

**О. В. ВОРОПАЙ, С. І. ПОВАЛЯЄВ, П. А. ЄГОРОВ**

### **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОМІЖНОЇ В'ЯЗКО-ПРУЖНОЇ ОПОРИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАННЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО**

При моделюванні механічних об'єктів та їх систем найчастіше використовуються математичні моделі, які працюють в пружній області, що в деяких випадках може призвести до істотних неточностей у розрахунках. Застосування математичних моделей, які враховують в'язко-пружні властивості або дисипацію енергії, дозволяє отримати більш реалістичні моделі, що дасть можливість отримати більш точні результати розрахунків. У цій роботі розглядається нестационарне навантаження механічної системи, яка складається з шарнірно опертій балки та додаткової опори, встановленої в прольоті балки. Використовується модель деформування балки на основі гіпотез С. П. Тимошенко з урахуванням інерції обертання та зсуву. Система диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує деформування балки, розв'язується за допомогою розв'язання шуканих функцій у відповідні ряди Фур'є та подальшого використання інтегрального перетворення Лапласа. Додаткова опора передбачається не абсолютно жорсткою, а реалістичною, яка має лінійно-пружну та в'язку складові. Мається на увазі, що у точці приєднання додаткової опори до балки їхні переміщення збігаються. Реакція між балкою та додатковою опорою замінюється зовнішньою невідомою зосередженою силою, прикладеною до балки, яка змінюється у часі. Закон зміни у часі цієї невідомої реакції визначається з розв'язання інтегрального рівняння Вольєра. Викладається метод отримання інтегрального рівняння щодо невідомої реакції. Наведено аналітичні співвідношення та результати обчислень для конкретних чисельних параметрів. Досліджується вплив жорсткості та в'язкості на шукану реакцію додаткової опори, а також на прогини балки у різних точках. Результати, отримані в даній роботі, можуть бути також використані для демпфування вимушених коливань механічних систем.

**Ключові слова:** балка Тимошенка, багатопролітна балка, додаткова в'язко-пружна опора, нестационарні коливання, інтегральне рівняння Вольєра.

### **А. В. ВОРОПАЙ, С. И. ПОВАЛЯЕВ, П. А. ЕГОРОВ** **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ ТИМОШЕНКО**

При моделировании механических объектов и их систем зачастую используются математические модели, работающие в упругой области, что в некоторых случаях может привести к существенным неточностям при расчётах. Применение математических моделей, учитывающих вязкоупругие свойства или диссипацию энергии, позволяет получить более реалистичные модели, что даст возможность получить более точные результаты расчётов. В данной работе рассматривается нестационарное нагружение механической системы, которая состоит из балки, шарнирно опёртой по краям, и дополнительной опоры, установленной в пролёте балки. Используется модель деформирования балки на основе гипотез С. П. Тимошенко с учётом инерции вращения и сдвига. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая деформирование балки, решается при помощи разложения искомым функций в соответствующие ряды Фурье и дальнейшего использования интегрального преобразования Лапласа. Дополнительная опора предполагается не абсолютно жёсткой, а реалистичной, имеющей линейно-упругую и вязкую составляющие. Предполагается, что в точке присоединения дополнительной опоры к балке их перемещения совпадают. Реакция между балкой и дополнительной опорой заменяется внешней неизвестной сосредоточенной силой, приложенной к балке, которая изменяется во времени. Закон изменения во времени этой неизвестной реакции определяется из решения интегрального уравнения Вольєра. Излагается методика получения интегрального уравнения относительно неизвестной реакции. Приведены аналитические соотношения и результаты вычислений для конкретных численных параметров. Исследуется влияние жесткости и вязкости на определяемую реакцию дополнительной опоры, а также на прогибы балки в различных точках. Результаты, полученные в данной работе, могут быть также использованы для демпфирования вынужденных колебаний механических систем.

**Ключевые слова:** балка Тимошенко, многопролетная балка, дополнительная вязкоупругая опора, нестационарные колебания, интегральное уравнение Вольєра.

### **A. V. VOROPAY, S. I. POVALIAIEV, P. A. YEGOROV** **SIMULATION OF INTERMEDIATE VISCOELASTIC SUPPORT UNDER NON-STATIONARY VIBRATIONS OF TIMOSHENKO BEAMS**

When modeling mechanical objects and their systems, mathematical models developed for an elastic domain are most often used, which in some cases can lead to significant inaccuracies in calculations. The use of mathematical models that take into account visco-elastic properties or energy dissipation allows to obtain more realistic models, which will make it possible to obtain more accurate calculation results. In the paper non-stationary loading of a mechanical system, consisting of a beam hinged at the edges, and an additional support installed in the span of the beam is considered. We use a beam deformation model, which is based on the hypotheses of S. P. Timoshenko and takes into account the inertia of rotation and shear. The system of partial differential equations describing the deformation of the beam is solved by expanding the desired functions into the corresponding Fourier series and subsequent using the integral Laplace transform. The additional support is assumed to be realistic rather than absolutely rigid, having linear elastic and viscous components. It is assumed that at the point of attachment of the additional support to the beam their displacements coincide. The reaction between the beam and the additional support is replaced by an external unknown concentrated force applied to the beam, which changes with time. The law of change in time of this unknown reaction is determined from the solution of the Volterra integral equation. A method for obtaining an integral equation for an unknown reaction is described. Analytical relations and calculation results for specific numerical parameters are given. The influence of stiffness and viscosity on the determined reaction of the additional support, as well as on the deflections of the beam at various points, is investigated. The results obtained can also be used for damping forced vibrations of mechanical systems.

**Key words:** Timoshenko beam, multi-span beam, additional viscoelastic support, nonstationary vibration, Volterra integral equation.

**Вступ та аналіз літератури.** Елементи конструкцій у вигляді балок мають широке поширення в інженерній діяльності людини. Досвід показує, що для розрахунків балок хороші результати дають моделі на базі гіпотез С. П. Тимошенко, які враховують інерцію обертання та зсув [1, 2].

Роботи С. П. Тимошенко, по суті, започаткували розвиток неklasичних теорій деформування елементів конструкцій. Монографії С. П. Тимошенко перекладені безліччю мов і перевидавалися кілька разів на території

© О. В. Воропай, С. І. Поваляєв, П. А. Єгоров, 2022

колишнього СРСР, в країнах Європи та в США. Однією з найбільш поширених є монографія [1] «Коливання в інженерній справі», в якій викладені результати досліджень різних аспектів *теорії коливань жорстких і деформованих конструкцій*, що дозволяють застосовувати аналітичний підхід до багатьох практичних випадків.

Фундаментальна праця [2] так і називається: «Механіка твердих тіл, що деформуються. Т. 5. Некласичні теорії коливань стержнів, пластин і оболонок». У цій роботі переконливо показано, що у зазначеному напрямі працювало безліч видатних вчених, але в основі використано гіпотези саме С. П. Тимошенка.

Проте в даний час успішно використовуються і класичні моделі – так звані *балки Бернуллі – Ейлера*, як правило, для спрощення при розв'язуванні задач моделювання нелінійних властивостей матеріалу балки [3] або в складних задачах ідентифікації [4], [5].

Наприклад, у статті [3] представлено вібраційний аналіз шарнірно-обпертої балки з моделлю в'язко-пружного матеріалу дробового порядку. Розглянуто модель балки Бернуллі – Ейлера. Балка збуджується рухом опор. Аналізуються *стаціонарні коливання* балки, і тому передбачається *дробова похідна Рімана – Ліувіля*. Отримано характеристики для різних значень дробової похідної порядку  $\alpha$  та значень параметрів матеріалу моделі *Фойгта*. Дослідження показують, що вибір відповідних *коефіцієнтів демпфування* та порядку дробової похідної моделі демпфування дозволяє більш точно підібрати динамічну характеристику балки порівняно з використанням *моделі демпфування цілочисельного порядку*.

Новий *метод ідентифікації в'язко-пружних граничних умов балок Ейлера – Бернуллі* при вимушеному відгуку представлено в [4]. Здатність ідентифікувати складні граничні умови за високих рівнів шуму може дати можливість для застосування запропонованого методу при моніторингу надійності конструкцій в реальних умовах та оновлення моделі з граничними умовами балкових конструкцій, таких як мости.

У [5] розглядається рівномірна балка Ейлера – Бернуллі, лівий кінець якої закріплений, а правий має навантаження, закріплене двома пружинами. При ударі балка починає вібрувати. **Метою роботи** є визначення *параметрів фіксації (коефіцієнтів жорсткості пружини)* та *параметрів навантаженості (маси та моменту інерції вантажу)* правого кінця балки за власними частотами її згинальних коливань.

Іноді для механічних систем, що включають елементи конструкції у вигляді балок, на які діють нестационарні навантаження, крім вимог міцності вводяться додаткові обмеження на переміщення деяких їх частин (величини прогинів і тому подібне). У таких випадках для балок доцільно використовувати додаткові опори.

Дослідження статті [6] розширює *метод модифікованого спектрального елемента в частотній області (SEM)* від *однопрогонових балок до багатпрогонових балок* при дії рухомих зосереджених сил. Кожен проліт представлений моделлю балки Тимошенка. Історія рухомої сили трансформується в частотну область як *ряд квазістатичних або стаціонарних точкових сил*, що діють на балку одночасно. *Динамічні відгуки* отримують шляхом накладання окремих динамічних відгуків, збуджених кожною квазістатичною зосередженою силою. Відзначимо, що в роботі [6] розв'язана задача, подібна до матеріалів даного дослідження, але кожна додаткова опора, по суті, є абсолютно жорсткою.

У статті [7] досліджено багатпрогонові балки Тимошенка, а форми мод балок модифіковано за допомогою інтерполяційних функцій для моделювання режимів коливань багатпрогонових балок. *Принцип Гамільтона* застосовано для отримання рівняння руху конструкції, і отримано власні кругові частоти та відгуки вільної вібрації багатпрогонових балок. Зазначимо, що в роботі [7] розглядаються тільки *вільні коливання*.

Уніфіковане формулювання аналізу динамічних коливань багатпрогонових балок представлено за допомогою *ефективного методу декомпозиції доменів* у статті [8]. По-перше, структуру розбивають на кілька рівних секцій *методом декомпозиції домену*. Далі штучна пружина використовується для моделювання складних меж і умови суцільності багатпрогонової балки. Нарешті, допустимі функції переміщення розкладаються через *ортгональні поліноми Якобі*, а характеристики вільних і вимушених коливань багатпрогонових балкових конструкцій можна отримати за допомогою *методу Релея – Рітца*. *Багатоступінчаті* балки Тимошенка, зчеплені з твердими тілами на ресорах, досліджено в роботі [9]. Так, у роботах [8 – 9] розглядаються додаткові суто пружні опори.

В класичних монографіях [10 – 11] розглянуто коливання багатпрогонових балок з додатковими пружними опорами під дією імпульсних і рухомих навантажень. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для багатпрогонових балок з додатковими пружними опорами присвячені роботи [11 – 12]. Аналогічні завдання були розглянуті і у в'язко-пружній постановці. Так у роботі [13] розв'язані задачі ідентифікації рухомих навантажень, що діють на в'язко-пружні балки.

Таким чином, можна стверджувати, що наведене дослідження є логічним продовженням робіт [10 – 12]. При його виконанні використані аналогічні диференціальні рівняння деформування балок Тимошенка, аналогічні методи та подібні алгоритми розв'язання задачі. Втім, у цій роботі зазначені ідеї та підходи застосовані до нестационарних коливань балки, що має додаткову в'язко-пружну опору.

Враховуючи сказане вище, актуальним завданням є створення математичної моделі в'язко-пружної проміжної опори, яку можна застосовувати в тому числі і для описаних вище завдань. При створенні моделі в'язко-пружної опори використовувалися підходи, запропоновані в роботах [14 – 15] для прямокутних пластин.

**Постановка задачі.** Механічна система складається з пружної ізотропної балки, шарнірно-обпертої по краях, і додаткової зосередженої в'язко-пружної опори, що контактує з балкою в деякій точці (рис. 1). Вважається,

що додаткова опора встановлена на поперечній балці і шарнірно з'єднана з нижньою гранню. Коефіцієнти жорсткості та демпфування опори постійні. На балку в деякій точці діє поперечне імпульсне навантаження  $P(t)$ , що викликає нестационарні коливання балки з додатковою опорою. Вплив додаткової в'язко-пружної опори на балку моделюється у вигляді зовнішньої нестационарної сили (яка є реакцією між балкою і додатковою опорою, взятою з протилежним знаком)  $-R(t)$ , прикладеної до пластини в місці встановлення опори. При розв'язанні задачі передбачається, що координати точок прикладення навантаження і координати встановлення додаткової опори довільні (будь-які точки, що належать балці і не лежать на її краях), але не змінюються протягом коливального процесу.

Як приклад розглянуто конкретний випадок з однією збудовальною силою і однією проміжною опорою, проте запропонований підхід може бути поширений на скінченне число збудовуючих навантажень  $P_i(t)$ , причому  $i = 1 \dots I$ , та проміжних опор  $R_j(t)$ ,  $j = 1 \dots J$ .

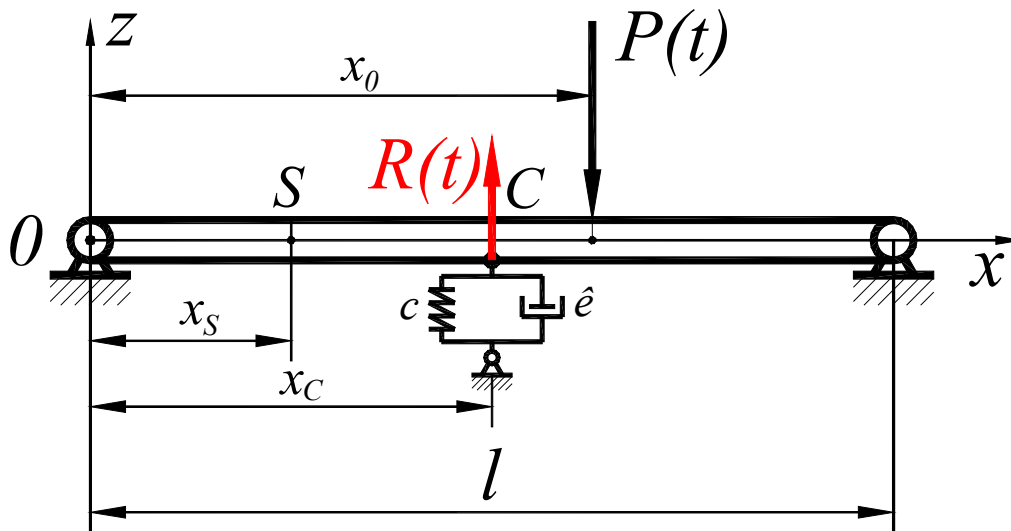


Рис. 1 – Схема навантаження балки з додатковою опорою.

В даному випадку потрібно визначити переміщення точок балки при одночасному впливі на неї системи з двох зовнішніх сил (відомої  $P(t)$  і невідомої  $R(t)$ , яка є змінною в часі реакцією між пластинною і додатковою в'язко-пружною опорою з урахуванням її масово-інерційної характеристики).

**Математична модель.** Відповідно до [2] система диференціальних рівнянь у часткових похідних для балки Тимошенка, яка з урахуванням відповідних початкових та граничних умов визначає розв'язок, що описує нестационарні деформаційні процеси, має вигляд:

$$\begin{cases} G' mh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \rho mh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, t) + R_C(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - G' mh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $h$  – товщина балки;  $m$  – ширина балки;  $G' = k' \cdot G$ ;  $k'$  – коефіцієнт зсуву;  $I = h^3 / 12$ ;  $w$  – прогин серединної площини балки;  $\psi$  – кут повороту;  $\rho$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  – пружні постійні матеріалу балки;  $t$  – час.

Вкажемо, що  $P(x, t)$  і  $R_C(x, t)$  – збудовальне навантаження та реакція взаємодії між балкою та додатковою опорою відповідно.

Система рівнянь розв'язується за допомогою розкладання невідомих функцій (переміщень і кутів повороту) у відповідні ряди Фур'є. Тоді для коефіцієнтів розкладання, як функцій часу, можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язати з використанням, наприклад, *інтегрального перетворення Лапласа* [16]. У цьому випадку, при виконанні обернених перетворень, розв'язки можуть бути представлені у вигляді *інтегралів Дюамеля* (типу *згортки*), що дозволяє виділити аналітичні вирази для ядер інтегральних рівнянь. Докладніше розв'язання подібних систем рівнянь описано в [10 – 13].

В результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь (1) за нульових початкових умов для шарнірно-опертої балки можна отримати наступний аналітичний вираз для функції прогинів:

$$w(x, t) = \int_0^t K_P^W(x, t - \tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(x, t - \tau) R(\tau) d\tau, \quad (2)$$

де  $K_i^W(x, t)$  – відповідні ядра інтегралів Дюамеля (згорток):

$$K_i^W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{ik}}{\Delta_k} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sum_{p=1}^2 \Omega_{pk} \cdot \sin \omega_{pk} t.$$

У наведених співвідношеннях використані такі позначення:

$$a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G'h}{\rho \cdot I}; \quad d = \frac{E}{\rho}; \quad \lambda_k = \pi \frac{k}{l}; \quad C_{ik} = \frac{2}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l}; \quad \Delta_k = \sqrt{(\lambda_k^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_k^4};$$

$$\Omega_{1k} = \omega_{1k} - \frac{d \cdot \lambda_k^2 + b}{\omega_{1k}}; \quad \Omega_{2k} = -\omega_{2k} + \frac{d \cdot \lambda_k^2 + b}{\omega_{2k}}.$$

Аналітичні вирази для визначення власних частот мають вигляд:

$$\omega_{1k} = \sqrt{0.5[(\lambda_k^2(a+d)+b) + \Delta_k]}; \quad \omega_{2k} = \sqrt{0.5[(\lambda_k^2(a+d)+b) - \Delta_k]}.$$

Для функцій повних переміщень, кутів повороту нормалі, а також деформацій можуть бути отримані аналогічні вирази.

В загальному випадку додаткову опору можна представити як комбінації наявності впливу маси, жорсткості і демпфування (рис. 1). Вираз для урахування реакції між пластиною та додатковою в'язко-пружною опорою має вигляд:

$$R_j(t) = \kappa_j \frac{dw_j(t)}{dt} + c_j \cdot w_j(t), \quad (3)$$

де  $c_j$  – коефіцієнт жорсткості додаткової опори, Н/м;  $\kappa_j$  – коефіцієнт демпфування, Н·с/м;  $w_j(t)$  – прогин балки в точці приєднання додаткової опори, м.

Для даного випадку необхідно отримати вираз для функції прогинів у відповідній точці. Виконаємо для виразу (3) пряме інтегральне перетворення Лапласа, за нульових початкових умов отримаємо формулу:

$$R_j(s) = \kappa_j \cdot s \cdot w_j(s) + c_j \cdot w_j(s). \quad (4)$$

З (4) отримаємо вираз для прогину у просторі зображень:

$$w_j(s) = \frac{R_i(s)}{\kappa_j \cdot s + c_j}. \quad (5)$$

Після виконання зворотного перетворення Лапласа з використанням теореми про згортку отримаємо наступний вираз для прогину в точці додавання реакції до в'язко-пружної опори з урахуванням її маси:

$$w_j(t) = \int_0^t K_{ej}(t - \tau) R_j(\tau) d\tau, \quad (6)$$

де  $K_{ej}(t) = \frac{1}{\kappa_j} \cdot e^{-c_j/\kappa_j \cdot t}$  – кінцево-різницеве ядро інтеграла типу згортки, що враховує в'язкі і пружні характеристики додаткової опори в  $i$ -й точці.

Зазначимо, що вираз (6) за структурою аналогічний виразу для прогину балки (2), якщо у функцію двох змінних  $w(x, t)$  замість змінної  $x$  підставити координату додаткової опори. Тоді для точки  $x_C$  можна записати наступні співвідношення для прогину з боку балки та з боку додаткової опори:

$$\begin{cases} w(x_C, t) = \int_0^t K_e(t - \tau) R(\tau) d\tau; \\ w(x_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Виконаємо виключення невідомих функцій переміщень  $w(x_C, t)$ , шляхом прирівнювання відповідних виразів для однієї (якщо їх кілька, то для кожної) в'язко-пружної опори:

$$\int_0^t K_P^W(t - \tau) P(\tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(t - \tau) R(\tau) d\tau = \int_0^t K_f(t - \tau) R(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Вираз (8) після перенесення відомих доданків у праву частину рівняння, а невідомих у ліву, буде мати вигляд інтегрального рівняння Вольтерра I роду щодо невідомої реакції  $R(t)$  виду:

$$\int_0^t [K_R^W(t-\tau) + K_f(t-\tau)] R(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Виконаємо дискретизацію інтегрального рівняння (9). Після дискретизації інтегральне рівняння замінюється системою лінійних рівнянь алгебри (СЛАУ) [17]. Внаслідок чого дискретний аналог (9) можна записати у вигляді:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{w}_P,$$

де вектор  $\mathbf{R}$  відповідає зміні у часі реакції  $R(t)$ ; вектор  $\mathbf{w}_P$  – зміна переміщення у часі в точці приєднання додаткової опори, викликана лише зовнішньою силою  $P(t)$ , що визначається як:

$$w_P = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P(\tau) d\tau;$$

матриця  $\mathbf{A}_R^*$  – відповідає сумі ядер  $K_R^W(t-\tau) + K_f(t-\tau)$ .

В результаті знаходиться сила взаємодії між балкою і додатковою в'язко-пружною опорою з урахуванням її масово-інерційних характеристик  $R(t)$ , що дозволяє визначати компоненти переміщення у часі у всіх точках балки (як при дії двох незалежних навантажень  $P(t)$  і  $R(t)$  на балку без додаткових опор).

**Обчислювальний експеримент.** У роботі розглядається конкретний приклад моделювання нестационарних поперечних коливань балки з додатковою опорою (рис. 1). Для простоти балка має шарнірне спирання по краях і лише одну додаткову опору (прикладену до нижньої грані балки у довільній точці між краями). У якості проміжної опори досліджується модель, що враховує пружні та в'язкі характеристики.

При розрахунках серединна лінія балки у недеформованому стані збігалася з віссю  $Ox$  декартової системи координат. Обчислення проводилися за наступних значень параметрів:  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  (значення механічних констант для балки відповідають легованій сталі); довжина балки  $l = 0.8 \text{ м}$ , ширина  $m = 0.05 \text{ м}$ , товщина  $h = 0.0025 \text{ м}$ ; координати точки прикладення збурюючого навантаження мають значення:  $x_0 = 0.5 \text{ м}$ , точки кріплення додаткової в'язко-пружної опори до пластини:  $x_C = 0.4 \text{ м}$  (середина балки), точка, в якій досліджувалася зміна прогину у часі:  $x_S = 0.3 \text{ м}$ . Значення коефіцієнта лінійної жорсткості додаткової опори  $c_1 = 10^3 \div 10^6 \text{ Н/м}$ , а коефіцієнт лінійно-в'язкого демпфування  $\kappa_1 = 10 \div 1000 \text{ Н/(м/с)}$ ; кількість членів у відповідних рядах Фур'є 100.

Результати чисельних розрахунків наведені на рис. 2 – 7.

На рис. 2 показана зовнішня сила, що збурює  $P(t)$ , яка викликає деформування (нестационарні коливання) балки та реакція в'язко-пружної опори  $R(t)$  при значенні коефіцієнта жорсткості  $c_1 = 10^3 \text{ Н/м}$  та демпфування  $\kappa_1 = 100 \text{ Н/(м/с)}$ .

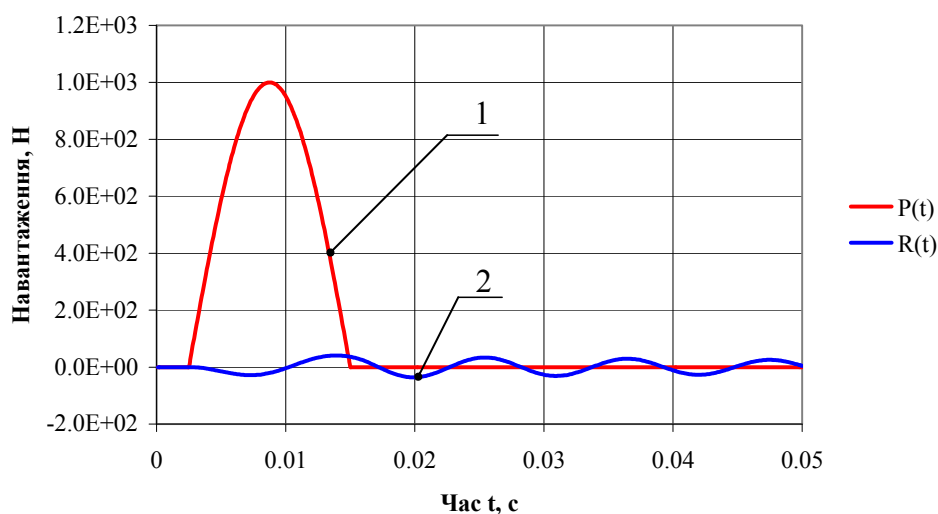


Рис. 2 – Збурююча сила  $P(t)$  і реакція в'язко-пружної опори  $R(t)$ .

На рис. 3 показані зміни прогину балки у точці  $x_S$ , що викликані: крива 1 – лише впливом зовнішньої сили, що збуджує  $P(t)$ ; крива 2 – тільки впливом реакції в'язко-пружної опори  $R(t)$ , ніби замість цієї реакції діє зовнішнє навантаження, що збуджує, яке дорівнює їй за величиною; крива 3 – сумарний прогин внаслідок сукупної дії  $P(t)$  і  $R(t)$ .

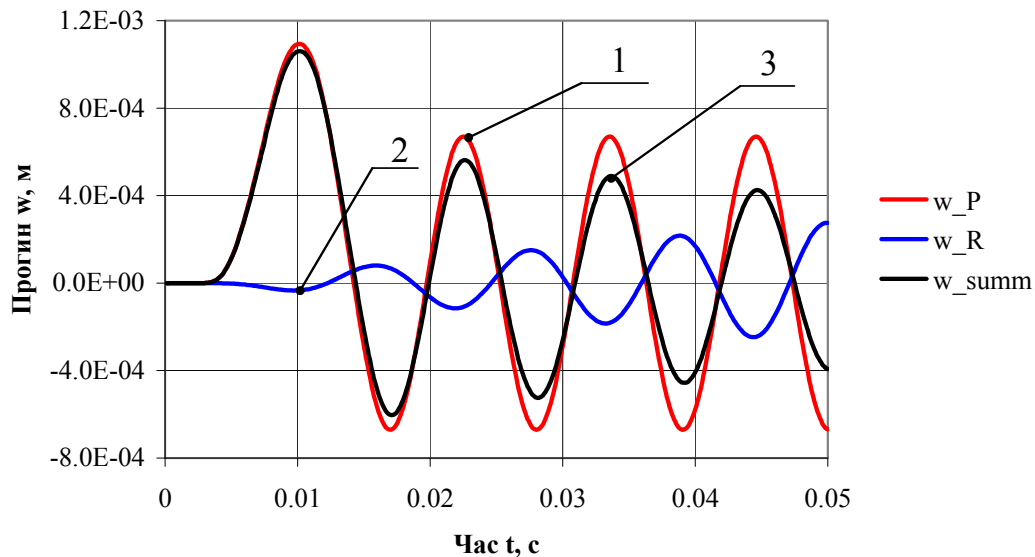


Рис. 3 – Зміна прогину балки у точці  $x_S$  внаслідок дії  $P(t)$  і  $R(t)$ .

На рис. 3 амплітуда коливань кривої 2 (прогину внаслідок впливу тільки реакції в'язко-пружної опори  $R(t)$ ) збільшується з часом, що обумовлюється в'язко-пружними властивостями опори. Відповідно спостерігається і поступове зменшення амплітуди кривої 3 – зміни сумарного прогину у часі, що відповідає фізиці в'язко-пружної поведінки тіл.

Вплив коефіцієнта жорсткості  $c_1$  та демпфування  $\kappa_1$  на коливальний процес показаний на рис. 4 – 7.

Далі наведено результати розрахунків реакції в'язко-пружної опори  $R(t)$  (рис. 4) та сумарний прогин балки (рис. 5) при значенні коефіцієнта демпфування  $\kappa_1 = 100$  Н/(м/с) та при різних значеннях коефіцієнта жорсткості:  $c_1 = 10^3$  Н/м,  $c_1 = 10^4$  Н/м,  $c_1 = 10^5$  Н/м,  $c_1 = 10^6$  Н/м.

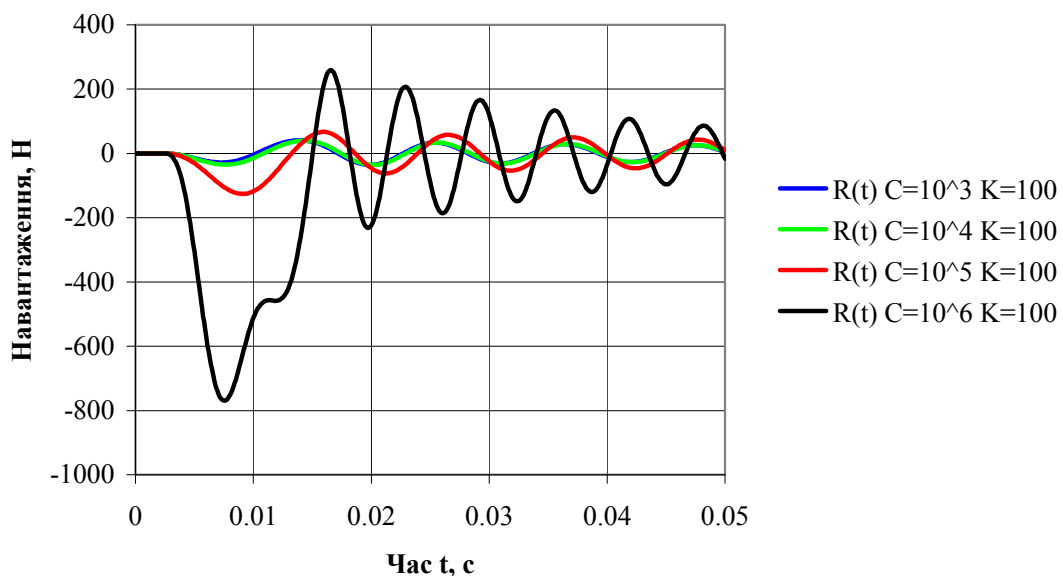


Рис. 4 – Реакція в'язко-пружної опори  $R(t)$  при значенні коефіцієнта демпфування  $\kappa_1 = 100$  Н/(м/с) та при різних значеннях коефіцієнта жорсткості:  $c_1 = 10^3$  Н/м,  $c_1 = 10^4$  Н/м,  $c_1 = 10^5$  Н/м,  $c_1 = 10^6$  Н/м.

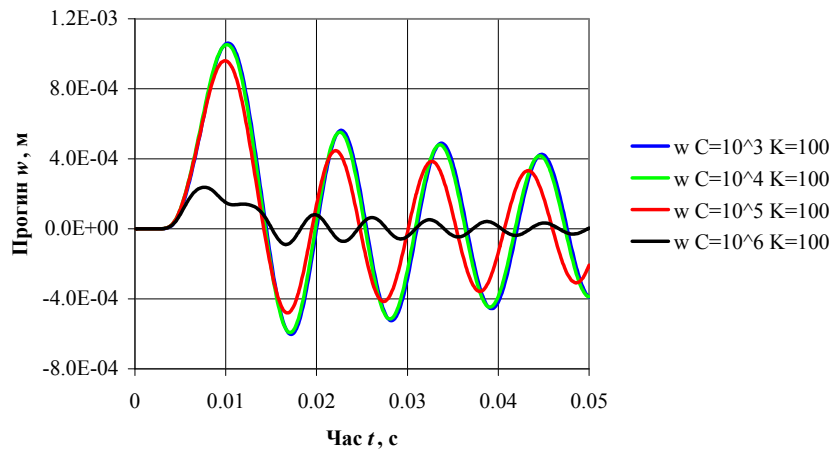


Рис. 5 – Сумарні зміни прогину балки у точці  $x_S$ , що обумовлені дією  $P(t)$  та  $R(t)$  при значенні коефіцієнта демпфування  $\kappa_1 = 100$  Н/(м/с) та при різних значеннях коефіцієнта жорсткості:  $c_1 = 10^3$  Н/м,  $c_1 = 10^4$  Н/м,  $c_1 = 10^5$  Н/м,  $c_1 = 10^6$  Н/м.

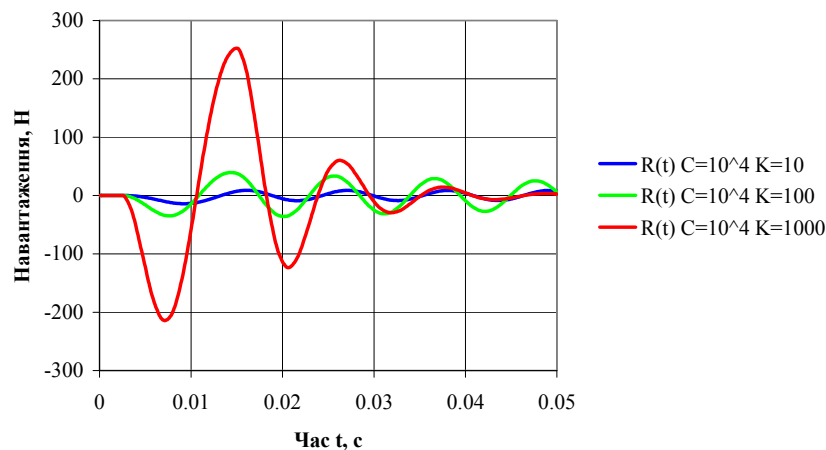


Рис. 6 – Реакція в'язко-пружної опори  $R(t)$  при значенні коефіцієнта жорсткості  $c_1 = 10^4$  Н/м та при різних значеннях коефіцієнта демпфування  $\kappa_1 = 10$  Н/(м/с),  $\kappa_1 = 100$  Н/(м/с),  $\kappa_1 = 1000$  Н/(м/с).

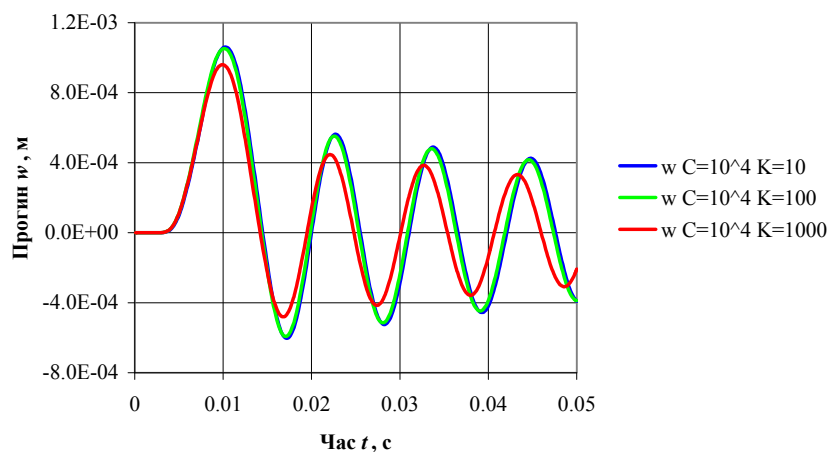


Рис. 7 – Сумарні зміни прогину балки у точці  $x_S$ , що обумовлені дією  $P(t)$  та  $R(t)$  при значенні коефіцієнта жорсткості  $c_1 = 10^4$  Н/м та при різних значеннях коефіцієнта демпфування  $\kappa_1 = 10$  Н/(м/с),  $\kappa_1 = 100$  Н/(м/с),  $\kappa_1 = 1000$  Н/(м/с).

Відповідно до результатів, що наведені на рис. 4 – 5, при збільшенні коефіцієнта жорсткості реакція проміжної опори збільшується, а сумарний прогин балки зменшується.

Далі наведено результати розрахунків реакції в'язко-пружної опори  $R(t)$  (рис. 6) та сумарний прогин балки (рис. 7) при значенні коефіцієнта жорсткості  $c_1 = 10^4$  Н/м та при різних значеннях коефіцієнта демпфування:

$\kappa_1 = 10 \text{ Н/(м/с)}$ ,  $\kappa_1 = 100 \text{ Н/(м/с)}$ ,  $\kappa_1 = 1000 \text{ Н/(м/с)}$ .

За результатами, що наведені на рис. 6 – 7, можна зробити висновок, що при збільшенні коефіцієнта демпфування реакція проміжної опори також збільшується, а сумарний прогин балки зменшується, також при збільшенні коефіцієнта демпфування можна відзначити прояв ефекту згасання коливань та деяке (незначне) зменшення періоду коливань.

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективним розвиток даного дослідження при моделюванні як більш складних механічних систем, таких як балки з декількома проміжними опорами, а також моделювання дисипації енергії не тільки у проміжних опорах, а й в основних шарнірах (тертя в опорах), так і при застосуванні більш складних моделей урахування в'язко-пружних властивостей матеріалів.

**Висновки.** Таким чином, в даній роботі розроблено математичну модель нестационарного деформування механічної системи, яка складається з шарнірно-обпертої балки та додаткової опори, встановленої в прольоті балки. Використано модель деформування балки на основі гіпотез С. П. Тимошенка з урахуванням інерції обертання та зсуву. Додаткова опора має лінійно-пружну та в'язку складові.

Систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує деформування балки, розв'язано за допомогою розкладання шуканих функцій у відповідні ряди Фур'є та подальшого використання інтегрального перетворення Лапласа.

Залежності у часі невідомої реакції опори та прогину балки отримано в результаті розв'язання інтегрально-го рівняння Вольтера I роду.

Наведено аналітичні співвідношення та результати обчислень для конкретних чисельних параметрів. Досліджено вплив жорсткості та в'язкості на шукану реакцію додаткової опори, а також на прогини балки у різних точках.

Аналіз отриманих чисельних розрахунків свідчить про їх відповідність до поведінки в'язко-пружних тіл в результаті прикладення зовнішнього нестационарного навантаження.

#### Список літератури

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
2. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
3. Freundlich Jan. Vibrations of a Simply Supported Beam with a Fractional Viscoelastic Material Model // Supports Movement Excitation. Shock and Vibration. 20, Article ID 126735, 10 pages, 2013. <https://doi.org/10.3233/SAV-130825>.
4. Qiao G., Rahmatalla S. Identification of the viscoelastic boundary conditions of Euler-Bernoulli beams using transmissibility // Engineering Reports. 2019; 1:e12074. <https://doi.org/10.1002/eng.2.12074>.
5. Aitbaeva A. A., Akhtyamov A. M. Identification of the fixedness and loadedness of an end of an Euler-Bernoulli beam from its natural vibration frequencies, Sib. Zh. Ind. Mat., 20:1 (2017), 3 – 10; J. Appl. Industr. Math., 11:1 (2017), 1 – 7.
6. Taehyun Kim, Usik Lee. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. Computers & Structures. – 2017. – Vol. 192. – P. 181 – 195.
7. Zhao, Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method // Archive of Applied Mechanics. – 2018. – vol. 88. – no. 7. – pp. 1213 – 1228.
8. Cong Gao, Fuzhen Pang, Haichao Li, Hongfu Wang, Jie Cui, Jisi Huang. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method // Shock and Vibration. – vol. 2021, Article ID 4440250, 18 pages, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/4440250>.
9. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs // Applied Mathematical Modelling. – 2020. – vol. 87. – pp. 152 – 170.
10. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32 – 36.
11. Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев : Наукова думка, 1980. – 232 с.
12. Янютин С. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. – 2007. – № 8. – С. 18 – 23.
13. Янютин Е. Г., Гришакін В. Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязкоупругих балок // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. – 2008. – № 47. – С. 178 – 184.
14. Воронай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. – 2011. – Вып. 53. – С. 87 – 90.
15. Воронай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета «ХПИ». Серия : Динамика и прочность машин. – X. : НТУ «ХПИ», 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
16. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М. : Высшая школа, 1966. – 405 с.
17. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2022. – Vol. 5. – no. 7 (119). – pp. 21 – 34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265356>.

#### References (transliterated)

1. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v snzhenernom dele* [Vibration problems in engineering]. Moscow, Mir Publ., 1967. 444 p.
2. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tverdukh deformiruyemykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy stержney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.



3. Freundlich Jan. Vibrations of a Simply Supported Beam with a Fractional Viscoelastic Material Model. *Supports Movement Excitation. Shock and Vibration*. 20, Article ID 126735, 10 pages, 2013. <https://doi.org/10.3233/SAV-130825>.
4. Qiao G, Rahmatalla S. Identification of the viscoelastic boundary conditions of Euler-Bernoulli beams using transmissibility. *Engineering Reports*. 2019; 1:e12074. <https://doi.org/10.1002/eng2.12074>.
5. Aitbaeva A. A., Akhtyamov A. M. Identification of the fixedness and loadedness of an end of an Euler-Bernoulli beam from its natural vibration frequencies. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 20:1 (2017), 3–10; *J. Appl. Industr. Math.*, 11:1 (2017), 1–7.
6. Taehyun Kim, Usik Lee. Dynamic analysis of a multi-span beam subjected to a moving force using the frequency domain spectral element method. *Computers & Structures*. 2017, vol. 192, pp. 181–195.
7. Zhao, Wen S., Li F., Zhang C. Free vibration analysis of multi-span Timoshenko beams using the assumed mode method. *Archive of Applied Mechanics*. 2018, vol. 88, no. 7, pp. 1213–1228.
8. Cong Gao, Fuzhen Pang, Haichao Li, Hongfu Wang, Jie Cui, Jisi Huang. Free and Forced Vibration Characteristics Analysis of a Multispan Timoshenko Beam Based on the Ritz Method. *Shock and Vibration*. 2021, vol. 2021, Article ID 4440250, 18 pages. <https://doi.org/10.1155/2021/4440250>.
9. Chen G., Zeng X., Liu X., Rui X. Transfer matrix method for the free and forced vibration analyses of multi-step Timoshenko beams coupled with rigid bodies on springs. *Applied Mathematical Modelling*. 2020, vol. 87, pp. 152–170.
10. Kokhmanyuk S. S., Filippov A. P. Kolebaniya mnogoproyetnykh balok na uprugikh oporakh pri podvizhnoy nagruzke [Vibrations of multispan beams on elastic support under moving loading]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural mechanics and computation of structures]. 1965, no. 6, pp. 32–36.
11. Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G., Romanenko L. G. Kolebaniya deformiruemykh system pri impul'snykh i podvizhnykh nagruzkakh [Vibrations of deformable systems under pulse and moving loads]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1980. 232 p.
12. Yanyutin Ye. G., Gnatenko G. O., Gryshakin V. T. Rozv'yazannya nestatsionarnykh pryamykh ta obrernenykh zadach dlya balok z pruzhnim dodatkovym spyrannnyam [Solving nonstationary direct and inverse problems for beams with additional elastic support]. *Mashynoznavstvo* [Mechanical Engineering]. 2007, no. 8, pp. 18–23.
13. Yanyutin Ye. G., Gryshakin V. T. Identifikatsiya podvizhnoy nagruzki dlya vyazkouprugikh balok [Identification of moving loading for viscoelastic beams]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkiv's'kyi politekhnichnyi instytut»*. *Zb. naukovykh prats'* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Collecion of scientific papers]. 2008, no. 47, pp. 178–184.
14. Voropay A. V. Modelirovanie nestatsionarnogo deformirovaniya pryamougol'noy plastiny s gasitelem kolebaniy [Simulation Of Non-Stationary Deformation Of Rectangular Plate With Vibration Absorber]. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta. Sbornik nauchnykh trudov* [Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University. Collection of scientific papers]. 2011, Issue 53, pp. 87–90.
15. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyazkouprugoy oporoy [Inverse problem in nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik NTU "KhPI". Seriya : Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series : Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
16. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 405 p.
17. Voropay A., Gnatenko G., Yehorov P., Povaliaiev S., Naboka O. Identification of the pulse axisymmetric load acting on a composite cylindrical shell, inhomogeneous in length, made of different materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2022, vol. 5, no. 7 (119), 21–34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.265356>.

Надійшла (received) 27.09.2022

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Воропай Олексій Валерійович** – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Воропай Алексей Валериевич** – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Voropay Alexey Valerievich** – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Повалієв Сергій Іванович** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Повалієв Сергей Иванович** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Povaliaiev Serhii Ivanovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (097) 199-23-31; e-mail: povalyaevsi@ukr.net.

**Єгоров Павло Анатолійович** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

**Егоров Павел Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.

**Yegorov Pavel Anatoliyevich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: phd.egpavel@gmail.com.