УДК 519.6 **DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.10**

О. П. НЕЧУЙВІТЕР, С. С. ІВАНОВ, К. Г. КОВАЛЬЧУК

НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Стрімкий розвиток та впровадження в життя новітніх інформаційних технологій в багатьох галузях науки та техніки сприяє появі нових методів в математичному моделюванні систем та процесів. Зокрема, з'явилися нові математичні теорії, які можуть бути ефективно використані при побудові та вдосконалені існуючих математичних моделей різноманітних явищ та об'єктів. До таких теорії відноситься теорія нових інформаційних операторів, автором якої є Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор фізико-математичних наук, професор О. М. Литвин. Нові інформаційні оператори знайшли своє застосування в цифровій обробці сигналів та зображень, а саме при чисельному інтегруванні швидко осцилюючих функцій багатьох змінних. Побудовані оптимальні за порядком точності та близькі до них кубатурні формули, які використовують значення неосцилюючого множника підінтегральної функції не тільки в точках, а й на площинах або лініях. В даній статті продемонстроване застосування нових інформаційних операторів до чисельного інтегрування функцій багатьох змінних, а саме розглядається питання наближеного обчислення інтегралу від функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях. Кубатурна формула використовує оператор інтерлінації, побудований на основі оператора інтерфлетації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінку похибки наближення запропонованої кубатурної формули на класі диференційовних функцій. Наведено результати розрахункового експерименту в системі комп'ютерної математики Mathcad. Чисельні розрахунки підтверджують теоретичні твердження дослідження.

Ключові слова: чисельне інтегрування функцій багатьох змінних, кубатурна формула, інтерлінація функцій, інтерфлетація функцій.

О. П. НЕЧУЙВИТЕР, С. С. ИВАНОВ, К. Г. КОВАЛЬЧУК

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Стремительное развитие и внедрение в жизнь новейших информационных технологий во многих областях науки и техники способствует появлению новых методов в математическом моделировании систем и процессов. В частности, появились новые математические теории, которые могут быть эффективно использованы при построении и усовершенствовании существующих математических моделей различных явлений и объектов. К таким теориям относится теория новых информационных операторов, автором которой является Лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, доктор физико-математических наук, профессор О. Н. Литвин. Новые информационные операторы нашли свое применение в цифровой обработке сигналов и изображений, а именно при численном интегрировании быстро осциллирующих функций многих переменных. Построены оптимальные по порядку точности и близкие к ним кубатурные формулы, использующие значение неосциллирующего множителя подынтегральной функции не только в точках, но и на плоскостях или линиях. В данной статье продемонстрировано применение новых информационных операторов к численному интегрированию функций многих переменных, а именно рассматривается вопрос приближенного вычисления интеграла от функций трех переменных в случае, когда информация о функции задана ее следами на линиях. Кубатурная формула использует оператор интерлинации, построенный на основе оператора интерфлетации со вспомогательными функциями в виде кусочно-постоянных сплайнов. Получена оценка погрешности приближения предложенной кубатурной формулы на классе дифференцируемых функций. Представлены результаты расчетного эксперимента в системе компьютерной математики Mathcad. Многочисленные расчеты подтверждают теоретические утверждения исследования.

Ключевые слова: численное интегрирование функций многих переменных, кубатурная формула, интерлинация функций, интерфлетация функций.

O. P. NECHUIVITER, S. S. IVANOV, K. G. KOVALCHUK

NEW INFORMATION OPERATORS IN PROBLEMS OF NUMERICAL INTEGRATION OF FUNCTIONS OF THREE VARIABLES

The rapid development and implementation of the latest information technologies in many fields of science and technology contribute to the rise of new methods in mathematical modeling of systems and processes. In particular, new mathematical theories have appeared that can be effectively used for building and improvement of existing mathematical models of various phenomena and objects. One of these theories is the theory of new information operators, authored by the Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, doctor of physical and mathematical sciences, professor (думаю, это излишняя информация в аннотации) O. M. Lytvyn. New information operators have found their application in the digital processing of signals and images, namely in the numerical integration of rapidly oscillating functions of many variables. Cubature formulas were built that are optimal in the order of accuracy and use the value of the non-oscillating factor of the integrand function not only at points, but also on planes or lines. The article demonstrates the application of new information operators to the numerical integration of functions of many variables, namely, the issue of approximate calculation of the integral from functions of three variables is considered in the case when the information about the function is given by its traces on the lines. The cubature formula uses an interlineation operator built on the basis of an interflatation operator with auxiliary functions in the form of piecewise constant splines. An estimate of the approximation error of the proposed cubature formula on the class of differentiable functions was obtained. The results of the calculation experiment in the computer mathematics system Mathcad are presented. Numerical calculations confirm the theoretical statements of the study.

Key words: numerical integration of functions of many variables, cubature formula, interlineation of functions, interflatation of functions.

Вступ. Завдяки стрімкому розвитку та впровадженню в життя новітніх інформаційних технологій в багатьох галузях науки та техніки відбулися значні зміни. Зокрема, з'явилися *нові математичні теорії*, які можуть бути ефективно використані при побудові та вдосконалені існуючих *математичних моделей* різноманітних явищ та об'єктів. До таких теорій відноситься *теорія нових інформаційних операторів*, автором якої є Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, доктор фізико-математичних наук, професор *О. М. Литвин*. Застосування нових інформаційних операторів в цифровій обробці сигналів та зображень привело до появи *теорії обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних* при різних типах задання інформації. Зазначена теорія дозволяє наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних у випадку, коли значення неосцилюючого множника підінтегральної функції задаються не тільки в точках, а і значеннями функції на лініях та площинах. *Кубатурні формули* у всіх випадках будуються з використанням *методу Файлона*. Доведено, що на певних класах функцій запропоновані кубатурні формули є оптимальними за порядком точності. Однак, в цих дослідженнях питанню наближеного обчислення звичайних подвійних чи потрійних інтегралів при різних типах задання інформації про інтегральну функцію приділено менше уваги. Тому дана стаття має на меті дещо усунути ці прогалини.

Аналіз останніх досліджень. Перші спроби використати *оператори інтерлінації* до наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних були анонсовані в роботах [1 – 2], а в [3] отримані перші оцінки похибки наближеного обчислення *коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних*. Більш вагомі дослідження щодо обчислення $2D-$коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій були зроблені в роботах [4 – 10]. В цих статтях були представленні дослідження кубатурних формул для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є на різних класах функцій. Кубатурні формули використовували в своїй побудові оператори інтерлінанти з допоміжними функціями у вигляді *кусково-сталих* та *лінійних сплайнів*. В [11, 12] вперше було викладено вищезазначені дослідження з точки зору нових інформаційних операторів, а саме була зроблена класифікація кубатурних формул за типом задання інформації про *неосцилюючий множник підінтегральної функції*. Наближене обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних (в тому числі на прикладі $3D-$коефіцієнтів Фур'є) з використанням нових інформаційних операторів детально представлено в роботах [13 – 20]. У цих дослідженнях представлено кубатурні формули з використанням *операторів інтерфлетації*, інтерлінації та *інтерполяції* з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. Такі оператори в своїй побудові використовували сліди функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значення функції в точках. Дослідження про якість побудованих кубатурних формул детально викладено в монографії [21]. Застосування теорії нових інформаційних операторів до наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидкооцилюючих функцій загального виду представлено в статтях [22 – 25]. При дослідженні питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів, були використані результати робіт [26] та [27], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Питанню чисельного інтегрування подвійних та потрійних інтегралів з використанням нових інформаційних операторів приділено значно менше уваги. До таких досліджень можна віднести [28, 29], де викладено алгоритм побудови кубатурних формул з використанням слідів функції на лініях (в тому числі на оптимально вибраних лініях), а також [30], де розглядалося питання наближеного обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних площинах. Логічним продовженням досліджень в цьому напрямку є наближене обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація про функцію задається на взаємно перпендикулярних лініях.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій трьох змінних виду

$$I^3=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)dxdydz \qquad (1)$$

дослідити кубатурну формулу з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації, побудованого на операторі кусково-сталої інтерфлетації. Інформація про функцію $f(x,y,z)$ задається її слідами на лініях. На класі *диференційовних функцій* отримати оцінку похибки наближення кубатурної формули.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції трьох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Введемо наступні позначення:

$$X_k=\left[x_{k-1/2},x_{k+1/2}\right],\ Y_j=\left[y_{j-1/2},y_{j+1/2}\right],\quad Z_s=\left[z_{s-1/2},z_{s+1/2}\right];$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}}=\left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2},\tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}}=\left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2},\tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],\quad \tilde{Z}_{\tilde{s}}=\left[\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2},\tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}\right];$$

$$h_{1k}^0(x)=\begin{cases}1, x\in X_k,\\ 0, x\notin X_k,\end{cases}\quad h_{2j}^0(y)=\begin{cases}1, y\in Y_j,\\ 0, y\notin Y_j,\end{cases}\quad h_{3s}^0(z)=\begin{cases}1, z\in Z_s,\\ 0, z\notin Z_s\end{cases};$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x)=\begin{cases}1, x\in \tilde{X}_{\tilde{k}},\\ 0, x\notin \tilde{X}_{\tilde{k}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y)=\begin{cases}1, y\in \tilde{Y}_{\tilde{j}},\\ 0, y\notin \tilde{Y}_{\tilde{j}},\end{cases}\quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z)=\begin{cases}1, z\in \tilde{Z}_{\tilde{s}},\\ 0, z\notin \tilde{Z}_{\tilde{s}}\end{cases};$$

$$x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ z_s=s\Delta-\frac{\Delta}{2},\quad \Delta=\frac{1}{\ell},\ k,j,s=\overline{1,\ell};$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{z}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^{3/2}}, \quad \tilde{k}, \tilde{j}, \tilde{s} = \overline{1, \ell^{3/2}} .$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}^0(x) , \quad J_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}^0(y) ,$$

$$J_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z) ,$$

$$\tilde{J}_1 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x), \ \ \tilde{J}_2 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) ,$$

$$\tilde{J}_3 f(x,y,z) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) .$$

Означення. Під слідом функції $f(x,y,z)$ на прямій лінії

$$\left\{(x,y,z):\ x = x_k,\ y = y_j, \quad x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \Delta = \frac{1}{\ell},\ k, j = \overline{1,\ell}\right\}$$

розуміємо $f(x_k, y_j, z), \quad \forall\, z \in R$.

Сліди функції на інших лініях визначаються аналогічно. Розглянемо оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Jf(x,y,z) = J_1 f\left(x,y,z\right) + J_2 f\left(x,y,z\right) + J_3 f\left(x,y,z\right) -$$

$$- J_1 J_2 f\left(x,y,z\right) - J_2 J_3 f\left(x,y,z\right) - J_1 J_3 f\left(x,y,z\right) + J_1 J_2 J_3 f\left(x,y,z\right)$$

та оператор кусково-сталої інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{J} f\left(x,y,z\right) = J_1 \tilde{J}_2 f\left(x,y,z\right) + J_1 \tilde{J}_3 f\left(x,y,z\right) - J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 f\left(x,y,z\right) + J_2 \tilde{J}_1 f\left(x,y,z\right) +$$

$$+ J_2 \tilde{J}_3 f\left(x,y,z\right) - J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 f\left(x,y,z\right) + J_3 \tilde{J}_1 f\left(x,y,z\right) + J_3 \tilde{J}_2 f\left(x,y,z\right) - J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f\left(x,y,z\right) -$$

$$- J_1 J_2 f\left(x,y,z\right) - J_1 J_3 f\left(x,y,z\right) - J_2 J_3 f\left(x,y,z\right) + J_1 J_2 J_3 f\left(x,y,z\right) .$$

Для наближеного обчислення інтегралу (1) в роботі [30] розглядалася та досліджувалася кубатурна формула

$$\Phi^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y,z)\,dxdydz.$$

В даній статті мова буде йти про наближене обчислення інтегралу (1) за кубатурною формулою

$$\tilde{\Phi}^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації, побудованого на основі інтерфлетації, та отримаємо відповідну кубатурну формулу:

$$\tilde{\Phi}^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) h_{1k}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y)\,dxdydz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x_k, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dxdydz -$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{1k}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dxdydz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dxdydz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, z) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{2j}^0(y) dxdydz -$$

$$-\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dxdydz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z_s) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{3s}^0(z) dxdydz +$$

$$+\int_0^1 \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z_s) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) h_{3s}^0(z) dxdydz -$$

$$-\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{s=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z_s) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) h_{3s}^0(z) dxdydz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x_k, y_j, z) h_{1k}^0(x) h_{2j}^0(y) dxdydz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x_k, y, z_s) h_{1k}^0(x) h_{3s}^0(z) dxdydz -$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x, y_j, z_s) h_{2j}^0(y) h_{3s}^0(z) dxdydz +$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x_k, y_j, z_s) h_{1k}^0(x) h_{2j}^0(y) h_{3s}^0(z) dxdydz \,,$$

Розглянемо $H_1^{3,1}\left(M,\overline{M},\widetilde{M}\right)$ – клас дійсних функцій, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що частинні похідні обмежені, тобто

$$\left|f^{(1,0,0)}(x,y,z)\right|\le M,\quad \left|f^{(0,1,0)}(x,y,z)\right|\le M,\quad \left|f^{(0,0,1)}(x,y,z)\right|\le M\ ,$$

$$\left|f^{(1,1,0)}(x,y,z)\right|\le \overline{M},\quad \left|f^{(1,0,1)}(x,y,z)\right|\le \overline{M},\quad \left|f^{(0,1,1)}(x,y,z)\right|\le \overline{M},\quad \left|f^{(1,1,1)}(x,y,z)\right|\le \widetilde{M}.$$

Теорема 1. *Для кубатурної формули* $\widetilde{\Phi}^3$ *наближеного обчислення* I^3 *на класі* $H_1^{3,1}\left(M,\overline{M},\widetilde{M}\right)$ *справедлива наступна оцінка*:

$$\rho\left(H_1^{3,1}\left(M,\overline{M},\widetilde{M}\right),\widetilde{\Phi}^3\right)\le\left(\frac{\widetilde{M}}{64}+\frac{3\overline{M}}{16}\right)\frac{1}{\ell^3}.$$

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\left|I^3-\widetilde{\Phi}^3\right|=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y,z)-\widetilde{J}f(x,y,z)\right)dxdydz\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y,z)-Jf(x,y,z)+Jf(x,y,z)-\widetilde{J}f(x,y,z)\right)dxdydz\right|\le$$

$$\le\left|I_1^3(m,n,p)-\Phi_1^3\left(m,n,p\right)\right|+\left|\Phi_1^3(m,n,p)-\widetilde{\Phi}_1^3\left(m,n,p\right)\right|\le$$

$$\le\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left|Jf(x,y,z)-\widetilde{J}f(x,y,z)\right|dxdydz\,.$$

Знайдемо оцінку першого та другого доданку.

1. $$\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right)dxdydz\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int\limits_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left(f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right)dxdydz\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int\limits_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left|f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell-1}\sum_{j=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int\limits_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left|\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_j}^{y}\int\limits_{z_s}^{z}f^{(1,1,1)}\left(\xi,\eta,\varsigma\right)d\xi d\eta d\varsigma\right|dxdydz\le$$

$$\le\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx\int\limits_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|y-y_j\right|dy\int\limits_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\left|z-z_s\right|dz=\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(-\frac{\left(x-x_k\right)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{\left(x-x_k\right)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{\left(y-y_j\right)^2}{2}\Bigg|_{y_{j-\frac12}}^{y_j}+\frac{\left(y-y_j\right)^2}{2}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac12}}\right)\left(-\frac{\left(z-z_s\right)^2}{2}\Bigg|_{z_{s-\frac12}}^{z_s}+\frac{\left(z-z_s\right)^2}{2}\Bigg|_{z_s}^{z_{s+\frac12}}\right)=\widetilde{M}\ell^3\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\widetilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3}.$$

2. $$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|Jf(x,y,y)-\tilde{J}f(x,y,z)\right|dxdydz=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|J_1 f(x,y,z)+J_2 f(x,y,z)+J_3 f(x,y,z)-\right.$$

$$-J_1J_2 f(x,y,z)-J_2J_3 f(x,y,z)-J_1J_3 f(x,y,z)+J_1J_2J_3 f(x,y,z)-$$

$$-J_1\tilde{J}_2 f(x,y,z)-J_1\tilde{J}_3 f(x,y,z)+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 f(x,y,z)-J_2\tilde{J}_1 f(x,y,z)-$$

$$-J_2\tilde{J}_3 f(x,y,z)+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3 f(x,y,z)-J_3\tilde{J}_1 f(x,y,z)-J_3\tilde{J}_2 f(x,y,z)+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2 f(x,y,z)+$$

$$\left.+J_1J_2 f(x,y,z)+J_1J_3 f(x,y,z)+J_2J_3 f(x,y,z)-J_1J_2J_3 f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|J_1 f(x,y,z)+J_2 f(x,y,z)+J_3 f(x,y,z)-\right.$$

$$-J_1\tilde{J}_2 f(x,y,z)-J_1\tilde{J}_3 f(x,y,z)+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 f(x,y,z)-J_2\tilde{J}_1 f(x,y,z)-$$

$$-J_2\tilde{J}_3 f(x,y,z)+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3 f(x,y,z)-J_3\tilde{J}_1 f(x,y,z)-$$

$$\left.-J_3\tilde{J}_2 f(x,y,z)+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2 f(x,y,z)\right|dxdydz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)+\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)+\right.$$

$$\left.+\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac12}} \left|\left(J_1-J_1\tilde{J}_2-J_1\tilde{J}_3+J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac12}} \left|\left(J_2-J_2\tilde{J}_1-J_2\tilde{J}_3+J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3\right)f(x,y,z)\right|dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac12}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}} \left|\left(J_3-J_3\tilde{J}_1-J_3\tilde{J}_2+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2\right)f(x,y,z)\right|dxdydz\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac12}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac12}}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac12}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac12}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}\int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}\left|f^{(0,1,1)}(x_k,\eta,\zeta)\right|d\eta d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}\left|f^{(1,0,1)}(\xi,y_j,\zeta)\right|d\xi d\zeta dxdydz+$$

$$+\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}\left|f^{(1,1,0)}(\xi,\eta,z_s)\right|d\xi d\eta dxdydz\le$$

$$\le\bar{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}d\eta d\zeta dxdydz+\bar{M}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^{z}d\xi d\zeta dxdydz+$$

$$+\bar{M}\sum_{s=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^{x}\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^{y}d\xi d\eta dxdydz=$$

$$=3\bar{M}\,\ell\ell^{3/2}\ell^{3/2}\Delta\frac{\Delta_1^2}{4}\frac{\Delta_1^2}{4}=\frac{3\bar{M}}{16}\Delta_1^2=\frac{3\bar{M}}{16}\left(\frac{1}{\ell^{3/2}}\right)^2=\frac{3\bar{M}}{16}\frac{1}{\ell^3}\,.$$

Отже, $\left|I^3-\tilde{\Phi}^3\right|\le\frac{\widetilde{M}}{64}\frac{1}{\ell^3}+\frac{3\bar{M}}{16}\frac{1}{\ell^3}=\left(\frac{\widetilde{M}}{64}+\frac{3\bar{M}}{16}\right)\frac{1}{\ell^3}$. Теорему 1 доведено.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованої кубатурної формули в системі комп'ютерної математики MathCad. Для функції $f\left(x,y,z\right)=\sin(x+y+z)$, для якої $M=1,\quad \overline{M}=1,\quad \widetilde{M}=1$ покажемо, що $\left|I^3-\widetilde{\Phi}^3\right|\le\left(\frac{1}{64}+\frac{3}{16}\right)\frac{1}{\ell^3}=\frac{13}{64}\frac{1}{\ell^3}=\varepsilon$.

Таблиця 1 – Обчислення I^3 за допомогою кубатурної формули $\widetilde{\Phi}^3$

ℓ	Φ_1^2	I_1^2	$E=\left\lvert I_1^2-\Phi_1^2\right\rvert$	$\varepsilon=\left(\frac{1}{64}+\frac{3}{16}\right)\frac{1}{\ell^3}$
4	0.879353824163323	0.879354930645401	0.000001106482077	0.003173
9	0.879354922142074	0.879354930645401	0.000000008503327	0.000278
16	0.879354930376157	0.879354930645401	0.000000000269243	0.000049
25	0.879354930626902	0.879354930645401	0.000000000018499	0.000013

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядається кубатурна формула наближеного обчислення потрійного інтегралу з використанням оператора кусково-сталої інтерлінації, побудованого на основі кусково-сталого оператора інтерфлетації, у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях. Наступним кроком в дослідженні є питання побудови кубатурної формули з оптимальним вибором значень функції трьох змінних на лініях.

Висновки. В статті на прикладі використання нових інформаційних операторів в чисельному інтегруванні функцій трьох змінних продемонстровано ефективність застосування нових теорій в математичному моделюванні систем та процесів. Нова кубатурна формула, яка в якості даних розглядає сліди функції на лініях, може бути корисною при розв'язанні багатьох технічних задач. В статті на класі диференційовних функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних запропонованою кубатурною формулою. Кубатурна формула використовує оператор інтерлінант, побудований на основі оператора інтерфлетанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів, і має високу точність наближення. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичні результати.

Список літератури

1. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Застосування інтерлінації функцій та швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є // Матеріали XVIII науковометодичної конференції. – Харків, УІПА, 1995. – С. 229 – 231.
2. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Застосування швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних // Тез. доп. на Всеукр. науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях». – Львів, 1995. – С. 5 – 7.
3. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
4. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2008. – № 2. – С. 13 – 17.
5. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D-$ коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
6. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула для обчислення $2D-$ коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління : зб. наук. пр. – Х., 2010. – № 926. – С. 153 – 160.
7. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D-$ коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації // Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18 – 21 травня 2010 р., Харків. – Х., 2010. – Ч. 2. – С. 211 – 213.
8. *Lytvyn O. N.*, *Nechuyviter O. P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – pp. 90 – 96.
9. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* $2D-$ коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
10. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосциюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
11. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Мельникова С. С.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 447 с.
12. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Мельникова С. С.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – 348 с.
13. *Lytvyn O. N.*, *Nechuyviter O. P.* $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 44. – Is. 3. – 2012. – pp. 45 – 56.
14. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D-$ коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
15. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
16. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвитер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближеного вычисления $3D-$ интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
17. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D-$ коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково–сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – Том 1. – № 4. – С. 28 – 40.
18. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
19. *Литвин О. Н.*, *Нечуйвитер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – №19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
20. *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O. P.* Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation // Cybernetics and Systems Analysis. – no. 50(3). – 2014. – pp. 410 – 418.
21. *Сергієнко І. В.*, *Задірака В. К.*, *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів. – Київ : Наук. думка, 2017. – 336 с.
22. *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O.*, *Pershyna Y. and Mezhuyev V.* Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) // Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. – Kyiv, Ukraine, 2019. – pp. 365 – 373.
23. *Mezhuyev V.*, *Lytvyn O. M.*, *Nechuiviter O.*, *Pershyna Y.*, *Keita K. and Lytvyn O. O.* Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions // U.P.B. Sci. Bull., Series A. – Vol. 80. – Iss. 3. – 2018. – pp. 169 – 182.
24. *Nechuiviter O. P.* Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case) // Radio Electronics, Computer Science, Control. – Vol. 4. – 2020. – pp. 65 – 73.
25. *Nechuiviter O.*, *Ivanov S.*, *Kovalchuk K.* Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального виду // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2021. – Вип. 33. – С. 68 – 72.
26. *Нечуйвітер О. П.*, *Кейта К. В.* Обчислення $2D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 124 – 131.
27. *Нечуйвітер О. П.* Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.
28. *Литвин О. М.*, *Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
29. *Nechuiviter O. P.* Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies // Information Technologies and Learning Tools. – no. 82 (2). – pp. 282 – 296.

30. *Nechuiviter O. P.*, *Iarmosh O. V.*, *Kovalchuk K. H.* Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 1031 (1). – 012059.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Zastosuvannya interlinatsiyi funktsiy ta shvydkogo peretvorennya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e [Application of function interpolation and fast Fourier transform to calculate Fourier coefficients]. *Materialy XVIII naukovometodychnoyi konferentsiyi* [Materials of the XVIII scientific-methodological conference]. Kharkiv, UIPA Publ., 1995, pp. 229–231.

2. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Zastosuvannya shvydkogo peretvorennya Fur'e dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiyi dvokh zminnykh [Application of the fast Fourier transform to calculate the Fourier coefficients of the functions of two variables]. *Tez. dop. na Vseukr. naukoviy konferentsiyi «Rozrobka ta zastosuvannya matematychnykh metodiv v naukovo-tekhnichnykh doslidzhennyakh»* [Theses add. on All-Ukrainian scientific conference "Development and application of mathematical methods in scientific and technical research"]. Lviv, 1995, pp. 5–7.

3. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.

4. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsylyuuchykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [Optimal cubature formula for calculating double integrals from rapidly oscillating functions and spline interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2008, no. 2, pp. 13–17.

5. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya $2D$ – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [About one cubature formula to calculation of $2D$ Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.

6. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Kubaturna formula dlya obchislennya $2D$ – koefitsientiv Fur'e z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [The cubature formula for calculating $2D$ – Fourier coefficients using the interlineation of functions]. *Visnyk KhNU Im. V. N. Karazina. Ser. : Matematychne modelyuvannya. Informatsiyni tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya : zb. nauk. pr.* [Bulletin of the Karazin Charkiv National University. Series : Mathematical Modeling. Information Technology. Aftomated Control Systems : Collection of scientific papers]. Kharkiv., 2010, no. 926, pp. 153–160.

7. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optimal'nyy za poryadkom tochnosti metod obchyslennya $2D$ – koefitsientiv Fur'e za dopomogoyu interlinatsiyi [The optimal method of calculating $2D$ – Fourier coefficients using interlineation]. *Komp'yuterne modelyuvannya v naukotmnykh tekhnologiyakh : pr. nauk.-tehn. konf. z mizhnarodnoyu uchastyu, 18–21 travnya 2010r.* [Computer modeling in science-intensive technologies: pr. Nauk.-Techn. conf. with international participation, May 18–21]. Kharkiv., 2010, no. 2, pp. 211–213.

8. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010)*. Novosibirsk. 2010, pp. 90–96.

9. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. $2D$ – koefitsienty Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [$2D$ – Fourier coefficients on the class of differential functions and spline-interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.

10. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsyyuyuchykh funktsy z vykorystannyam laganzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from rapidly varying functions using Lagrangian polynomial interlineation]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.

11. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 1. Algorytmy : monografiya. In-t kibernetyky im. V. M. Glushkova NAN Ukrayiny* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 1. Algorithms: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kuiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 447 p.

12. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Mel'nykova S. S., Nechuiviter O. P. *Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy ta yikh zastosuvannya : u 2 t. T. 2. Zastosuvannya : monografiya. In-t kibernetyky im. V. M. Glushkova NAN Ukrayiny* [Optimal Algorithms for Computing Integrals of Quick-Oscillating Functions and their Applications: in 2 Vol. Vol. 2. Applications: monograph. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2011. 348 p.

13. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012, vol. 44, is. 3, pp. 45–56.

14. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'e na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ – Fourier coefficients on a class of differential functions using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichny nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.

15. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'e funktsiy tryekh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of the Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differential functions]. *Shtuchniy Intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.

16. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnyykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya $3D$ – integralov ot bystroostsilliruyusshikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of the accuracy of cubature formulas for the approximate calculation of 3D integrals of fast-oscillating functions with the use of interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.

17. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'e na klasi Geldera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ Fourier coefficients on the Hölder class using piecewise constant spline interpolation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, vol. 1, no. 4, pp. 28– 40.

18. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyusshikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate calculation of oscillating integrals of three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser. : Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University Series: physics and mathematics]. 2013, no, 2. pp. 3–9.

19. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the errors of the numerical integration of the fast-oscillating functions of three variables]. *Nauchnye vedomosti BELGU. Ser. : Matematika. Fizika* [Scientific

statements of the Belgorod state University. Series : mathematics and physics]. 2013, vol. 32, no. 19 (162), pp. 101–107.
20. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014, no. 50(3), pp. 410–418.
21. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Optymal'ni algorytmy obchyslennya integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy iz zastosuvannyam novykh informatsiynykh operatoriv [Optimal algorithms for calculating integrals from rapidly oscillating functions using new information operators]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2017. 336 p.
22. Lytvyn O. M, Nechuiviter O., Pershyna Y., Mezhuyev V. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case). *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information, Proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information*. Kyiv, Ukraine, 2019, pp. 365–373.
23. Mezhuyev V., Lytvyn O. M., Nechuiviter O., Pershyna Y, Keita K., Lytvyn O. O. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018, vol. 80, iss. 3, pp. 169–182.
24. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020, vol. 4, pp. 65–73.
25. Nechuiviter O., Ivanov S., Kovalchuk K. Optymal'ne integruvannya shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy zagal'nogo vidu [Optimal integration of rapidly oscillating functions of the general form]. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiyni tekhnologiyi* [Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies]. 2021, no. 33, pp. 68–72.
26. Nechuiviter O. P., Keita K. V. Obchyslennya $2D$ integraliv vid trigonometrichnih funktsiy z vikoristannyam kuskovo-staloyi interlinatsiyi [Calculation of $2D$ integrals from trigonometric functions using piecewise constant interlineation]. *Matematychne ta komp"yuterne modelyuvannya. Seriya : Fiziko-matematychni nauky : zb. nauk. prats*. [Mathematical and computer modeling. Series: Physical and mathematical sciences : coll. of science works]. Kam'yanets–Podil's'kiy, Kam"yanets'–Podil's'kyy natsional'nyy universytet im. Ivana Ogienka Publ., 2016, no. 13, pp. 124 – 131.
27. Nechuiviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interfletatsiyi [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.
28. Lytvyn O. M, Nechuiviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using Lagrangian polynomial interlineation]. *Tavriys'kyy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1. pp. 66–72.
29. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. no. 82 (2), pp. 282–296.
30. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1031 (1), 012059.

Надійшла (received) 07.10.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних комп’ютерних технологій і математики, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-78-30; e-mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Нечуйвитер Олеся Петровна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных компьютерных технологий и математики, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 733-78-30; e mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv; tel.: (057) 733-78-30; e mail: olesia.nechuiviter@gmail.com.

Іванов Сергій Сергійович – аспірант кафедри інформаційних комп’ютерних технологій і математики, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-78-30; e-mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Иванов Сергей Сергеевич – аспирант кафедры информационных компьютерных технологий и математики, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 733-78-30; e-mail:ivanov.linsholm@gmail.com.

Ivanov Serhiy Serhiyovych – PhD student at the Department of Information Computer Technology and Mathematics, Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv; tel.: (057) 733-78-30; e–mail: ivanov.linsholm@gmail.com.

Ковальчук Кирило Геннадійович – студент фізичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.

Ковальчук Кирилл Геннадиевич – студент физического факультета, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, г. Киев; e-mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.

Kovalchuk Kyrylo Gennadiyovych – student at the Faculty of Physics, Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv; e– mail: kovalchukkyrylo.kk@gmail.com.