

П. О. ВАСІН

АЛГОРИТМИ КОНТРОЛЮ УМОВИ НЕПРОНИКНОСТІ ДЛЯ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ

Представлено систему алгоритмів для визначення положення маркованої частинки в межах смуги межового елемента з подальшим корегуванням її положення (з врахуванням вимог математичної моделі задачі). Приведено алгоритм для знаходження найближчої точки на межовому контурі, на відстані не більше заданої величини, для шуканої точки. Розглянуто окремі випадки, які виникають при взаємодії різних межових елементів чи при зміні положення маркованої частинки через межовий контур на відстань більшу в два рази за товщину межового елемента. Згідно логіки побудови наведених алгоритмів, вони мають кращу оцінку швидкості, ніж алгоритм повного перебору. Обмеження на пам'ять існуючих комп'ютерів потребує підвищення ефективності алгоритмів обробки даних для формування та збереження розріджених матриць. Покращення оцінки використаної пам'яті виникає за рахунок збільшення оцінки швидкості внаслідок збільшення кількості операцій, необхідних для пошуку потрібного елемента в матриці. Приведено декілька різних методів для покращення оцінок швидкості виконання. Систему алгоритмів контролю непроницності при взаємодії непрониких рухомих вільних меж із нерухомими непроникими межами призначено для удосконалення дискретизованих математичних моделей відривних аеродинамічних процесів в області із границею складної геометрії.

Ключові слова: маркована частинка в межах смуги межового елемента, межовий контур, метод дискретних особливостей, алгоритми, контроль непроницності, розріджені матриці.

П. А. ВАСИН

АЛГОРИТМЫ КОНТРОЛЯ УСЛОВИЯ НЕПРОНИКНОВЕНИЯ ДЛЯ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Представлена система алгоритмов для определения положения маркированной частицы в пределах полосы граничного элемента с последующей корректировкой ее положения (с учетом требований математической модели задачи). Приведен алгоритм для нахождения ближайшей точки на граничном контуре, на расстоянии не больше заданной величины, для искомой точки. Рассмотрены отдельные случаи, возникающие при взаимодействии различных граничных элементов или при изменении положения маркированной частицы через граничный контур на расстояние большее в два раза толщины граничного элемента. Согласно логике построения приведенных алгоритмов, они имеют лучшую оценку скорости, чем алгоритм полного перебора. Ограничение на память существующих компьютеров требует повышения эффективности алгоритмов обработки данных для формирования и сохранения разреженных матриц. Улучшение оценки использованной памяти возникает за счет увеличения оценки скорости вследствие увеличения количества операций, необходимых для поиска нужного элемента в матрице. Приведены несколько различных методов для улучшения оценки скорости выполнения. Система алгоритмов контроля непроницаемости при взаимодействии непроницаемых подвижных свободных границ с неподвижными непроницаемыми границами предназначена для усовершенствования дискретизированных математических моделей отрывных аэродинамических процессов в области с границей сложной геометрии.

Ключевые слова: маркированная частица в пределах полосы граничного элемента, граничный контур, метод дискретных особенностей, алгоритмы, контроль непроницновения, разреженные матрицы.

P. O. VASIN

ALGORITHMS FOR CONTROL ENFORCEMENT OF THE IMPERMEABILITY CONDITION FOR THE METHOD OF DISCRETE SINGULARITIES

A system of algorithms is presented for determining the position of the marked particle within the band of the boundary element, with subsequent correction of its position (taking into account the requirements of the mathematical model of the problem). The algorithm for finding the closest point on the boundary contour, at a distance of no more than a given value, for the sought point is presented. Individual cases arising from the interaction of different boundary elements or when the position of a marked particle changes through the boundary contour by a distance twice the thickness of the boundary element is considered. According to the logic of the construction of the above algorithms, the above algorithms have a better speed estimate than the full search algorithm. The memory limitation of existing computers requires an increase in the efficiency of data processing algorithms for the formation and preservation of sparse matrices. The improvement in the estimate of amount of used memory is due to the increase in the speed estimate, which is in its turn due to the increase in the number of operations required to find the desired element in the matrix. A number of different methods aimed at improving the performance estimates are presented. The system of algorithms for impermeability control during the interaction of impermeable moving free boundaries with impermeable fixed boundaries is intended for the improvement of discretized mathematical models of detachment aerodynamic processes in region with a boundary of complex geometry.

Key words: labeled particle within the band of the boundary element, boundary contour, method of discrete singularities, algorithms, control of the impermeability, sparse matrix.

Вступ. Для вирішення багатьох задач *гідродинаміки* [1, 2, 4, 6] застосовується *метод дискретних особливостей (МДО)*, який є чисельно-аналітичним методом для розв'язку *сингулярних інтегральних рівнянь*. Побудова МДО базується на *дискретизації інтегральних представлень функцій та теорії потенціалу*.

Характеристики течії визначаються дискретизованою моделлю, параметри якої знаходяться із крайових умов на межі області. Але одна із властивостей даного методу полягає у тому, що умови непроницності, які визначаються інтенсивністю дискретних особливостей (*вихорів*), строго виконуються тільки в *точках колокації* [1, 3 – 5] та порушуються в усіх інших точках межових елементів, як видно із рис. 1.

Для стаціонарних задач така властивість методу призводить тільки до *локальної похибки*, масштаб впливу якої є порівняльним з кроком сітки. Але для нестационарних задач з рухомими межами або з рухом частинок середовища, який є суттєво важливим для визначення динаміки процесу (моделі для яких будуються виходячи із

підходу Лагранжа), дана властивість методу здатна утворювати значні похибки, що призводять до нефізичних результатів, (наприклад – самоперетину рухомих меж області) якщо не контролювати виконання умови непроникності на усьому контурі межі.

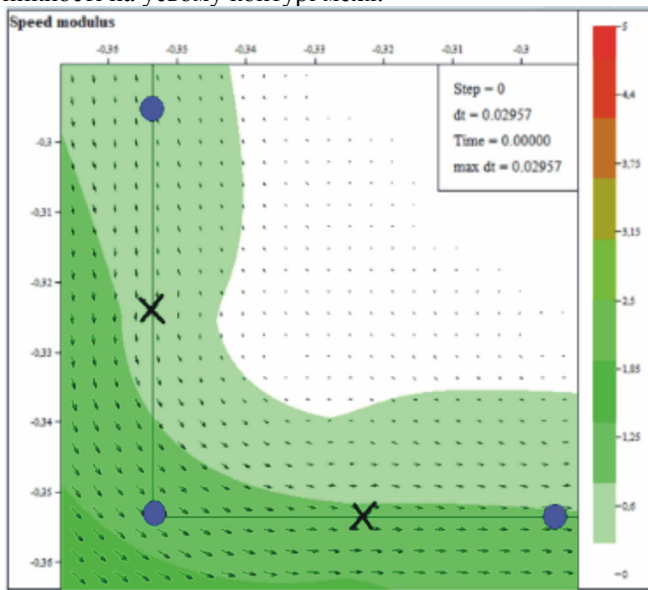


Рис. 1 – Приклад межового елемента.

Метою роботи є побудова системи алгоритмів для контролю та примусового виконання умови непроникності уздовж усього контуру межі для довільної системи рухомих маркованих частинок.

Властивості МДО. У двовимірному просторі, при дискретизації задачі (за технологією МДО), межа області течії (кусково-гладкий контур) замінюється *скінченною системою межових елементів* (зв'язаних дуг або відрізків), що надає можливість створення системи алгоритмів, застосовних до межі довільної геометрії. Оскільки умова непроникності в МДО виконується тільки в заданих точках (в точках колокації), але в загальному випадку не виконується у інших точках уздовж контуру, (що є властивістю МДО та впливає тільки на утворення локальної похибки задачі), при моделюванні саме нестационарних процесів виникає необхідність забезпечення умови непроникності хоча б для системи маркованих частинок (за методологією Лагранжа) уздовж усього контуру, який складається із системи межових елементів.

Особливості побудови межового елемента. Для функціонування алгоритму необхідно, щоб кожен межовий елемент (відрізок, дужка) було представлено межовим елементом скінченної товщини – відрізком зі смугою шириною 2δ , де δ – найменша відстань між вихорами на відрізку (рис. 2, рис. 3). При попаданні в дану смугу, положення маркованої частинки (наприклад, рухомий вихор) підлягає корегуванню згідно алгоритму (**Алгоритм корегування положення маркованої частинки**).

Визначення *методом перебору* межового елемента (загальна межа складається із n межових елементів) для заданої маркованої частинки буде мати $O(n)$ елементарних операцій. При такому підході, загальна кількість операцій для корегування положення всіх m маркованих частинок (наприклад, m вихорів, що визначають рухому межу) на одному часовому шарі складає $O(nm)$ елементарних операцій, де n – кількість межових елементів, m – кількість маркованих частинок (рухомих вихорів).

Для зменшення часу (кількості обчислювальних операцій) з контролю взаємного розташування межових елементів та маркованих частинок, пропонується **система алгоритмів** та способів корегування положення маркованих частинок (вільних вихорів):

- **Алгоритм (1)** визначення положення маркованих частинок в межах смуги скінченної товщини для межового елемента;
- **Алгоритм (2)** для знаходження найближчої точки на відстані, не більшій за d ;
- **Алгоритм (3)** визначення положення маркованої частинки в межах смуги межового елемента;
- **Алгоритм (4)** корегування положення маркованої частинки:
 1. пружне віддзеркалення (рис. 9),
 2. витиснення на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару (рис. 10), витиснення віддзеркаленої маркованої частинки на відстань що дорівнює ширині контрольного шару (рис. 11).

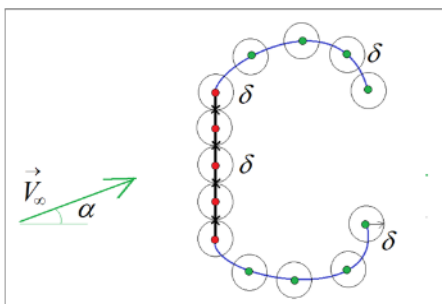


Рис. 2 – Розташування вихорів на межовому контурі.

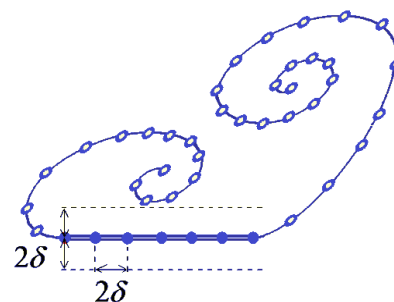


Рис. 3 – Розташування маркованих частинок відносно межового елемента.

Алгоритм (1) визначення положення маркованих частинок в межах смуги скінченної товщини. Нехай

$W = \{w_i(x_{0i}, y_{0i})\}$ – позиція дискретних вихрів, які знаходяться на контурі (рис. 4). $E = \{\overline{w_i w_j} \mid w_i, w_j \in W\}$ – множина пар дискретних вихрів, які з'єднані ребром. Множина $Z = \{z_j(x_j, y_j)\}$ – координати маркованих частинок, для яких ми перевіряємо умови їх розташування відносно положення смуги межового елементу.

Введемо позначення: $\overline{w} = \{w_j \mid w_j \in W, \overline{w_j w} \in E\}$, де $w \in W$ та \overline{ab} – відрізок, який сполучає дві точки a та b (рис. 5). Відстань від точки $z \in Z$ до відрізка \overline{ab} будемо вважати

$$\rho(z, \overline{ab}) = \min_{\omega \in \overline{ab}} \omega - z_2. \tag{1}$$

Визначення мінімального значення буде залежати від розташування маркованої точки по відношенню до відрізка \overline{ab} .

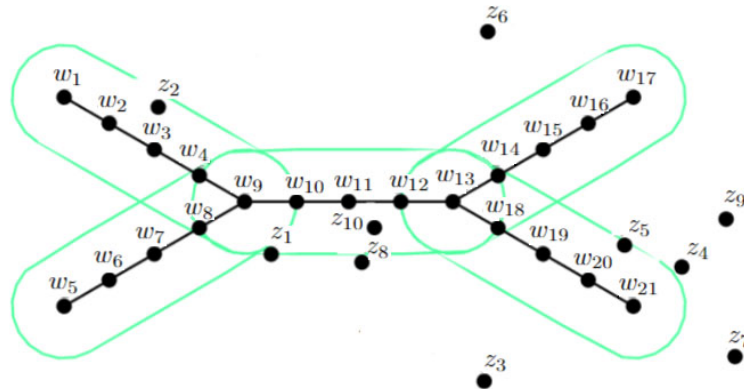


Рис. 4 – Приклад контуру та маркованих частинок.

Як можна побачити на рис. 5, при потрапленні точки z в зону I найкоротшою відстанню буде відстань від точки z до точки a . Відповідно для зони II найкоротшою буде відстань від точки z до лінії \overline{ab} , а для зони III – від z до b .

Потраплення точки z у відповідну зону визначається за допомогою скалярного добутку:

$$z \in \begin{cases} \text{I,} & \text{при } \overline{za} \cdot \overline{ab} \geq 0; \\ \text{II,} & \text{при } \overline{za} \cdot \overline{ab} < 0 \ \& \ \overline{zb} \cdot \overline{ba} < 0; \\ \text{III,} & \text{при } \overline{zb} \cdot \overline{ba} \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

де \overline{ab} – вектор, що має початок в точці a і кінець в точці b . У свою чергу $\overline{za} \cdot \overline{ab}$ – скалярний добуток двох відповідних векторів.

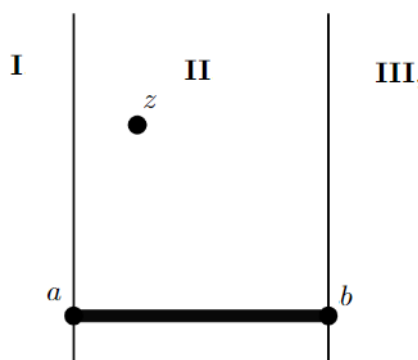


Рис. 5 – Визначення зон для відрізка \overline{ab} .

У випадку, наведеному на рис. 5, для (2) маємо:

$$\rho(z, \overline{ab}) = \begin{cases} a - z_2, & \overline{za} \cdot \overline{ab} \geq 0; \\ |h(z, \overline{ab})|, & \overline{za} \cdot \overline{ab} < 0 \ \& \ \overline{zb} \cdot \overline{ba} < 0; \\ b - z_2, & \overline{zb} \cdot \overline{ba} \geq 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\vec{n} = \frac{(b_2 - a_2, a_1 - b_1)}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}; \tag{4}$$

$$h(z, \overline{ab}) = \vec{n} \cdot \vec{az} = \frac{(b_2 - a_2)(z_1 - a_1) - (b_1 - a_1)(z_2 - a_2)}{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}, \tag{5}$$

де h – величина, модуль якої є відстань від точки z до лінії \overline{ab} , а знак визначає бік розташування точки z , відносно лінії \overline{ab} ; \vec{n} –

нормований перпендикуляр до вектору \overline{ab} .

Означення достатніх та необхідних умов знаходження точки z в зоні смуги межового елементу:

Визначення 1 (Достатні умови). Точка z знаходиться у межах смуги межового елементу розміру δ , якщо виконується умова:

$$\exists w \in W, \exists \overline{w_j w} \text{ таке, що } \rho(z, \overline{w_j w}) < \delta.$$

Визначення 2 (Необхідні умови). Якщо точка z знаходиться у межах смуги межового елементу розміру δ ,

то:

$$\exists w \in W \text{ таке, що } w - p_2 \leq d .$$

За величину d береться

$$d = \max_{z \in \{z' | \exists w \in W \exists \bar{w} \in \bar{w} \rho(z', \bar{w}_j) \leq \delta\}} \min_{w \in W} z - w_2 = \sqrt{(\delta^2 + \Delta^2) / 4} ,$$

де $\delta = \min_{w \in W, w_j \in \bar{w}} w_j - w_2$ та $\Delta = \max_{w \in W, w_j \in \bar{w}} w_j - w_2$ – відповідно найменша та найбільша довжина ребра у контурі. Вважаємо, що мінімальною d є величина, така, що для будь-якої маркованої точки z , що задовольняє достатні умови (**Визначення 1**), відстань до найближчої точки контуру $w_i \in W$ буде не більшою за d .

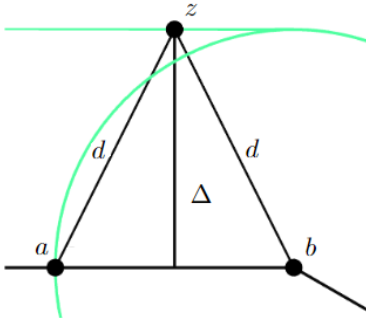


Рис. 6 – Геометрична інтерпретація величини d .

Розглянемо допоміжну задачу – задачу про знаходження найближчої точки для заданого масиву точок.

Будемо розшукувати марковану точку, яка задовольняє умові розташування на відстані не більшій за d від заданого положення.

Алгоритм (2) знаходження найближчої точки (для відстані, не більшій за d). Нехай $z(z_1, z_2)$ – точка, для якої шукається найближча точка; $W = \{w_i(x_i, y_i)\}$ – заданий масив для пошуку та d – задане обмеження для пошуку. Нехай $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ – відповідають мінімальним та максимальним координатам елементів із множини W .

Вводиться матриця M розмірності $\lceil (x_{\max} - x_{\min}) / d \rceil \times \lceil (y_{\max} - y_{\min}) / d \rceil$, де кожен елемент матриці є множиною точок. Кожен елемент $w_i \in W$ буде належати до множини елементу матриці M таким чином:

$$w_i \in M \left[\left[(x_i - x_{\min}) / d \right], \left[(y_i - y_{\min}) / d \right] \right],$$

де $M[i, j] = m_{ij}$ – елемент матриці M , а $\lceil x \rceil$ – операція взяття цілої частини x з округленням вгору ($\lceil 3.14 \rceil = 4$).

За допомогою створеної матриці для отримання шуканої точки знайдемо серед множини

$$M \left[\left[(p_1 - x_{\min}) / d \pm 1 \right], \left[(p_2 - y_{\min}) / d \pm 1 \right] \right]$$

найближчу до z точку. Якщо індексація виходить за розмірність матриці, то нехай операція $M[i, j]$ повертає \emptyset .

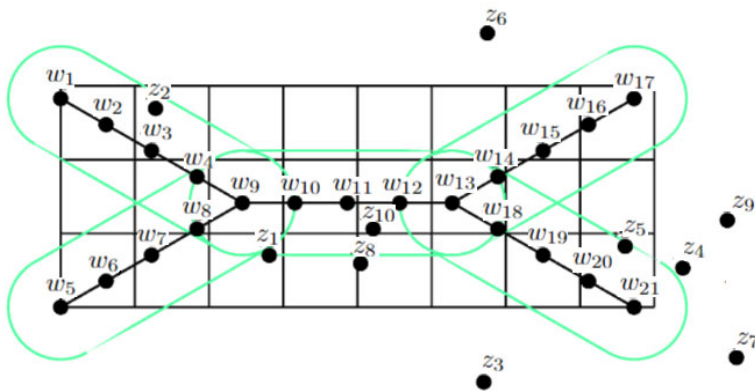


Рис. 7 – Приклад структурної побудови матриці M .

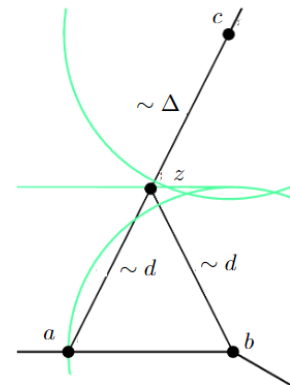


Рис. 8 – Приклад випадку виникнення взаємодії різних межових елементів.

Алгоритм (3) визначення положення маркованої частинки в межах смуги межового елемента. Для попередньої перевірки використовується Алгоритм (2).

При умові, що такої $w \in W$ не існує, то положення маркової точки z корекції не потребує. У іншому випадку, для знайденої за Алгоритмом (2) точки $w \in W$, розглядаються точки $w_j \in \bar{w}$, з якими вона з'єднана.

При умові $\exists w_j \in \bar{w}$ таке, що $\rho(z, w_j) \leq \delta$ (**Визначення 1**), положення точки z потребує корекції.

Розглядаються окремі випадки:

1. У випадку (рис. 8) точка z знаходиться в межах смуги ab , але найближчою точкою для неї буде c . В даному випадку алгоритм визначає межі смуги (до якої може належати маркована точка c) і оскільки точка z знаходиться поза смугою, то її положення корегуванню не підлягає. Проблеми можна позбавитись збільшенням

кількості точок на межовому контурі, що зменшує ширину межового елемента (δ).

2. Випадок, коли $z \rightarrow z'$, $z - z'_2 > 2d$. Тобто, на наступній ітерації положення маркованої частинки змінилося на відстань більше ніж $2d$, але точки знаходяться по різні боки від межового елемента. Якщо для точок z та z' не виконуються необхідні умови (**Визначення 2**), то координати точки z' не потребують корекції за алгоритмом, оскільки вона не знаходиться в межах смуги межового елемента, хоча і перетнула його.

Оскільки, при моделюванні динамічних процесів із застосуванням МДО існує необхідність контролю виконання умови непроникності межі області, проводиться перевірка для усіх маркованих точок, які знаходяться на відрізку $\overline{zz'}$, на виявлення ознаки знаходження в межах межового елемента. Перевіряються усі точки, що знаходяться на відстані $2d$. Якщо хоч одна точка знаходиться в непроникній межі, то точка z' потребує корекції.

Параметри ефективності алгоритму. Для визначення ефективності вищезаданого алгоритму оцінюється швидкість виконання обчислень та обсяг використаної пам'яті.

Швидкість виконання обчислень залежить від методу збереження матриці M . Нехай k – асимптотична оцінка складності операцій пошуку елемента m_{ij} матриці. Так, у випадку, якщо матриця зберігається, як двовимірний масив, то $k = O(1)$. Якщо n – кількість точок на межовому контурі, m – кількість маркованих точок, то оцінка швидкості для алгоритму буде рівна $O(nk)$ – складність побудови матриці M , та $O(k)$ – знаходження найближчої точки. У результаті на кожній ітерації загальна оцінка швидкості для корегування положення маркованих точок буде складати $O((n+m)k)$.

Зауваження. Перебудова матриці M потрібна лише у випадку змін відносного положення маркованих точок, в інших випадках достатньо зберігати відносне положення точок та трансформацію контуру (зсув, поворот, зміна розміру з збереженням пропорцій тощо).

- Обсяг використаної пам'яті комп'ютера має залежність від методу збереження матриці [8]. Якщо матриця зберігається через двовимірний масив, то оцінка витраченої пам'яті дорівнює $O(n^2)$.

Для покращення асимптотичної оцінки витрати пам'яті, доцільно реалізувати наступні кроки:

- У випадку, коли загальний контур складається з окремих, не з'єднаних між собою, контурів, для кожного контуру будується окрема матриця, що зменшує кількість порожніх клітинок (нехтується простір між контурами) та зникає необхідність в перебудові окремих матриць при зміні відносного положення контурів внаслідок зміни їх положення.
- Поділити контури на окремі гілки, для кожної з яких формувати окрему матрицю.
- Враховувати при формуванні матриці лише опорні точки, які зберігають форму контуру. Отже, при зменшенні кількості точок на контурі (та збільшенні величини d) зменшується розмірність побудованої матриці.
- Для сильно розріджених матриць з метою оптимізації комп'ютерної пам'яті застосовуються такі способи їх збереження [8]:
 - Зберігання непорожніх елементів та їх координат.
 - Зберігання у вигляді значення, номера рядку та стовпця і вказівника на наступний елемент в рядку і стовпці. Для цього методу збереження потрібно також зберігати рамку, яка складається з таких самих елементів, до якої ми будемо прив'язувати всі елементи вказівниками.

Подібний підхід зменшує оцінку витраченої пам'яті до $O(n)$ за рахунок збільшення оцінки швидкості до $O((n+m)\log(n))$. Найгірший випадок трапляється лише при умові, що точки на межовому контурі лежать на одній горизонтальній лінії та при використанні алгоритму бінарного пошуку.

Алгоритм (4) корегування положення маркованої частинки. Пропонується декілька методів (схем) для корегування положення маркованої частинки, яка знаходиться в смугі межового елемента. Застосовуються означення:

- z_1 – попереднє положення маркованої частинки;
- z_2 – положення маркованої частинки, яке потребує корекції;
- \overline{ab} – відрізок, в межах якого знаходиться точка z_2 .

За формулами (4), (5) знаходяться такі величини:

$$\vec{n}, h_1 = h(z_1, \overline{ab}), h_2 = h(z_2, \overline{ab}),$$

де \vec{n} – нормований перпендикуляр до вектору \overline{ab} ; h_1 та h_2 – абсолютна величина, якій відповідає відстані від точок z_1 та z_2 до лінії \overline{ab} відповідно, а знак визначає бік розташування точок z_1 та z_2 відносно лінії \overline{ab} . А також знаходиться $p = (p_1, p_2)$ – точка перетину лінії \overline{ab} з лінією, що проходить через точки z_1 та z_2 .

Розглядаються два випадки:

- У випадку, коли точки z_1 та z_2 знаходяться по один бік від межового елемента, а саме – якщо h_1 та h_2 мають один знак. Тоді методи знаходження точки z_3 , скорегованої позиції маркованої частинки z_2 такі:

1) пружне віддзеркалення:

$$l_p = |p - z_2|, l_z = \frac{(l_p \delta)}{|h_2|}, \overline{pz_3} = \frac{p - z_2}{l_p} l_z + \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) \cdot 2\delta.$$

Щоб знайти точку z_3 , визначимо спочатку $z'_3 - p = \overline{pz'_3} - p = \overline{p - z_2} / l_p \cdot l_z$ до точки p . Таким чином отримується z'_3 – віддзеркалення точки z_3 від лінії \overline{ab} . Після чого знайдемо $\overline{z'_3 z_3} = \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) \cdot 2\delta$. В результаті ми отримуємо $z_3 - p = \overline{pz_3} = \overline{pz'_3} + \overline{z'_3 z_3}$, з якого знаходиться скореговане положення z_3 маркованої частинки.

2) витиснення на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару:

$$\overline{pz_3} = \frac{p - z_2}{l_p} l_z + \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) \cdot 2\delta,$$

при заданих умовах співпадає з методом пружного віддзеркалення.

3) витиснення віддзеркаленої маркованої частинки на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару.

$$\overline{z_2 z_3} = \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) (\delta - |h_2|).$$

Щоб знайти точку z_3 , визначимо $\overline{z_2 z_3} = \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) (\delta - |h_2|)$. Таким чином точка z_2 проектується на поверхню смуги межового елемента.

- Якщо точки z_1 та z_2 знаходяться по різні боки, а саме – якщо h_1 та h_2 мають різний знак. Тоді

1) пружне віддзеркалення (рис. 9).

Якщо $|h_2| < \delta$, то

$$l_p = |p - z_2|, l_z = (l_p \delta) / |h_2|; \overline{pz_3} = \frac{p - z_2}{l_p} (l_z - l_p) - \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) \cdot 2\delta.$$

Як і у першому випадку методу пружного віддзеркалення, спочатку знаходиться віддзеркалення точки z_3 , після чого знаходиться проекція на поверхню смуги межового елемента.

Якщо $|h_2| \geq \delta$, то

$$\overline{z_2 z_3} = -\vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) (\delta + |h_2|),$$

оскільки $z'_3 = z_2$ – віддзеркалення точки z_3 співпадає з z_2 .

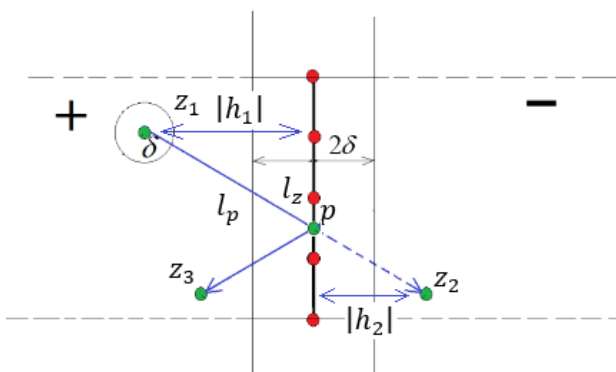


Рис. 9 – Метод корекції положення маркованої частинки за допомогою методу пружного віддзеркалення.

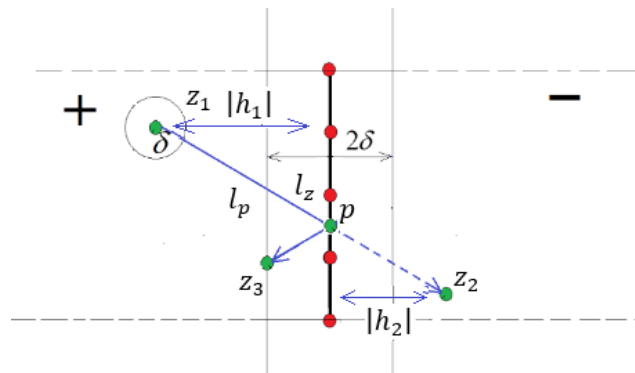


Рис. 10 – Метод корекції положення маркованої частинки за допомогою методу витиснення на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару.

2) витиснення на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару (рис. 10):

$$l_p = |p - z_2|, l_z = (l_p \delta) / |h_2|; \overline{pz_3} = \frac{p - z_2}{l_p} (l_z - l_p) - \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) \cdot 2\delta.$$

Співпадає з другим випадком методу пружного віддзеркалення при умові, що $|h_2| < \delta$.

3) витиснення віддзеркаленої маркованої частинки на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару (рис. 11):

$$\overline{z_2 z_3} = \vec{n} \cdot \text{sign}(h_2) (\delta + |h_2|).$$

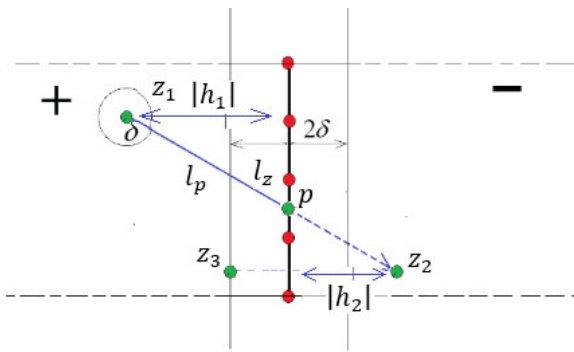


Рис. 11 – Метод корекції положення маркованої частинки за допомогою методу витиснення віддзеркаленої маркованої частинки на відстань, що дорівнює ширині контрольного шару.

Висновки. У методі дискретного вихру умови непроникності виконуються тільки в точках колокації, що потребує введення алгоритму для контролю та примусового виконання умов непроникності. Порівнюючи з методом повного перебору, який має оцінку швидкості $O(nm)$, побудована система алгоритмів має оцінку $O(n+m)$. В свою чергу, використання системи алгоритмів погіршує оцінку пам'яті до $O(n^2)$. З розглянутих кроків для покращення асимптотичної оцінки витрати пам'яті доцільно розглянути методи для збереження розріджених матриць. При їх використанні оцінка використаної пам'яті зменшується до $O(n)$ за рахунок збільшення оцінки швидкості до $O((n+m)\log(n))$. Систему алгоритмів контролю непроникності при взаємодії непроник-

них рухомих вільних меж із нерухомими межами призначено для удосконалення дискретизованих математичних моделей відривних аеродинамічних процесів в області з границею складної геометрії.

Список літератури

1. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // *Journal of Fluids Engineering*. – 1989. – vol. 111. – P. 1 – 52.
2. Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., Cherniy D. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach // *Journal of Environmental Accounting and Management*. – 2017. – vol. 5. – no. 2. – P. 87 – 104. DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002.
3. Довгий С. А., Лифанов І. К., Черний Д. І. Метод сингулярних інтегральних рівнянь і чисельні технології. – Київ : Видавництво «Юстон», 2016. – 380 с.
4. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М. : «Наука», 1978. – 352 с.
5. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1988. – 232 с.
6. Васин П. А., Черний Д. І. Моделирование трехмерной вихревой структуры // *Компьютерная математика*. – 2018. – №1. – С. 9 – 16.
7. Довгий С. О., Яшико С. І., Черний Д. І. Алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій // *Кібернетика і системний аналіз*. – 2017. – Вип. 53. – № 6. – С. 950 – 962.
8. Reginald P. *Tewarson Sparse Matrices*. – Academic Press, 1973. – 191 с.

References (transliterated)

1. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture. *Journal of Fluids Engineering*. 1989, vol. 111, pp. 1–52.
2. Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., Cherniy D. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach. *Journal of Environmental Accounting and Management*. 2017, vol. 5, no. 2, pp. 87–104 DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002.
3. Dovgii S. A., Lifanov I. K., Cherniy D. I. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i vychislitel'nye tekhnologii* [Methods of singular integral equations and computational technologies]. Kyiv, Izdatel'stvo "Uston" Publ., 2016. 380 p.
4. Belotserkovskiy S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noy zhidkost'u* [Detached und non-detached ideal fluid flow around thin wings]. Moscow, «Наука» Publ., 1978. 352 p.
5. Belotserkovskiy S. M., Kotovskiy V. N., Nisht M. I., Fedorov R. M. *Matematicheskoe modelirovanie ploskoparallel'nogo otryvnogo obtekaniya tel* [Mathematical modeling of plane-parallel detached flow around bodies]. Moscow, Nauka, GRFML Publ., 1988. 232 p.
6. Vasin P. A., Cherniy D. I. Modelirovanie tryekhmernoy vikhrevoy struktury [Simulation of a three-dimensional vortex structure]. *Komp'uternaya matematika* [Computer mathematics]. 2018, no. 1, pp. 9–16.
7. Dovgii S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algoritmy metody diskretnykh osoblyvostey dlya obchyslyval'nykh tekhnologiy [Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies]. *Kibernetika i systemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 2017, vol. 53, no. 6, pp. 950–962.
8. Reginald P. *Tewarson Sparse Matrices*. Academic Press, 1973. 191 p.

Надійшла (received) 30.03.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Васін Павло Олексійович – аспірант факультету комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; тел.: (099) 765-90-29; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Васин Павел Алексеевич – аспірант факультета компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев; тел.: (099) 765-90-29; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.

Vasin Pavlo Oleksiiovych – aspirant of the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv; tel.: (099) 765-90-29; e-mail: vasinpavlo@gmail.com.