

О. Г. ЛЕБІДЬ**ВЕРИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ХВИЛЬОВОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ ПРИ БУКСИРУВАННІ В ПОТОЦІ В РЕЖИМІ ПРИСКОРЕННЯ**

Для цілей асиметричного протистояння з ВМС РФ подальшого розвитку та вдосконалення потребують розподілені системи (РС: кабельні, прив'язні та інші) для беспілотних підводних апаратів. На сьогодні специфіка та методи проектування таких РС у науково-технічній літературі висвітлені недостатньо. Розподілені системи – це буксирвані системи постійної чи змінної довжини в потоці рідини, підводні кабелі зв'язку, опори морських нафтових платформ та інше. Під це визначення підпадають механічні об'єкти, в яких один із лінійних розмірів як мінімум у 10 – 20 разів більший за два інших. Основними обмеженнями для застосування методу скінчених різниць (МСР) для чисельного моделювання поширення та відбиття хвиль у РС є особливості визначальних квазілінійних рівнянь. Вони пов'язані з необхідністю одночасного обчислення змінних, відповідальних за швидкоплинні та повільні хвильові процеси. Для таких систем рівнянь використовується термін «сингулярно збурена система рівнянь». Ці збурення є наслідком значної різниці у швидкостях поширення поздовжніх, конфігураційних, згинальних і крутильних хвиль у РС на фізичному рівні і так само інше. У зв'язку з цим необхідно застосовувати спеціальні покровки за часом методи регуляризації та фільтрації чисельних результатів. Це накладає певні обмеження на можливість моделювання реальних процесів та на точність отриманих результатів і змушує застосовувати неявні різницеві схеми та високочастотне фільтрування. Розглянуто метод розпаралелювання скінченнорізницевого оператора та програмного коду за хвильовим типом. В основі ідеї розпаралелювання за хвилями лежить фізична особливість поширення хвиль різного типу в РС – відмінність у 10 – 100 і більше разів між швидкостями поширення в РС поздовжніх, поперечних (конфігураційних), згинальних і крутильних хвиль. Приріст продуктивності MPI-версії програмного коду в цілому при проведенні обчислень на SMP-системі становить в середньому не менше 30 – 100 % залежно від необхідної точності обчислень і варіантів розпаралелювання. Версія розпаралеленого програмного коду, що використовує метод хвильової факторизації, актуальна при вирішенні завдань управління РС, оперативного чисельного аналізу перехідних режимів руху тощо, де швидкодія є критично необхідною. Проведена порівняльна оцінка точності експериментальних даних, вихідного (нерозпаралеленого) алгоритму та розпаралеленого алгоритму на прикладі чисельного розв'язання задачі про рух судна-буксирувальника в режимі прискорення при буксирванні РС.

Ключові слова: розподілені системи, хвильові процеси, сингулярно збурена система рівнянь, методи регуляризації та фільтрації, розпаралелювання скінченнорізницевого оператора та програмного коду за хвильовим типом, порівняльна оцінка точності, експеримент.

А. Г. ЛЕБЕДЬ**ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВОЛНОВОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ БУКСИРОВАНИИ В ПОТОКЕ В РЕЖИМЕ УСКОРЕНИЯ**

Для целей асимметричного противостояния с ВМС РФ в дальнейшем развитии и совершенствовании нуждаются распределенные системы (РС; кабельные, привязные и др.) для беспилотных подводных аппаратов. На сегодняшний день специфика и методы проектирования таких РС в научно-технической литературе освещены недостаточно. Распределенные системы – буксируемые системы постоянной или переменной длины в потоке жидкости, подводные кабели связи, опоры морских нефтяных платформ и т.д. Под это определение подпадают механические объекты, в которых один из линейных размеров как минимум в 10 – 20 раз больше двух других. Основными ограничениями для применения метода конечных разностей (МКР) для численного моделирования распространения и отражения волн в РС являются особенности определяющих квазилинейных уравнений. Они связаны с необходимостью одновременного вычисления переменных, ответственных за быстрые и медленные волновые процессы. Для таких систем уравнений используется термин «синхронно возбужденная система уравнений». Эти возмущения являются следствием значительной разницы в скоростях распространения продольных, конфигурационных, изгибающих и крутильных волн в РС на физическом уровне и т.п. В связи с этим необходимо применять специальные пошаговые по времени методы регуляции и фильтрации численных результатов. Это накладывает определенные ограничения на возможность моделирования реальных процессов и точность полученных результатов, и заставляет применять неявные разностные схемы и высокочастотную фильтрацию. Рассмотрен метод распаралеливания конечно разностного оператора и программного кода по волновому типу. В основе идеи распаралеливания за волнами лежит физическая особенность распространения волн разного типа в РС – разница в 10 – 100 и более раз между скоростями распространения в РС продольных, поперечных (конфигурационных), изгибающих и крутящих волн. Прирост производительности MPI версии программного кода в целом при проведении вычислений на SMP-системе составляет в среднем не менее 30 – 100 % в зависимости от необходимой точности вычислений и вариантов распаралеливания. Версия распаралеленного программного кода, использующего метод волновой факторизации, актуальна при решении задач управления РС, оперативного численного анализа переходных режимов движения и т.п., где быстродействие является критически необходимым. Произведена сравнительная оценка точности экспериментальных данных, исходного (нераспаралеленного) алгоритма и распаралеленного алгоритма на примере численного решения задачи о движении судна-буксировщика в режиме ускорения при буксировке РС.

Ключевые слова: распределенные системы, волновые процессы, сингулярно-возмущенная система уравнений, методы регуляризации и фильтрации, распаралеливание конечно-разностного оператора и программного кода по волновому типу, сравнительная оценка точности, эксперимент.

О. Г. ЛЕБІДЬ**VERIFICATION OF THE WAVE FACTORIZATION METHOD FOR CALCULATION OF DISTRIBUTED SYSTEMS DURING TOWING IN A FLOW IN ACCELERATION MODE**

For purposes of asymmetric confrontation with the Russian Navy, distributed systems (DS; cable, tethered, etc.) for unmanned underwater vehicles need further development and improvement. To date, specifics and methods of designing such DSs are insufficiently covered in scientific and technical literature. Distributed systems include towed systems of constant or variable length in a flow of liquid, underwater communication cables, pillars of offshore oil platforms, etc. This definition includes mechanical objects with one of the linear dimensions at least 10 – 20 times larger than the other two. The main limitations for application of the finite difference method (FDM) for numerical modeling of wave propagation and reflection in DS are the peculiarities of the defining quasi-linear equations. They are related to the need of simultaneous calculation of variables responsible for fast and slow wave processes. The term "singularly perturbed system of equations" is used for such systems of equations. These perturbations are the result of a significant difference in propagation velocities of longitudinal, configurational, bending, and torsional waves in DS at the physical level, etc. In this regard, it is necessary to apply the special step-by-step methods of regularization and filtering of numerical results. This imposes certain limitations on

© О. Г. Лебідь, 2022

the possibility of simulating real processes and on the accuracy of obtained results, and forces the use of the implicit difference schemes and high-frequency filtering. The method of parallelization of the finite-difference operator and the program code according to the wave type is considered. The idea of parallelization by waves is based on the physical feature of propagation of different types of waves in distributed systems – a difference of 10 – 100 or more times between the propagation velocities of the longitudinal, transverse (configurational), bending and torsional waves in DS. The increase in productivity of the MPI version of a programming code when performing calculations on the SMP system is on average at least 30 – 100%, depending on the required accuracy of calculations and parallelization options. The version of the parallelized code, which uses the wave factorization method, is relevant when solving tasks of DS control, operational numerical analysis of transient modes of motion, etc., where performance is critically necessary. The comparative assessment of the accuracy of the experimental data, the original (non-parallelized) algorithm and the parallelized algorithm was carried out using the example of the numerical solution of the problem of the towing vessel's movement in the acceleration mode when towing the DS.

Key words: distributed systems, wave processes, singularly perturbed system of equations, regularization and filtering methods, parallelization of finite difference operator and programming code by wave type, comparative assessment of accuracy, experiment.

Вступ. 8 вересня 2021 р. було оприлюднено Указ Президента України № 459/2021, яким він увів у дію таємне рішення РНБО від 20.08.2021 «Щодо розвитку Військово-Морських Сил Збройних Сил України до 2031 року» [1]. Враховуючи різницю в технічному оснащенні ВМС України і Росії, яка призводить до їх нерівного військового потенціалу, наші можливі дії в сфері протистояння з ВМС РФ можна розглядати як асиметричні. Для забезпечення асиметричного протистояння з ВМС РФ подальшого розвитку та вдосконалення потребують *розподілені системи (РС)* (кабельні, прив'язні та інші) *безпілотних підводних апаратів (БПА)*. На сьогодні специфіка та методи їх проектування в науково-технічній літературі висвітлені недостатньо.

Розподілені системи (РС) – це буксирювані системи постійної чи змінної довжини в потоці рідини, підводні кабелі зв'язку, опори морських нафтових платформ та інше. Під це визначення підпадають механічні об'єкти, де один з лінійних розмірів, як мінімум, у 10 – 20 разів більший за два інших. Ряд особливостей їх функціонування визначає доцільність, а іноді й необхідність цілеспрямованої зміни довжини РС, що зв'язує БПА і носій (рис. 1 [2]). У таких випадках РС є не лише компонентом загальної динамічної прив'язної системи, але і виступає в ролі самостійного об'єкта керування.

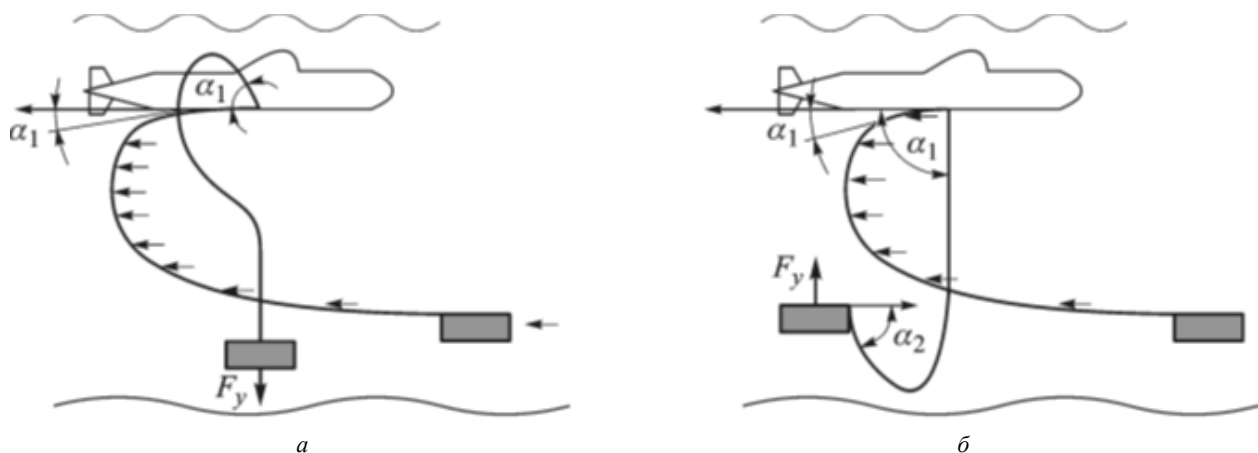


Рис. 1 – Конфігурація РС змінної довжини для безпілотного підводного апарата [2]: а – плавучий кабель; б – кабель негативної плавучості; α_1 – кут між горизонтальною віссю носія та РС змінної довжини в корінній точці; α_2 – кут між горизонтальною віссю та РС змінної довжини в місці її кріплення до безпілотного підводного апарата.

Незважаючи на численні дослідження, проведені в галузі вивчення статичної та динамічної поведінки РС, недоопрацьованими залишаються багато особливостей їх поведінки під час нестационарних режимів руху, проблема втрати стійкості при транспортуванні в потоці, еволюція РС при керованій зміні довжини, правильний вибір коефіцієнта динамічності системи при складних маневрах судна-транспортувальника, питання петлеутворення, порушення умов прокладання тощо.

Математичні моделі, що відображають динамічну поведінку РС в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил, зазвичай описуються *нелінійними рівняннями* в частинних похідних, вирішення яких можливе лише з використанням обчислювальних методів. Розвитком обчислювальних методів і алгоритмів, які можуть бути використані для математичного моделювання задач динаміки протяжних елементів та конструкцій, активно займалися А. Я. Бомба, В. А. Ванін, В. О. Васянін, О. В. Гладкий, С. О. Довгий, І. В. Сергієнко, О. М. Трофимчук, І. Т. Селезов, О. М. Хіміч та інші [3 – 17]. У розвиток нестационарних задач аерогідропружності напружено-деформованого стану (НДС) РС, розробку вирішення статичних, динамічних та оптимізаційних задач значний внесок зробили радянські, українські та російські вчені О. М. Крилов, С. П. Тимошенко, О. М. Динник, О. Ю. Ішлінський, Н. Є. Кочин, Г. С. Писаренко, М. А. Кильчевський, М. М. Федоров, Г. Н. Савін, І. Т. Селезов, О. О. Горошко, Я. Ф. Каюк, О. М. Гузь, А. П. Нестеров, Ф. В. Флоринський, Н. В. Салтанов, В. О. Горбань, О. Є. Орданович, В. М. Каліков, В. І. Гуляєв, В. О. Баженов, П. П. Лизунов, О. О. Ллюхін, В. Д. Кубенко та інші. Істотні результати в галузі вирішення прикладних задач статичної, динамічної та оптимізації РС отримані Ю. В. Ядикінім, О. І. Безверхим, В. І. Дедковим, В. І. Поддубним, Р. Ф. Льїним та іншими. Серед зарубіжних вчених, які зробили значний внесок в аналіз статичної та динамічної РС у потоці, необхідно

виділити *C. M. Ablow, O. O. Berto, B. E. Calkins, M. I. Casarella, B. A. Chapman, O. M. Griffin, C. Hegemier, W. B. Iwers, D. Marichal, S. Nair, M. P. Paidoussis, N. S. Triantafyllou, B. S. Wingham* та інші. [18 – 22].

Питання, пов'язані зі створенням та апробацією ефективних чисельних методик вирішення оптимальних та нестационарних задач проектування РС різних типів, є нині недостатньо вивченими та вимагають окремого розгляду. Мало вивчені на сьогодні діапазони застосовності різних обчислювальних методик і моделей, що слугують для визначення нестационарних характеристик *напружено-деформованого стану (НДС)* буксируваних систем у потоці рідини.

Математичні моделі, що відображають динамічну поведінку РС у просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил, зазвичай описуються нелінійними рівняннями в частинних похідних [23], вирішення яких можливе лише з використанням обчислювальних методів [3 – 17]. Проблеми чисельного моделювання нелінійних задач динаміки РС полягають у наступному.

1. Їх поздовжній розмір на декілька порядків перевищує розмір у поперечному напрямку. Це призводить до ускладнень при розрахунку *хвиль* різної природи в РС (*конфігураційних, згинальних, крутильних, депланаційних* тощо), при тому що необхідно одночасно враховувати поздовжні хвилі.

2. Застосування проєкційних методів чисельного аналізу *квазілінійних рівнянь динаміки РС* призводить до присутності в матричних рівняннях коефіцієнтів при невідомих, що можуть відрізнятися один від одного на декілька порядків. Як добре відомо, це призводить до великих проблем з обчисленням оберненої матриці цих рівнянь і до необхідності застосування спеціальних методів та алгоритмів подвійної точності і таке інше.

3. У зв'язку з великою чутливістю чисельних алгоритмів до похибок у початкових і крайових умовах, складно подолати розбіжність чисельних алгоритмів. Для цього необхідно застосовувати спеціальні методи та програмні високочастотні фільтри.

4. Під час чисельної реалізації багатохвильових моделей РС виникають деякі труднощі, зумовлені тим, що швидкість поширення хвиль різного типу неоднакова [24]. В окремих випадках, наприклад, для поздовжніх і поперечних хвиль у РС, різниця може становити величину в декілька порядків [24]. За чисельної реалізації ця особливість призводить до накопичення похибок в обчисленні шуканих величин під час переходу з одного часового шару на наступний і в результаті – до *«розхитування»* програми.

5. Відомі математичні моделі РС [25] є не цілком коректними з точки зору врахування різноманітності хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови також уточнених багатохвильових моделей РС додатково до спеціальних чисельних методів та алгоритмів їх розрахунку.

Все перераховане вище у сукупності і визначає *актуальність* досліджень.

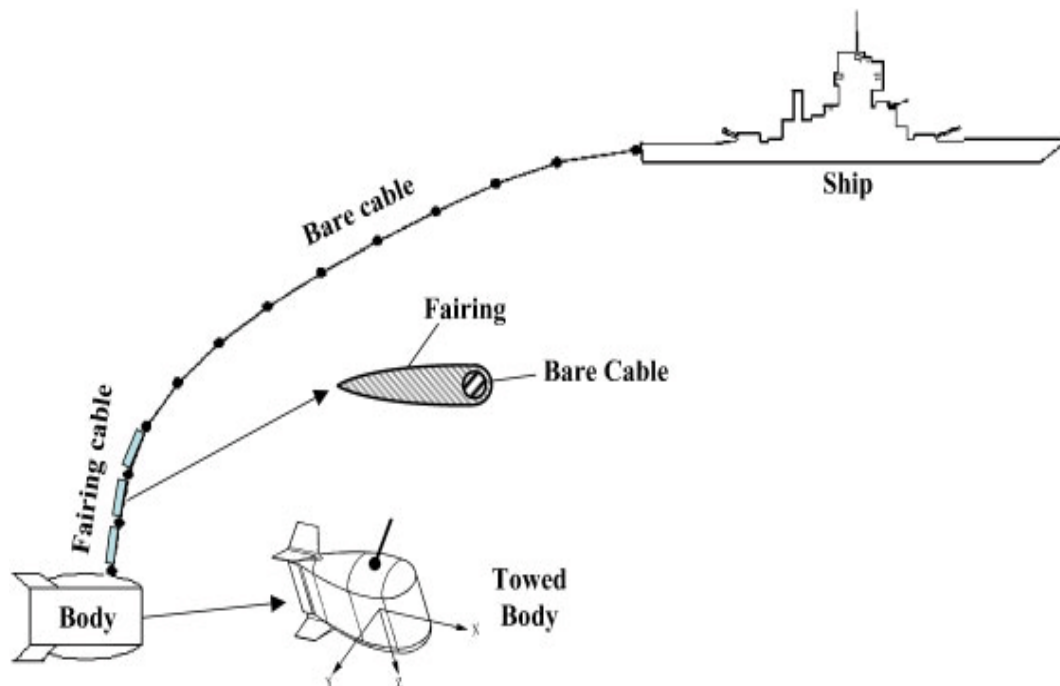


Рис. 2 – Буксирувана в потоці рідини РС з безпілотним підводним апаратом на кінці.

Нелінійну хвильову модель РС, якою описується підводна розподілена буксирувана система (рис. 2), що рухається у потоці стаціонарно або з прискоренням у площині, можна представити у вигляді матричного рівняння типу переносу в стандартній формі [23, 24]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (1)$$

Тут E – одинична матриця, B – матриця конвективних членів. Вектор-стовпець правих частин D визначається

розподіленими масовими та поверхневими силами, а також моментами цих сил. Вектор-стовпець D залежить від часу t , лагранжевої координати S , вектора-стовпця невідомих W , компонент розподілених масових і поверхневих сил.

Розмірність матричного рівняння (1) визначається кількістю врахованих хвиль у РС: 2 – врахована одна хвиля – поздовжня або поперечна (це характерно для переважної більшості робіт), 4 – враховані дві хвилі (прикладом є модель балки Тимошенка [23] та інше), 6 – враховані три хвилі тощо. В роботі [23] отримано найбільш узагальнену на сьогодні математичну модель (1) розмірності 14, що описує нелінійну динаміку РС у просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Вона враховує сім хвиль в РС п'яти типів: поздовжню, крутильну, дві конфігураційні (поперечні), дві згинальні, а також депланаційну. Для моделі [23] виконуються *принципи граничності та гіперболічності*, що сформульовані І. Т. Селезовим в роботі [14].

Крайові та початкові умови для моделі (1). У верхній частині РС (при $S = L$) можуть бути задані проекції швидкості \bar{U} :

$$\bar{U}(L, t) = \bar{U}^*(t). \quad (2)$$

На нижньому кінці РС (при $S = 0$) можуть бути задані умови динамічної рівноваги сил \bar{F}_i і моментів \bar{M}_j на кінці РС:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \bar{M}_j = 0. \quad (3)$$

В якості початкових умов використовується рішення задачі статички рівнянь моделі (1) при $t = 0$:

$$B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (4)$$

Модель (1) з початковими (4) та крайовими умовами (2) – (3) являє собою замкнену систему квазілінійних рівнянь в частинних похідних [23], а також початково-крайову задачу.

Верифікація методу хвильової факторизації за матеріалами публікації [26]. У випадку двоххвильового наближення моделі (1) – (4) одинична матриця E буде мати розмір 4×4 , матриця при конвективних членах B – також 4×4 , вектор-стовпець правих частин D та вектор-стовпець невідомих W – 1×4 .

Покомпонентно елементи матриці B , вектора-стовпця D і вектора-стовпця невідомих W можна записати [23, 24]:

$$B_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{-1}{m} & 0 \\ \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{u_t}{1+eT} & 0 & \frac{u_t^2 + u_n^2}{1+eT} - \frac{T - Mu_t^2}{m+M} \\ \frac{-1}{e} & 0 & 0 & \frac{u_n}{e} \\ 0 & \frac{-1}{1+eT} & 0 & \frac{-u_t}{1+eT} \end{pmatrix},$$

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} (\omega \sin \varphi + \frac{\pi k_f \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_t| u_t) \\ \frac{-1}{m+M} (\omega \cos \varphi + \frac{k_n \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_n| u_n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \\ T \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де d_0 – початковий діаметр РС до деформування; φ – кут нахилу РС до горизонталі; m , M , ω – маса, приєднана маса та плавучість одиниці довжини РС до деформування; k_f , k_n – гідродинамічні коефіцієнти опору тертя та форми РС; ρ – щільність рідини; T – ефективний натяг РС; u_t , u_n – проекції відносної швидкості обтікання РС на дотичну та нормаль; t – час; S – поточна довжина РС до деформування; $e = 1/EF$ – ефективна розтяжність РС; E – модуль Юнга; F – площа поперечного перерізу РС до деформування.

Граничні умови в корінній точці РС ($S = 0$), яка здійснює рівноприскорений рух, запишуться у вигляді:

$$u_t(0, t) = V(t) \cos \varphi; \quad u_n(0, t) = V(t) \sin \varphi, \quad (6)$$

де $u_t(0, t)$, $u_n(0, t)$ – проекції відносної швидкості обтікання РС на поточну дотичну та нормаль у точці РС

$S = 0$; $V(t)$ – швидкість (закон руху) судна-буксирвальника.

На буксирване тіло діють сили ваги, сила Архімеда, динамічні сили опору та інерції приєднаної маси рідини, зусилля T в точці кріплення підводного буксирваного апарату (ПБА). У цьому випадку крайова умова при $S = L$ набуде вигляду:

$$\begin{aligned} Q^* + P^* \sin \phi + M^* \left(\frac{\partial u_t}{\partial t} - u_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_t &= 0; \\ P^* \cos \phi + M^* \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} - u_t \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_n &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де Q^* – контактна сила в місці кріплення ПБА до РС; P^* – різниця гідростатичної виштовхувальної сили та сили ваги, що діють на ПБА; M^* – сума маси та приєднаної маси ПБА; K^* – коефіцієнт опору ПБА; Z^* – площа середнього перерізу ПБА.

Для перевірки працездатності методу хвильової факторизації було проведено тестові розрахунки на прикладі розрахунку нестационарного режиму руху буксирваної системи, що наведена у публікації [26]. Розрахунки були проведені для таких технічних та гідродинамічних характеристик РС та буксирваного тіла [26]: діаметр РС становив 0.006 м, ефективна погонна маса – 0.5 кг (маса та приєднана маса), плавучість одиниці довжини РС до деформації – 4.8 Н, коефіцієнти гідродинамічного опору форми та тертя – 1.4 та 0.01, відповідно, ефективна розтяжність РС – 3.5×10^{-9} , довжина РС – 1.2 м, коефіцієнт гідродинамічного опору тіла, що буксирується, – 0.15, площа його середнього перерізу – 0.002 м^2 , ефективна маса тіла, що буксирується (маса плюс приєднана маса), – 3 кг, вага тіла у воді – 9.4 Н, прискорення – 0.9 м/с^2 .

У табл. 1 та 2 наведені порівняльні дані експериментів і розрахунків за роботою [26], а також дані розрахунків за факторизованим алгоритмом [24] режиму прискорення зі стану спокою до швидкості 1,5 м/с та усталеного режиму руху.

Таблиця 1 – Порівняння відносних похибок чисельного визначення глибини руху РС за працею [26] (ΔH_1) та факторизованим алгоритмом (ΔH_2)

Час (с)	$\Delta H_1, \%$	$\Delta H_2, \%$
0	0	0
0.5	2	3
1.0	4	6
1.5	7	9
2.0	11	15
2.5	2	4
3.0	2	3
3.5	3	6
4.0	4	4
4.5	2	3
5.0	2	3

Таблиця 2 – Порівняння відносних похибок чисельного визначення віддалення (X) руху РС за працею [26] (ΔX_1) та факторизованим алгоритмом (ΔX_2)

Час (с)	$\Delta X_1, \%$	$\Delta X_2, \%$
0	0	0
0.5	18	23
1.0	16	22
1.5	14	19
2.0	21	25
2.5	5	6
3.0	4	9
3.5	15	20
4.0	13	17
4.5	4	6
5.0	2	2

Обчислення відносної похибки глибини руху РС за працею [26] (ΔH_1) та факторизованим алгоритмом (ΔH_2) здійснювалося за формулами:

$$\Delta H_1 = \left| \frac{H_1 - H_0}{H_0} \right| \times 100\%, \quad \Delta H_2 = \left| \frac{H_2 - H_0}{H_0} \right| \times 100\%, \quad (8)$$

де H_0 – експериментально зареєстроване значення глибини руху РС; H_1 – чисельно визначене значення глибини руху РС за працею [26], що відповідає умовам експерименту; H_2 – чисельно визначене значення глибини руху РС за факторизованим алгоритмом, що відповідає умовам експерименту.

Обчислення відносної похибки віддалення (X) руху РС за працею [26] (ΔX_1) та факторизованим алгоритмом (ΔX_2) здійснювалося за формулами:

$$\Delta X_1 = \left| \frac{X_1 - X_0}{X_0} \right| \times 100\%, \quad \Delta X_2 = \left| \frac{X_2 - X_0}{X_0} \right| \times 100\%, \quad (9)$$

де X_0 – експериментально зареєстроване значення віддалення руху РС; X_1 – чисельно визначене значення віддалення руху РС за працею [26], що відповідає умовам експерименту; X_2 – чисельно визначене значення віддалення руху РС за факторизованим алгоритмом, що відповідає умовам експерименту.

Отримано якісний та кількісний збіг трьох випадків. Кількісні відмінності на окремих ділянках обумовлені тим, що у статті [26] наведено неповні дані про технічні та гідродинамічні характеристики РС, а також умови проведення експериментів. Тому недостатні параметри були визначені методом ідентифікації за неповних вхідних даних за фігурою 10 статті [26] на основі методів нелінійного програмування, що застосовуються до РС. Докладний опис таких методів нелінійного програмування міститься у роботі [27].

Верифікація методу хвильової факторизації за матеріалами публікації [28]. Для виконання порівняльного аналізу чисельних результатів моделювання динаміки РС при прискоренні за *методом хвильової факторизації* та повним чисельним моделюванням (5) – (7) було проведено порівняльний аналіз за даними публікації [28]. У публікації [28] були поставлені експерименти, в ході яких реєструвалася горизонтальна складова сили натягу в корінній точці РС для заданих режимів прискорення, а також при різних швидкостях руху в діапазоні $[0-1.5\text{ м/с}]$. Модель РС 1 – 2 в потоці (рис. 3) кріпилася до шарнірної підвіски 3, яка за допомогою тяги 4 з'єднувалася з тензодатчиком 5. Тензодатчик 5 був прикріплений до рами 6, яка була жорстко з'єднана з буксирним візком 7. При переміщенні візка 7 горизонтальна складова сили моделі РС 1 – 2 передавалася за допомогою підвіски 3 і тяги 4 на тензодатчик 5.

Окремі результати, що отримані в [28] на підставі чисельних розрахунків та обробки експериментальних даних, представлені на рис. 4, де показана еволюція зміни горизонтальної складової сили натягу T .

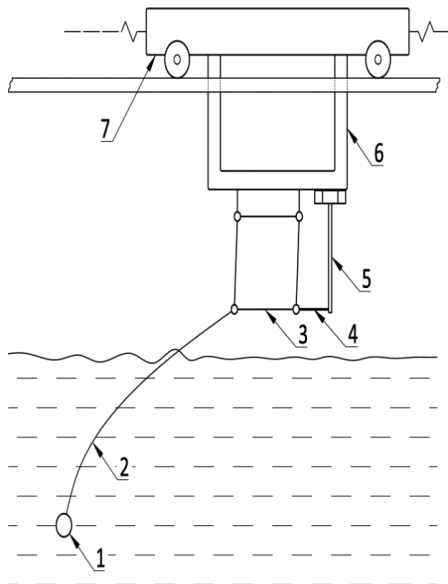


Рис. 3 – Експериментальна установка. Повний опис елементів установки наведено в [28].

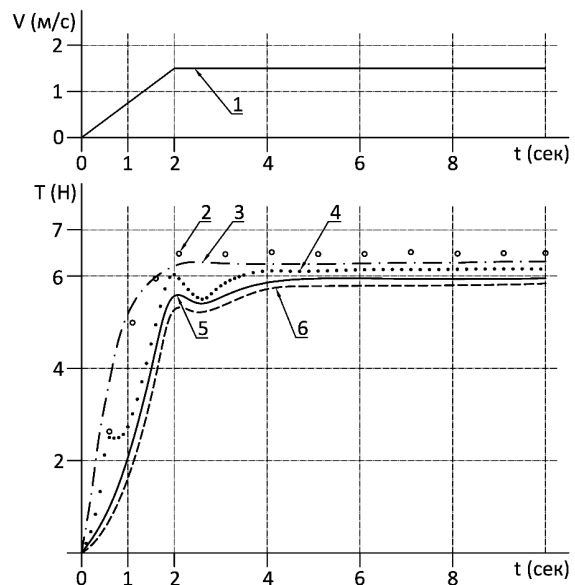


Рис. 4 – Еволюція зміни горизонтальної складової сили натягу [28].

На рис. 4 цифрою 1 позначені експериментальні дані зміни швидкості буксирного візка 7 (рис. 3); 2 – експериментальні дані встановленого руху; 3 – квазістатичний розрахунок встановленого руху; 4 – експериментальні дані рівноприскореного руху; 5 – дані чисельного моделювання рівноприскореного руху РС з урахуванням приєднаної маси рідини; 6 – дані чисельного моделювання рівноприскореного руху РС без урахування приєднаної маси.

Аналіз результатів. На основі порівняльного аналізу результатів розрахунків (5) – (7) за методом хвильової факторизації для даних РС з публікації [26] та аналізу результатів [28] (графік на рис. 4), можна зробити висновки про можливість застосування методу хвильової факторизації для розрахунку силових характеристик при прискоренні. Чисельні дані, що отримуються при цьому, адекватно моделюють силові та геометричні характеристики РС, що реєструються в експериментах (наприклад, величина горизонтальної проекції осьового зусилля в корінній точці РС). Відмінності на всіх ділянках нестационарного режиму та режиму встановлення не перевищували 15 – 25 %.

Зважаючи на те, що розраховуються одночасно два різні хвильові процеси в РС, були визначені діапазони числа Куранта – Фрідрікса – Леві (КФЛ) для поздовжніх $\sigma_{пр}$ і поперечних $\sigma_{пн}$ коливань. Ідентичність чисельних результатів було отримано шляхом зміни модуля Юнга в діапазоні $[10^6 \text{ Н/м}^2; 5 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2]$, що відповідало зміні

числа КФЛ для позовжніх хвиль у діапазоні $\sigma_{\text{пр}} \in [2.65; 188.9]$. Для більш низьких і високих значень числа КФЛ за позовжніми коливаннями $\sigma_{\text{пр}}$ спостерігалася розбіжність чисельного алгоритму. Причому нижня межа $\sigma_{\text{пр}}$ відповідала числу модуля Юнга для значно деформованих матеріалів, приміром гуми, які практично не використовуються в якості РС, що буксируються. Очевидно, їхня значна деформованість спричинила розробку чисельного алгоритму. Зменшенням дискретизації розрахункової області можна буде збільшити $\sigma_{\text{пр}}$ і, відповідно, провести динамічний розрахунок систем, що складаються з матеріалів із низькими і високими значеннями модуля Юнга. Зміною числа КФЛ для позовжніх коливань $\sigma_{\text{пр}}$ можна буде керувати (вибираючи потрібну дискретизацію за часом). У цьому випадку $\sigma_{\text{пр}}$ зменшиться та обчислювальна програма працюватиме стійко.

Висновки. Метод хвильової факторизації продемонстрував достатню ефективність для розрахунку режиму прискорення РС у потоці. Це впливає з порівняльного аналізу відповідних результатів обчислення режиму прискорення РС іноземним дослідником [26] та українським вченим [28], результатами їх власних експериментів та результатами розрахунку автора статті за факторизованим алгоритмом.

Зміною числа КФЛ для позовжніх коливань $\sigma_{\text{пр}}$ можна буде керувати (вибираючи потрібну дискретизацію за часом). У цьому випадку $\sigma_{\text{пр}}$ зменшиться і алгоритм працюватиме стійко.

Потребують подальшого розвитку та вдосконалення розпаралелювання чисельних алгоритмів та програм розрахунку нестационарних задач багатомодової взаємодії в РС, скінченнорізницеві алгоритми та інше.

Список літератури

1. *Зеленький ввів у дію секретне рішення РНБО про розвиток флоту (документ)*. – Режим доступу : <https://www.unian.ua/politics/zelenskiy-vviv-udiyu-sekretne-rishennya-rnbo-pro-rozvitok-flotu-dokument-novini-ukrajina-11538349.html>. – Дата звернення : 10 Жовтня 2022.
2. *Вельтицев В. В.* Упрощённое представление гибкого троса переменной длины для моделирования динамики дистанционно управляемого подводного комплекса // *Вестник МГТУ им. Н. Е. Баумана. Серия : "Инжиниринг"*. – 2012. – pp. 32 – 39.
3. *Гладкий А. В., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Київ : Наукова Думка, 2001. – 452 р.
4. *Khimich O. M., Chistyakova T. V., Sidoruk V. A.* Adaptive Computer Technologies for Solving Problems of Computational and Applied Mathematics // *Cybern Syst Anal.* – 2021. – no. 57. – pp. 990 – 997. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00424-z>.
5. *Petryk M. R., Boyko I. V., Khimich O. M.* High-Performance Supercomputer Technologies of Simulation and Identification of Nanoporous Systems with Feedback for n-Component Competitive Adsorption // *Cybern Syst Anal.* – 2021. – no. 57. – pp. 316 – 328. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00357-7>.
6. *Khimich O. M., Popov O. V., Chistyakov O. V.* A Parallel Algorithm for Solving a Partial Eigenvalue Problem for Block-Diagonal Bordered Matrices // *Cybern Syst Anal.* – 2020. – no. 56. – pp. 913 – 923. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00311-z>.
7. *Khimich A. N., Nikolaevskaya E. A.* Existence and Uniqueness of Weighted Normal Pseudosolutions // *Cybern Syst Anal.* – 2020. – no. 56. – pp. 544 – 549. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00270-5>.
8. *Khimich A. N., Sydoruk V. A., Nesterenko A. N.* Hybrid algorithm Newton method for solving systems of nonlinear equations with block Jacobi matrix // *CEUR Workshop Proc.* – 2020. – no. 2866. – pp. 209 – 217. <https://doi.org/10.15407/pp2020.02-03.208>.
9. *Bomba A. Y., Boichura M. V.* Identifying the Structure of Soil Massifs by Numerical Quasiconformal Mapping Methods // *Cybern Syst Anal.* – 2021. – no. 57. – pp. 927 – 937. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00427-w>.
10. *Bomba A. Y., Moroz I. P., Boichura M. V.* The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated p-i-n-structures on the base of using the conformal mapping method // *Radio Electronics, Computer Science, Control.* – 2021. – no. (1). – pp. 14 – 28. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-1-2>.
11. *Baranovsky S. V., Bomba A. Y., Lyashko S. I.* Generalization of the Antiviral Immune Response Model for Complex Consideration of Diffusion Perturbations, Body Temperature Response, and Logistic Antigen Population Dynamics // *Cybern Syst Anal.* – 2022. – no. 58. – pp. 576 – 592. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00491-w>.
12. *Turbal Y., Bomba A., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O.* Pyramidal method of extrapolation for short time series // *Int. J. Comput. Sci. Math.* – 2019. – no. 10. – pp. 525 – 533. DOI : 10.1504/ijcsm.2019.10025669.
13. *Ванин В. А., Светличный С. П.* Численное исследование взаимодействия тела птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного методов // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 5 – 15.
14. *Selezov I. T.* Development and Application of the Cauchy – Poisson Method to Layer Elastodynamics and the Timoshenko Equation // *Cybern Syst Anal.* – 2018. – no. 54. – pp. 434 – 442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>.
15. *Kruhol N., Lasurenko O., Vainin V.* Group Regulation Efficiency Analysis for Thermal Power Plant Auxiliaries // *IEEE 6th Int. Conf. on Energy Smart Systems.* – 2019. – P. 289 – 293.
16. *Kruhol N., Lasurenko O., Vainin V.* Assessment of Group Regulation Feasibility in Thermal Power Plant Auxiliaries Capacity Control // *EEJET. Energy-saving Technologies and Equipment.* – 2020. – vol. 6. – No. 8 (108). – pp. 45 – 53. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.218586>.
17. *Ванин В. А.* Математичні моделі та чисельні методи в задачах механіки суцільного середовища. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – 209 р.
18. *Ablow C. M., Schechter S.* Numerical simulation of undersea cable dynamics // *Ocean eng.* – 1983. – vol. 10. – no. 6. – pp. 443 – 457. [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(83\)90046-X](https://doi.org/10.1016/0029-8018(83)90046-X).
19. *Calkins D. E.* Hydrodynamic analysis of a high-speed marine towed system // *J. Hydronaut.* – 1979. – vol. 13. – no. 1. – pp. 10 – 19.
20. *Chapman D. A.* The adjustment of fin size to minimize the ship induced pitching motion of a towed fish // *Ocean Eng.* – 1984. – vol. 11. – no. 1. – pp. 23 – 64. [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(84\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0029-8018(84)90022-2).
21. *Hegemier G. A., Nair S. A.* A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods // *AIAA*. – 1977. – vol. 15. – no. 1. – pp. 8 – 15.
22. *Wingham P. J.* Comparative steady state deep towing performance of bare and fired cable systems // *J. Ocean Eng.* – 1983. – vol. 10. – no. 1. – pp. 1 – 31.
23. *Lebid O. G.* A five-mode quasi-linear model of the nonlinear dynamics of an extended system // *Environmental safety and nature management.* – 2021. – no. 38(2). – pp. 104 – 120. doi: 10.32347/2411-4049.2021.2.104-120.
24. *Kaliukh I., Lebid O.* Constructing the Adaptive Algorithms for Solving Multi-Wave Problems // *Cybern Syst Anal.* – 2021. – no. 57. – pp. 938 – 949. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00419-w>.
25. *Saltanov N. V.* Flexible threads in streams. – К. : Naukova dumka, 1974. – 140 p.
26. *Chapman D. A.* A study of the ship induced roll-yaw motion of a heavy towed fish // *J. Ocean Eng.* – 1984. – vol. 11. – no. 6. – pp. 627 – 654.

27. Kaliukh I., Trofymchuk O., Lebid O. Numerical Solution of Two-Point Static Problems for Distributed Extended Systems by Means of the Nelder–Mead Method // *Cybern Syst Anal.* – 2019. – no. 55. – pp. 616–624. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>.
28. Kalyukh Y. I. Applicability of the Quasistatic Approach to the Calculation of the Characteristics of an Accelerating Towed System // *Int Appl Mech.* – 2020. – no. 56. – pp. 382–387. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01022-w>.

References (transliterated)

- Zelens'kyi vviv u diyu sekretne rishennya RNBO pro rozvytok flotu (dokument) [Zelenskyi put into effect the secret decision of the National Security Council on the development of the fleet (document)]. Available at : <https://www.unian.ua/politics/zelenskiy-vviv-u-diyu-sekretne-rishennya-mbo-pro-rozvytok-flotu-dokument-novini-ukrajina-11538349.html>. (accessed : 10 October 2022).
- Velt'shchev V. V. Uproshhennoe predstavlenie gibkogo trosa peremennoy dliny dlya modelirovaniya dinamiki distantsionno upravlyаемого podvodnogo kompleksa [Simplified representation of a flexible cable of variable length for modeling the dynamics of a remotely controlled underwater complex]. *Vestnik MG TU im. N. E. Bauman. Seriya : "Inzhiniring"* [Bulletin of MSTU im. N.E. Bauman. Ser. : "Engineering"]. 2012, pp. 32–39.
- Gladkiy A. V., Sergienko I. V., Skopeckiy V. V. *Chislennie-analiticheskie metody issledovaniya volnovykh protsessov* [Numerical-analytical methods for studying wave processes]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 2001. 452 p.
- Khimich O. M., Chistyakova T. V., Sidoruk V. A. Adaptive Computer Technologies for Solving Problems of Computational and Applied Mathematics. *Cybern Syst Anal.* 2021, no. 57, pp. 990–997. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00424-z>.
- Petryk M. R., Boyko I. V., Khimich O. M. High-Performance Supercomputer Technologies of Simulation and Identification of Nanoporous Systems with Feedback for n-Component Competitive Adsorption. *Cybern Syst Anal.* 2021, no. 57, pp. 316–328. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00357-7>.
- Khimich O. M., Popov O. V., Chistyakov O. V. A Parallel Algorithm for Solving a Partial Eigenvalue Problem for Block-Diagonal Bordered Matrices. *Cybern Syst Anal.* 2020, no. 56, pp. 913–923. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00311-z>.
- Khimich A. N., Nikolaevskaya E. A. Existence and Uniqueness of Weighted Normal Pseudosolutions. *Cybern Syst Anal.* 2020, no. 56, pp. 544–549. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00270-5>.
- Khimich A. N., Sydor V. A., Nesterenko A. N. Hybrid algorithm Newton method for solving systems of nonlinear equations with block Jacobi matrix. *CEUR Workshop Proc.* 2020, no. 2866, pp. 209–217. <https://doi.org/10.15407/pp2020.02-03.208>.
- Bomba A. Y., Boichura M. V. Identifying the Structure of Soil Massifs by Numerical Quasiconformal Mapping Methods. *Cybern Syst Anal.* 2021, no. 57, pp. 927–937. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00427-w>.
- Bomba A. Y., Moroz I. P., Boichura M. V. The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated p-i-n-structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2021, no. (1), pp. 14–28. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-1-2>.
- Baranovsky S. V., Bomba A. Y., Lyashko S. I. Generalization of the Antiviral Immune Response Model for Complex Consideration of Diffusion Perturbations, Body Temperature Response, and Logistic Antigen Population Dynamics. *Cybern Syst Anal.* 2022, no. 58, pp. 576–592. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00491-w>.
- Turbal Y., Bomba A., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O. Pyramidal method of extrapolation for short time series. *Int. J. Comput. Sci. Math.* – 2019. – no. 10. – pp. 525–533. DOI : 10.1504/ijcsm.2019.10025669.
- Vanin V. A., Svetlichnyy S. P. Chislennoe issledovanie vzaimodeystviya tela pit'sy s pregradoy na osnove setochnogo i bessetochnogo metodov [Numerical study of the interaction of bird carcasses with an obstacle on the basis of the grid and gridless methods]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. – Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 5–15.
- Selezov I. T. Development and Application of the Cauchy – Poisson Method to Layer Elastodynamics and the Timoshenko Equation. *Cybern Syst Anal.* 2018, no. 54, pp. 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>.
- Kruhul N., Lasurenko O., Vanin V. Group Regulation Efficiency Analysis for Thermal Power Plant Auxiliaries. *IEEE 6th Int. Conf. on Energy Smart Systems.* 2019, pp. 289–293.
- Kruhul N., Lasurenko O., Vanin V. Assessment of Group Regulation Feasibility in Thermal Power Plant Auxiliaries Capacity Control. *EEJET. Energy-saving Technologies and Equipment.* 2020, vol. 6, no. 8 (108), pp. 45–53. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.218586>.
- Vanin V. A. *Matematychni modeli ta chysel'ni metody v zadakhakh mekhaniky sutsil'nogo seredovyssha* [Mathematical models and numerical methods in problems of the mechanics of the heart]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2019. 209 p.
- Ablow C. M., Schechter S. Numerical simulation of undersea cable dynamics. *Ocean Eng.* 1983, vol. 10, no. 6, pp. 443–457. [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(83\)90046-X](https://doi.org/10.1016/0029-8018(83)90046-X).
- Calkins D. E. Hydrodynamic analysis of a high-speed marine towed system. *J. Hydronaut.* 1979, vol. 13, no. 1, pp. 10–19.
- Chapman D. A. The adjustment of fin size to minimize the ship induced pitching motion of a towed fish. *Ocean Eng.* 1984, vol. 11, no. 1, pp. 23–64. [https://doi.org/10.1016/0029-8018\(84\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0029-8018(84)90022-2).
- Hegemier G. A., Nair S. A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods. *AIAA J.* 1977, vol. 15, no. 1, pp. 8–15.
- Wingham P. J. Comparative steady state deep towing performance of bare and fired cable systems. *J. Ocean Eng.* 1983, vol. 10, no. 1, pp. 1–31.
- Lebid O. G. A five-mode quasi-linear model of the nonlinear dynamics of an extended system. *Environmental safety and nature management.* 202, no. 38(2), pp. 104–120. doi: 10.32347/2411-4049.2021.2.104-120.
- Kaliukh I., Lebid O. Constructing the Adaptive Algorithms for Solving Multi-Wave Problems. *Cybern Syst Anal.* 2021, no. 57, pp. 938–949. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00419-w>.
- Saltanov N. V. *Flexible threads in streams.* Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974. 140 p.
- Chapman D. A. A study of the ship induced roll-yaw motion of a heavy towed fish. *J. Ocean Eng.* 1984, vol. 11, no. 6, pp. 627–654.
- Kaliukh I., Trofymchuk O., Lebid O. Numerical Solution of Two-Point Static Problems for Distributed Extended Systems by Means of the Nelder–Mead Method. *Cybern Syst Anal.* 2019, no. 55, pp. 616–624. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00170-3>.
- Kalyukh Y. I. Applicability of the Quasistatic Approach to the Calculation of the Characteristics of an Accelerating Towed System. *Int Appl Mech.* 2020, no. 56, pp. 382–387. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01022-w>.

Надійшла (received) 18.10.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Лебідь Олексій Григорович – доктор технічних наук, старший дослідник, заступник директора з наукової роботи, Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ; тел.: (050) 441-15-58; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Лебедь Алексей Григорьевич – доктор технических наук, старший исследователь, заместитель директора по научной работе, Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины, г. Киев; тел.: (050) 441-15-58; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.

Lebid Oleksii Grygorovych – Doctor of Engineering Sciences, Senior Researcher, Deputy Director for Research Work, Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv; tel.: (050) 441-15-58; e-mail: o.g.lebid@gmail.com.