УДК 519.6:004.94 **DOI: 10.20998/2222-0631.2023.01.03**

А. Я. БОМБА, С. С. КАШТАН

ІДЕНТИФІКАЦІЯ КРИВИХ РОЗДІЛУ СИЛЬНО КОНТРАСТНИХ СЕРЕДОВИЩ МЕТОДАМИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ

При моделюванні процесів масопереносу (наприклад, фільтрації) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від відповідних досліджуваних частин деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв'язування задачі. При побудові математичної моделі відповідного фізичного процесу вважатимемо сильно проникне середовище «ідеально (теоретично нескінченно) проникним». У цьому випадку шукану криву можна вважати еквіпотенціальною лінією. У цій роботі розглядається стаціонарний процес руху рідини в однорідному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – шуканою кривою теоретичного водоупору та горизонтальною віссю, на якій відома локальна швидкість руху. На основі методів конформних відображень та сумарних зображень запропоновано підхід до ідентифікації кривої розділу середовищ. Побудований алгоритм модифіковано для розв'язування нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення криволінійних багатокутних областей, обмежених невизначеними лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Особливість запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують можливість представити розв'язок локалізованої лінійної (основної) частини отриманої системи рівнянь у явному вигляді, де невідомі коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем, породжених лише граничними умовами та числовими аналогами умов Коші – Рімана.

Ключові слова: квазіконформні відображення, обернені задачі, числові методи, метод сумарних зображень, моделювання, ідентифікація, аналіз даних, рівняння Лапласа, еквіпотенціальні лінії.

А. Я. БОМБА, С. С. КАШТАН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРИВЫХ РАЗДЕЛОВ СИЛЬНО КОНТРАСТНЫХ СРЕД МЕТОДАМИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

При моделировании процессов массопереноса (например, фильтрации) в пористых средах возможны случаи существования сильно проницаемых слоев, отделяющихся от соответствующих исследуемых частей некоторыми кривыми, которые нужно найти (идентифицировать) в процессе решения задачи. При построении математической модели соответствующего физического процесса будем считать сильно проницаемую среду «идеально (теоретически бесконечно) проницаемой». В этом случае искомую кривую можно считать эквипотенциальной линией. В данной работе рассматривается стационарный процесс движения жидкости в однородном горизонтальном бесконечно больших размеров пласте – грунтовом массиве, ограниченном бесконечными участками кривых, в частности – искомой кривой теоретического водоупора и горизонтальной осью, на которой известна локальная скорость движения. На основе методов конформных отображений и суммарных изображений предложен подход к идентификации кривой раздела сред. Построенный алгоритм модифицирован для решения нелинейных обратных краевых задач на квазиконформные отражения криволинейных многоугольных областей, ограниченных неопределенными линиями тока и эквипотенциальными линиями. Особенность предложенной методики состоит в том, что формулы суммарных изображений обеспечивают возможность представить решение локализованной линейной (основной) части полученной системы уравнений в явном виде, где неизвестные коэффициенты находятся путём решения нелинейных систем, порождённых только граничными условиями и числовыми аналогами условий Коши – Римана.

Ключевые слова: квазиконформные отображения, обратные задачи, числовые методы, метод суммарных изображений, моделирование, идентификация, анализ данных, уравнение Лапласа, эквипотенциальные линии.

A. YA. BOMBA, S. S. KASHTAN

IDENTIFICATION OF SEPARATION CURVES OF STRONGLY CONTRASTING ENVIRONMENTS USING COMPLEX ANALYSIS METHODS

When modeling mass transfer processes (for example, filtration) in porous media, there may be cases of the existence of highly permeable layers, which are separated from the corresponding studied parts by some curves that must be found (identified) in the process of solving the problem. When constructing a mathematical model of the corresponding physical process, we will consider a highly permeable medium as "ideally (theoretically infinitely) permeable." In this case, the desired curve can be considered an equipotential line. This work considers the stationary process of fluid movement in a homogeneous horizontal layer of infinitely large dimensions − a soil massif, which is limited by infinite sections of curves, in particular by the desired curve of theoretical water resistance and the horizontal axis, on which the local speed of movement is known. On the basis of the methods of conformal reflections and total images, an approach to the identification of the curve of the separation of media is proposed. The constructed algorithm is modified for solving nonlinear inverse boundary value problems on quasi-conformal mappings of curvilinear polygonal regions bounded by uncertain streamlines and equipotential lines. The feature of the method proposed is that the summary representation formulae allow to explicitly write the solution to the localized linear (main) part of the obtained system of equations. The unknown coefficients are determined here by solving a nonlinear system generated solely by the boundary conditions and numerical analogues of the Cauchy–Riemann equations.

Key words: quasi-conformal mappings, inverse problems, numerical methods, method of total images, modeling, identification, data analysis, equipotential lines.

Вступ. При моделюванні, наприклад, *процесів масопереносу* (*фільтрації*) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від досліджуваної його частини деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі *розв'язування задачі*. При побудові математичної моделі відповідного фізичного процесу вважатимемо сильно проникне середовище «*ідеально* (*теоретично нескінченно*) *проникним*». У цьому випадку шукану криву можна вважати *еквіпотенціальною лінією*.

У цій роботі йдеться про застосування *методів конформних відображень* та *сумарних зображень* до ідентифікації кривої розділу пористих середовищ.

Аналіз останніх досліджень. Ефективним методом математичного моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, є розроблений у попередніх роботах авторів [1 – 7] підхід на основі комплексного аналізу з використанням *методів квазіконформних відображень*. У цьому підході знайшов своє застосування і *чисельно-аналітичний метод сумарних зображень*, розроблений *Г. М. Положієм* та розвинутий у роботах його учнів *І. І. Ляшка*, *В. І. Лаврика* та іншими [8, 9]. Зокрема, переваги методу сумарних зображень (запис розв'язку у вигляді формули, можливість вибіркового рахунку та інше) ефективно використані при розв'язанні крайових задач на обернені конформні відображення криволінійних чотирикутних областей. При розв'язанні задач з використанням методу сумарних зображень більшість невідомих, що входять в різницеву задачу, в обчисленнях участі не беруть, що приводить до зменшення обсягу обчислювальної роботи. Ця обставина дає можливість позбутися надто великої *обчислювальної похибки*. Метод сумарних зображень Г. М. Положія застосовано і до розв'язування задач при дуже великій і навіть необмеженій кількості вузлів сітки для однозв'язних і багатозв'язних плоских областей [6, 7]. Так, у роботі [6], використовуючи модифіковані формули сумарних зображень, побудовано розв'язки деяких крайових задач *теорії фільтрації* при наявності *джерела поперечних збурень* MN вихідного потоку (тут M і N довільні точки кривої BC та $\phi|_{MN}=\phi^{\circ}$), описано алгоритми представлення розв'язків у характерних (за наявністю горизонтальних та вертикальних розрізів) випадках формування ліній розділу фільтраційних потоків у двозв'язних та тризв'язних областях G_z, які матимуть місце в залежності від значення потенціалу ϕ°. У роботі [7] використано модифіковані формули сумарних зображень при побудові розв'язків крайових задач теорії фільтрації при наявності *точкового джерела* (особливої точки $M\in BC$, $\phi|_M=\pm\infty$).

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарний процес руху рідини в однорідному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – нижньою кривою теоретичного водоупору $y=-a(x)$ ($a(x)\ge a_0>0$, $a(x)$ – неперервно-диференційована функція) та віссю Ox – горизонтом (рис. 1), на якому відома локальна швидкість руху $v(x)$.

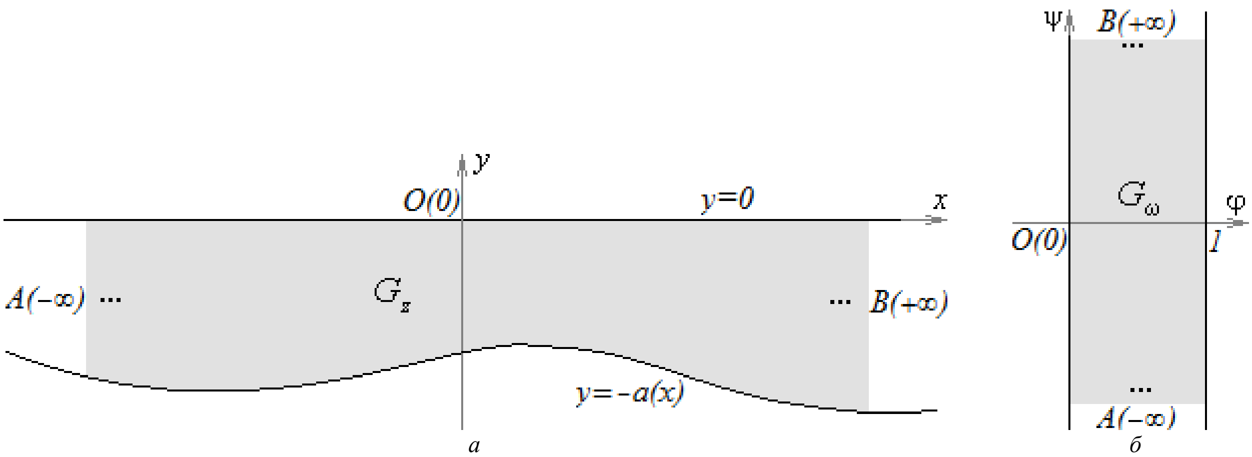

Рис. 1 – Схематичне зображення: *а* – «нескінченної» фізичної області; *б* – області комплексного квазіпотенціалу.

Постановка задачі на *ідентифікацію* (*відшукання*) *функції* теоретичного водоупору $y=-a(x)$ та відшукання комплексно-спряжених функцій потенціалу $\phi=\phi(x,y)$ і течії $\psi=\psi(x,y)$ у розглядуваній фізичній області G_z $(z=x+\mathrm{i}\,y)$ – внутрішності ∂G_z=$AOBA$ (площині поперечного перерізу ґрунтового пласта) – однозв'язній криволінійній смузі, обмеженій лінією горизонту $AOB=\{z\colon\ y=0,\ \ -\infty<x<+\infty\}$ та лінією теоретичного водоупору $BA=\{z\colon y=-a(x),\ \ -\infty<x<+\infty\}$ запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad (x,\mathrm{y})\in G_z\,; \tag{1}$$

$$\phi\big|_{y=0}=0\,,\ \phi\big|_{y=-a(x)}=1\,,\ \left.\frac{d\phi}{dn}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=0}=v(x)\,,\ \ -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

де n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі області ∂G_z, що у цьому випадку співпадає з напрямом осі Oy ; $v(x)$ – локальна швидкість на горизонті, причому $\psi(x,0)=\int\limits_0^x v(\tilde{x})d\tilde{x}$.

Як відомо [6, 9], ця задача зводиться до конформного відображення $\omega=\omega(z)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$ фізичної області G_z на область комплексного потенціалу $G_\omega=\{\omega:0<\phi<1,-\infty<\psi<+\infty\}$ (рис. 1) з невідомою функцією $y=-a(x)$, яка ідентифікується на основі аналізу даних, отриманих в процесі розв'язання задачі.

Як і в [6], *обернена крайова задача* на конформне відображення $z=z(\omega)=x(\phi,\psi)+\mathrm{i}\,y(\phi,\psi)$ області G_ω на G_z з невідомою функцією $y=-a(x)$ має вигляд:

$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=\frac{\partial y}{\partial\psi},\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\phi},\quad (\phi,\psi)\in G_\omega; \tag{3}$$

$$y(0,\psi)=0,\ \ y(1,\psi)=-a\big(x(1,\psi)\big),\ \ \frac{\partial x(0,\psi)}{\partial\psi}=-J(0,\psi)v\big(x(0,\psi)\big),\quad -\infty<\psi<+\infty, \tag{4}$$

де $J(\phi,\psi)=\frac{\partial x}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\phi}$ – якобіан відображення.

Оскільки функції $x=x(\phi,\psi)$ та $y=y(\phi,\psi)$ задовольняють *умові Коші – Рімана* (3), то кожна з них є гармонічною в області G_ω, що дозволяє звести цю задачу до розв'язування в G_ω *рівнянь Лапласа*:

$$\Delta x=0,\quad \Delta y=0 \tag{5}$$

при заданих крайових умовах (4) та умовах Коші – Рімана (3) на шуканій границі ∂G_ω області G_ω, які в деяких випадках зручно замінити на умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області ([6]).

Різницева задача. Для числової побудови відображення області G_ω на фізичну область G_z запишемо *різницевий аналог задачі* (5), (4) у рівномірній *сітковій області (ортогональній сітці)*:

$$G_\omega^\gamma=\Big\{(\phi_i,\psi_j)\ :\ \phi_i=\Delta\phi\cdot i,\ i=\overline{0,m+1};\ \ \psi_j=\Delta\psi\cdot j,\ j=\overline{-\infty,+\infty};\ \ \Delta\phi=\frac{1}{m+1},\ \Delta\psi=\Delta\phi,\ \ m,\ n\in\mathbf{N}\Big\},$$

де $\Delta\phi$, $\Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по ϕ та ψ рівні між собою (у випадку квадратної сітки конформний інваріант [6] $\gamma=1$).

З метою більш точнішого врахування геометрії області G_z для апроксимації *оператора Лапласа* використаємо шаблон *«ящик» – дев'ятиточкову різницеву симетричну схему з ваговими коефіцієнтами*. Тому, рівняння Лапласа (5) для спряжених гармонічних функцій $x(\phi,\psi)$ та $y(\phi,\psi)$ апроксимуємо такими різницевими рівняннями:

$$\begin{cases}\sigma\left(x_{i+1,j+1}-2x_{i,j+1}+x_{i-1,j+1}\right)+(1-2\sigma)\left(x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j}\right)+\\ +\sigma\left(x_{i+1,j-1}-2x_{i,j-1}+x_{i-1,j-1}\right)+\sigma\left(x_{i+1,j+1}-2x_{i+1,j}+x_{i+1,j-1}\right)+\\ +(1-2\sigma)\left(x_{i,j+1}-2x_{i,j}+x_{i,j-1}\right)+\sigma\left(x_{i-1,j+1}-2x_{i-1,j}+x_{i-1,j-1}\right)=0;\\ \sigma\left(y_{i+1,j+1}-2y_{i,j+1}+y_{i-1,j+1}\right)+(1-2\sigma)\left(y_{i+1,j}-2y_{i,j}+y_{i-1,j}\right)+\\ +\sigma\left(y_{i+1,j-1}-2y_{i,j-1}+y_{i-1,j-1}\right)+\sigma\left(y_{i+1,j+1}-2y_{i+1,j}+y_{i+1,j-1}\right)+\\ +(1-2\sigma)\left(y_{i,j+1}-2y_{i,j}+y_{i,j-1}\right)+\sigma\left(y_{i-1,j+1}-2y_{i-1,j}+y_{i-1,j-1}\right)=0,\qquad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{-\infty,+\infty},\end{cases} \tag{6}$$

де $x_{i,j}=x(\phi_i,\psi_j)$, $y_{i,j}=y(\phi_i,\psi_j)$; $\sigma\in[0;0.5]$ – ваговий коефіцієнт, від вибору якого залежить стійкість, точність та швидкість збіжності різницевої схеми [10].

Крайові умови (4) апроксимуємо *точково-різницевими рівняннями*:

$$y_{0,j}=0,\quad y_{m+1,j}=-a\left(x_{m+1,j}\right);\qquad x_{0,j+1}-x_{0,j-1}=-\frac{J_{0,j}}{\Delta\phi}v_{0,j},\quad j=\overline{-\infty,+\infty}, \tag{7}$$

де $J_{0,j}=(x_{1,j}-x_{0,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})-(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})(y_{1,j}-y_{0,j})$.

Умови Коші – Рімана (3) на шуканій границі $y=-a(x)$ області G_ω апроксимуємо у вигляді ([8]):

$$x_{m+1,j} - x_{m,j} = y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j}, \quad x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j} = y_{m,j} - y_{m+1,j}, \quad j = \overline{-\infty, +\infty}. \tag{8}$$

Модифікувавши загальну формулу сумарних зображень Г. М. Положія [8, 9], загальний розв'язок різницевої системи рівнянь (6) при $\sigma = 0$ у внутрішніх і граничних по горизонталі вузлах сіткового прямокутника G_ω^γ запишемо у розгорнутій формі через значення в граничних вузлах по вертикалі [5 – 7]:

$$\begin{cases} x_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_{i,k} \sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t} \right); \\ y_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_{i,k} \sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t} \right), \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \; j = \overline{-\infty, +\infty}, \tag{9}$$

де $p_{i,k} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{ik\pi}{m+1}$; $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$; $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$; $\eta_k = 2 - \cos \frac{k\pi}{m+1}$.

У цьому випадку невідомі $x_{0,t}$, $y_{0,t}$, $x_{m+1,t}$, $y_{m+1,t}$ визначаються в результаті розв'язання такої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} y_{0,j} = 0; \\ x_{0,j+1} - x_{0,j-1} = -\dfrac{J_{0,j}}{\Delta \phi} v_{0,j}; \\ x_{m+1,j} - \sum\limits_{k=1}^{m} p_{m,k} \sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} x_{0,t} + p_{m,k} x_{m+1,t} \right) = y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j}; \\ x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_{m,k} \sum\limits_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_k^{|j-t|}}{\mu_k - \nu_k} \left(p_{1,k} y_{0,t} + p_{m,k} y_{m+1,t} \right) - y_{m+1,j}, \end{cases} \tag{10}$$
$$j = \overline{-\infty, +\infty}.$$

Алгоритм числового розв'язання різницевої задачі полягає у поетапній параметризації граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z^γ, передбачає використання ідей *методів блочної ітерації* [11] і *Ньютона* та будується аналогічно до [6]. А саме, розв'язуємо систему (10), наприклад, *ітераційним методом Ньютона* та визначаємо значення граничних вузлів на горизонті та шуканій кривій теоретичного водоупору. За відповідними формулами сумарних зображень (9) визначаємо координати внутрішніх вузлів області G_z та знаходимо розрахункову величину локальної швидкості на горизонті – у граничних вузлах сітки при $i = 0$ – наприклад, за формулою з [6] $v_{0,j}^{(k+1)} = \dfrac{2\Delta\psi}{J_{0,j}} \sqrt{\left(x_{1,j}^{(k+1)} - x_{0,j}^{(k+1)}\right)^2 + \left(y_{1,j}^{(k+1)} - y_{0,j}^{(k+1)}\right)^2}$.

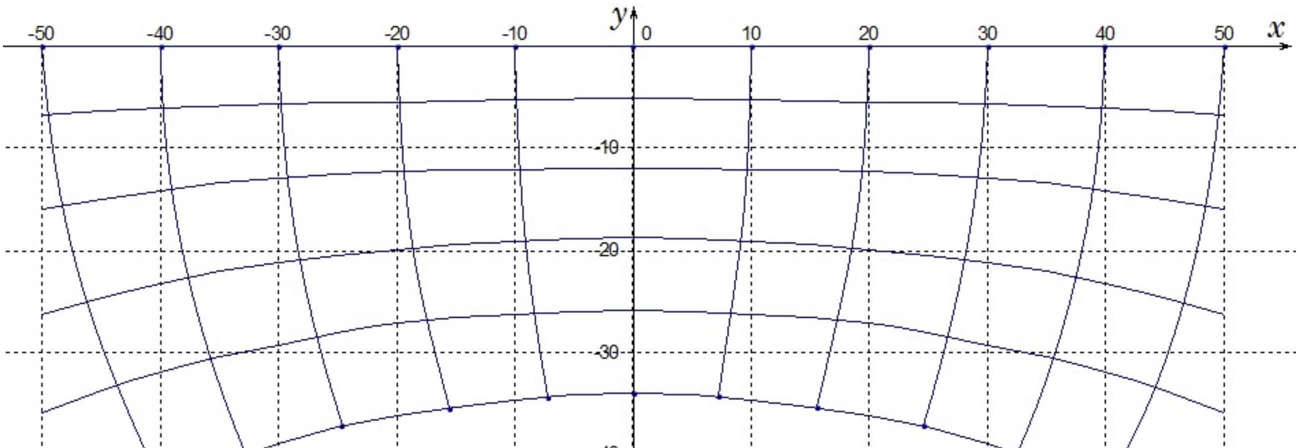

Рис. 2 – Розрахункова гідродинамічна сітка та ідентифіковані вузли на нижній кривій теоретичного водо упору.

В залежності від отриманої нев'язки вибираємо наступне наближення граничних вузлів і так далі. Серед умов закінчення ітераційного процесу може бути нерівність $\left\| v_{0,j}^{(k+1)} - v_{0,j} \right\| < \varepsilon$.

Ефективність запропонованої методики полягає в тому, що формули сумарних зображень забезпечують розв'язність локалізованої лінійної (основної) частини даної системи, де невідомі коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання нелінійних систем (10), породжених лише граничними умовами (7) та умовами Коші – Рімана (8).

Числові розрахунки проведено для однорідного горизонтального пласта – ґрунтового масиву, що обмежений ділянками кривих, – шуканою кривою теоретичного водоупору та горизонтальною віссю, на якій задана локальна швидкість руху $v(x) = -\dfrac{800}{\pi\left(x^2 + 100\right)}$ (рис. 2).

В результаті проведених обчислень розраховано значення координат вузлів на нижній кривій теоретичного водоупору $y = -a(x)$, які подані у табл. 1.

Таблиця 1 – Координати вузлів на нижній кривій теоретичного водоупору $y_{m+1,j} = -a\left(x_{m+1,j}\right)$

$x_{m+1,j}$	–40,003	–32,002	–24,001	–16,000	–7,999	0,000	7,999	16,000	24,001	32,002	40,003
$y_{m+1,j}$	–43,016	–39,677	–37,165	–35,412	–34,376	–34,034	–34,376	–35,412	–37,165	–39,677	–43,016

Аналізуючи дані табл. 1, криву теоретичного водоупору $y = -a(x)$ ідентифіковано у вигляді параболи $y(x) = -0,0058x^2 - 33,899$, наприклад, шляхом побудови *інтерполяційного многочлена Лагранжа* або *многочлена середньоквадратичного наближення*.

Висновки. Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє розраховувати координати вузлів гідродинамічної сітки, обчислювати фільтраційні витрати, величини швидкості руху та інші параметри досліджуваних процесів, а також ідентифікувати криві розділу сильно проникних шарів. Розв'язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу. Результати проведених нами досліджень у цій та інших роботах приводять до необхідності перегляду методик, пов'язаних із розрахунками характеристик середовища та процесу, з метою уточнення останніх (при проектуванні дренажних споруд, оптимізації теплосистем з ідентифікацією параметрів і керуванням процесами у нафтогазових пластах).

У перспективі – моделювання та прогнозування роботи слабопровідних (близьких до сланцевих) пластів в умовах гідророзриву.

Список літератури

1. *Бомба А. Я., Бойчура М. В., Мічута О. Р.* Ідентифікація параметрів структури ґрунтових криволінійних масивів числовими методами комплексного аналізу // Геофізичний журнал. – 2022. – Том 44. – № 2. – С. 53 – 67. http://dx.doi.org/10.24028/gj.v44i2.256402.
2. *Бомба А. Я., Бойчура М. В.* Ідентифікація структури ґрунтових масивів числовими методами квазіконформних відображень // Кібернетика та системний аналіз. – 2021. – Вип. 57 (6). – С. 94 – 105.
3. *Bomba, A., Boichura, M., Sydorchuk, B.* Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies – 2020. – Vol. 5. – No. 4 (107). – P. 45 – 54. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215045.
4. *Бомба А. Я., Бойчура М. В.* Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. – Рівне : НУВГП, 2020. – 188 с.
5. *Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П.* Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень. – Рівне: ТзОВ "Ассоль", 2016. – 283 с.
6. *Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В.* Методи комплексного аналізу. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.
7. *Каштан С. С.* Про метод сумарних зображень розв'язання нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення з особливостями // Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 78 – 86.
8. *Положий Г. Н.* Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – Киев : Изд-во КГУ, 1962. – 161 с.
9. *Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е.* Метод мажорантных областей в теории фильтрации. – Киев : Наукова думка, 1974. – 200 с.
10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.
11. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва : Мир, 1975. – 558 с.

References (transliterated)

1. Bomba A. Ya., Boychura M. V., Michuta O. R. Identyfikatsiya paramatriv steuktury gruntovykh kryvoliniynykh masyviv chyslovymy metodamy kompleksnogo analizu [Identification of parameters of structure of soil curvilinear massifs by numerical methods of complex analysis]. *Geofizychnyy zhurnal* [Geophysical Journal]. 2022, vol. 44, no. 2, pp. 53–67. http://dx.doi.org/10.24028/gj.v44i2.256402.

2. Bomba A. Ya., Boychura M. V. Identyfikatsiya struktury gruntovykh masyviv chyslovymy metodamy kvazikonformnykh vidobrazhen' [Identifying the Structure of Soil Massifs by Numerical Quasiconformal Mapping Methods]. *Kibernetyka ta systemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2021, vol. 57 (6), pp. 927–937.
3. Bomba, A., Boichura, M., Sydorchuk, B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2020, vol. 5, no. 4 (107), pp. 45–54. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215045.
4. Bomba A. Ya., Boychura M. V. *Metody kompleksnogo analizu v zadachakh identyfikatsiyi* [Methods of complex analysis in identification problems]. Rivne, NUVGP Publ., 2020. 188 p.
5. Bomba A. Ya., Gladka O. M., Kuz'menko A. P. *Obchyslyuval'ni tekhnologiyi na osnovi metodiv kompleksnogo analizu ta sumarnykh zobrazhen'* [Computing technologies based on methods of complex analysis and aggregated images]. Rivne, TzOV "Assol'" Publ., 2016. 283 p.
6. Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Prygornyts'kyy D. O., Yaroshhak S. V. *Metody kompleksnogo analizu* [Methods of complex analysis]. Rivne, NU-VGP, 2013. 415 p.
7. Kashtan S. S. Pro metod sumarnykh zobrazhen' rozv''yazannya neliniynykh obernenykh krayovykh zadach na komformni vidobrazhennya z osoblyvostyamy [On the method of total images for solving nonlinear inverse boundary value problems on conformal mappings with singularities]. *Volyns'kyy matematychnyy visnyk* [Volyn Mathematical Bulletin]. 2000, vol. 7, pp. 78–86.
8. Polozhiy G. N. *Chislennoe reshenie dvumernykh i tekhmernykh kraevykh zadach matematicheskoy fiziki i fynktsii diskretnogo argumenta* [Numerical solution of two-dimensional and three-dimensional boundary value problems of mathematical physics and discrete argument functions]. Kyiv, Izd-vo KGU Publ., 1962. 161 p.
9. Lyashko I. I., Velikoivanenko I. M., Lavrik V. I., Mistetskiy G. E. *Metod mazhorantnykh oblastey v teorii fil'tratsii* [The method of majorant domains in the theory of filtration]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1974. 200 p.
10. Samarskiy O. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 656 p.
11. Ortega D., Reinboldt W. *Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi* [Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns]. Moscow, Mir Publ., 1975. 558 p.

Надійшла (received) 19.04.2023

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Бомба Андрій Ярославович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп’ютерних наук та прикладної математики, Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Бомба Андрей Ярославович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных наук и прикладной математики, Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Bomba Andrii Yaroslavovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Computer Science and Applied Mathematics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne; tel.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

Каштан Сергій Степанович **–** кандидат технічних наук, доцент, викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський технічний фаховий коледж Національного університету водного господарства та природокористування», м. Рівне; тел.: (097) 025-47-25; e-mail: as024@ua.fm.

Каштан Сергей Степанович – кандидат технических наук, доцент, преподаватель, Обособленное структурное подразделение «Ровенский технический профессиональный колледж Национального университета водного хозяйства и природопользования», г. Ровно; тел.: (097) 025-47-25; e-mail: as024@ua.fm.

Kashtan Sergij Stepanovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Teacher, Separate structural unit "Rivne Technical Professional College of the National University of Water and Environmental Engineering", Rivne; tel.: (097) 025-47-25; e-mail: as024@ua.fm.