, так і з практичної точки зору для підвищення *надійності і довговічності* інженерних споруд.

В даній статті розглянута плоска задача про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний нестисливий півпростір з захисним покриттям та початковими напруженнями. Розглядаються і порівнюються дві моделі двошарового півпростору: 1) верхній шар (захисне покриття) моделюється зосередженими масами; 2) рух поверхневого шару описується системою рівнянь з теорії пластин.

Аналогічна задача для імпульсного поверхневого навантаження, що діє на пружний нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару, розглядалася в роботі [1]. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі при дії рухомого навантаження розглядалася в роботі [2] та інших.

**Постановка задач.** Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з захисним покриттям у вигляді тонкого поверхневого шару. Матеріал півпростору – *ізотропний нелінійно-пружний* в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку *ортотропного* матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули:

$$u_j^0 = \delta_{mj} (\lambda_m - 1) x_m; \quad m, j = \overline{1,3},$$

де  $\lambda_j$  – видовження ( $\lambda_j = \text{const}; j = \overline{1,3}$ );  $\delta_{mj}$  – символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень:

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \quad \sigma_{22}^0 \neq 0; \quad \sigma_{33}^0 \neq 0.$$

Шар і півпростір віднесені до *декартової системи координат*  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з *лагранжівими координатами*  $(x_1, x_2, x_3)$ , що вводяться в природному стані, співвідношеннями  $\xi_j = \lambda_j x_j$ .

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина  $\xi_1 O \xi_3$  співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область  $-h \leq \xi_2 \leq 0$ , а півпростір – область  $\xi_2 + h \leq 0$ .

На вільну поверхню шару ( $\xi_2 = 0$ ) діє лінійне навантаження  $P$ , що рухається з постійною швидкістю  $v$  під кутом  $\alpha$  протягом великого проміжку часу і не залежить від координати  $\xi_3$ . Відносно систем координат, пов'язаних з цим навантаженням, існує плоский деформований усталений стан

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_3 \equiv 0; \quad p = p(\xi_1, \xi_2, t).$$

Скалярна функція  $p$  пов'язана з гідростатичним тиском.

Визначимо координати рухомої системи наступним чином:

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (1)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати *лінеаризовану теорію пружності* для тіл з початковими напруженнями [3] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

При вищезазначених припущеннях з урахуванням загальних розв'язків плоских динамічних задач лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями рівняння усталеного руху нестисливого півпростору в рухомій системі координат (1) можна записати у вигляді [3]:

$$\left( \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left( \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Функції  $\eta_j$  в рівняннях руху (2) визначаються із рівнянь:

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (3)$$

де

$$2A\tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2 \tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2 (\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2) - 2\tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{2121});$$

$$A_1 \tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2 (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2). \quad (4)$$

В формулах (4)  $\rho$  – щільність матеріалу півпростору в природному стані,  $q_i, \tilde{\kappa}$  – параметри, що характеризують матеріал півпростору [1].

Значення функцій  $\eta_1^2(v)$  і  $\eta_2^2(v)$  визначають вид рівнянь руху (3) і, відповідно, вибір форми їх розв'язку.

Вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху (3), досліджений в статті [4]. В роботі [4] дана оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для нестисливих матеріалів із *потенціалом типу Бартенєва – Хазановича* виконані чисельні дослідження.

Представлення загальних розв'язків рівнянь руху для нестисливих тіл мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)}; \\ u_2 &= -\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)}; \\ p &= \tilde{q}_{11}^{-2} \left\{ \left[ \tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\kappa}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2} + \\ &+ \tilde{q}_{22}^{-2} \left\{ (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho} v^2) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \left[ \tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right] \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\tilde{\beta}_{12}^{(2)} = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{21}^{(2)} = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{11}^{(2)} = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} = 0.$$

**Модель 1 (зосереджені маси).** Шар товщиною  $h$  моделюється зосередженими масами з густиною  $\rho_1$ . Таким чином, нормальна і дотична складові навантаження будуть  $(P \sin \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1) \delta(y_1)$  і  $(P \cos \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2) \delta(y_1)$ . Тут  $\delta(y_1)$  – функція Дірака.

**Модель 2 (пластина).** Рух поверхневого шару товщиною  $2h$  моделюється системою рівнянь із теорії пластин, що враховують вплив інерції обертання та поперечного зсуву. Для пластини, що знаходиться під дією поперечних і тангенціальних поверхневих сил, відповідні рівняння приведені в роботі [5]. В системі координат  $(y_1, y_2)$  рівняння для пластини можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} 2h \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \tau &= P_1; \\ 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q &= P_2; \\ \frac{2h^2}{3} \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \delta_0 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В рівняннях (6)  $G_1$ ,  $\nu_1$  і  $\rho_1$  є, відповідно, модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу пластини;  $u$  і  $w$  – переміщення середньої поверхні пластини ( $y_2 = 0$ ), а  $\delta_0$  – константа, яка приймає значення 1 або 0 в залежності від врахування чи нехтування інерцією обертання пластини;  $\varphi$  – кут повороту поперечного зрізу пластини;  $\kappa$  – коефіцієнт Тимошенка;  $q$  і  $\tau$  – відповідно нормальні і дотичні напруження, що діють на поверхні розділу пластини і півпростору;  $P_1$  і  $P_2$  – дотичні і нормальні складові навантаження на вільній поверхні пластини.

Вивчається два варіанти контакту між шаром і основою: *жорсткий* і *нежорсткий*. Межа розділу захисного шару і півпростору:  $y_2 = -h$ .

Умови контакту в загальному вигляді при  $y_2 = -h$  можна записати так:

для моделі 1 (зосереджені маси):

$$\begin{aligned} (2\delta_1 - 1) \tilde{Q}_{21} &= \delta_1 (P_1 + \rho_1 h \ddot{u}_1) \delta(y_1); \\ \tilde{Q}_{22} &= (P_2 + \rho_1 h \ddot{u}_2) \delta(y_1); \end{aligned} \quad (7)$$

для моделі 2 (пластина) [2]:

$$\delta_1 \theta_1 \left( \frac{d^2 u_1}{dy_1^2} - h \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} \right) - \tilde{Q}_{21} = \delta_1 P_1;$$

$$\begin{aligned} \theta_3 \frac{d^2 u_2}{dy_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{d\varphi}{dy_1} - \tilde{Q}_{22} &= P_2; \\ \theta_2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + 2\kappa G_1 \left( \frac{du_2}{dy_1} - \varphi \right) - \delta_1 \tilde{Q}_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут мають місце позначення

$$\theta_1 = 2h \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_2 = \frac{2h^2}{3} \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \delta_0 \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_3 = 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2).$$

Параметр  $\delta_1$  дорівнює 1 при жорсткому контакті і 0 – при нежорсткому контакті.

Напруження і швидкості переміщень в шаруватому півпросторі через функції  $\chi^{(j)}$  визначаються за формулами [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \left( \tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left( \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \left( \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \left[ \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi^{(1)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left( \tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(2)}}{dy_1} \right]; \\ \dot{u}_2 &= v \left[ \tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left( \tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(1)}}{dy_1} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= (\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} - \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11}) + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11} - \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} [\tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} = -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} &= -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким чином, задачі, що розглядаються, зводяться до визначення функцій  $\chi^{(j)}$  із граничних умов (7) або (8). При цьому потрібно використовувати формули (9) при позначеннях (10).

**Розв'язок задачі в області зображень Фур'є.** Розв'язок задач отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній  $y_1$  і відповідної формули зворотного перетворення.

В просторі зображень Фур'є розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \chi^{(j)F} &= \tilde{\alpha}_0^{-1} [1 - \delta_{j2} (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2})] \left\{ C_1^{(j)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)} + [1 - \delta_{\mu_1 \mu_2} + \delta_{\mu_1 \mu_2} k_2 k \eta_2 (y_2 + h)] C_2^{(j)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} \right\}; \\ \delta_{j2} &= \begin{cases} 0, & j = 1; \\ 1, & j = 2; \end{cases} \quad \delta_{\mu_1 \mu_2} = \begin{cases} 1, & \eta_1 = \eta_2; \\ 0, & \eta_1 \neq \eta_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

де  $C_m^{(j)}$  ( $m = 1, 2$ ) – сталі інтегрування.

В (11)  $k_j \equiv \sigma = |k|/k$ , якщо  $\eta_j^2 > 0$ ,  $k_j = i$ , якщо  $\eta_j^2 < 0$ . В випадку, коли  $\eta_j$  приймає комплексні значення, то в представленні розв'язку (11) необхідно прийняти  $k_j = 1$ ;  $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$ . Для скінченності значень функцій  $\chi^{(j)}$  необхідно, щоб  $\operatorname{Re} \eta_j > 0$ .

Підставивши трансформовані вирази (9) в трансформовані граничні умови (7) і (8) з врахуванням (11), отримаємо відповідно системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування  $C_m^{(j)}$ . Для моделі 1 (зосереджені маси) така система має другий порядок, а для моделі 2 (пластина) – третій порядок.

Скориставшись розв'язком відповідних систем алгебраїчних рівнянь і зворотнім перетворенням Фур'є, мо-

жна записати розв'язок задачі. Для випадку різних коренів рівняння (3) оригінали напружень і швидкостей переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( k_1 \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left( k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \tilde{\Delta}^{-1} \left( \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_2^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk.\end{aligned}\quad (12)$$

Тут введені наступні позначення:

$$\gamma_1^{(j)} = \eta_j; \quad \gamma_2^{(j)} = \beta_1 - \beta_2 k_j^2 \eta_j^2; \quad \gamma_{nm}^{(j)} = \eta_j \left( \alpha_{nm}^{(1)} - \alpha_{nm}^{(2)} k_j^2 \eta_j^2 \right); \quad \gamma_{nm}^{(j)} = \alpha_{nm}^{(1)} - \alpha_{12}^{(2)} k_j^2 \eta_j^2; \quad j, n, m = 1, 2; \quad n \neq m;$$

для моделі 1 (зосереджені маси):

$$\begin{aligned}U_n &= (-1)^n \left\{ i \delta_1 P_1 \left( k_m \tilde{\gamma}_{22}^{(m)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(m)} \right) + P_2 \left[ (2\delta_1 - 1) \tilde{\gamma}_{21}^{(m)} + \delta_1 \rho_1 h k v^2 k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} \right] \right\}; \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m; \\ \Delta &= (2\delta_1 - 1) \left( k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) + \rho_0 h k v^2 \left[ \delta_1 k_2 k_1 \left( \gamma_{22}^{(1)} \gamma_1^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)} \gamma_1^{(1)} \right) + (2\delta_1 - 1) \left( \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \right] + \\ &\quad + \delta_1 \rho_0^2 h^2 k^2 v^4 \left( k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} - k_1 \gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} \right);\end{aligned}$$

для моделі 2 (пластина):

$$\begin{aligned}U_n &= (-1)^n \left( i \delta_1 P_1^F U_1^{(m)} + P_2^F U_2^{(m)} \right); \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m; \\ U_1^{(n)} &= k^3 h^3 \theta_2 \theta_3 \gamma_2^{(n)} + k^2 h^2 \theta_2 k_1 \gamma_{22}^{(n)} + 2khk\eta_0 \left[ (\theta_3 - 2\kappa\eta_0) \gamma_2^{(n)} + \delta_1 \gamma_{21}^{(n)} \right] + 2\kappa\eta_0 k_1 \gamma_{22}^{(n)}; \\ U_2^{(n)} &= \delta_1 k^3 h^3 \theta_2 \theta_1 k_1 \gamma_1^{(n)} + k^2 h^2 \left[ (\theta_2 + \delta_1 \theta_1) \gamma_{21}^{(n)} - 2\kappa\eta_0 \delta_1 \theta_1 \gamma_2^{(n)} \right] + 2\delta_1 khk\eta_0 \theta_1 k_1 \gamma_1^{(n)} + 2\kappa\eta_0 \gamma_{21}^{(n)}; \\ \Delta &= \delta_1 k^4 h^4 \theta_1 \theta_2 \theta_3 \left( k_1 \gamma_2^{(2)} \gamma_1^{(1)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} \right) + k^3 h^3 \left[ \delta_1 \theta_1 \theta_2 k_1 k_2 \left( \gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) - \theta_3 (\delta_1 \theta_1 + \theta_2) \left( \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \right] + \\ &\quad + k^2 h^2 \left\{ 2\kappa\eta_0 \delta_1 \theta_1 \left[ \left( k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_2^{(1)} \right) + \left( k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) + (\theta_3 - 2\kappa\eta_0) \left( k_1 \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - k_2 \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - (\delta_1 \theta_1 + \theta_2) \left( k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \right\} + 2khk\eta_0 \left[ (\theta_3 - 2\kappa\eta_0) \left( \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) + \delta_1 \theta_1 k_1 k_2 \left( \gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) \right] - \\ &\quad - 2\kappa\eta_0 \left( k_1 \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - k_2 \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right).\end{aligned}$$

Таким чином, напружено-деформований стан попередньо напруженого нестисливого півпростору з тонким захисним покриттям визначається за формулами (12) і залежить від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що досліджується.

**Результати чисельних досліджень.** Для розрахунку характеристик напружено-деформованого стану півпростору скористаємося формулами (12). Методика обчислення інтегралів (12) приведена в роботі [6]. Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом типу Бартенева – Хазановича [3]. Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє. Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження.

Для епюр, зображених на рис. 1 – 4, розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів: модель 1 (зосереджені маси) (рис. 1, 3)  $\delta_1 = 1$ ;  $\rho/\rho_1 = 0,25$ ;  $\alpha = \pi/2$ ; модель 2 (пластини) (рис. 2, 4)  $\delta_1 = 1$ ;  $\delta_0 = 1$ ;  $\rho/\rho_1 = 0,5$ ;  $\mu/G_1 = 0,5$ ;  $\kappa = 0,845$ ;  $\alpha = \pi/2$ .

Досліджувались швидкості навантаження в діапазонах  $v < c_1$  і  $v > c_1$ . Тут  $c_1$  – швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі  $Oy_1$  в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями. У випадку, коли  $v < c_1$  розглядалися тільки докритичні швидкості навантаження [2].

На рис. 1 і 2 показано розподіл узагальненого напруження  $\tilde{Q}_{22}$  в півпросторі при  $y_2 = -2h/\lambda_2$  для  $v^2 = 0,1c_0^2$ . Тут  $c_0^2 = \mu/\rho$ . Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1 – 5 відповідають значенням  $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 1,1$  і  $\lambda_1 = 1,2$ .

Зміна  $\tilde{Q}_{22}$  в півпросторі при  $v > c_1$  в залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 3 і 4. Розрахунки в цьому випадку проводилися при  $y_2 = -2h/\lambda_2$ . Швидкість навантаження становила  $v^2 = 2c_0^2$ . Умовні позначення на рис. 3 і 4 такі ж, як і на рис. 1 і 2.

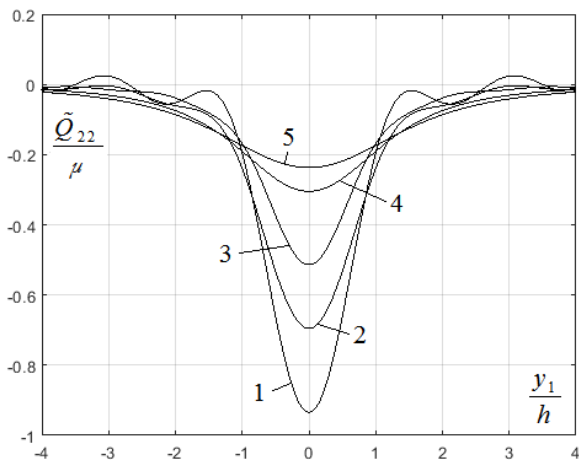


Рис. 1 – Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$ .  
Дозвукова швидкість. Модель 1(зосереджені маси).

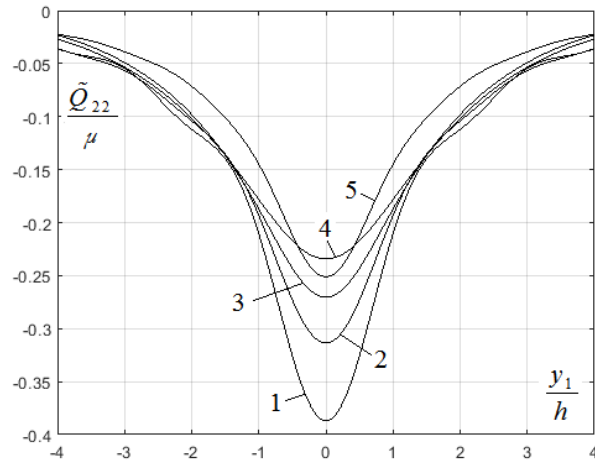


Рис. 2 – Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$ .  
Дозвукова швидкість. Модель 2(пластина).

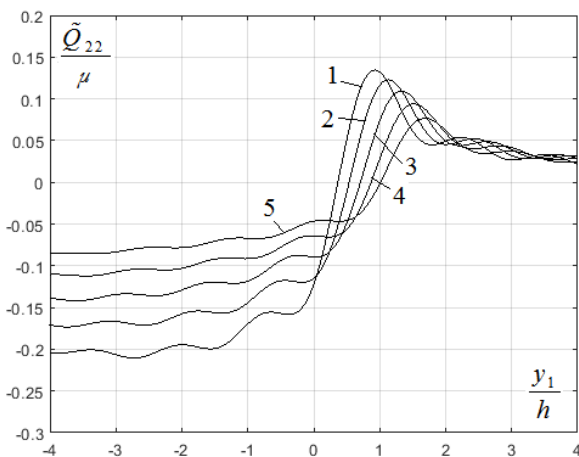


Рис. 3 – Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$ .  
Надзвукова швидкість. Модель 1(зосереджені маси).

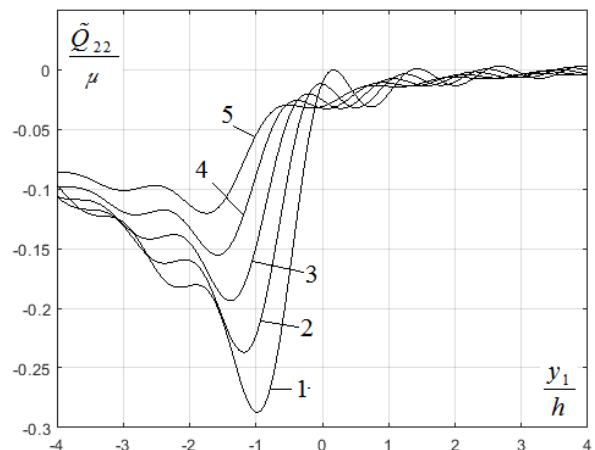


Рис. 4 – Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$ .  
Надзвукова швидкість. Модель 2(пластина).

При заданих  $\lambda_1$  темп росту значень величин, що досліджується, при стисненні більше, ніж при розтягуванні. Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стисненні, ніж при розтягуванні. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки. Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень значно посилюється. Особливо це характерно для попередньо стиснутого матеріалу.

При дозвукових швидкостях руху амплітуди параметрів, що досліджувались, значно більші для першої моделі півпростору (зосереджені маси). При надзвукових швидкостях така відмінність є незначною.

**Висновки.** Таким чином, в даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями приведено розв'язок плоских динамічних задач про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений півпростір з тонким захисним покриттям. Вивчено вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на розподіл швидкостей переміщень і напружень в нестисливій основі з початковими напруженнями. Отримані оцінки можуть бути використані в прикладних наукових дослідженнях, що відповідають сучасним вимогам техніки і будівництва.

## Список літератури

1. Кошман В. П. Об одной задаче динамики несжимаемой полуплоскости с начальными деформациями // Прикладная механика. – 1980. – Вып. 14. – № 9. – С. 98 – 103.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Германия, 2015. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing. – 468 с.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев : «А.С.К», 2004. – 672 с.
4. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – Vol. 57. – N. 1. – P. 43 – 52. DOI: 10.1007/s10778-021-01061-x.
5. Achenbach J. D., Keshawa S. P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. 34. – № 4. – P. 183 – 189.
6. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space) // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970. – Vol. 37. – № 1. – P. 148 – 159.

## References (transliterated)

1. Koshman V. P. Ob odnoy zadache dinamiki neszhimayemy poluploskosti s nachal'nymi deformatsiyami [On one problem of dynamics of an incompressible half-plane with initial deformations]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1980, vol. 14, no. 9, pp. 98–103.
2. Guz' A. N., Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. *Smeshannyye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami* [Mixed tasks for an elastic ground with initial stresses]. Germany, 2015, Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing. 468 p.
3. Guz' A. N. *Uprugie volny v telakh s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami* [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses]. Kiev, «А.С.К» Publ., 2004. 672 p.
4. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2021, vol. 57, no. 1, pp. 43–52. DOI: 10.1007/s10778-021-01061-x.
5. Achenbach J. D., Keshawa S. P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1967, vol. 34, no. 4, pp. 183–189.
6. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1970, vol. 37, no. 1, pp. 148–159.

Надійшла (received) 17.03.2023

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Глухов Юрій Петрович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу динаміки і стійкості суцільних середовищ, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ; тел.: (067) 559-77-46; e-mail: glukhov.uriy@gmail.com.

**Глухов Юрий Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела динамики и устойчивости сплошных сред, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев; тел.: (067) 559-77-46; e-mail: glukhov.uriy@gmail.com.

**Glukhov Yuriy Petrovich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Senior Research Fellow at the Department of Dynamics and Stability Continuum, S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev; tel.: (067) 559-77-46; e-mail: glukhov.uriy@gmail.com.