

Ю. І. ПЕРШИНА, О. Д. ПТАШНИЙ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ НОВИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Досліджуються методи відновлення внутрішньої структури об'єкта з використанням (м) нових інформаційних операторів, що розроблені українським науковцем професором Литвиним О.М., а саме – інтерлінація (ІІ) та інтерфлетация (ІІ). Оператори інтерлінації та інтерфлетации відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі прямих та площин відповідно. В роботі наводиться розв'язання тривимірної задачі комп'ютерної томографії з використанням оператора інтерфлетации функції. В якості експериментальних даних виступають томограми, отримані з реально діючого комп'ютерного томографа, та рівняння площин, на яких ці томограми лежать. В роботі розглядається задача відновлення коефіцієнта поглинання всередині тривимірного об'єкта за його томограмами, що лежать на системі трьох груп паралельних площин, які не обов'язково є перпендикулярними координатним осям. Крім того, будується оператор інтерфлетации на системі площин, кожна з яких не обов'язково перетинається з усіма іншими. Також розробляється метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, який використовує чотири томограми та будується за допомогою інтерфлетации функції трьох змінних. Крім того, представляються загальні види щільностей або коефіцієнтів поглинання об'єктів, які описуються функціями, що точно відновлюються за допомогою вказаної інформації. В роботі будується метод відновлення внутрішньої структури тіла з використанням оператора мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Цей метод рекомендується використовувати в тих випадках, коли експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площини, на якій лежить томограма, а також зображення на томограмах) задані з похибкою, і коли класичні оператори інтерполяції та інтерфлетации не згладжують дані, а повторюють всі похибки в експериментальних даних. Далі розроблені нові інформаційні оператори використовуються для відновлення динамічного тіла. В даній статті розв'язується задача двовимірної комп'ютерної томографії не тільки з використанням нових інформаційних операторів, але й з урахуванням неоднорідності внутрішньої структури досліджуваного тіла. Усі запропоновані методи мають високу точність.

Ключові слова: нові інформаційні оператори, інтерполяція, інтерлінація, інтерфлетация, розривна функція, комп'ютерна томографія.

Ю. И. ПЕРШИНА, О. Д. ПТАШНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуются методы восстановления внутренней структуры объекта с использованием новых информационных операторов, разработанных украинским ученым профессором Литвиным А.М., а именно – интерлинаяция и интерфлетация. Операторы интерлинаяции и интерфлетации восстанавливают функции (возможно, приближенно) по известным следам на данной системе прямых и плоскостей соответственно. В работе представляется решение трехмерной задачи компьютерной томографии с использованием оператора интерфлетации функции. В качестве экспериментальных данных выступают томограммы, полученные из реально действующего компьютерного томографа, и уравнения плоскостей, на которых эти томограммы лежат. В работе рассматривается задача восстановления внутренней структуры трехмерного объекта по его томограммам, лежащим на системе трех групп параллельных плоскостей, которые не обязательно перпендикулярны координатным осям. Кроме того, строится оператор интерфлетации на системе плоскостей, любая из которых не обязательно пересекается со всеми остальными. Также разрабатывается метод восстановления внутренней структуры трехмерного тела, использующий четыре томограммы и строящийся посредством интерфлетации функций трех переменных. А также представляются общие виды плотностей или коэффициентов поглощения объектов, которые описываются точно восстанавливаемыми функциями с помощью указанной информации. В работе строится метод восстановления внутренней структуры тела с использованием оператора смешанной аппроксимации полиномами Бернштейна. Этот метод рекомендуется использовать в тех случаях, когда экспериментальные данные (характеристики томограмм – геометрические параметры плоскости, на которой лежит томограмма, а также изображение на томограммах) заданы с погрешностью, и когда классические операторы интерполяции и интерфлетации не сглаживают данные, а повторяют все погрешности экспериментальных данных. Далее разработанные новейшие информационные операторы употребляются для восстановления динамического тела. В данной статье решается задача двумерной компьютерной томографии не только с использованием новых информационных операторов, но и неоднородности внутренней структуры изучаемого тела. Все предлагаемые методы обладают высокой точностью.

Ключевые слова: новые информационные операторы, интерполяция, интерлинаяция, интерфлетация, разрывная функция, компьютерная томография.

I. I. PERSHYN, O. D. PTASHNY

MATHEMATICAL MODELING IN COMPUTER TOMOGRAPHY BY NEW INFORMATION OPERATORS

In the paper the methods of restoring the internal structure of the object, using new information operators developed by the Ukrainian scientist Professor Lytvyn O.M., namely, interlineation and interflattation, are studied. Interlineation and interflattation operators restore functions (perhaps approximately) according to their known traces on a given system of lines and planes, respectively. The paper provides a solution to the three-dimensional computer tomography problem by the function interpolation operator. Tomograms obtained from a real computer tomograph and the equations of the planes on which these tomograms lie serve as experimental data. The paper considers the problem of restoring the absorption coefficient inside a three-dimensional object based on its tomograms lying on a system of three groups of parallel planes, which are not necessarily perpendicular to the coordinate axes. In addition, an interflattation operator is constructed on a system of planes, each of which does not necessarily intersect with all others. A method for restoring the internal structure of a three-dimensional body is also being developed, which uses four tomograms and is built using the interpolation of functions of three variables. Also, the paper presents the general forms of densities or absorption coefficients of objects, which are described by functions that can be accurately restored with the help of the specified information. In the work, a method of restoring the internal structure of the body is developed using the operator of blending approximation by Bernstein polynomials. This method is recommended to be used in cases when the experimental data (characteristics of tomograms – geometric parameters of the plane on which the tomogram lies, as well as images on the tomograms) are given with an error, and when the classic interpolation and interflattation operators do not smooth the data, but repeat all the errors in experimental data. Further, the developed new information operators are used to restore a dynamic body. In this paper, the problem of two-dimensional computer tomography is solved not only with the use of new information operators, but also the heterogeneity of the internal structure of the examined body. All proposed methods have high accuracy.

Key words: new information operators, interpolation, interlineation, interflattation, discontinuous function, computer tomography.

Вступ та аналіз останніх досліджень. В багатьох областях науки та техніки, таких як медицина, геофізика, електронна мікроскопія, астрофізика, промислова дефектоскопія, діагностика плазми та інших, виникає проблема визначення внутрішньої структури об'єкта найбільш зручним способом. Для її розв'язання в багатьох випадках неприйнятні прямі методи дослідження, що пов'язані з руйнуванням об'єкта. Тому при неруйнівному контролі тривимірних об'єктів, при проведенні наукових досліджень у різних областях науки і техніки тощо, знайшли широке застосування комп'ютерні томографи [1], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру тіла не розрізаючи його. *Комп'ютерною (обчислювальною) томографією* називають чисельне відновлення функцій двох і більше змінних за відомими їх лінійними інтегралами (уздовж) або площинними інтегралами (інтегралами по площинах). В основу практичного використання комп'ютерної томографії покладено принцип комп'ютерної томографії, реалізація якого здійснюється за таким алгоритмом:

1. Досліджувані об'єкти опромінують в різних ракурсах.
2. Детекторами вимірюють *характеристики випромінювання* (наприклад, *коефіцієнт поглинання випромінювання*), яке пройшло через достатньо тонкий шар тіла.
3. Отримані результати кодують та вводять в електронно-обчислювальні пристрої як експериментальні дані.
4. За допомогою сучасних методів обчислювальної математики знаходять просторовий розподіл кількісних фізичних характеристик об'єкта (наприклад, його густини).
5. Отримані результати візуалізують за допомогою спеціальних пристроїв.

Значна увага багатьох вчених на даний час приділяється *оптимізації методів наближення функцій багатьох змінних*. Інформація, яка при цьому використовується для побудови операторів наближення, включає *дані Радона* [2], які надходять з комп'ютерного томографу. Тобто треба вміти обробляти математично серію проєкцій вздовж заданої системи ліній або серію малюнків (експериментальних даних), отриманих тим чи іншим способом, які можуть бути: слідами функцій двох або трьох змінних на заданій системі ліній та площин відповідно, зображеннями внутрішньої структури тіла в заданій системі площин, що перетинають тіло. Взагалі кажучи, об'єкти, які потрібно відновлювати, наприклад в медичній комп'ютерній томографії, можна описати функціями, що мають розриви першого роду на деяких лініях чи поверхнях [3]. А для більш точного дослідження об'єкта корисним є вміння визначати *геометричні характеристики ліній та поверхонь розриву*. Така задача виникає, наприклад, при виявленні дефектів багатощарового об'єкта. Не існує томографічних методів, які враховують факт неоднорідності внутрішньої структури об'єкта.

Розвиток томографічних методів в наукових дослідженнях та медичній діагностиці, який почався у другій половині ХХ століття, та пов'язаний з появою та масовим використанням швидкодіючих ЕОМ, продовжується і в теперішній час, захоплюючи все нові й часто несподівані області людської діяльності.

Відмітимо суттєву обставину: математичні основи томографії були закладені ще на початку минулого століття в роботах *німецького вченого Й. Радона* [2], який розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (*перетворення Радона*). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин. За останні десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації.

Виділимо основні риси та особливості томографічних методів. Найбільш приваблива риса полягає в тому, що способи вимірювань не руйнують об'єкт. Так, в трансмісійній томографії використовується активне зондування середини фізичного поля, характеристики якого фіксуються після проходження об'єкта. Вимірювання в емісійній томографії здійснюються з використанням власних джерел випромінювання, природного чи штучного походження. В переважній більшості математичних моделей в томографії використовується *променеве наближення*: інформація про середовище "накопичується" вздовж променю та реєструється на виході. Невід'ємною рисою томографії є й багатократне проведення однотипних вимірювань, чим досягається мета отримання достатнього об'єму даних, їх недостатність яких веде до неоднозначності розв'язку, а неточності у вимірюваннях – до його нестійкості в силу некоректності задачі томографії.

Але практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності, оскільки є недостатньо обґрунтованою *доза опромінення томографу* та наявні невластиві об'єкту артефакти на екранах дисплеїв при відновленні об'єкта у заданому перетині. У практиці при дослідженні томографічних зображень часто виникає *задача отримання зображення перетину тіла* у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів.

Далі виникає питання: якими методами обробляти отримані експериментальні дані? Звичайно, існують *класичні методи інтерполяції та апроксимації*, які й використовуються в *математичних методах сучасної комп'ютерної томографії*. Ці методи базуються на використанні перетворення Радона, вони в повному обсязі викладені в роботах [4 – 6]. Але дана робота спрямована на застосування нових методів обробки сигналів та наголошення їх актуальності. Запропоновані в статті методи базуються на обробці томограм, вже отриманих з комп'ютерного томографу.

В останні десятиліття набув поширення напрямок математичної обробки багатовимірних сигналів *новими інформаційними операторами*, розробленими *професором Литвиним Олегом Миколайовичем*, частинним випадком яких є й *інтерполяція*. Ці нові оператори відновлюють (можливо, наближено) функції двох і більше змін-

них за їхніми слідами в точках чи на лініях, чи на поверхнях. У випадку, коли в якості експериментальних даних виступають значення невідомої функції в точках, *інформаційний оператор* називається *інтерполяційним*. Вони є об'єктом досліджень багатьох авторів і знаходять застосування в різних галузях обчислювальної математики. У випадку, коли вхідними даними є сліди функції на лініях, *інформаційний оператор* називається оператором *інтерлінаційним* [7] (від англ. interlineation: *inter* – між, *line* – лінія), а у випадку вхідних даних-слідів функції на поверхнях – *інтерфлетаційним оператором* [8] (від англ. interflation: *inter* – між, *flat* – плоска поверхня). Сама операція побудови вказаних операторів називається, відповідно, *інтерлінацією* та *інтерфлетацією*.

Отже, оператори інтерфлетації відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі площин, а саме такі дані використовуються в дистанційних методах, зокрема в томографії. Тобто вони надають можливість будувати оператори, інтегралі від яких по вказаних площинах (площинні інтегралі) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Тому, інтерфлетация – математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів за їх відомими проєкціями. Саме ці нові інформаційні оператори і будемо використовувати для викладення нових сучасних математичних методів для моделювання процесу відновлення внутрішньої структури об'єктів.

Відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за томограмами, що лежать на системі трьох груп перетинних площин, за допомогою операторів інтерфлетації. Нехай функція $f(x)$, $x \in R^3$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x)$, тобто про внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин, а також набір томограм, які лежать на цих площинах. Нехай тривимірне тіло, яке треба відновити, обмежене деякою областю.

Нехай задано три групи томограм. В кожній групі томограми лежать на паралельних площинах. Томограми розташовуються на площинах, які задаються рівняннями наступного виду:

$$\text{П1: } \omega_{1_i}(x) = \sum_{p=1}^3 a_{ip} x_p - \gamma_{1_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad \text{П2: } \omega_{2_k}(x) = \sum_{p=1}^3 b_{kp} x_p - \gamma_{2_k}, \quad k = \overline{1, m}; \quad \text{П3: } \omega_{3_l}(x) = \sum_{p=1}^3 c_{lp} x_p - \gamma_{3_l}, \quad l = \overline{1, s},$$

де n, m, s – кількість паралельних площин в групах П1, П2, П3 відповідно; числа $\gamma_{1_i}, \gamma_{2_k}, \gamma_{3_l}, a_{ip}, b_{kp}, c_{lp}$ задані. Вважаємо, що в кожній групі площини паралельні між собою, тобто $a_{ip} = a_{i'p}, b_{kp} = b_{k'p}, c_{lp} = c_{l'p}, i \neq i', k \neq k', l \neq l'$. Введемо наступні позначення:

$$1. \quad \tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix} \quad \text{– вектор, направлений вздовж лінії перетину площин } \omega_{1_i} = 0, \omega_{2_k} = 0;$$

2. $M = \{(i, k, l) \mid \text{П1}_i \cap \text{П2}_k \cap \text{П3}_l = V_{ikl} = (x_{ikl1}, x_{ikl2}, x_{ikl3}) \neq \emptyset, i \neq k \neq l\}$, де V_{ikl} – точка перетину i -ої площини з групи П1, k -ої площини з групи П2 та l -ої площини з групи П3;

3. $\Gamma_{ik} = \text{П1}_i \cap \text{П2}_k \neq \emptyset, \Gamma_{il} = \text{П1}_i \cap \text{П3}_l \neq \emptyset, \Gamma_{kl} = \text{П2}_k \cap \text{П3}_l \neq \emptyset$ – ребра, за якими перетинаються дві площини, на яких лежать відповідні томограми;

$$4. \quad \Delta_{ikl} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix} \quad \text{– визначник, складений із коефіцієнтів рівнянь заданих площин};$$

5. $T_{1,k}(\bar{x})$ – томограма, яка лежить на площині П1_k .

Теорема 1. Для існування функції $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega)$ із заданими томограмами

$$T_{1,i}(\bar{x}), \quad i = \overline{1, n}, \quad T_{2,k}(\bar{x}), \quad k = \overline{1, m}, \quad T_{3,l}(\bar{x}), \quad l = \overline{1, s},$$

для якої виконуються умови

$$L_{ikl}(x)|_{\text{П1}_i} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\text{П1}_i}, \quad L_{ikl}(x)|_{\text{П2}_k} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\text{П2}_k}, \quad L_{ikl}(x)|_{\text{П3}_l} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\text{П3}_l},$$

необхідно та достатньо, щоб сліди $T_{q,d}(\bar{x}), q = 1, 2, 3, d = i, k, l, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, s}$ задовольняли умови $T_{q,d}(\bar{x}) \in C^r(R^2), r \geq 0$ та умовам С. М. Нікольського [9], які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$T_{2,k}(u_{il}^k(x))|_{\omega_{3_l}(x)=0} = T_{3,l}(u_{ik}^l(x))|_{\omega_{2_k}(x)=0},$$

тобто значення томограм, на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li} .

В точці V_{ikl} умови Нікольського зводяться до перевірки рівностей:

$$T_{3,l}(u_{ik}^l(x)) \Big|_{\omega_1(x)=0, \omega_2(x)=0} = T_{2,k}(u_{li}^k(x)) \Big|_{\omega_3(x)=0, \omega_1(x)=0} = T_{1,i}(u_{kl}^i(x)) \Big|_{\omega_2(x)=0, \omega_3(x)=0},$$

тобто значення томограм в точці перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються.

Приклад 1. Нехай в просторі задано три площини, які мають рівняння

$$\omega_1(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 0, \quad \omega_2(x, y, z) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \quad \omega_3(x, y, z) = z = 0.$$

Томограми, які лежать на цих площинах, відповідно можуть мати наступний вигляд:

$$T_1(x, z) = f(x, y, z) \Big|_{\omega_1=0} = f(x, -2z - \sqrt{3}x, z); \quad T_2(y, z) = f(x, y, z) \Big|_{\omega_2=0} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3}y, y, z\right);$$

$$T_3(x, y) = f(x, y, z) \Big|_{\omega_3=0} = f(x, y, 0).$$

Умови С. М. Нікольського на ребрі, утвореному площинами $\omega_1 = 0$ та $\omega_3 = 0$, будуть мати вигляд:

$$f(x, y, z) \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_3=0}} = T_{30} = T_{10}; \quad f(x, y, z) \Big|_{\substack{\omega_1=0 \\ \omega_3=0}} = f\left(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0\right); \quad T_{30} = f(x, y, 0) \Big|_{x=-\frac{y}{\sqrt{3}}} = f\left(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0\right);$$

$$T_{10} = f\left(\frac{-2z-y}{\sqrt{3}}, y, z\right) \Big|_{z=0} = f\left(-\frac{y}{\sqrt{3}}, y, 0\right).$$

Аналогічно можна записати умови С. М. Нікольського на інших двох ребрах.

Сформулюємо теорему про зовнішній вигляд похибки відновлення внутрішньої структури тривимірної функції.

Теорема 2. Припустимо, внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x) \in C^r(\Omega)$ ($r \geq 3$), яка має томограми $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$, задані на площинах Π_1, Π_2, Π_3 відповідно, та задовольняє умовам

$$f(x) \Big|_{\Pi_1} = T_{1,i}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_1}, \quad f(x) \Big|_{\Pi_2} = T_{2,k}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_2}, \quad f(x) \Big|_{\Pi_3} = T_{3,l}(\bar{x}) \Big|_{\Pi_3}.$$

Тоді для похибки $R_{ikl}f(x) = (I - L_{ikl})f(x)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl}f(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність:

$$R_{ikl}f(x) = \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} \int_0^{\omega_3} \frac{\partial^3}{\partial t_i \partial t_k \partial t_l} f \left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega_2, \omega_3}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}^{\omega_3, \omega_1}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}^{\omega_1, \omega_2}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i dt_k dt_l. \quad (1)$$

Теорема 3. Нехай множина трьох груп паралельних томограм, які знаходяться на площинах Π_1, Π_2, Π_3 , задовольняє двом умовам:

- 1) в одній точці $V_{ikl} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ перетинаються рівно три томограми;
- 2) кожна томограма однієї групи перетинається з кожною томограмою інших двох груп (а всередині групи томограми паралельні, тобто не перетинаються).

Тоді система функцій

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega_{1_j}(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega_{2_k}(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega_{3_j}(x)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega_{1_j}(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \omega_{2_k}(V_{ikl}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^s \omega_{3_j}(V_{ikl})}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s}$$

має властивості: $h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}$, $i, i' = \overline{1, n}$, $k, k' = \overline{1, m}$, $l, l' = \overline{1, s}$.

Лема. Нехай томограми $T_{1,i}(\bar{x})$, $i = \overline{1, n}$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $k = \overline{1, m}$, $T_{3,l}(\bar{x})$, $l = \overline{1, s}$ задовольняють умовам теореми 1, тоді система функцій $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^m \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, l}}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, k}}^s h_{ikl}(x) = 1.$$

Теорема 4. Нехай томограми $T_{1,i}(\bar{x})$, $T_{2,k}(\bar{x})$, $T_{3,l}(\bar{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 3$ задовольняють умовам С. М. Ніколь-

ського на ребрах i в точці перетину площин. Тоді функція

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) L_{ikl}(x) \quad (2)$$

є поліноміальним інтерфлетантом [10] із властивостями:

$$L(x) \in C^r(\Omega), \quad L(x)|_{\Pi_{1i}} = T_{1,i}(\bar{x})|_{\Pi_{1i}}, \quad L(x)|_{\Pi_{2k}} = T_{2,k}(\bar{x})|_{\Pi_{2k}}, \quad L(x)|_{\Pi_{3l}} = T_{3,l}(\bar{x})|_{\Pi_{3l}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s}.$$

При цьому $\forall f(x) \in C^r(\Omega)$, $r \geq 3$, що задовольняє умовам теореми 1, виконується рівність:

$$L(x) = Lf(x), \quad f(x) = Lf(x) + Rf(x), \quad R(x)f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s h_{ikl}(x) R_{ikl}f(x),$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначається формулою (1), а $h_{ikl}(x)$ – допоміжні поліноми, що визначаються в теоремі 3.

Отже, за допомогою оператора поліноміальної інтерфлетації, який визначається в теоремі 4, можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла (просторово змінний коефіцієнт всередині тривимірного тіла) за відомими томограмами, що лежать на системі трьох груп перерізаних площин, з більш високою точністю (ε^3), ніж це можна зробити за відомими томограмами, які лежать на одній групі паралельних площин (ε) (як це робиться в класичній томографії). Тобто цей оператор представляє собою математичну модель процесу комп'ютерної томографії з використанням оператора поліноміальної інтерфлетації за відомими томограмами, що лежать на системі трьох груп паралельних площин.

Мішана апроксимація поліномами Бернштейна. Розглянемо вище викладену теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою *поліномів Бернштейна* [11] та застосуємо її до розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії.

Узагальнений поліном Бернштейна для функцій $f(x, y, z)$, $(x, y) \in [0, 1]^3$ трьох змінних має вигляд:

$$B_{nms}f(x, y, z) = B_{1n} B_{2m} B_{3s} f(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{p=0}^s C_n^k C_m^l C_s^p x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{m-l} z^p (1-z)^{s-p} f(x_k, y_l, z_p);$$

$$B_{1n} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k, y, z); \quad B_{2m} = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} f(x, y_l, z); \quad B_{3s} = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} f(x, y, z_p).$$

Оператори $B_{nms}f$ використовують $(n+1)(m+1)(s+1)$ значень $f(x_k, y_l, z_p)$, але

$$B_{nms}f(x_k, y_l, z_p) \neq f(x_k, y_l, z_p), \quad k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, m}, \quad p = \overline{0, s}.$$

Теорема 5. Для залишку наближення функції $f(x, y, z)$ операторами $B_{nms}f(x, y, z)$ виконується рівність:

$$f(x, y, z) - B_{nms}f(x, y, z) = ((I - B_{1n}) + (I - B_{2m}) + (I - B_{3s}) - (I - B_{1n})(I - B_{2m}) - (I - B_{1n})(I - B_{3s}) - (I - B_{2m})(I - B_{3s}) + (I - B_{1n})(I - B_{2m})(I - B_{3s}))f(x, y, z).$$

Це означає, що для функції $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}[0, 1]^3$, яка має в точці $(c, d, h) \in [0, 1]^3$ неперервні похідні $f^{(2,0,0)}(x, y, z)$, $f^{(0,2,0)}(x, y, z)$, $f^{(0,0,2)}(x, y, z)$, виконуватиметься співвідношення:

$$\begin{aligned} B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h) &= \frac{f^{(2,0,0)}(c, d, h)c(1-c)}{2n} + \frac{f^{(0,2,0)}(c, d, h)d(1-d)}{2m} + \\ &+ \frac{f^{(0,0,2)}(c, d, h)h(1-h)}{2s} - \frac{f^{(2,2,0)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)}{4nm} - \frac{f^{(2,0,2)}(c, d, h)c(1-c)h(1-h)}{4ns} - \\ &- \frac{f^{(0,2,2)}(c, d, h)d(1-d)h(1-h)}{4ms} + \frac{f^{(2,2,2)}(c, d, h)c(1-c)d(1-d)h(1-h)}{8nms} + \\ &+ o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{nm}\right) + o\left(\frac{1}{ns}\right) + o\left(\frac{1}{ms}\right) + o\left(\frac{1}{nms}\right), \quad n, m, s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тобто $|B_{nms}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O((\min\{n, m, s\})^{-1})$, $m, n, s \rightarrow \infty$.

Припустимо, що $m = n = s$. Тоді отримаємо $|B_{nns}f(c, d, h) - f(c, d, h)| = O(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$.

Сформулюємо визначення мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Для цього введемо деякі необхідні поняття.

Нехай внутрішня структура тривимірного об'єкта описується функцією $f(x, y, z)$, яка повністю розміщена

в одиничному кубі $[0,1]^3$. Та нехай задані три системи паралельних томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографа. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ці групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми:

1. $T1_k(y, z) = f(x_k, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних осі Ox ;
2. $T2_l(x, z) = f(x, y_l, z)$, $l = \overline{1, m}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних осі Oy ;
3. $T3_p(x, y) = f(x, y, z_p)$, $p = \overline{1, s}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних осі Oz .

Визначення. Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори виду:

$$Of(x, y, z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B1_n B3_s - B2_m B3_s + B1_n B2_m B3_s) f(x, y, z),$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y, z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x, z); \quad B3_s = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x, y). \quad (3)$$

n, m, s – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні осям Ox, Oy, Oz відповідно.

Теорема 6. Нехай $f \in C^{2,2,2}[0,1]^3$. Тоді для оператора Of виконується асимптотичне співвідношення

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = \frac{f^{(2,2,2)}(x, y, z) x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{8nms} + o\left(\frac{1}{nms}\right).$$

Зауваження. Якщо в рівності з теорема 6 покласти $n = m = s$, то

$$f(x, y, z) - Of(x, y, z) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тобто оператор Of , у випадку $n = m = s$, має порядок точності відносно змінної n у три рази більший, ніж при наближенні оператором $B_{nms}f$. Звертаємо увагу на те, що оператор $Of(x, y, z)$ потребує для своєї побудови томограми $T1_k, T2_l, T3_p$, тобто сліди наближеної функції $f(x, y, z)$ на заданих лініях, паралельних осям координат.

Тобто для оцінки похибки наближення функції $f(x, y, z)$ оператором $Of(x, y, z)$ виконується нерівність:

$$\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\varepsilon_1 = \|(I - B1_n)f\|_{C[0,1]^3}, \quad \varepsilon_2 = \|(I - B2_m)f\|_{C[0,1]^3}, \quad \varepsilon_3 = \|(I - B3_s)f\|_{C[0,1]^3}.$$

При описі внутрішньої структури тривимірного тіла істотно використовуються експериментальні дані – томограми $(T_q, q = \overline{1, M})$ та площини $(\Pi_k, k = \overline{1, M})$, на яких лежать ці томограми. Нижче проаналізуємо вплив похибок задання експериментальних даних на похибку відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Якщо є похибка вхідних даних (томограм), тобто томограма не лежить на заданій площині: $T1_k(y, z) + \varepsilon1_k, T2_l(x, z) + \varepsilon2_l, T3_p(x, y) + \varepsilon3_p$, то $Ou(x, y, z) = u(x, y, z) + r_1 + r_2$, де r_1 – похибка методу, r_2 – похибка вихідних даних. Тоді похибку вихідних даних можна оцінити так:

$$|r_2| \leq \max_{\substack{k=\overline{1,n} \\ l=\overline{1,m} \\ p=\overline{1,s}}} \{\varepsilon1_k, \varepsilon2_l, \varepsilon3_p\}.$$

За викладеною методикою був розроблений комплекс програм в системі комп'ютерної математики *Math-Cad*. Результати її тестування демонструють високу точність.

Продемонструємо результати роботи програми, яка дозволяє знайти перетини тривимірного тіла в будь-якій площині за відомими томограмами на системі трьох взаємно перпендикулярних площинах, а також за томограмами, перпендикулярними тільки одній осі Ox або тільки осі Oy , або тільки осі Oz .

Вихідними даними програми є сукупність томограм (файлів у форматі *bmp*), які зображають перетини цього тіла на системі трьох груп взаємно перпендикулярних площин. Тобто ця сукупність файлів є масивом томограм, причому належність файлу до однієї з груп паралельних томограм визначається його назвою (наприклад, *A1.bmp, A2.bmp, A3.bmp* – томограми, які належать першій групі площин, *B1.bmp, B2.bmp, B3.bmp* – томограми, які належать другій групі площин, *C1.bmp, C2.bmp, C3.bmp* – належать третій групі площин).

Оператори мішаної апроксимації реалізовані в програмі у вигляді окремих функцій $O1(i, k, l, x)$, $O2(k, l, i, x)$, $O3(l, i, k, x)$, $OO1(k, l, i, x)$, $OO2(l, i, k, x)$, $OO3(i, k, l, x)$, $OOO(i, k, l, x)$. Ці функції відповідають операторам, визначеним в (3). Кожна з цих функцій обчислює номери томограм, найближчих до точки з координатами (x_1, x_2, x_3) , та за цими номерами звертається до конкретних елементів тривимірного масиву томограм.

Припустимо, що тіло повністю розміщене в одиничному кубі $[0,1]^3$. В якості експериментальних даних задані: 1) система площин $x = x_1 = 0$, $x = x_2 = 0.2$, $x = x_3 = 0.4$, $x = x_4 = 0.6$, $x = x_5 = 0.8$, $x = x_6 = 1$; $y = y_1 = 0$, $y = y_2 = 0.2$, $y = y_3 = 0.4$, $y = y_4 = 0.6$, $y = y_5 = 0.8$, $y = y_6 = 1$; $z = z_1 = 0$, $z = z_2 = 0.2$, $z = z_3 = 0.4$, $z = z_4 = 0.6$, $z = z_5 = 0.8$, $z = z_6 = 1$; 2) експериментальні дані у вигляді 18 томограм. Будемо вважати, що томограми розміщені на заданих площинах (рис. 1).

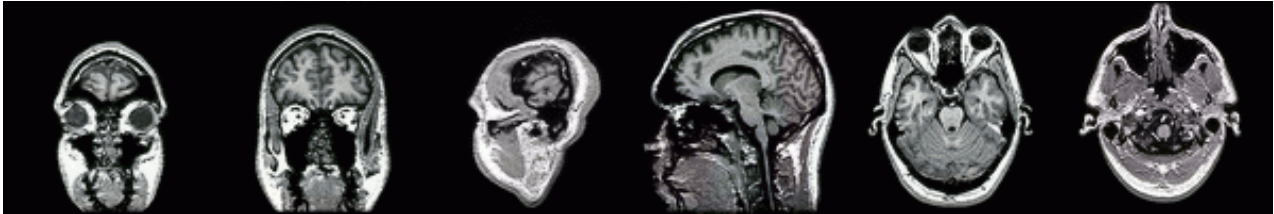


Рис. 1 – Приклади томограм, що поступають з комп'ютерного томографу та використовуються в якості експериментальних даних.

На рис. 2 та 3 наведені результати роботи складених програм.

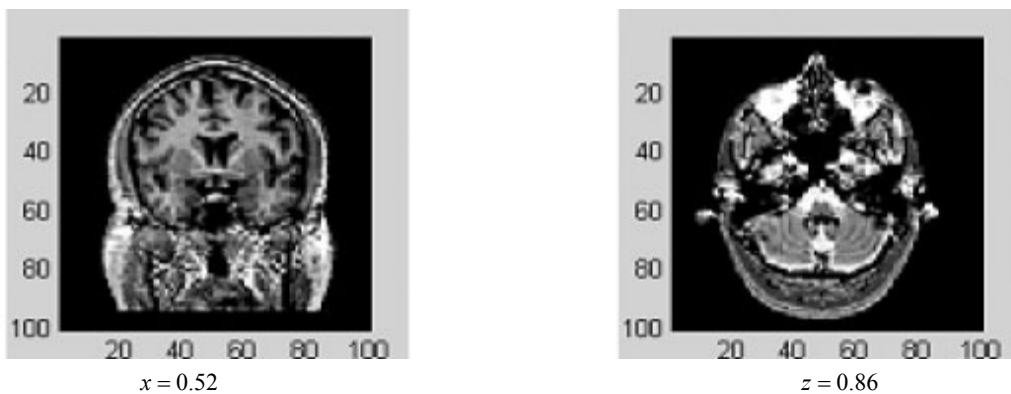


Рис. 2 – Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом в площинах: а – $x = 0.52$ між томограмами, що лежать на площинах $x = 0.5$, $x = 0.6$; б – $z = 0.86$ між томограмами, що розташовані на площинах $z = 0.8$, $z = 0.9$.

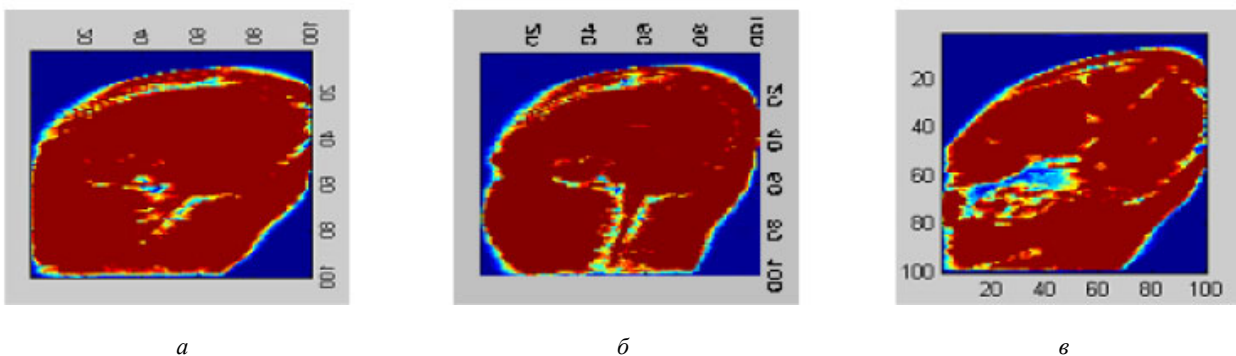


Рис. 3 – Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом у похилій площині за допомогою томограм: а – перпендикулярних осі Ox ; б – перпендикулярних осі Oy ; в – перпендикулярних осям Ox, Oy, Oz .

З рис. 3 робимо висновок, що відновлення тривимірного тіла за допомогою операторів мішаної апроксимації за відомими томограмами, розташованими на системі трьох взаємно перпендикулярних площинах, є більш точним, ніж метод, що використовує томограми, що лежать на системі площин, паралельних лише одній координатній осі, що і підтверджує викладену теорію.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою мішаної апроксимації поліномами Бернштейна рекомендується використовувати в тих випадках, коли експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площини, на якій лежить томограма, а також зображення на томограмах) задані з похибкою, і коли класичні оператори інтерполяції та інтерфлетації не згладжують дані, а повторюють всі похибки в експериментальних даних. Запропонований метод має високу точність, як і метод, що використовує інтерфлетацію функцій.

Розв'язання тривимірної задачі комп'ютерної томографії з використанням невеликої кількості томограм. Отримання томограм за допомогою *рентгенівського комп'ютерного томографа* – це опромінення пацієнта. І одна із задач комп'ютерної томографії – зменшити опромінення. Тому актуальною є розробка методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою невеликої кількості вхідних даних [12], тобто томограм.

В даному пункті розробляється метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, який використовує чотири томограми та будується за допомогою інтерфлетації функцій трьох змінних. А також представляються загальні види щільностей або коефіцієнтів поглинання об'єктів, які описуються функціями, що точно відновлюються за допомогою вказаної інформації.

Постановка задачі. Нехай функція $f(x, y, z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$, $s, p = \overline{0, N}$, $\Omega \subset R^3$ представляє собою щільність тривимірного тіла (чи коефіцієнт поглинання, послаблення тощо) та задані чотири площини $x = x_k$, $y = y_\ell$, $k, \ell = 1, 2$. Не обмежуючи загальності, беремо площини, перпендикулярні двом координатним осям, наприклад осі Ox та Oy . З комп'ютерного томографа отримано томограми, які лежать на заданих площинах. Задача полягає в тому, щоб за вказаними вхідними даними побудувати оператор, який буде відновлювати досліджуваній об'єкт, та навести загальний вигляд функцій, які будуть відновлюватися точно побудованим оператором.

Для відновлення внутрішньої структури будемо використовувати інтерфлетаційний оператор (2). Обмежимося чотирма вхідними томограмами, що лежать на чотирьох взаємно перпендикулярних площинах.

Теорема 7. Нехай функція $f(x, y, z) \in C^{(s,p,0)}(\Omega)$, $s, p = \overline{0, N}$, $\Omega \subset R^3$ представляє собою внутрішню структуру тривимірного тіла та задані чотири площини $x = x_k$, $y = y_\ell$, $k, \ell = 1, 2$. Оператор

$$L(x, y, z) = (L_1 + L_2 - L_1 L_2) f(x, y, z); \quad L_1 f(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{i,s}(x) f^{(s,0,0)}(x_i, y, z);$$

$$L_2 f(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 \sum_{p=0}^N g_{j,p}(y) f^{(0,p,0)}(x, y_j, z); \quad L_1 L_2 f(x, y, z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^N \sum_{p=0}^N h_{i,s}(x) g_{j,p}(y) f^{(s,p,0)}(x_i, y_j, z),$$

де $h_{i,s}(x)$, $g_{j,p}(y)$ – допоміжні функції з властивостями:

$$h_{u,s}(x_v) = \delta_{uv}, \quad g_{u,s}(y_v) = \delta_{uv}, \quad \delta_{uv} - \text{символ Кронекера}, \quad \sum_{i=1}^2 h_{i,s}(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^2 g_{j,s}(y) = 1, \quad s, p = \overline{0, N},$$

є оператором інтерфлетації функцій трьох змінних, який задовольняє умовам:

$$\left. \frac{\partial^p L(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k} = \left. \frac{\partial^p f(x, y, z)}{\partial x^p} \right|_{x=x_k}, \quad p = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2;$$

$$\left. \frac{\partial^s L(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_\ell} = \left. \frac{\partial^s f(x, y, z)}{\partial y^s} \right|_{y=y_\ell}, \quad s = \overline{0, N}, \quad \ell = 1, 2.$$

Оператор інтерфлетації, визначений в теоремі 7, відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими чотирма томограмами, що лежать на заданих площинах. Похибка відновлення цим оператором визначається наступними теоремами.

Теорема 8. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$. Тоді для похибки $Rf(x, y, z)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x, y, z)$ тривимірного тіла оператором $L(x, y, z)$, побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:

$$Rf(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1 L_2) f(x, y, z) =$$

$$= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x) g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(p, q, z) dp dq. \quad (4)$$

Теорема 9. Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega)$, $\Omega \subset R^3$. Тоді для похибки $Rf(x, y, z)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x, y, z)$ тривимірного тіла оператором $L(x, y, z)$, побудованим за допомогою заданого набору площин та томограм, що лежать на цих площинах, виконується рівність:

$$Rf(x, y, z) = f(x, y, z) - Lf(x, y, z) = (I - L_1 - L_2 + L_1L_2)f(x, y, z) = \\ = \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k(x)g_\ell(y) \int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(p, q, z)(x_k - p)(y_\ell - q)dpdq. \quad (5)$$

Тепер знайдемо загальний вигляд функцій, що описують внутрішню структуру тривимірного тіла, які точно будуть відновлюватися за допомогою оператора інтерфлетації, побудованого в теоремі 7, використовуючи чотири томограми, що лежать на заданих площинах $x = x_k, y = y_\ell, k, \ell = 1, 2$, і розглянемо два випадки.

1) Функція неперервна та має дві неперервні похідні, тобто $f(x, y, z) \in C^{(1,1,0)}(\Omega), \Omega \subset R^3$. Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (4) виходить, що повинна виконуватися рівність:

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(1,1,0)}(u, v, z)du dv = 0.$$

Для виконання цієї рівності має виконуватись умова $f^{(1,1,0)}(x, y, z) = 0$. Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,1,0)}(x, y, z)dx = \varphi(y, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int f^{(0,1,0)}(x, y, z)dy = \int \varphi(y, z)dy + \psi(x, z) = w(y, z) + \psi(x, z).$$

Тобто, загальний вигляд функції, яка точно відновлюється за допомогою оператора інтерфлетації, визначеного в теоремі 7, має вигляд $f(x, y, z) = w(y, z) + \psi(x, z)$.

2) Функція неперервна та має чотири неперервні похідні, тобто $f(x, y, z) \in C^{(2,2,0)}(\Omega), \Omega \subset R^3$. Для точного відновлення похибка наближення повинна дорівнювати нулю. Із загального вигляду похибки (5) виходить, що повинна виконуватися рівність:

$$\int_{x_k}^x \int_{y_\ell}^y f^{(2,2,0)}(u, v, z)(x_k - u)(y_\ell - v)du dv = 0.$$

Для виконання цієї рівності необхідно, щоб $f^{(2,2,0)}(x, y, z) = 0$. Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

$$f^{(1,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(2,2,0)}(x, y, z)dx = \varphi_1(y, z);$$

$$f^{(0,2,0)}(x, y, z) = \int f^{(1,2,0)}(x, y, z)dx = \int \varphi_1(y, z)dx = x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z);$$

$$f^{(0,1,0)}(x, y, z) = \int (x\varphi_1(y, z) + \varphi_2(y, z))dy = x \int \varphi_1(y, z)dy + \int \varphi_2(y, z)dy + \psi_1(x, z);$$

$$f^{(0,0,0)}(x, y, z) = \int (x \int \varphi_1(y, z)dy + \int \varphi_2(y, z)dy + \psi_1(x, z))dy =$$

$$= x \int \left[\int \varphi_1(y, z)dy \right] dy + \int \left[\int \varphi_2(y, z)dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z).$$

Тобто, загальний вигляд функції, яка точно відновлюється за допомогою вище введеного оператора інтерфлетації, має вигляд:

$$f(x, y, z) = x \int \left[\int \varphi_1(y, z)dy \right] dy + \int \left[\int \varphi_2(y, z)dy \right] dy + y\psi_1(x, z) + \psi_2(x, z).$$

Побудова чотиривимірної математичної моделі динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла. Розглядається задача відновлення коефіцієнта поглинання всередині тривимірного об'єкту, що змінюється з часом, за його томограмами, що лежать на системі трьох груп паралельних площин, які не обов'язково є перпендикулярними координатним осям. Крім того, будується чотиривимірна математична модель тривимірного тіла з використанням томограм, що лежать на системі площин, кожна з яких не обов'язково перетинається з усіма іншими.

Нехай функція $f(x, y, z, t)$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (наприклад, щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x, y, z, t)$, тобто про динамічну внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$, $p = \overline{1, s}$, а також набір томограм, які лежать на цих площинах, в конкретні моменти часу.

В якості експериментальних даних будемо використовувати:

1. послідовність n моментів часу: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$;

2. серію s площин, заданих рівняннями: $\Pi_p : \omega_p(x, y, z) = a_{p1}x + a_{p2}y + a_{p3}z - \gamma_p = 0$, $p = \overline{1, s}$

3. томограми тривимірного об'єкта T_{kp} , $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, s}$, які лежать на заданих площинах Π_p та в задані моменти часу $t = t_k$, $k = \overline{1, n}$.

Томограми отримуємо за допомогою комп'ютерного томографа. Тобто маємо n груп томограм (в кожній групі по s томограм). В кожній групі томограми представлені в один і той же момент часу, Але вони лежать на різних площинах. Відмітимо, що кількість томограм в різні моменти часу може бути, взагалі кажучи, різною. Це також відноситься і до кількості рівнянь площин, на яких лежать томограми. Більш того, в різні моменти часу площини, на яких лежать томограми, можуть бути задані різними рівняннями.

Спочатку побудуємо n тривимірних математичних моделей $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t = t_k$, $k = \overline{1, n}$.

Тобто отримаємо функцію $f_k(x, y, z)$, яка в точках площини Π_p в k -й момент часу співпадає із зображенням p -ї томограми. Для побудови таких функцій можуть бути використані: 1) оператори сплайн-інтерфлетатції; 2) оператори мішаної апроксимації. У випадку 1) побудовані тривимірні математичні моделі $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t = t_k$, $k = \overline{1, n}$ повинні задовольняти умовам:

$$f(x, y, z, t_k)|_{\Pi_p} = f_k(x, y, z)|_{\Pi_p} = T_{k,p}(\bar{x}), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}.$$

При цьому, якщо експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площин, на яких лежать томограми, а також зображення на томограмах) задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетатції функцій. Якщо ж експериментальні дані задані з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач тривимірної комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації. Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла відрізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ будуємо чотиривимірну модель $F(x, y, z, t)$, використовуючи метод інтерполяції за змінною t у вигляді формули

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n h_k(t) f_k(x, y, z),$$

де $h_p(t)$ – допоміжні функції від однієї змінної t з властивостями:

$$h_k(t_q) = \delta_{kq}, \quad k, q = \overline{1, n}, \quad \delta_{kq} = \begin{cases} 1, & k = q, \\ 0, & k \neq q \end{cases} \text{ – символ Кронекера.}$$

Теорема 10. Якщо експериментальні дані (томограми T_{kp} , $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, s}$, що лежать на площинах Π_p) відповідають функції, яку наближуємо, $f(x, y, z, t) \in C^r(D)$, $D = G \times [0, T]$, $r \geq 0$, $G \subset R^3$, $t \in [0, T]$, то можна побудувати 4D модель $F(x, y, z, t)$ внутрішньої структури об'єкта, яка змінюється з часом:

$$F(x, y, z, t) \in C^r(D),$$

$$F(x, y, z, t_k)|_{\omega_p(x, y, z)=0} = f_k|_{\omega_p(x, y, z)=0} = T_{kp}(u, v), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, s}, \quad (u, v) = \begin{cases} (x, y) \\ (x, z) \\ (y, z) \end{cases}.$$

Відмітимо, що задача в такій постановці не має єдиного розв'язку. Але, при певних обмеженнях на клас функції, яку наближуємо, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближених функцій $f(x, y, z, t)$ може бути оцінена похибка наближення.

Було проведено обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури серця людини, яке змінюється з часом.

В якості експериментальних даних взяли такі:

1. $n = 25$ моментів часу;
2. $s = 9$ паралельних зрізів серця площинами, перпендикулярними осі Ox (метод дозволяє використовувати наряду з даними томограми також томограми, що лежать в інших перетинах, не перпендикулярних осі Ox);
3. томограми серця, які лежать на $s = 9$ заданих площинах, в кожні з 25 моментів часу.

Тобто маємо 25 груп томограм. В кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 4 – 5 показані приклади томограм в різні моменти часу в одних і тих же перетинах.

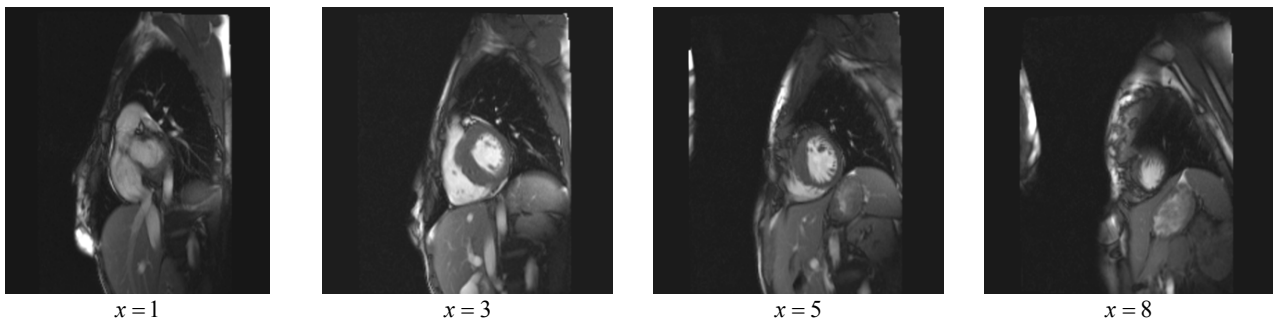


Рис. 4 – Приклади томограм, зроблених в момент часу t_{15} , в перетинах $x = 1, x = 3, x = 5, x = 8$.

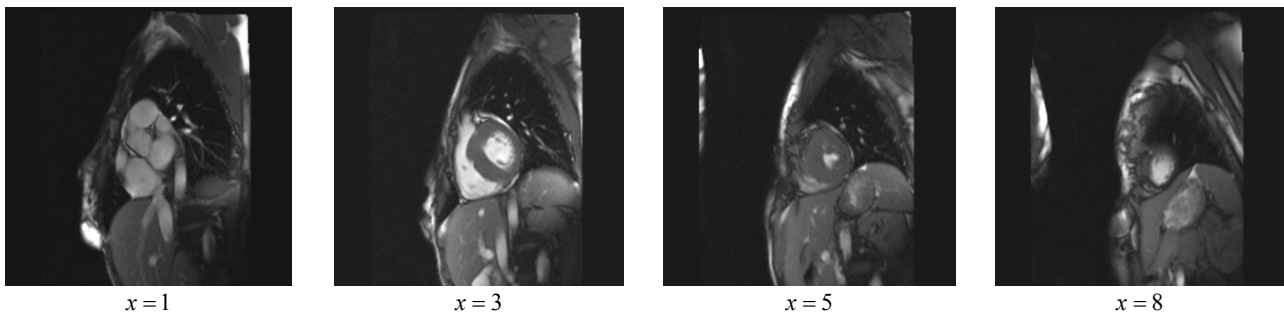


Рис. 5 – Приклади томограм, зроблених в момент часу t_{22} , в перетинах $x = 1, x = 3, x = 5, x = 8$.

Для побудови тривимірних моделей використовувалися оператори інтерфлетації функцій трьох змінних. Були побудовані 25 математичних моделей внутрішньої структури серця у вигляді функцій $f_k(x, y, z)$, $k = \overline{1, 25}$ за допомогою операторів інтерфлетації функцій трьох змінних. Потім ці математичні моделі були використані при побудові 4D математичної моделі серця за допомогою операторів інтерполяції за змінною часу t .

За допомогою побудованої 4D математичної моделі знайдемо зображення серця людини в площині, яка задається рівнянням $x = a$, в конкретний момент часу $t = t_{\text{прогнозоване}}$.

Практичну реалізацію було проведено в системі комп'ютерної математики *MatLab*. На рис. 6 – 7 наведено результати обчислювального експерименту.

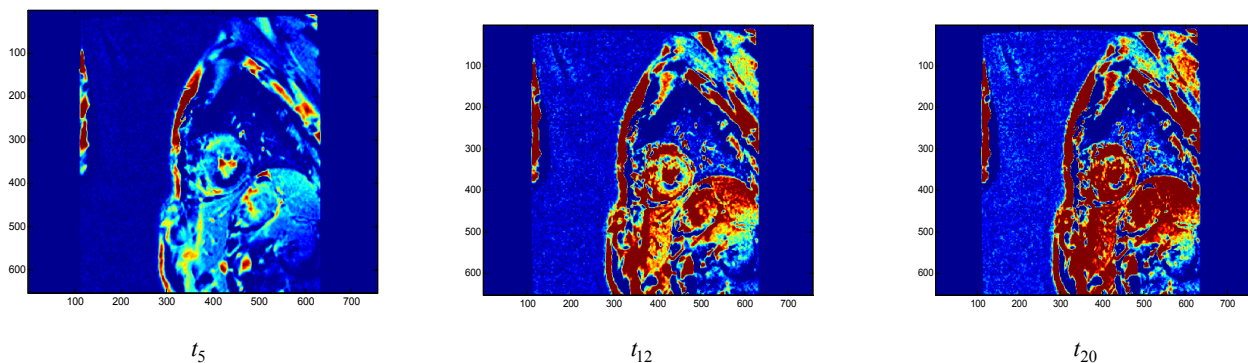


Рис. 6 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.6$ в моменти часу t_5, t_{12}, t_{20} відповідно.

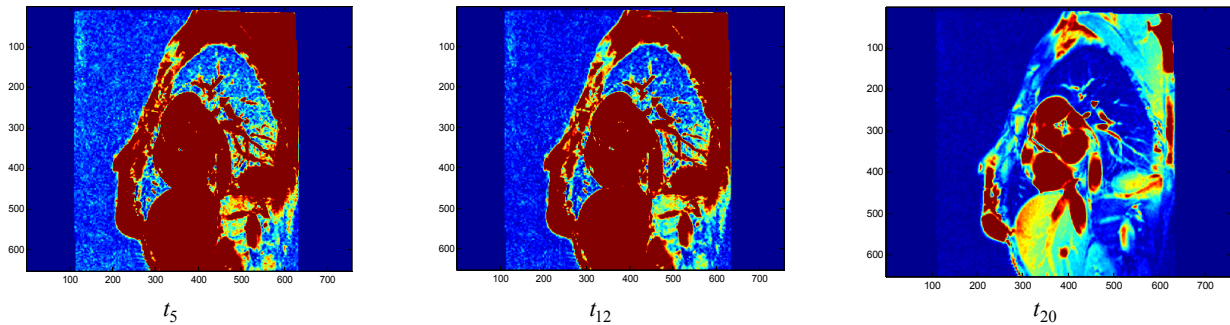


Рис. 7 – Відновлення внутрішньої структури серця в площині $x = 0.1$ в моменти часу t_5, t_{12}, t_{20} відповідно.

Розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії за допомогою інтерлінації функцій з використанням неоднорідної структури внутрішньої структури тіла. В даному пункті розв'язується задача двовимірної комп'ютерної томографії не тільки з використанням нових інформаційних операторів, але й неоднорідності внутрішньої структури досліджуваного тіла.

До теперішнього часу в томографії розроблено багато обчислювальних методів, алгоритмів та програмних засобів, направлених на відновлення внутрішніх властивостей об'єкта. Вони добре себе проявляють при відновленні об'єктів з гладкими властивостями, але дають незадовільні результати для об'єктів з розривними характеристиками. Тому виникає необхідність створення теорії наближення розривних функцій та методів виявлення точок та ліній розриву функцій для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта.

В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

В даному пункті будуються та досліджуються оператори розривної інтерлінації для наближення розривних функцій двох змінних за їх відомими слідами на системі ліній, з використанням прямокутних [13] та трикутних елементів, у випадку, коли лінії розриву відомі. А також будується метод відновлення розривних функцій двох змінних з невідомими лініями розриву. Цей метод дозволить знаходити лінії розриву функцій двох змінних, оптимально визначати вузли наближувачого розривного інтерлінаційного сплайну та відновлювати неоднорідну внутрішню структуру двовимірного тіла за відомими її проекціями (даними Радона).

Побудуємо метод відновлення розривних функцій двох змінних з невідомими лініями розриву.

Припустимо, що досліджуваний об'єкт повністю розміщений в області $E = [0;1]^2$ (це обмеження не є суттєвим). Невідому густину цього тіла позначимо через $f(x, y)$ і будемо вважати, що $f(x, y) = 0, (x, y) \notin E$. Проведемо через область E прямі $x_1 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, y_1 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ Будемо вважати відомими інтеграли вздовж цих прямих (проекції або дані Радона), причому на одній лінії відомі одразу два інтеграли (зліва та справа від лінії):

$$\gamma_j^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_j + 0) dx, \quad j = \overline{1, m}; \quad \gamma_j^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_j - 0) dx, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\gamma_i^{2(+)} = \int_0^1 f(x_i + 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}; \quad \gamma_i^{2(-)} = \int_0^1 f(x_i - 0, y) dy, \quad i = \overline{1, n}.$$

За заданою інформацією побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн, за допомогою якого відновимо лінії розриву в розривній функції двох змінних.

Розглянемо прямокутний елемент $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$.

Розривним інтерлінаційним сплайном в області E , відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ij} , називається наступна функція:

$$S(x, y) = S_{ij}(p, x, y), \quad (x_i, y_j) \in \Pi_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

де p – номер прямокутного елемента, він залежить від індексів i, j ;

$$S_{ij}(p, x, y) = h_i(x) \cdot \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right) +$$

$$+ h_{i+1}(x) \cdot \left(\gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right);$$

$$\begin{aligned}
S2_{ij}(p, x, y) &= H_j(y) \cdot (\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)})) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) + \\
&+ H_{j+1}(y) \cdot (\gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x)); \\
S12_{ij}(p, x, y) &= h_i(x) \cdot H_j(y) U_{p,1} + h_i(x) \cdot H_{j+1}(y) U_{p,3} + h_{i+1}(x) \cdot H_j(y) U_{p,2} + h_{i+1}(x) \cdot H_{j+1}(y) U_{p,4}; \\
S_{ij}(p, x, y) &= S1_{ij}(p, x, y) + S2_{ij}(p, x, y) - S12_{ij}(p, x, y).
\end{aligned}$$

Матриця невідомих інтерполяційних даних $U_{p,q}$, $p = \overline{1, (n-1)(m-1)}$, $q = \overline{1, 4}$ (значення функції) в p -ому прямокутному елементі будуються таким чином:

$$\begin{aligned}
U_{p,1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y); & U_{p,2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1}-0 \\ y \rightarrow y_j+0}} f(x, y); \\
U_{p,3} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_i+0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x, y); & U_{p,4} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1}-0 \\ y \rightarrow y_j-0}} f(x, y).
\end{aligned}$$

Базисні сплайни $h_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ визначаються наступним чином:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{x-x_2}{x_1-x_2}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 \leq x; \end{cases} \quad h_i(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x, \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1} < x < x_n, \\ 1, & x_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Аналогічні формули можна написати і для $H_j(y)$. Функції $h_i(x)$ та $H_j(y)$ задовольняють властивості $h_i(x_k) = \delta_{ik}$, $i, k = \overline{1, n}$, $H_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}$, $j, \ell = \overline{1, m}$.

Допоміжна функція $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ визначається наступним чином:

$$\psi_i(x) = l_i(x) + \frac{\omega(x)}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_i(x) dx; \quad l_i(x) = \prod_{\mu=1, \mu \neq i}^m \frac{x-x_\mu}{x_i-x_\mu}; \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x-x_i); \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) dx \neq 0.$$

Аналогічні формули можна написати і для $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1, m}$. Функції $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ та $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1, m}$ задовольняють властивостям:

$$\varphi_j(y_\ell) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell = \overline{1, m}, \quad \psi_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx = 0, \quad \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi_j(y) dy = 0.$$

Теорема 11. Оператор $S(x, y)$, визначений формулою (6), має такі інтерлінаційні властивості:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S(x_k \pm 0, y) dy &= \gamma_k^{2(\pm)} = \int_0^1 f(x_k \pm 0, y) dy; & \int_0^1 S(x, y_\ell \pm 0) dy &= \gamma_\ell^{1(\pm)} = \int_0^1 f(x, y_\ell \pm 0) dy, \\
S(x_k + 0, y_\ell + 0) &= U_{p,1}, & S(x_{k+1} - 0, y_\ell + 0) &= U_{p,2}; \\
S(x_k + 0, y_{\ell+1} - 0) &= U_{p,3}, & S(x_{k+1} - 0, y_{\ell+1} - 0) &= U_{p,4}.
\end{aligned}$$

У формулі (6) заданими є числа $\gamma_i^{2(\pm)}$, $\gamma_j^{1(\pm)}$ (дані проєкції, які надходять з томографа). Інтерполяційні дані $U_{p,q}$ є невідомими величинами, які будемо знаходити з умови:

$$I(U) = \sum_{p=1}^{(n-1)(m-1)} (I1(p, U) + I2(p, U)) \rightarrow \min_{U_{p,q}}, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} I(p, U) &= \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\gamma_i^{2(+)} + (U_{p,1} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,3} - \gamma_i^{2(+)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{i+1}^{2(-)} + (U_{p,2} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_j(y) + (U_{p,4} - \gamma_{i+1}^{2(-)}) \cdot \varphi_{j+1}(y) \right)^2 dy; \\ I2(p, U) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\gamma_j^{1(+)} + (U_{p,1} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,2} - \gamma_j^{1(+)}) \cdot \psi_{i+1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{j+1}^{1(-)} + (U_{p,3} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_i(x) + (U_{p,4} - \gamma_{j+1}^{1(-)}) \cdot \psi_{i+1}(x) \right)^2 dx . \end{aligned}$$

Вигляд такого функціоналу обґрунтовано в роботі [7].

Наведемо алгоритм відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за даними Радона та виявлення ліній розриву функції.

Крок 1. Будуємо розривний інтерлінаційний сплайн за формулою (6), який в кожному елементі розбиття може мати різний аналітичний вигляд $S(p, U, x, y)$, де p – номер прямокутного елемента, $U_{p,q}$, $p = \overline{1, (n-1)(m-1)}$, $q = \overline{1, 4}$ – невідома матриця інтерполяційних даних функції.

Крок 2. Знаходимо матрицю U з умови (7). Після підстановки цієї матриці в інтерліант (6), отримаємо розривний інтерлінаційний сплайн, що складається з функцій $S(x, y)$.

Крок 3. Зменшуємо крок вдвічі $hx^* = hx/2$, $hy^* = hy/2$ та знову виконуємо крок 1 та крок 2, використовуючи вдвічі меншу сітку. В результаті отримаємо розривний сплайн $S^*(x, y) = S_{i'j'}^*(p^*, x, y)$, $(x_{i'}, y_{j'}) \in \Pi_{i'j'}^*$, $p^* = \overline{1, (2m-1)(2n-1)}$ на кожному з прямокутників $\Pi_{i'j'}^* = (x - x_{i'}) \times (y - y_{j'})$, $x_{i'} = x_i + h1^*$, $y_{j'} = y_j + h2^*$.

Крок 4. На кожному прямокутному елементі $\Pi_{i,j}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ обчислюємо значення:

$$\widetilde{J}_{ij} = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{ij}(x, y), \quad J_{ij}(x, y) = |S(p, x, y) - S^*(p^*, x, y)|.$$

Крок 5. Перевіряємо виконання умови $|S(x, y) - S^*(x, y)| < \varepsilon$, $\forall (x, y) \in E$, ε – задана точність. Якщо умова виконана, то сплайн $S^*(x, y)$ – це отримана математична модель розривної функції $f(x, y)$. Якщо умова не виконана, то $S(x, y) := S^*(x, y)$ і повертаємося на крок 3.

Викладена теорія була перевірена на відомому в комп'ютерній томографії *фантомі Шеппа – Логана*. Зображення фантома ілюструє багато особливостей, які у дійсності властиві реальним томографічним зображенням голови людини. Розміщені в центрі фантома об'єкти у вигляді еліпсів моделюють реальні внутрішні особливості будови голови людини. Всередині кожного еліпса щільність внутрішньої структури голови різна. В роботі [14] представлені параметри усіх еліпсів, з яких складається фантом Шеппа – Логана. Фантом розміщено у квадраті $D = [-1, 1]^2$. Ми для прикладу оберемо самі великі еліпси (табл. 1).

І задамо фантом у вигляді функції двох змінних, яка має розриви першого роду на лініях еліпсів.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \frac{x^2}{0.69^2} + \frac{y^2}{0.9^2} \leq 1; \\ -0.02, & \frac{((x+0.22)\cos(-0.4\pi) + (y-0.25)\sin(-0.4\pi))^2}{0.410^2} + \frac{(-(x+0.22)\sin(-0.4\pi) + (y-0.25)\cos(-0.4\pi))^2}{0.21^2} \leq 1; \\ -0.02, & \frac{((x-0.22)\cos(-0.4\pi) + (y-0.25)\sin(-0.4\pi))^2}{0.310^2} + \frac{(-(x-0.22)\sin(-0.4\pi) + (y-0.25)\cos(-0.4\pi))^2}{0.22^2} \leq 1; \\ 0.01, & \frac{x^2}{0.21^2} + \frac{(y-0.25)^2}{0.35^2} \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Зобразимо цю функцію у лініях рівня (рис. 8).

Таблиця 1 – Параметри еліпсів у фантомі Шеппа – Логана

№ еліпсу	C_x	C_y	r_x	R_y	Нахил Градусів	Щільність
1	0.000	0.000	0.690	0.900	0000	2.000
2	-0.220	0.250	0.410	0.210	-72.00	-0.020
4	0.220	0.250	0.310	0.220	72.00	-0.020
5	0.000	0.250	0.210	0.350	0.000	0.010

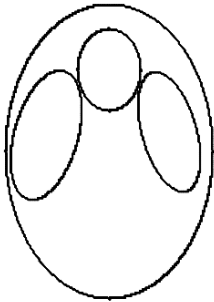


Рис. 8 – Спрощений фантом Шеппа – Логана.

Оберемо рівномірну сітку по осі x : $x_1 = 0$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.75$, $x_5 = 1$.

По осі y оберемо аналогічну сітку. Вважаємо заданими проекції вздовж цих ліній. Оскільки комп'ютерний томограф може надати вздовж однієї лінії лише одне значення проекції, то на першому кроці ми вважаємо проекції ліворуч та праворуч від заданої лінії рівними. Тобто проекції вздовж ліній, паралельних осі Oy , мають вигляд:

$$\gamma_1^{2(+)} = \int_0^1 f(x_1 + 0, y) dy = 0; \quad \gamma_2^{2(-)} = \int_0^1 f(x_2 - 0, y) dy = 0.548;$$

$$\gamma_2^{2(+)} = \int_0^1 f(x_2 + 0, y) dy = 0.548; \quad \gamma_3^{2(-)} = \int_0^1 f(x_3 - 0, y) dy = 1.303;$$

$$\gamma_3^{2(+)} = \int_0^1 f(x_3 + 0, y) dy = 1.303; \quad \gamma_4^{2(-)} = \int_0^1 f(x_4 - 0, y) dy = 0.657;$$

$$\gamma_4^{2(+)} = \int_0^1 f(x_4 + 0, y) dy = 0.657; \quad \gamma_5^{2(-)} = \int_0^1 f(x_5 - 0, y) dy = 0.$$

А проекції вздовж ліній, паралельних осі Ox , мають вигляд:

$$\gamma_1^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_1 + 0) dx = 0; \quad \gamma_2^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_2 - 0) dx = 1.147;$$

$$\gamma_2^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_2 + 0) dx = 1.147; \quad \gamma_3^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_3 - 0) dx = 0.597;$$

$$\gamma_3^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_3 + 0) dx = 0.597; \quad \gamma_4^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_4 - 0) dx = 0.729;$$

$$\gamma_4^{1(+)} = \int_0^1 f(x, y_4 + 0) dx = 0.729; \quad \gamma_5^{1(-)} = \int_0^1 f(x, y_5 - 0) dx = 0.$$

І на заданій системі прямокутних елементів будемо розривний інтерлінаційний сплайн за формулою (6). Зобразимо його на рис. 9.



Рис. 9 – Зображення фантому та лінії рівня наближеного розривного інтерлінаційного сплайна на: a – першій ітерації; b – другій ітерації.

З рис. 9, а видно, що, оскільки лінії розриву попали в кожний прямокутний елемент, то й всі вони зафарбувалися. Зменшимо крок сітки за обома змінними вдвічі, та знову побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн (рис. 9, б)

На рис. 9, б вже видно, що серед прямокутних елементів є такі, куди не попадають лінії розриву, і вони залишилися не зафарбованими.

Продовжуємо цей ітераційний процес до тих пір, поки не отримаємо всі лінії розриву тієї товщини, яка потрібна. На рис. 10 наведені наступні ітерації.

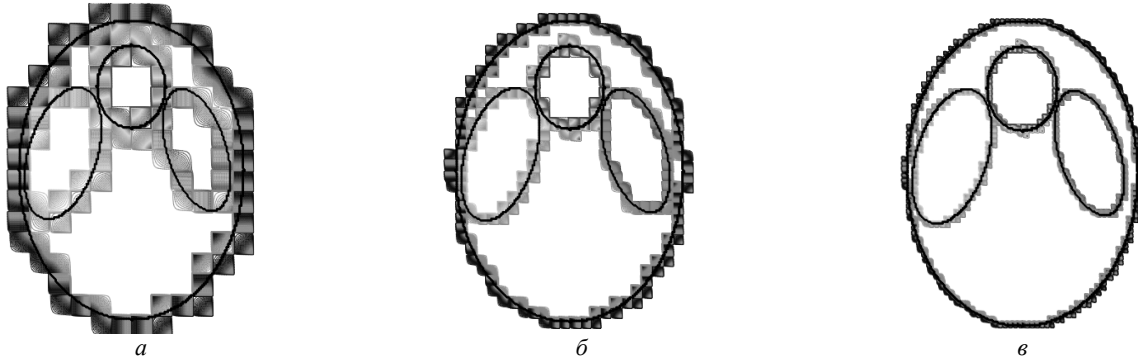


Рис. 10 – Зображення фантому та лінії рівня наближеного розривного інтерлінаційного сплайна при розбитті:
а – $m = 17, n = 17$; б – $m = 33, n = 33$; в – $m = 65, n = 65$.

На рис. 10, в бачимо, що побудований розривний інтерлінаційний сплайн описує лінії розриву заданого фантому. Цей ітераційний процес можна продовжувати.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними шляхи, пов'язані з побудовою математичних моделей в комп'ютерній томографії з використанням нових інформаційних операторів. В подальшому планується розробити методи відновлення тривимірної внутрішньої структури тривимірного тіла з суттєвим використанням її неоднорідності.

Висновки. В роботі запропоновано огляд методів відновлення внутрішньої структури об'єкта, що використовують нові інформаційні оператори, які розроблені українським науковцем професором О. М. Литвиним, а саме – інтерлінацію та інтерфлетацию. В роботі представлені методи розв'язання тривимірної задачі комп'ютерної томографії, в основі яких лежать інтерфлетацийні оператори, що використовують в якості експериментальних даних томограми, що поступають з комп'ютерного томографу. Також наводиться метод розв'язання чотиривимірної комп'ютерної томографії з використанням оператора мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Цей метод рекомендується використовувати в тих випадках, коли експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площини, на якій лежить томограма, а також зображення на томограмах) задані з похибкою, і коли класичні оператори інтерполяції та інтерфлетации не згладжують дані, а повторюють всі похибки в експериментальних даних. В даній статті розв'язується задача двовимірної комп'ютерної томографії не тільки з використанням нових інформаційних операторів, але й неоднорідності внутрішньої структури досліджуваного тіла. Усі запропоновані методи мають високу точність.

Список літератури

1. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2001. – 222 p.
2. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaft, Leipzig, Math. – Phys. Kl.* 1917, 69, pp. 262–277.
3. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Першина Ю. І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії: монографія. – К.: Наук. думка, 2017. – 314 с.
4. Buzug T. Computed Tomography: From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT. – Springer-Verlag, 2008. 522 p. DOI: 10.1007/978-3-540-39408-2.
5. Kak A. C., Slaney M. Principles of Computerized Tomographic Imaging. Society of Industrial and Applied Mathematics. – 2001. 323 p. DOI: 10.1137/1.9780898719277.
6. Тулякова Н. О., Трофимчук О. М. Математичні методи рентгенівської комп'ютерної томографії // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – №4. – С. 50 – 66.
7. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions // in Springer book: Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. – 2021. – P. 75 – 176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
8. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O. M. Interflotation of Functions // in Springer book: Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. – 2021. – P. 177 – 251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
9. Никольский С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками // Математический сборник. – 1958. – Т. 45(87). – № 2. – С. 181 – 194.
10. Литвин О. М., Першина Ю. І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетации функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. – С. 67 – 71.

11. Капустян О. В., Пересток М. О., Станжицький О. М. Экстремальні задачі : теорія, приклади, методи розв'язання. – Київ : КНУ імені Т. Г. Шевченка, 2019. – 63с.
12. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention : proceedings of the conference, Part I.* – 2010. – P. 143 – 150.
13. Литвин О. Н., Першина Ю. И., Сергиенко И. В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // *Кибернетика и системный анализ.* – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.
14. Синьков М. В., Закидальский А. И. Объемная реконструкция «больших» объектов на томографах с ограниченной по размерам матрицей детекторов // *Ресстрація, зберігання і обробка даних.* – 2003. – Т. 5. – № 3. – С. 18 – 25.

References (transliterated)

1. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography.* Society for Industrial and Applied Mathematics. 2001. 222 p.
2. Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaft, Leipzig, Math. – Phys. Kl.* 1917, 69, pp. 262–277.
3. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. *Teoriya rozryvnykh splayniv ta yiyi zastosuvannya v komp'yuterniy tomografiyi : monografiya* [Theory of discontinuous splines and their application in computer tomography: monograph]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2017. 314 p.
4. Buzug T. *Computed Tomography : From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT.* Springer-Verlag, 2008. 522 p. DOI: 10.1007/978-3-540-39408-2.
5. Kak A. C., Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging.* Society of Industrial and Applied Mathematics. 2001. 323 p. DOI: 10.1137/1.9780898719277.
6. Tulyakova N. O., Trofymchuk O. M. Matematychni metody rentgeniv'skoyi komp'yuternoyi tomografiyi [Mathematical methods of X-ray computer tomography]. *Matematychni modelyuvannya v ekonomitsi* [Mathematical modeling in economics]. 2019, no. 4, pp. 50–66.
7. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O. M. *Interlineation of Functions.* in *Springer book : Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* 2021. pp. 75–176. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_3.
8. Sergienko I., Zadiraka V., Lytvyn O. M. *Interflation of Functions.* in *Springer book : Elements of the General Theory of Optimal Algorithms.* 2021. pp. 177–251. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6_4.
9. Nikol'skiy S. M. Granichnye svoystva funktsiy, opredelyennykh na oblasti s uglovymi tochkami [Boundary properties of functions, determined in a region with corner points]. *Matematicheskii sbornik* [Mathematical digest]. 1958, vol. 45(87), no. 2, pp. 181–194.
10. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. Matematychna model' vidnivlennya tryvymirnykh ob'ektiv za yikh tomogramamy na systemi tr'okh grup pererizanykh ploshhyn z vykorystannyam interflatatsiyi funktsiyi [Mathematical model of reconstruction of three-dimensional objects by their tomograms on a system of three groups of plains using interflation of functions]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Science of Ukraine]. 2005, no. 8, pp. 67–71.
11. Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Stanzhyts'kyy O. M. *Ekstremalni zadachi : teoriya, pryklady, metody rozv'yazannya* [Extremum problems : theory, examples, solution methods]. Kyiv, KNU im. T.G. Shevchenka publ., 2019. 63 p.
12. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention : proceedings of the conference, Part I.* 2010, pp. 143–150. DOI: 10.1007/978-3-642-15705-9_18.
13. Lytvyn O. N., Pershyna Yu. I., Sergienko S. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы)]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.
14. Sin'kov M. V., Zakidal'skiy A. I. Ob'emnaya rekonstruktsiya «bol'shikh» ob'ektiv na tomografakh s ogranichennoy po razmeram matritsey detektorov [Volume reconstruction of huge objects by the tomogram with detector matrix limited in size]. *Reiestratsiia, zberihannia i obrobka danykh* [Registration, storing and processing of data]. 2003, vol. 5, no. 3. pp. 18–25.

Надійшла (received) 17.07.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математических наук, доцент, заведующая кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Head of the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 222-69-79; e-mail: yuliapershina78@gmail.com.

Пташній Олег Дмитрович – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 956-10-77; e-mail: olegptashniy@gmail.com.

Пташній Олег Дмитрієвич – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 956-10-77; e-mail: olegptashniy@gmail.com.

Ptashniy Oleg Dmitrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Head of the Department of Higher Mathematics, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 956-10-77; e-mail: olegptashniy@gmail.com.