

В. А. ВАНИН, В. О. УДОВЕНКО

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТІКАННЯ ПРОФІЛІВ ЛОПАТЕВИХ СИСТЕМ

Розглядаються аеродинамічні характеристики профілів лопаток в трансзвуковому потоці ідеального газу, які отримано на основі чисельного розв'язку системи рівнянь газової динаміки (законів збереження) в інтегральній формі. Розв'язок знаходиться шляхом стабілізації за часом, що дозволяє уникнути складнощів в чисельному методі для стаціонарної системи рівнянь змінного типу з невідомими лініями зміни еліптичного типу на гіперболічний і навпаки. Відзначаються особливості положення ударної хвилі (стрибка) в залежності від алгоритму розрахунку значень параметрів на гранях комірок різницевої сітки в скінчено-об'ємному алгоритмі. Основою розрахунку числових потоків на гранях об'єму є розв'язок задачі про розпад довільного розриву параметрів на них в одновимірному по нормалі до них напрямі. Вибір робочої різницевої схеми базується на показниках точності (порядку апроксимації) та трудомісткості (явні та неявні) переходу на наступний часовий шар. Розвиток різницевої схеми підвищеного порядку апроксимації дозволяє на реальних сітках отримати більш детальну інформацію про газодинамічні течії, яка була недосяжна при використанні схем першого порядку точності із високою схемною (апроксимаційною) в'язкістю та неузгодженістю розповсюдження збурень по неоднорідному фону значень параметрів (дисперсійні обчислювальні ефекти). Наведено результати розрахунків (із використанням схеми С. К. Годунова підвищеного порядку апроксимації) аеродинамічних характеристик жорсткого профілю і порівняння їх із експериментальними даними. Досліджуються характеристики профілю, який виконує незв'язні кутові та вертикальні коливання по заданому закону.

Ключові слова: закони збереження, трансзвукові потоки ідеального газу, профіль лопаті, чисельне моделювання, кутові коливання, вертикальні коливання, узгодженість з експериментальними даними аеродинамічних характеристик для симетричних профілів.

В. А. ВАНИН, В. А. УДОВЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЕЙ ЛОПАСНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются аэродинамические характеристики профилей лопаток в трансзвуковом потоке идеального газа, которые получены на основе численного решения системы уравнений газовой динамики (законов сохранения) в интегральной форме. Решение находится путем стабилизации по времени, что позволяет избежать сложностей в численном методе для стационарной системы уравнений переменного типа с неизвестными линиями изменения эллиптического типа гиперболическим и наоборот. Отмечаются особенности положения ударной волны (скачка) в зависимости от алгоритма расчета значений параметров на гранях ячеек разностной сетки в конечно-объемном алгоритме. Основой расчета числовых потоков на гранях объема является решение задачи о распаде произвольного разрыва параметров на них в одномерном по нормали к ним направлении. Выбор рабочей разностной схемы базируется на показателях точности (порядка аппроксимации) и трудоемкости (явные и неявные) перехода на следующий временной слой. Развитие разностных схем повышенного порядка аппроксимации позволяет на реальных сетках получить более подробную информацию о газодинамических течениях, которая была недостижима при использовании схем первого порядка точности с высокой схемной (аппроксимационной) вязкостью и несогласованностью распространения возмущений по неоднородному фону значений параметров (дисперсионные вычислительные эффекты). Приведены результаты расчетов (с использованием схемы С. К. Годунова повышенного порядка аппроксимации) аэродинамических характеристик жесткого профиля и сравнения их с экспериментальными данными. Исследуются характеристики профиля, выполняющего несвязные угловые и вертикальные колебания по заданному закону.

Ключевые слова: законы сохранения, трансзвуковые потоки идеального газа, профиль лопасти, численное моделирование, угловые колебания, вертикальные колебания, согласованность с экспериментальными данными аэродинамических характеристик для симметричных профилей.

V. A. VANIN, V. O. UDOVENKO

MATHEMATICAL MODELS, NUMERICAL METHODS AND RESULTS OF STUDY OF TRANSSONIC FLOW AROUND PROFILES OF BLADE SYSTEMS

The aerodynamic characteristics of blade profiles in a transonic flow of an ideal gas are considered, which are obtained on the basis of the numerical solution of the system of gas dynamics equations (laws of conservation) in integral form. The solution is found by stabilizing over time, which avoids complications in the numerical method for a stationary system of variable-type equations with unknown lines of change from elliptic to hyperbolic and vice versa. The peculiarities of the position of the shock wave (jump) depending on the algorithm for calculating the parameter values on the faces of the cells of the difference grid in the finite-volume algorithm are pointed out. The calculation of numerical flows on the faces of the volume is based on the solution of the problem of the decay of an arbitrary discontinuity of parameters on them in a one-dimensional direction along the normal to the face. The choice of the working difference scheme is based on the indicators of accuracy (order of approximation) and complexity (explicit and implicit) of transition to the next time layer. The development of difference schemes of a higher order of approximation allows to obtain more detailed information about gas-dynamic flows on real grids, which was unattainable when using schemes of the first order of accuracy with high scheme (approximation) viscosity and inconsistency of the propagation of disturbances on a heterogeneous background of parameter values (dispersion calculation effects). The results of calculations using S.K. Godunov's scheme of a higher order of approximation, aerodynamic characteristics of the rigid profile and their comparison with experimental data are given. The characteristics of a profile that performs incoherent angular and vertical oscillations according to a given law are studied.

Key words: conservation laws, transsonic ideal gas flows, blade profile, numerical modeling, angular oscillations, vertical oscillations, consistency with experimental data of aerodynamic characteristics for symmetrical profiles.

Вступ. Відслідковуючи розвиток ефективних чисельних схем для нелінійних гіперболічних систем диференціальних рівнянь відмітимо деякі ключові моменти успіхів. Першими схемами були схеми з різницями проти потоку, розвинуті до методів на основі характеристичних форм запису систем рівнянь, які дозволяли виділяти та відслідковувати особливості в розв'язках задач. Ефективність методу характеристик [1] була продемонстрована для двовимірних нестационарних задач, що стимулювало їх узагальнення на просторові задачі.

Особливості оцінки *порядку апроксимації* для розривних розв'язків в областях його гладкості та біля розривів [2] привели до впровадження поняття *слабкої апроксимації інтегральних законів збереження*. Показано, що похибки на розривах, де схеми знижують свої класичні апроксимативні можливості, розносяться по характеристиках на значні області. Відповідно, класична апроксимація пов'язана з *диференціальними рівняннями*, які виникають із інтегральних рівнянь, якщо розв'язки в задачі мають достатню гладкість. Введення поняття слабкої апроксимації дає характеристику чисельного методу, адекватну гладкості розв'язку задачі.

Виокремлювати розриви і їх відслідковувати можливо при їх малій кількості. Складність течії із багаторазовою взаємодією розривів вимагає розробки наскрізних чисельних методів, які виключають можливості повної локалізації особливостей розв'язку.

Стан проблеми. Побудова розв'язку рівнянь, які допускають розриви навіть при гладких початкових даних і коефіцієнтах моделі, спирається на поняття класичної і слабкої апроксимації, а також на використання *протипотокових* та *центрально-різницевої* схем. Підвищення порядку апроксимації та збереження монотонності реалізується на сучасному етапі шляхом чергування схем 2-го і вище порядків апроксимації [3] або вибору із набору шаблонів реконструкції для задачі Рімана в *схемах ENO (Essentially nonoscillatory)* [4], а також схеми *WENO (Weighted ENO)* [5 – 7] з неосцилюючою поведінкою біля розривів у розв'язку.

Використовуються і інші підходи для розрахунку числових потоків на гранях, що породжує сукупність різновидів різницевої схем – *схема С. К. Годунова*, ENO-схеми, *TVD-схеми*, *схеми HLL* та інші, менш розповсюджені чисельні методи.

Також отримали розповсюдження різницеві схеми на основі *метода Годунова* [8] із ітераційним або лінеаризованим варіантом розв'язання задачі довільного розпаду розриву параметрів (задача Рімана). Різноманітні узагальнення такого підходу з **метою** підвищення порядку апроксимації складають змістовний напрям наукових досліджень.

Використання *інтерполяційної (екстраполяційної) реконструкції* в методі скінчених різниць створює обчислювальну проблему при дуже *малих розмірах сіток* в дослідженнях *в'язких турбулентних течій*. Нові підходи в сучасних методах використовують апроксимаційну реконструкцію на основі *розривного методу Гальоркіна* із відповідними базисними функціями. *Монотонізація* різницевої схем досягається використанням при реконструкції *дорозподних параметрів газу* в монотонізуючих обмежувачах (*аналізатори гладкості, L – функції*) [9 – 10].

В роботі розглядаються проблеми моделювання обтікання трансзвуковим потоком ідеального газу жорсткого профілю та профілю, який коливається по заданому закону. При цьому, коливання кута атаки крила літака викликає гістерезис аеродинамічних характеристик.

Математична модель та метод побудови розв'язку задачі. Розглядається нестационарна 2–D задача обтікання ідеальним потоком газу в трансзвуковому діапазоні швидкостей *ізолюваного профілю* NASA 0012 в перетині лопатки циліндричною поверхнею (рис. 1).

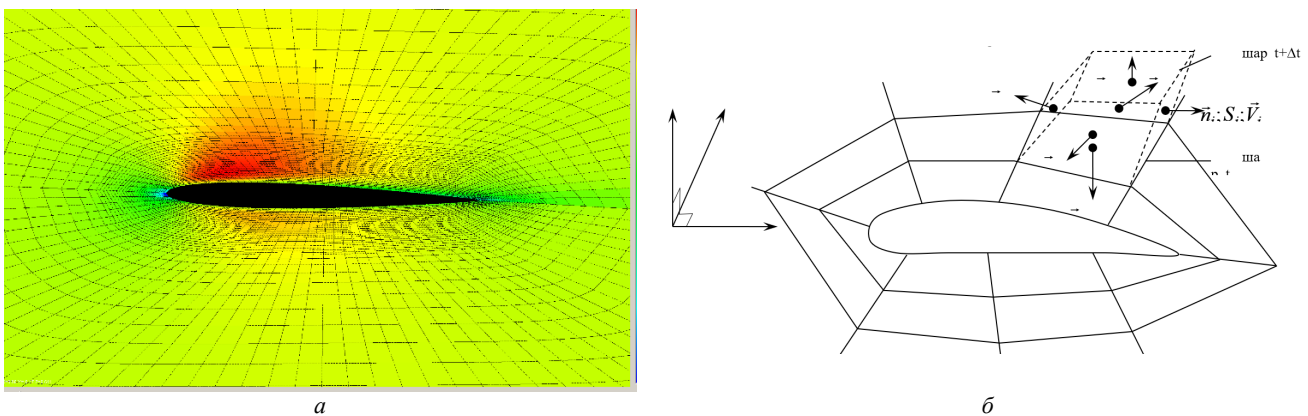


Рис. 1 – Сітка: *а* – деяке поле тиску; *б* – фрагмент розрахункової області.

Сітка *нерівномірна* із загушенням навколо профілю (*O* – сітка) з переходом до *H* – сітки в периферійній частині розрахункової області.

В векторній формі рівняння газової динаміки мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} F + \frac{\partial}{\partial y} G = 0, \quad (1)$$

де U – вектор консервативних залежних змінних; F, G – вектори потоків:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix}.$$

На вхідній і вихідній границі (газ рухається зліва направо) розрахункової області задаються граничні значення відповідно до кількості характеристик, які входять та виходять на них. На верхній та нижній межі задаються «м'які» граничні умови.

Апроксимуємо закони збереження (1), записані в інтегральній формі,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dt = \iint_{\partial \Omega} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad (2)$$

де $\vec{F} = (U, F, G)$; $\vec{n} = (n_x, n_y)$, на елементарних комірках сітки різницевої схеми (рис. 2).

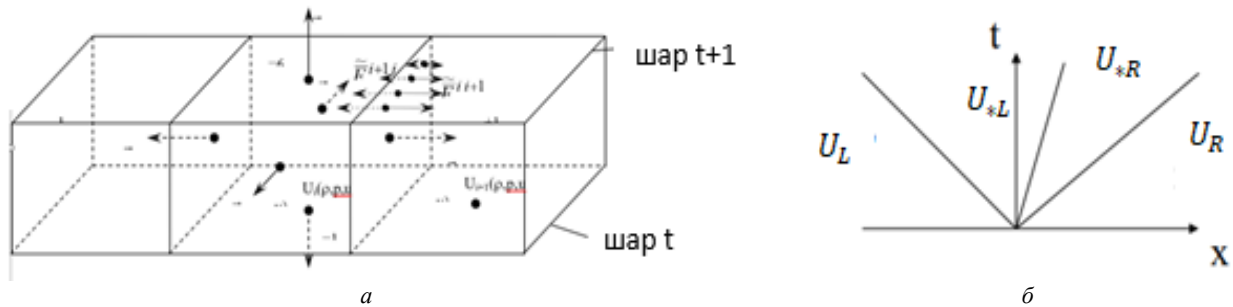


Рис. 2 – а – елементарні комірки різницевої схеми; б – схема хвиль розпаду розриву на одній із її бічних граней.

Скористаємося *теоремою Остроградського – Гауса* для перетворення системи (2) до поверхневих інтегралів. Потoki через поверхні, які обмежують розрахунковий просторово-часовий об'єм i -тої комірки, визначаються співвідношеннями:

1. 1 грань: $\vec{n}_1 = (-1; 0; 0)$:

$$\iint_{\partial \Omega_1} (\vec{F}_1 \cdot \vec{n}_1) dx dy = - \iint_{\partial \Omega_1} \bar{U}_i dx dy = -\bar{U}_i S_1 ;$$

2. 2 грань: $\vec{n}_2 = (n_{12}; n_{x2}; n_{y2})$. Якщо немає деформування об'єму i -тої комірки, то $n_{12} = n_{13} = n_{14} = n_{15} = 0$. Тоді:

$$\iint_{\partial \Omega_2} (\vec{F}_2 \cdot \vec{n}_2) dx dy = \iint_{\partial \Omega_2} \tilde{U}_{i2} \cdot n_{12} dx dy + \iint_{\partial \Omega_2} \tilde{F}_{i2} \cdot n_{x2} dx dy + \iint_{\partial \Omega_2} \tilde{G}_{i2} \cdot n_{y2} dx dy .$$

В рівняння входять значення, які розраховані по алгоритму розпаду довільного розриву (*задача Рімана*).

По знайденому \tilde{U}_{i2} , визначаємо числові потоки \tilde{F}_{i2} і \tilde{G}_{i2} .

3. Аналогічно обчислюються значення на гранях 3, 4 і 5.

4. 6-та грань: $\vec{n}_6 = (1; 0; 0)$,

$$\iint_{\partial \Omega_6} (\vec{F}_6 \cdot \vec{n}_6) dx dy = \iint_{\partial \Omega_6} U_{i6} dx dy = \tilde{U}_{i6} \cdot S_6 .$$

Невідомими є компоненти \tilde{U}_{i6} для часового шару $t + \Delta t$.

Апроксимація (2) матиме вигляд, складаючи баланс потоків через грані $j = 1, \dots, 6$.

$$\hat{U}_{i6} \cdot S_6 + \bar{U}_i \cdot S_1 + \sum_{j=2}^5 (\tilde{U}_{ij} \cdot n_{ij} S_j + \tilde{F}_{ij} n_{xj} S_j + \tilde{G}_{ij} n_{yj} S_j) = 0 .$$

Звідки знайдемо:

$$\hat{U}_{i6} = \left(-\bar{U}_i \cdot S_1 - \sum_{j=2}^5 (\tilde{U}_{ij} \cdot n_{ij} S_j + \tilde{F}_{ij} n_{xj} S_j + \tilde{G}_{ij} n_{yj} S_j) \right) / S_6 ,$$

i – номер розрахункової комірки.

Значення параметрів стаціонарної і нестационарної (періодичної) течії навколо профілю отримаємо шляхом усталення за часом. Кількість комірок складає 50 – 100 тисяч, із них в області згущення навколо профілю 30 – 40 тисяч.

Реконструкція параметрів в межах комірки виконувалась з використанням *інтерполяційних поліномів Ньютона* ($n = 2$) з аналізаторами гладкості розв'язку:

$$P_n(x) = u + \frac{x-x_i}{h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^+ u + \frac{x-x_{i+1}}{2h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^{+2} u + \frac{x-x_{i+2}}{3h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^{+3} u \\ \delta^{+2} \delta^- u \end{array} \right. \\ \delta^+ \delta^- u + \frac{x-x_i}{3h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^{+2} \delta^- u \\ \delta^+ \delta^{-2} u \end{array} \right. \\ \delta^- u + \frac{x-x_{i-1}}{2h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^+ \delta^- u + \frac{x-x_i}{3h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^{+2} \delta^- u \\ \delta^+ \delta^{-2} u \end{array} \right. \\ \delta^{-2} u + \frac{x-x_{i-2}}{3h} \left\{ \begin{array}{l} \delta^+ \delta^{-2} u \\ \delta^{-3} u \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

Фігурна дужка визначає деяке правило вибору параметрів (L – функція), які стоять за нею [9]. В роботі використовувалась така функція:

$$\chi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0); \\ y^2, & y \in [0, 1]; \\ -2 + 4y - y^2, & y \in [1, 2]; \\ 2, & y \in [2, \infty), \end{cases}$$

у якій $y = \frac{y_2}{y_1}$, y_1 – верхнє значення та y_2 – нижнє значення різниць за дужками в (3). Монотонізуючі різницеву схему L – функції є розв’язками монотонізуючого функціонального рівняння з заданими двоточковими умовами і правою частиною:

$$L \cdot \chi(y) = \chi(y) - y \cdot \chi\left(\frac{1}{y}\right) = \mu(y), \quad \chi(0) = 0, \quad \chi(1) = 1.$$

Для явної схеми використовувалась умова стійкості Куранта – Фрідріхса – Леві – $\Delta t \leq \frac{h}{1.2 \max_j |u_j^n|}$. Ві-

домому обмежувачу «*minmod*(y)» відповідає функція:

$$\chi(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0]; \\ y, & y \in [0, 1]; \\ 1, & y \in [1, \infty). \end{cases}$$

Результати порівняння із експериментальними дослідженнями обтікання профілю NACA-0012 [11 – 13]. На рис. 3 приведені результати порівняння аеродинамічних характеристик, отриманих в розрахунках по запропонованому методу, із експериментальними даними [11 – 13]. Схожі дані отримані і в експериментах НАКУ «ХАІ».

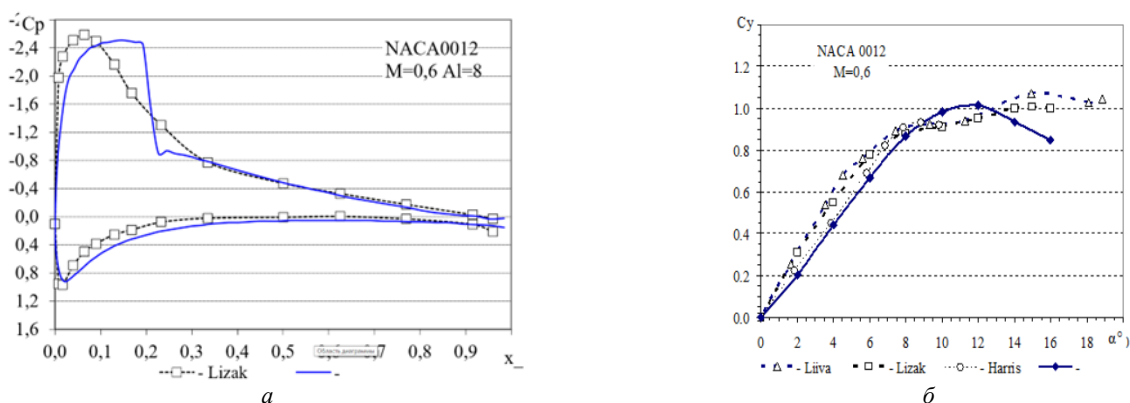


Рис. 3 – Порівняння аеродинамічних характеристик із розрахунками (синій колір – розрахунок): a – коефіцієнт тиску; b – підйомна сила.

Розрахунок по запропоновані схемі дає достатньо надійні значення по коефіцієнту тиску при наявності стрибка в розподілі тиску по контуру профілю. При деяких кутах атаки розрахунки показують підвищене значення підйомної сили профілю.

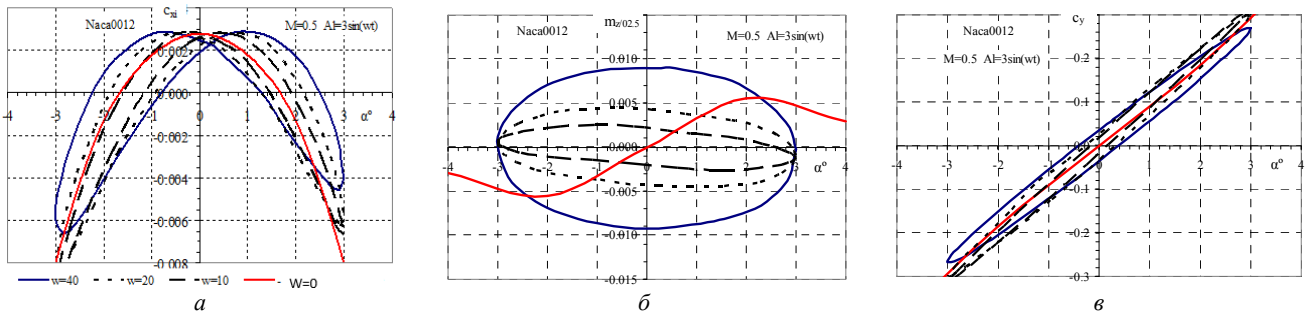
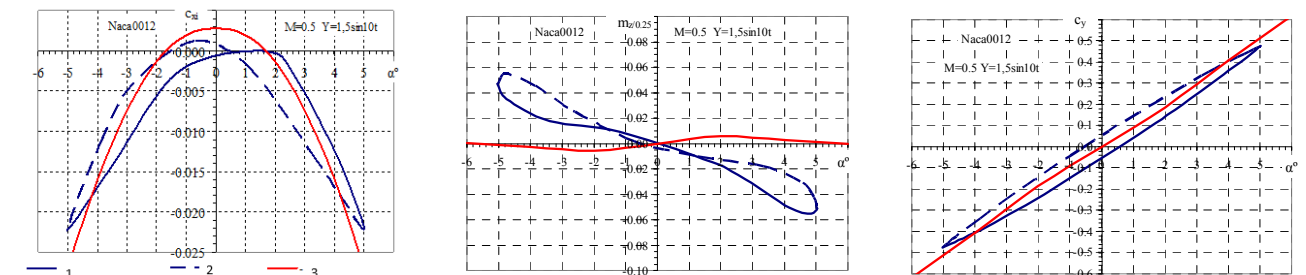


Рис. 4 – Періодична залежність для коефіцієнтів при кутових коливаннях: *a* – осьової сили; *б* – моменту; *в* – підйомної сили.

Кутові коливання профілю NACA-0012 (по куту атаки Al) при $M = 0.5$, $Al = 0 + 3\sin(\omega t)$. Періодична залежність аеродинамічних характеристик від кута атаки та частоти ($\omega = 0, 10, 20, 40$) коливань наведена на рис. 4, *a, б, в* для коефіцієнтів осьової сили, моменту та підйомної сили. Потік набігає з швидкістю, відповідною числу Маха $M = 0.5$, при нульовому куті установки. Явище гістерезису в таких змінах характеристик охоплює їх стаціонарну залежність. Осьова сила змінного напрямку породжується непотенціальністю обтікання та наявністю схемної в'язкості.

Вертикальні коливання профілю $Y = 1.5\sin(\omega t)$, $\omega = 10, 40$. Вертикальні коливання при різних частотах породжують специфічні зміни аеродинамічних характеристик при наявності трансзвукових зон швидкостей газу, що супроводжуються виникненням ударних хвиль та їх зникненням при деяких кутах атаки. Збільшення частоти коливань приводить до збільшення підйомної сили на профіль (рис. 5).



1 – коливання вгору, 2 – коливання вниз, 3 – статичний режим при різних відносних фіксованих кутах атаки.

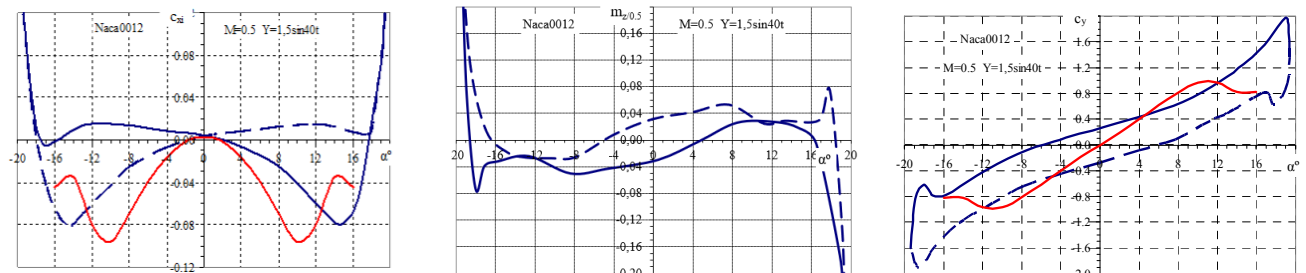


Рис. 5 – Періодична залежність для коефіцієнтів осьової сили, моменту та підйомної сили при вертикальних коливаннях.

Перспективи подальших досліджень. Важливо дослідити характер змін аеродинамічних характеристик для несиметричних профілів та з'ясувати пов'язаний вплив кутових та повздовжніх і поперечних коливань на сумарні характеристики профілів на фоні симетричних і несиметричних їх профілів.

Висновки. Порівняння отриманих результатів з експериментальними даними і їх достатнє узгодження дають підстави вважати їх цінними для дослідження реальних конструкцій лопатевих апаратів енергетичних машин та крила літака і гвинта гелікоптера. Моделювання трансзвукових режимів течій газу вимагає особливих якостей від чисельних методів. Математична постановка задачі у вигляді нестационарних рівнянь газової динаміки дозволяє отримувати розв'язки шляхом усталення для стаціонарних режимів обтікання профілю і періодичних за часом. Кутові коливання профілю спільно з вертикальними коливаннями дозволяють підвищити аеродинамічну якість лопатевих конструкцій.

Список літератури

1. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. – М. : Наука, 1988. – 263с.
2. Русанов В. В., Безменов И. В., Нажесткина Э. И. Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэродинамике. – М. :Наука, 1986. – С. 174 – 187.

3. Брагин М. Д., Rogov B. В. Гибридные схемы бегущего счета для уравнений гиперболического типа на основе противопоточных и бикомпактных симметричных схем // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 2015. – Том. 55. – №7. – С. 1196 – 1207. <http://dx.doi.org/10.7868/S0044466915070042>.
4. Adams N. A., Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems // J. Comput. Phys. – 1996. – V. 127. – № 1. – P. 27 – 51. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0156>
5. Pirozzoli S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction // J. Comput. Phys. – 2002. – V. 178. – № 1. – P. 81 – 117. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7021>.
6. Ren Y. X., Liu M., Zhang H. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 2003. – V. 192. – № 2. – P. 365 – 386. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.006>.
7. Shen Y., Yang G. Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2007. – V. 53. – № 4. – P. 531 – 560. <https://doi.org/10.1002/fld.1286>.
8. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. – 1959. – Т. 47 (89). – № 3. – С. 271 – 306.
9. Ванін В. А. Вычислительные схемы с L - функциями для задач газовой динамики // Проблемы машиностроения. – 2004. – V. 7. – №4. – С. 36 – 42.
10. Ванін В. А. Метод интегрального представления и его применение для построения и исследования разностных схем повышенного порядка слабой аппроксимации // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – Вип. 54(1027) – С. 15 – 50.
11. Lizak A. A. Two-Dimension Wind Tunnel Test of an H-34 Main Rotor Airfoil Section // TREC Technical Report 60-53, Sikorsky Aircraft. – 1960. – 93 p.
12. Charles D. Harris Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. – NASA-TM-81927. – 1981. – 139 p.
13. Jaan Liiva, Franklyn J. Davenport, Lewis Gray, Ivor C. Walton. Two-Dimension Test of Airfoils Oscillating Near Stall. – v. 1. – USAAVLABS Technical Report 68-13A, 1968. – 148 p.

References (transliterated)

1. Magomedov K. M., Kholodov A. S. *Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody* [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 263 p.
2. Rusanov V. V., Besmenov I. V., Nazhestkina E. I. Vychislitel'nye pogreshnosti raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy [Numerical error of difference schemes for computing discontinuous solutions]. In *Chislennoe modelirovanie v aerogidrodinamike* [In Numerical modeling in aerohydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, pp. 174–187.
3. Braagin M. D., Rogov B. V. Gibrnidnye skhemy begushhego scheta dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa na osnove protivopotochnykh i bikompaktnykh simetrichnykh skhem [Hybrid point-to-point computational schemes for hyperbolic-type equations based on counterflow and bicomcompact symmetric schemes]. *Zhurnal vychislit. matematiki i mat. fiziki* [Journal of computational mathematics and mathematical physics]. 2015, vol. 55, no. 7, pp. 1196–1207. <http://dx.doi.org/10.7868/S0044466915070042>.
4. Adams N. A., Shariff K. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *J. Comput. Phys.* 1996, vol. 127, no. 1, pp. 27–51. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0156>
5. Pirozzoli S. Conservative hybrid compact-WENO schemes for shock-turbulence interaction. *J. Comput. Phys.* 2002, vol. 178, no. 1, pp. 81–117. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7021>.
6. Ren Y. X., Liu M., Zhang H. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 2003, vol. 192, no. 2, pp. 365–386. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.006>.
7. Shen Y., Yang G. Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2007, vol. 53, no. 4, pp. 531–560. <https://doi.org/10.1002/fld.1286>.
8. Godunov S. K. Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki [Difference methods for computing discontinuous solutions of equations of hydrodynamics]. *Matem. sb.* [Mathematical col.]. 1959, vol. 47 (89), no. 3, pp. 271–306.
9. Vanin V. A. Vychislitel'nye skhemy s L - funktsiyami dlya zadach gasovoy dinamiki [Computational schemas with L - functions for the gas dynamics problems]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2004, vol. 7, no. 4, pp. 36 – 42
10. Vanin V. A. Metod integral'nogo predstavleniya i ego primeneniye dlya postroeniya i issledovaniya raznostnykh skhem povyshenogo poriyadka slaboy approssimatsii [Method of integral representation and its application for composing and studying difference schemes of higher order of weak approximation]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyak* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2013, vol. 54(1027), pp. 15 – 50
11. Lizak A. A. Two-Dimension Wind Tunnel Test of an H-34 Main Rotor Airfoil Section. *TREC Technical Report 60-53, Sikorsky Aircraft.* 1960. 93 p.
12. Charles D. Harris *Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel.* NASA-TM-81927, 1981. 139 p.
13. Jaan Liiva, Franklyn J. Davenport, Lewis Gray, Ivor C. Walton. *Two-Dimension Test of Airfoils Oscillating Near Stall.* USAAVLABS Technical Report 68-13A, 1968, vol. 1. 148 p.

Надійшла (received) 15.03.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ванін Віктор Антонович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Ванін Віктор Антонович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

Vanin Viktor Antonovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.