

**В. А. ВАНІН, С. Л. ПРОСВІРНІН**

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗСПОВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА ПЛОСКИХ ДВОПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУРАХ**

Одна з наукових гіпотез створення незвзаємних контрольованих оптичних метаповерхонь базується на використанні хвильового каналу, в якому реалізуються промені прямого та зворотного сценаріїв дифракції на двоперіодичних плоских структурах з нелінійними елементами.

Для перевірки цієї гіпотези необхідно провести математичне моделювання процесу розсіювання електромагнітних хвиль метаповерхнями в умовах збудження декількох дифракційних порядків. Як відомо, серед двоперіодичних плоских решіток різних структур є п'ять типів, які покривають площину. Це решітки Браве. Розглядалась задача розсіювання падаючої монохроматичної ТЕ поляризованої хвилі на металевий екран із заглибленнями в двоперіодичних структурах, заповнених кремнієм.

В роботі побудовано математичні моделі для вивчення просторових амплітудних спектрів метаповерхонь на решітках Браве та наведено деякі результати їх чисельного дослідження. Отримано співвідношення для дифракційних порядків розсіяних електромагнітних хвиль дифракційною решіткою. Показано існування довжин падаючих хвиль на двоперіодичну решітку, для яких відсутня віддзеркалена хвиля при різних формах (прямокутна, квадратна, шестикутна) періодичних елементів, в центрі яких було виконане заглиблення, заповнене кремнієм. Приведено розподіли коефіцієнту віддзеркалення при різних геометричних розмірах періодичних елементів і заглиблень. Характеристики електричного поля на резонансних режимах у вигляді ізоліній його модуля показують характер взаємодії поля над періодичною решіткою і розсіювачами-заглибленнями. На резонансних довжинах падаючих хвиль виникають стоячі хвилі в розсіювачах.

**Ключові слова:** рівняння Максвелла, періодичні елементи решітки, дифракція, дифракційні порядки, незвзаємність дифракційних явищ, чисельні методи досліджень.

**В. А. ВАНІН, С. Л. ПРОСВІРНІН**

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЙВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКИХ ДВУХПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

Одна из научных гипотез создания взаимных оптических метаповерхностей основана на использовании волнового канала, в котором реализуются лучи прямого и обратного сценария дифракции на двухпериодических плоских структурах с нелинейными элементами.

Для проверки этой гипотезы необходимо провести математическое моделирование процесса рассеивания электромагнитных волн метаповерхностями в условиях возбуждения нескольких дифракционных порядков. Известно, что среди двухпериодических плоских решеток разных структур есть пять типов, которые заполняют плоскость. Это решетки Браве. Рассматривалась задача рассеивания падающей монохроматической ТЕ поляризованной волны на металлический экран с углублениями в двухпериодических структурах, наполненных кремнием.

В работе построены математические модели для изучения пространственных амплитудных спектров метаповерхностей на решетках Браве и приводятся некоторые результаты их численного исследования. Получены соотношения для дифракционных порядков рассеянных электромагнитных волн дифракционной решеткой. Показано существование длин падающих волн на двухпериодическую решетку, для которых отсутствует отраженная волна при разных формах (прямоугольная, квадратная, шестиугольная) периодических элементов, в центре которых было выполнено углубление, заполненное кремнием. Приведены распределения коэффициента отражения при различных геометрических размерах периодических элементов и углублений.

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, периодические элементы решетки, дифракция, дифракционные порядки, взаимность дифракционных явлений, численные методы исследования.

**V. A. VANIN, S. L. PROSVIRNIN**

### **MATHEMATICAL MODELING OF SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON PLANE TWO-PERIODIC STRUCTURES**

One of the scientific hypotheses for the creation of nonreciprocal optical metasurfaces is based on the use of a wave channel in which rays of the direct and reverse diffraction scenarios are realized on two-periodic flat structures with nonlinear elements.

To test this hypothesis, it is necessary to carry out mathematical modeling of the process of scattering of electromagnetic waves by metasurfaces under conditions of excitation of several diffraction orders. It is known that among two-periodic flat lattices of different structures there are five types that fill the plane. These are the Bravais lattices. The problem of scattering of an incident monochromatic TE polarized wave on a metal screen with recesses in two-periodic structures filled with silicon was considered.

In this paper, mathematical models are constructed for studying the spatial amplitude spectra of metasurfaces on Bravais lattices and some results of their numerical study are presented. Relationships are obtained for the diffraction orders of scattered electromagnetic waves by a diffraction grating. The existence of wavelengths of incident waves on a two-periodic grating for which there is no reflected wave is shown for different shapes (rectangular, square, hexagonal) of periodic elements in the center of which a recess filled with silicon was made. The distributions of the reflection coefficient are given for various geometric dimensions of periodic elements and recesses.

**Key words:** Maxwell's equations, periodic lattice elements, diffraction, diffraction orders, nonreciprocity of diffraction phenomena, numerical methods of investigation.

**Вступ.** У випадках, коли характерні розміри перешкод на шляху розповсюдження світла співрозмірні із довжиною хвилі, адекватні моделі дифракції світла на них базуються на системі рівнянь Максвелла. Задачі на їх основі розв'язуються із використанням таких чисельних методів:

- метод скінчених і граничних елементів для інтегральних рівнянь [1 – 5];
- модові методи для диференціальних та інтегральних рівнянь [6, 7];
- різницеві методи для систем диференціальних та інтегральних рівнянь [8];

– метод розв'язання задач на власні значення і власні функції для диференціальних та інтегральних операторів, в якому реалізується проєкційний метод на базис із власних функцій оператора задачі.

Модові методи мають суттєвий недолік – зростання чисельної складності із збільшенням числа мод. Залишається проблемним розгортання по ортогональним модам в часовій області для поперечно неоднорідних структур.

**Постановка задачі. Диференціальні рівняння математичної моделі. Геометрія решіток.** Для вивчення оптичних властивостей складних періодичних структур необхідно подолати межу чисельної складності. Така можливість є при використанні чисельних методів. *Варіаційні методи* (наприклад, *метод Гальоркіна*), застосовані до *рівняння Гельмгольца* відносно просторових амплітуд повного поля, включають вибір *схеми дискретизації*, побудову і мінімізацію *нев'язки*. Отримані співвідношення перетворюються в систему лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої додаються дискретні аналоги граничних умов.

Рівняння Максвела для електромагнітного поля в провідному середовищі мають вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} = \text{rot} \vec{H}; \\ -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot} \vec{E}; \\ \text{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_a; \\ \text{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\vec{E}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{H}(x, y, z, t)$  – вектори електричної та магнітної напруженості поля;  $\rho(x, y, z, t)$  – щільність розподілу електричних зарядів;  $\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_r \mu_0$  – абсолютні електрична та магнітна проникливість середовища;  $\sigma$  – провідність середовища.

Із системи (1) можливо отримати хвильові рівняння для електричного та магнітного векторів напруженості поля в просторово-часовому представленні або в частотному діапазоні. Так, для вектору  $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{U}(x, y, z) e^{-i\omega t}$  повного поля амплітуда  $\vec{U}(x, y, z)$  в частотній області знаходиться із розв'язку наступної граничної задачі для рівняння:

$$\text{rot} \left[ \frac{1}{\mu_r} \text{rot} \vec{U} \right] - k_0^2 \left( \varepsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \vec{U} = 0. \quad (2)$$

Підставляючи розгортання компонент вектору амплітуди поля за базисом із *кусково-лінійних функцій* в рівняння (2), отримаємо невязку для мінімізації спільно із додатковими граничними умовами. За знайденими параметрами поля обчислюємо необхідні характеристики розсіяного поля над решіткою (наприклад, коефіцієнти віддзеркалення дифракційних мод, інтенсивності розсіяних променів (мод) і таке інше).

**Квадратна решітка із циліндричними розсіювачами.** Розглянемо деякі прямокутні та квадратні періодичні решітки із розташованими в їх центрах розсіювачами різної глибини та форми в площині, фрагменти яких зображено на рис. 1.

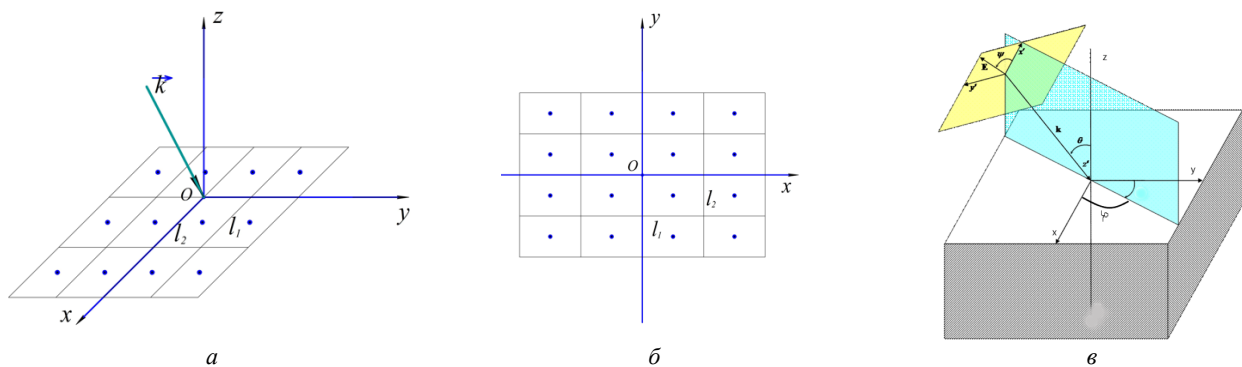


Рис. 1 – Прямокутна та квадратна ( $l_1 = l_2$ ) решітки: *a* – просторове положення; *б* – конфігурація решітки у площині; *в* – кутові характеристики падаючого поля.

Викликають практичний інтерес також решітки, утворені періодичною трансляцією паралелограма (ромба,  $l_1 = l_2$ ), що зображені на рис. 2.

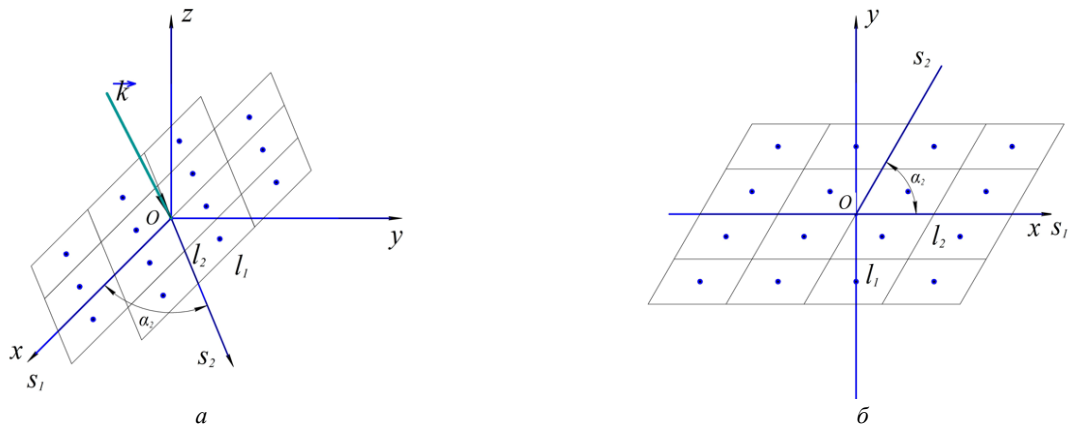


Рис. 2 – Паралелограмна та ромбовидна ( $l_1 = l_2$ ) решітка: *a* – просторове положення; *б* – конфігурація решітки у площині.

**Шестикутна решітка з циліндричними розсіювачами.** Шестикутні решітки часто зустрічаються в структурі природних матеріалів. Наприклад, структура графена являє собою періодичне об'єднання шестикутних елементів (рис. 3, *a*). В антенній техніці широко використовуються конструктивно шестикутні решітки.

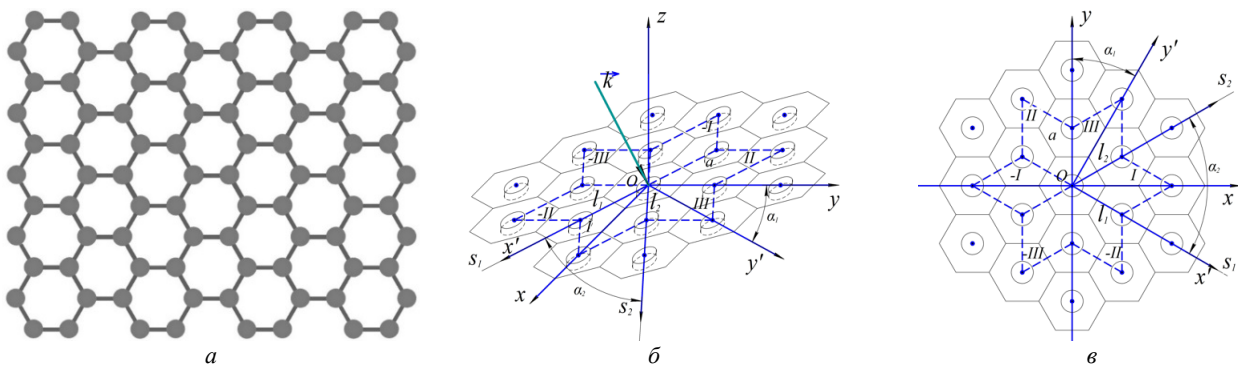


Рис. 3 – Шестикутна решітка з циліндричними розсіювачами: *a* – шестикутна гратка графена, шар вуглецю в сотовій упаковці, решітка правильних ( $l_1 = l_2$ ) шестикутників; *б* – просторове положення шестикутної решітки із циліндричними розсіювачами; *в* – фрагмент решітки у площині та можливі ромби для її заповнення.

На рис. 3 приведені шестикутні елементи і асоційовані з ними три множини ромбовидних елементів, які заповнюють необмежену площину решітки та необхідні системи координат ( $xoy$  – вихідна, пов'язана із шестикутниками,  $x'o'y'$  – повернута на кут  $\alpha_1$ ,  $s_1os_2$  – косокутна, пов'язана із асоційованими ромбами, наприклад, типу I).

Дифракційні решітки, пропускаючі та віддзеркалюючі, використовуються для просторового розгортання електромагнітних хвиль (ЕМХ) в спектр. Зосередимося на вивченні деяких його закономірностей та методів управління характеристиками для двоперіодичних решіток-екранів, розташованих в площині  $xoy$ . Передбачається, що на періодичних елементах в їх центрах розташовані розсіювачі різної форми. Для дослідження виберемо першу квадратну решітку (рис. 1) із розсіювачами у вигляді циліндричних заглиблень радіусом  $a_1$  та глибиною  $h_1$  (рис. 3, *б, в*), які можуть бути заповнені різними матеріалами.

**Дослідження умов розсіювання електромагнітних хвиль від плоских решіток.** Розсіювачі можуть бути розташовані на двох сімействах паралельних прямих із періодами  $l_1$  та  $l_2$ . В площині решітки введемо дві системи координат – прямокутну із базисними ортами  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ , та косокутну  $s_1os_2$  із базисними ортами  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ . Положення центрів елементів-розсіювачів визначається радіус-вектором

$$\vec{\rho}_{v_1v_2} = v_1 l_1 \vec{e}_1 + v_2 l_2 \vec{e}_2.$$

Тоді складова хвильового вектору падаючого поля  $\vec{k}^i$  в площині решіток має вигляд:

$$\vec{k}^i = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2, \quad \vec{k}^i = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y.$$

Повна система розв'язків скалярного рівняння Гельмгольца, відповідно до вимог *теорема Блоха* (в одновимірних задачах вона відома як *теорема Флоке*), в області  $z > 0$  (над періодичною решіткою) може бути представлена як [9 – 10]:

$$S_{mn} = e^{i\Gamma_{mn}z} e^{i\left(\overline{k^T \vec{s}}\right) - \frac{2\pi m}{l_1} s_1 - \frac{2\pi n}{l_2} s_2}.$$

Враховуючи косокутність ( $0 < \alpha \leq \pi/2$ ) системи координат  $s_1 s_2$  (рис. 2) та її зв'язок із прямокутною системою координат  $xoy$ , де  $\alpha = \alpha_2$ , маємо:

$$\begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \overline{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{e_x} \\ \overline{e_y} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg}\alpha \\ 0 & 1/\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

тоді  $B = A^{-1}$ , отримаємо:

$$S_{mn} = e^{i\Gamma_{mn}z} e^{i\left(k_x - \frac{2\pi m}{l_1}\right)x} e^{i\left(k_y + \frac{2\pi m}{l_1 \operatorname{tg}\alpha} - \frac{2\pi n}{l_2 \sin\alpha}\right)y}.$$

Для кожної моди  $S_{mn}$  постійна розповсюдження в напрямі осі  $z$  має вигляд:

$$\Gamma_{mn} = \sqrt{k^2 - \chi_x^2 - \chi_y^2},$$

де

$$\chi_{x,m,n} = k_x - \frac{2\pi m}{l_1}; \quad \chi_{y,m,n} = k_y + \frac{2\pi m}{l_1 \operatorname{tg}\alpha} - \frac{2\pi n}{l_2 \sin\alpha}; \quad k_x = k \sin\theta \cos\varphi; \quad k_y = k \sin\theta \sin\varphi; \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Відповідно,  $\theta$  – кут падіння ЕМХ,  $\varphi$  – азимутальний кут площини хвильового вектору падаючої хвилі,  $\lambda$  – довжина хвилі (рис. 3, в).

Кожна просторова мода  $S_{mn}$ , для якої

$$\operatorname{Re}\Gamma_{mn} \geq 0, \quad (3)$$

відповідає умові перенесення нею енергії від площини решітки. Мода ( $m = 0, n = 0$ ) – є дзеркально відбита електромагнітна хвиля. З умови (3) отримаємо:

$$k^2 - \chi_{x,m,n}^2 - \chi_{y,m,n}^2 \geq 0.$$

**Дифракційні порядки для квадратних, прямокутних, ромбовидних, паралелограмних та шестикутних плоских решіток.** Будемо вивчати умову розповсюдження хвилі в область над решіткою, як множину допустимих параметрів падаючої хвилі та геометричних характеристик елемента періодичності решіток.

Введемо характеристичну функцію параметрів решітки та падаючої хвилі:

$$F\left(m, n, \theta, \varphi, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_2}, \alpha\right) = \left(\sin\theta \cos\varphi - m \frac{\lambda}{l_1}\right)^2 + \left(\sin\theta \sin\varphi - n \frac{\lambda}{l_2 \sin\alpha} + m \frac{\lambda}{l_1} \operatorname{ctg}\alpha\right)^2 - 1,$$

тоді межа множини дифракційних порядків  $(m, n)$ , які розповсюджуються від решітки в область  $z > 0$ , визначається рівнянням:

$$F\left(m, n, \theta, \varphi, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_2}, \alpha\right) = 0, \quad (4)$$

а множина порядків розповсюджуваних мод задовольняє умові:

$$F\left(m, n, \theta, \varphi, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_2}, \alpha\right) \leq 0.$$

У разі прямокутної системи координат із (4) при  $\alpha = \pi/2$  маємо:

$$F\left(m, n, \theta, \varphi, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\theta \cos\varphi - m \frac{\lambda}{l_1}\right)^2 + \left(\sin\theta \sin\varphi - n \frac{\lambda}{l_2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Область порядків розповсюдження (рис. 4) при  $\theta = \frac{\pi}{2.5}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ,  $\lambda = 400\text{nm}$ ,  $l_1 = 500\text{nm}$ ,  $l_2 = 500\text{nm}$  обмежена колом, в яке попадає деяка множина дифракційних порядків.

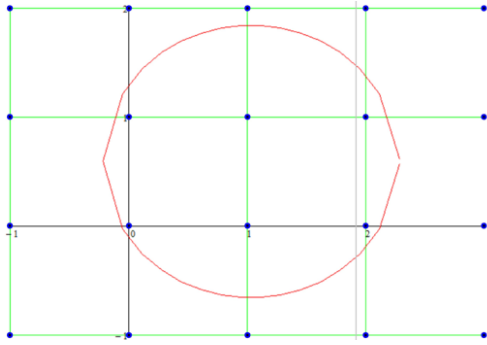


Рис. 4 – Дифракційні порядки, які розповсюджуються для квадратної решітки  $\theta = \pi/2.5$ ,  $\varphi = \pi/6$ ,  $\lambda = 400nm$ ,  $l_1 = 500nm$ ,  $l_2 = 500nm$ .

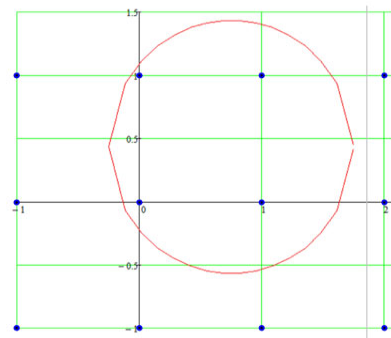


Рис. 5 – Дифракційні порядки, які розповсюджуються для квадратної решітки,  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = \pi/6$ ,  $\lambda = 500nm$ ,  $l_1 = 500nm$ ,  $l_2 = 500nm$ .

Область порядків розповсюдження у разі  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ,  $\lambda = 500nm$ ,  $l_1 = 500nm$ ,  $l_2 = 500nm$  (рис. 5) включає тільки чотири дифракційні порядки  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ .

Параметри, при яких реалізується двопробневий режим розсіювання  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ , наприклад, можуть бути  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\lambda = 500nm$ ,  $l_1 = 500nm$ ,  $l_2 = 500nm$  (рис. 6).

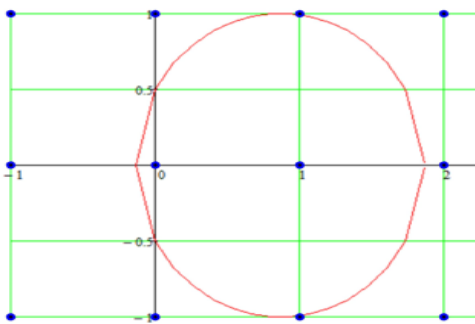


Рис. 6 – Дифракційні порядки квадратної решітки, які розповсюджуються при  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\lambda = 500nm$ ,  $l_1 = 500nm$ ,  $l_2 = 500nm$ .

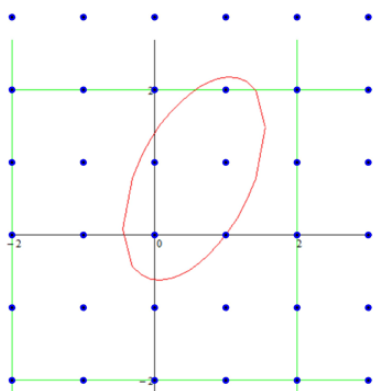
Вибираючи кути  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ , довжину хвилі  $\lambda$  та параметри решітки  $l_1$ ,  $l_2$ , отримаємо умову на дифракційні порядки  $(m, n)$  розсіяних хвиль в область  $z > 0$  для решіток із паралелограмів. Так, при

$$\theta = \frac{\pi}{4.5}, \varphi = \frac{\pi}{6}, \lambda = 500nm, l_1 = 500nm, l_2 = 500nm, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

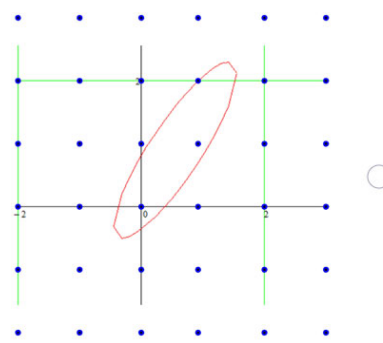
маємо множину дифракційних порядків (рис. 7, а). Двопробневий режим розсіювання порядків  $(0,0)$  та  $(1,1)$  в такій решітці реалізується, наприклад, при

$$\theta = \frac{\pi}{4.5}, \varphi = 0, \lambda = 500nm, l_1 = 500nm, l_2 = 500nm, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

і при подальшій зміні  $\alpha$  до  $\pi/6$  дифракційні порядки локалізуються (рис. 7, б).



а



б

Рис. 7 – Дифракційні порядки ромбовидної решітки:

$$a - \theta = \frac{\pi}{4.5}, \varphi = \frac{\pi}{6}, \lambda = 500nm, l_1 = 500nm, l_2 = 500nm, \alpha = \frac{\pi}{3}; \quad б - \alpha = \frac{\pi}{6}, \varphi = 0.$$

У випадку шестикутної решітки (рис. 3) (сторона шестикутника  $a = 500nm$ ) умова розповсюдження для асоційованої ромбовидної решітки має вигляд:

$$\Phi\left(m, n, \theta, \varphi, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_2}, \alpha_1, \alpha_2\right) = \left(\sin\theta\cos\varphi - m\frac{\lambda}{l_1}\left[\cos(\alpha_1) + \frac{\sin(\alpha_1)}{\operatorname{tg}(\alpha_2)}\right] + n\frac{\lambda}{l_2}\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}\right)^2 + \left(\sin\theta\sin\varphi - m\frac{\lambda}{l_1}\left[\sin(\alpha_1) + \frac{\cos(\alpha_1)}{\operatorname{tg}(\alpha_2)}\right] + n\frac{\lambda}{l_2}\frac{\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)}\right)^2 - 1 \leq 0,$$

де  $\alpha_1$  – кут повороту системи координат відносно вихідної, ортогональної;  $\alpha_2$  – кут між осями косокутної системи координат, пов'язаної із ромбом ( $l_1 = l_2$ ).

**Вплив характеристик розсіювачів на спектр хвиль за їхньою інтенсивністю.** Практичну зацікавленість викликає задача підвищення потужності деяких порядків у розсіяному полі та мінімізація інтенсивності в інших порядках, наприклад,  $(0,0)$ . Для дослідження цієї можливості виконано порівняльний аналіз множин розповсюдження для досліджуваних решіток, управління складом порядків мод розповсюдження, кутів падіння плоскої хвилі та оцінка їх інтенсивності.

На цьому етапі розглядалася лінійна задача електродинаміки падіння плоскої монохроматичної хвилі із *TE* поляризацією на металевий екран з періодично розташованими розсіювачами (рис. 2). Розмір сторони квадратної комірки  $a = 750\text{nm}$ , розміри циліндричного заглиблення, заповненого кремнієм, –  $a_1 = 155\text{nm}$  (радіус циліндра),  $h_1 = 75\text{nm}$  (глибина). Падаюча хвиля характеризується кутами хвильового вектора  $\theta = 40^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ . Площина падіння хвилі, при таких даних, співпадає із координатною площиною *xoz*.

При таких значеннях параметрів взаємодії умова розповсюдження (рис. 8) дає двопробеневий режим розсіювання  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  при деякому діапазоні довжин падаючої хвилі. Червона крива є межею області дифракційних порядків розповсюдження. Всередині точками позначені порядки мод, які розповсюджуються від решітки в область  $z > 0$ .

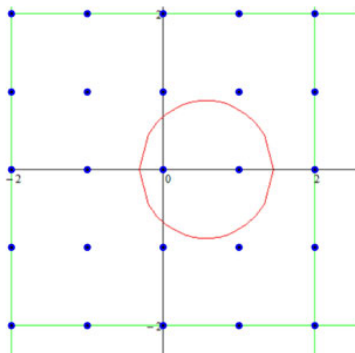


Рис. 8 – Дифракційні порядки решітки з квадратною коміркою при двопробеному складі розсіяного поля.

вих рівнянь електродинаміки при падінні плоскої монохроматичної хвилі із заданою поляризацією на двопробеневий екран розсіювачів (рис. 2, 3). Розв'язується задача для системи (2) в області, зображеній на рис. 10, методом скінчених елементів.

Дослідження початково-крайової задачі методом скінчених різниць для нестационарних рівнянь Максвелла на просторово періодичному елементі решітки із *C* – образними полосами заданої довжини ідеально провідних включень виконано в [11].

COMSOL Multiphysics 5.4 надає можливість створювати та досліджувати різні моделі взаємодії електромагнітних хвиль із об'єктами, які мають періодичну структуру. Пакет дозволяє доповнювати інтерфейс користувача власними моделями. За допомогою вбудованих фізичних інтерфейсів та підтримки бібліотеками властивостей матеріалів можливо створювати адекватні математичні моделі для вивчення закономірностей та числових характеристик процесу взаємодії.

В дослідженнях використовувався розділ з фізики променевої оптики. На першому етапі розглядалася лінійна задача для хвильо-

Name	Expression	Value	Description
a	750[nm]	7.5E-7 m	square side
lda0	2*a	1.5E-6 m	Wave length
h0	3*lda0	4.5E-6 m	air heighth
a1	155[nm]	1.55E-7 m	Radius diska
h1	75[nm]	7.5E-8 m	Disk heighth
theta	40[deg]	0.69813 rad	Elevation angle
phi	0[deg]	0.20944 rad	Azimuth angle
E0	1[V/m]	1 V/m	Electric amplitude
H9	1[A/m]	1 A/m	Magnetic amplitude

Рис. 9 – Набір вхідних даних.

На рис. 10 зображено періодичний фрагмент розрахункової області над плоскою решіткою (рис. 10, a) та

варіант її дискретного поелементного розбиття (рис. 10, б) із циліндричними розсіювачами, заповненими кремнієм. Розмір сторони квадрата  $a = 750nm$ , розміри циліндра  $a_1 = 155nm$  (радіус циліндра),  $h_1 = 75n$  (глибина лунки). Падаюча хвиля характеризується кутами хвильового вектора  $\theta = 40^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ , та потужністю  $E_0 = 1V/m$ ,  $H_0 = 1A/m$ . Площина падіння хвилі, при таких даних, співпадає із координатною площиною  $xoz$ .

Для розрахунків підготовлено набір вхідних даних (рис. 9).

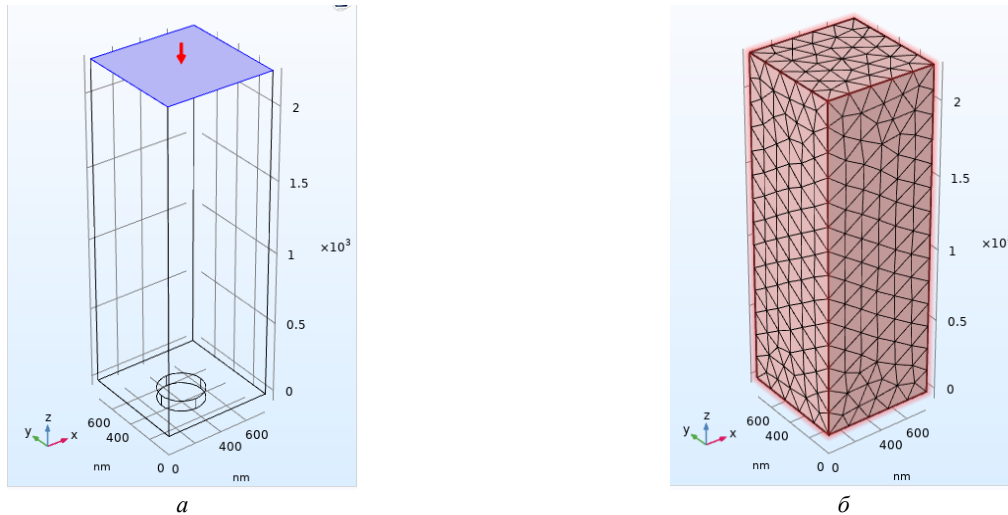


Рис. 10 – Періодичний елемент розрахункової області: а – із границею входу; б – скінчено елементне їх розбиття.

Нульова амплітуда дзеркальної хвилі  $(0,0)$  реалізується вибором геометричних параметрів циліндричного розсіювача – заглиблення ( $a_1 = 155nm$  – радіус циліндра,  $h_1 = 75nm$  – його поздовжній вимір), заповненого однорідним кремнієм. Пошук резонансних довжин хвиль виконувався в діапазоні  $\lambda \in [800, 900]nm$ .

На рис. 11 показана наявність довжини падаючої хвилі, при якій коефіцієнт відбиття віддзеркаленої хвилі (крива 1), мода  $(0,0)$ ,  $Kr = 0$ , а для іншого променя (крива 2), який відповідає моді  $(1,0)$ ,  $Kr = 1$ .

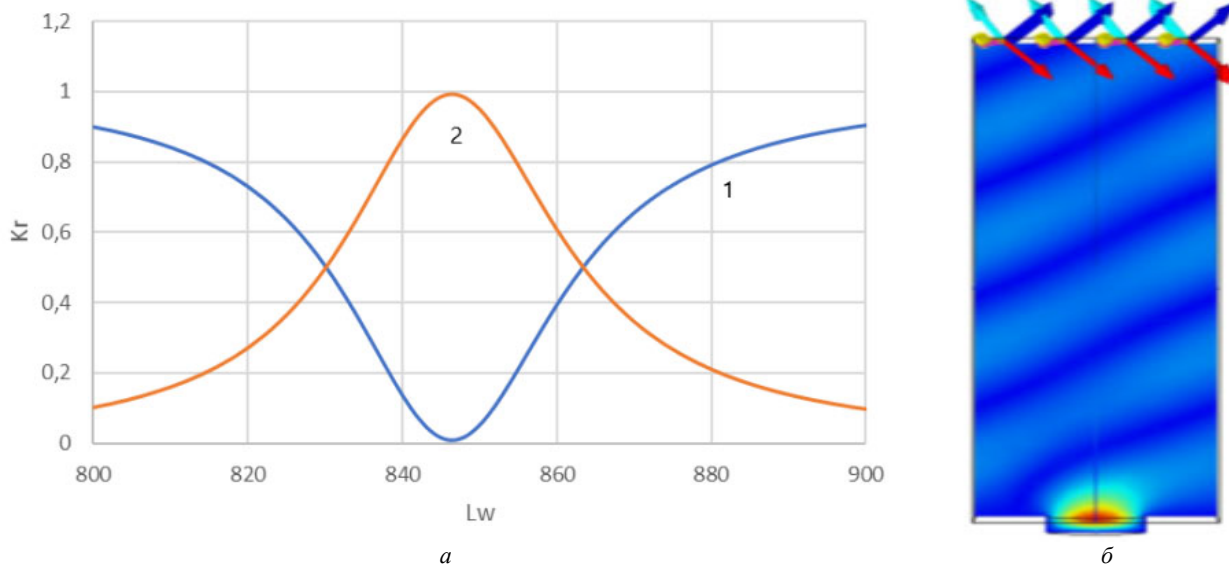


Рис. 11 – Коефіцієнт відбиття: а – у залежності від довжини падаючої хвилі для наступних параметрів:  $a = 750nm$ ,  $a_1 = 155nm$ ,  $h_1 = 75nm$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ; б – ізолінії модуля електричної складової поля в площині  $xoz$  при  $\lambda^* \cong 848nm$ .

З рис. 11 видно, що для хвилі  $\lambda^* \cong 848nm$  коефіцієнт дзеркального відбиття нульовий і енергія випромінюється в моди інших порядків. Циліндричне заглиблення, яке заповнене кремнієм, працює як хвилевід, приєднаний до вільного півпростору і може бути резонансним. Аналіз розподілу модуля електричної компоненти поля



над решіткою показує його інтерференційний характер. В умовах резонансу основна енергія поля локалізована в циліндричному хвилеводі.

Вибір геометричних розмірів циліндричного заглиблення  $a_1 = 300\text{nm}$ ,  $h_1 = 300\text{nm}$  породжує більш складну залежність коефіцієнтів відбиття від довжини падаючої хвилі (рис. 12). В циліндричному заглибленні-хвилеводі збуджується стояча хвиля із двома максимумами, яка і породжує наведений розподіл відбиття.

При порівнянні ізольованого модуля амплітуди електричної компоненти поля помітна зміна поляризації хвиль повного поля над періодичною решіткою при різній довжині хвилі падаючого поля.

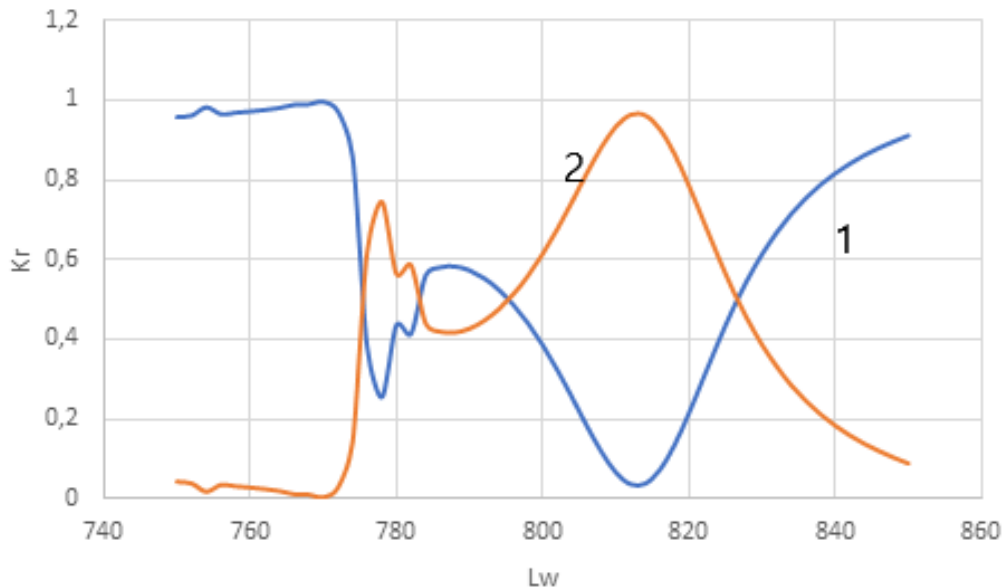


Рис. 12 – Коефіцієнт відбиття у залежності від довжини хвилі для наступних параметрів:

$$a = 750\text{nm}, a_1 = 300\text{nm}, h_1 = 300\text{nm}, \theta = 40^\circ, \varphi = 0^\circ.$$

Аналогічне явище перерозподілу енергії між хвилями різних порядків для даної решітки із квадратними комітками періодичності можна знайти і при інших розмірах циліндричного розсіювача, заповненого кремнієм. Так, на рис. 13 наведено результати розрахунків віддзеркалюючих властивостей періодичної решітки при розмірах розсіювача  $a_1 = 300\text{nm}$ ,  $h_1 = 375\text{nm}$ . Резонансний повний перерозподіл енергії реалізується при  $\lambda^* \cong 998\text{nm}$ .

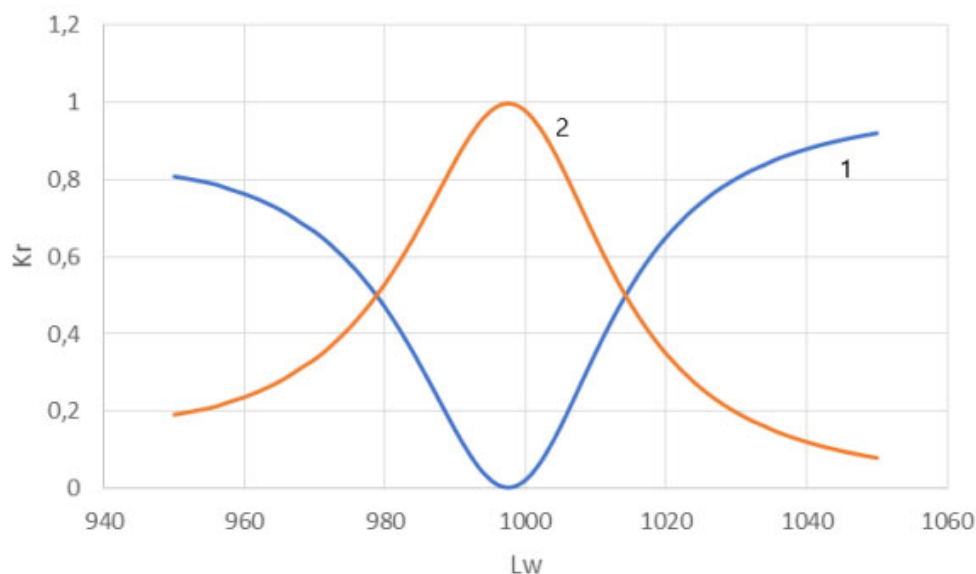


Рис. 13 – Розподіл коефіцієнтів відбиття (1 – дзеркальний промінь, 2 – недзеркальний промінь) в залежності від довжини падаючої хвилі для параметрів  $a = 750\text{nm}$ ,  $a_1 = 300\text{nm}$ ,  $h_1 = 375\text{nm}$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ .

Більш складні явища відбиття можливо спостерігати при зміні розмірів хвилеводів або кута площини падіння хвилі, коли в хвилеводі збуджується резонансна стояча хвиля із багатьма максимумами та неоднорідним



розподілом параметрів електричного поля на межі області хвилеводу та вільного півпростору  $z \geq 0$  (рис. 14).

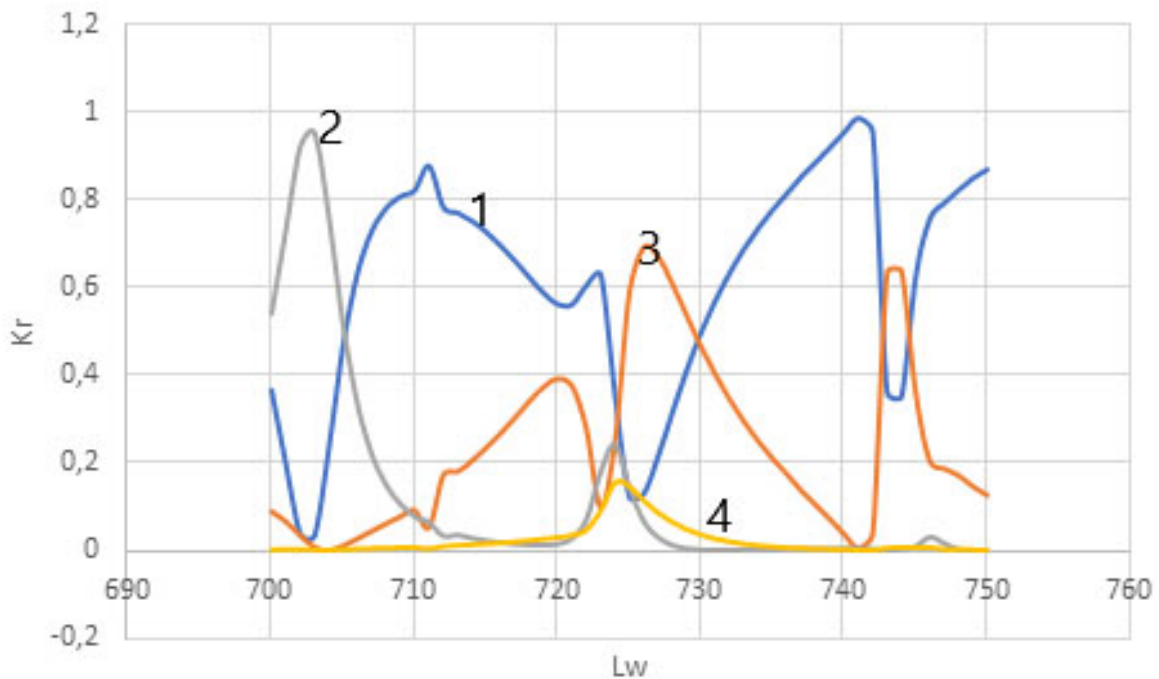


Рис. 14 – Розподіл коефіцієнтів відбиття (1 – дзеркальний промінь, 2, 3, 4 – недзеркальні промені) в залежності від довжини падаючої хвилі для параметрів  $a = 750\text{nm}$ ,  $a_1 = 300\text{nm}$ ,  $h_1 = 375\text{nm}$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ .

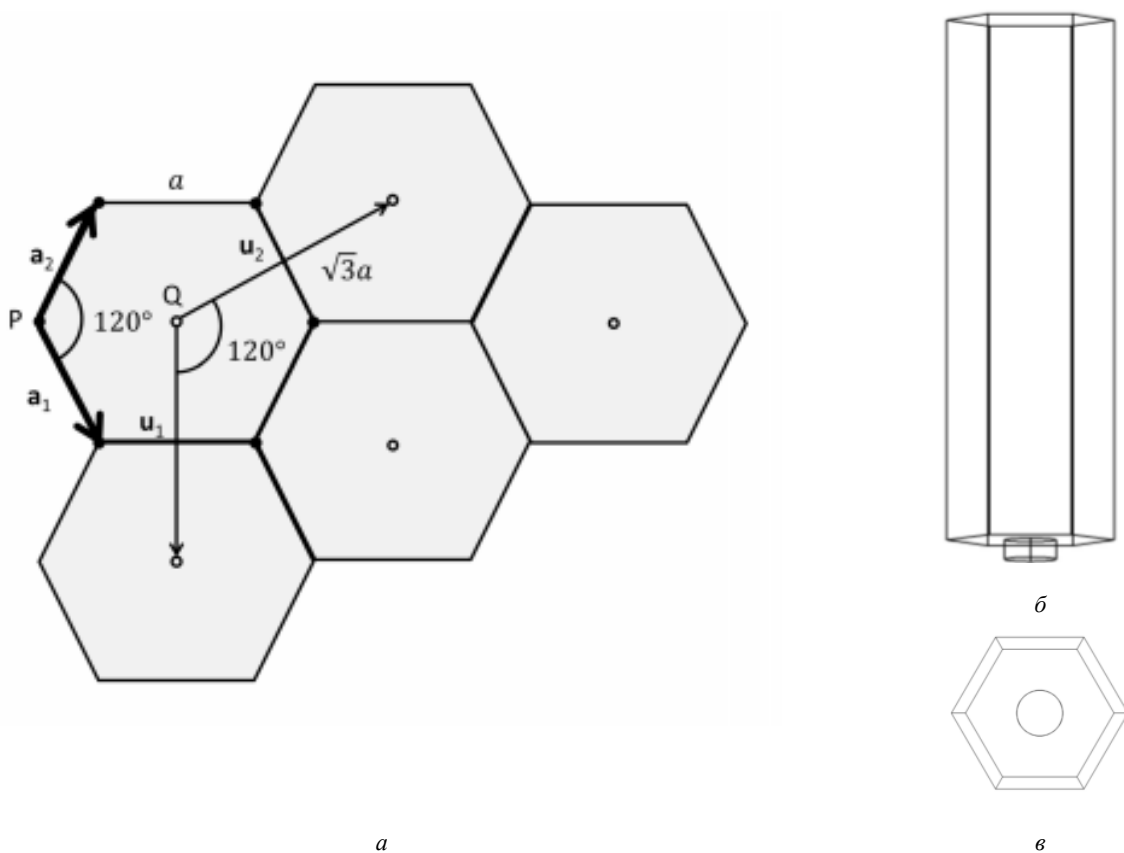


Рис. 15 – Елементи періодичності геометрії розрахункової області шестикутної решітки:  
 $a$  – загальна схема;  $b$  – просторове зображення;  $c$  – проекція на  $хоу$ .

У діапазоні хвиль  $\lambda \in [700, 750] \text{ nm}$  (рис. 14) падаючого поля є зони, в яких змінюється характер розсіяного електромагнітного поля та склад дифракційних порядків, які його створюють. При  $\lambda^* \approx 703 \text{ nm}$  маємо практично однопроменеве (крива 2) розсіяне поле, а при  $\lambda^* \approx 724 \text{ nm}$  поле створюється чотирма променями, яке змінюється на однопроменеве (крива 1) віддзеркалене при  $\lambda^* \approx 742 \text{ nm}$ . Таким чином, реалізація однопроменевого розсіювання можлива для решітки з квадратною коміркою не тільки на кутах  $\varphi = 0$  (рис. 13), а і на інших, наприклад,  $\varphi = 45^\circ$ .

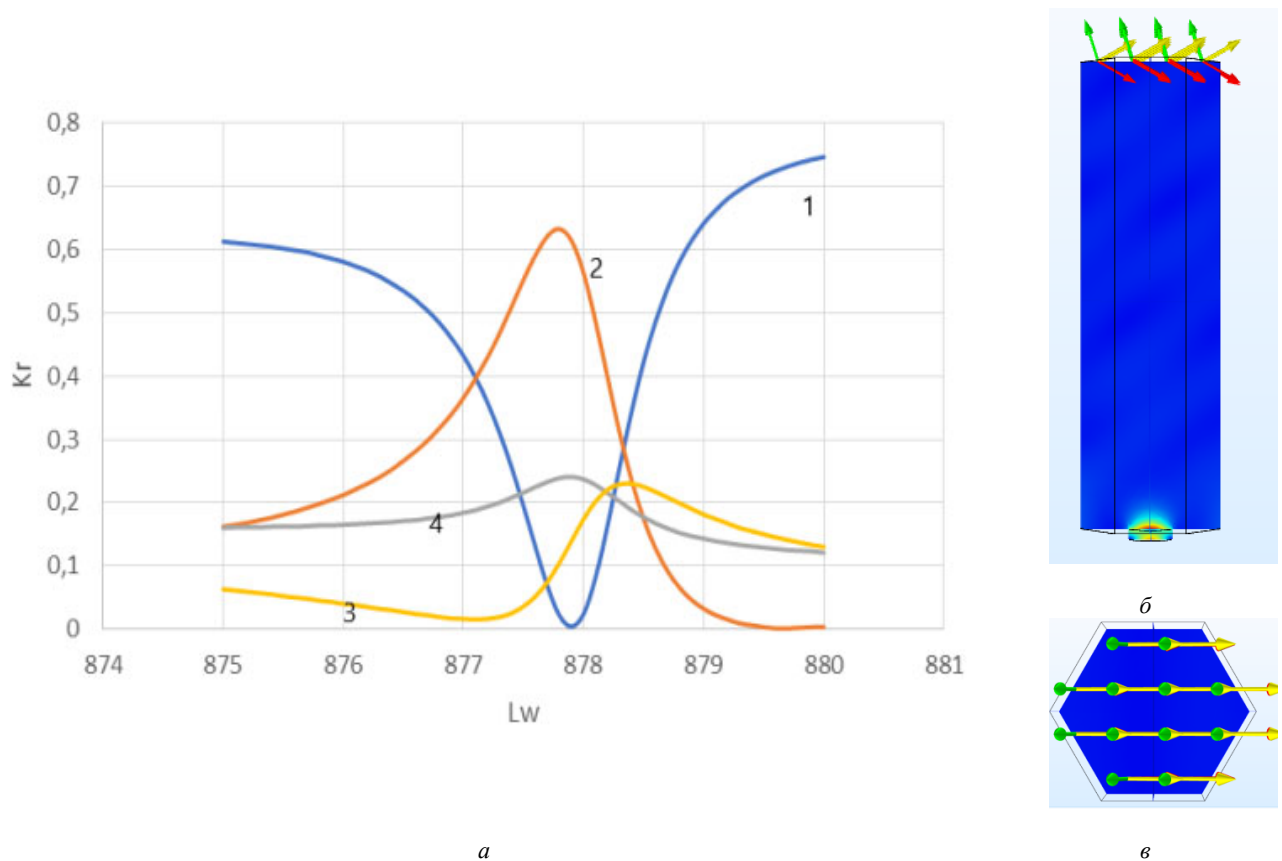


Рис. 16 – Розподіл коефіцієнтів відбиття: *a* – по довжині падаючої хвилі для параметрів  $a = 500 \text{ nm}$ ,  $a_1 = 155 \text{ nm}$ ,  $h_1 = 75 \text{ nm}$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ; *b* – ізоляції модуля вектору електричного поля над решіткою; *v* – хвильові вектори мод на вхідній межі розрахункової області (площина паралельна  $xoy$ ),  $\lambda = 877.8 \text{ nm}$ .

Досліджувався також випадок періодичної решітки із шестикутними елементами в періоді (рис. 15). На рис. 16 показані інтенсивність віддзеркалення різних мод над шестикутною решіткою.

Аналіз дифракційних порядків для решіток із правильних шестикутників і із асоційованих ромбів дає різну інформацію відносно складу множини порядків розповсюдження. Так, застосовуючи умову (5) і умову (3), отримаємо різний склад множини дифракційних порядків розсіювання.

Видно (рис. 16), що у розсіяному полі періодичної решітки із шестикутних елементів із циліндричними розсіювачами, розміром як в квадратній решітці, майже відсутнє геометричне віддзеркалення на довжині хвилі  $\lambda = 877.8 \text{ nm}$ . Енергія із падаючої моди трансформується у декілька розсіяних мод.

У випадку  $a = 500 \text{ nm}$ ,  $a_1 = 155 \text{ nm}$ ,  $h_1 = 75 \text{ nm}$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = 0$  маємо двопроменеве розсіяне поле над решіткою у деякому діапазоні довжин падаючої хвилі (рис. 17).

Знайдено (рис. 16) режим для решітки із правильних шестикутників, де реалізується в основному полі двопроменеве розсіювання із мінімальною інтенсивністю віддзеркаленого променя.

Знайдено, що розподіл коефіцієнту розсіювання при  $\varphi = -60^\circ$  співпадає із розподілом при  $\varphi = 0$ .

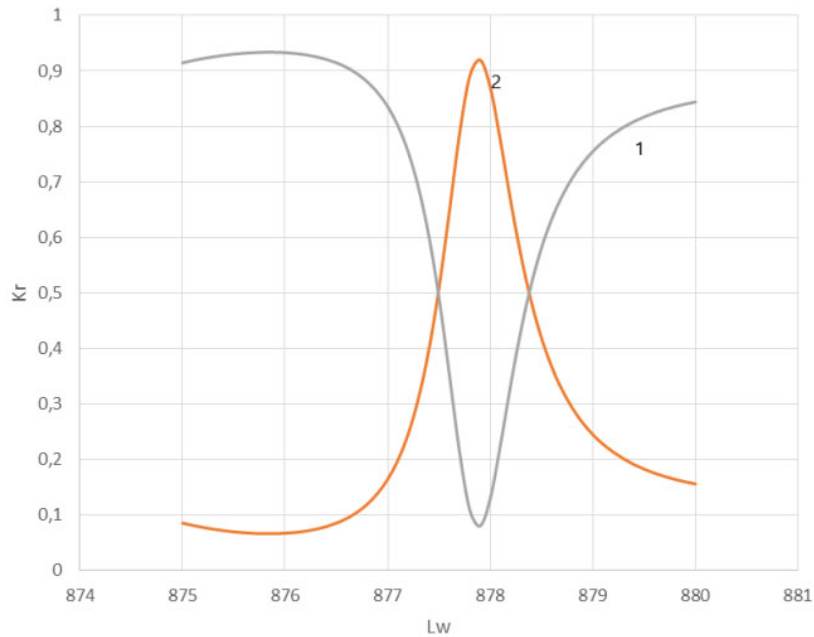


Рис. 17 – Розподіл коефіцієнтів відбиття (1 – дзеркальний промінь, 2 – недзеркальний промінь) в залежності від довжини падаючої хвилі для параметрів:  $a = 500nm$ ,  $a_1 = 155nm$ ,  $h_1 = 75nm$ ,  $\theta = \pi/3$ ,  $\varphi = 0^\circ$ .

**Висновки і задачі для подальшого дослідження.** Запропоновано математичну модель множини дифракційних порядків, які розповсюджуються від квадратної та шестикутної решітки в півпростір  $z \geq 0$ .

Показано, що плоскі періодичні решітки із квадратними або шестикутними елементами періодичності та резонансними розсіювачами у вигляді циліндричних заглиблень, заповнених кремнієм, у металі можуть створювати недзеркальне розсіяне поле.

Виявлено реакцію решіток на зміну довжини хвилі падаючого поля структурою дифракційних порядків розсіяного поля та високу чутливість до повороту площини падіння.

Необхідне дослідження впливу властивостей матеріалу заповнення розсіювача на склад дифракційних порядків, розсіяних решіткою.

Двоперіодичні решітки мають перспективу при створенні антивідблискових поверхонь різних пристроїв.

#### Список літератури

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 624 с.
2. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних краевых задач электродинамики. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
3. Demmel J. W. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997. – 416 p.
4. Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. Численные методы. – М., 2002. – 632 с.
5. Стренг Г., Фикс Д. Теория метода конечных элементов. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
6. Mittra R., Lee S. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. – New York : University of Illinois, 1971. – 572 p.
7. Kirilenko A. A., Tkachenko V. I., Rud L. A., Kulik D. Y. The mode-matching technique and fast numerical models of arbitrary coordinate waveguide objects // Quasi-optical Control of Intense Microwave Transmission In ed. by Hirshfield, J.L. Michael, I. Petelin. – Netherlands: Springer, 2005. – P. 41 – 53.
8. Завадский В. Ю. Метод сеток для волноводов. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
9. Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток / Перевод с английского А. П. Гридина, В. А. Мишустина, З. В. Пастрона, под редакцией А. Ф. Чаплина. – М. : Изд-во «МИР», 1974. – 456 с.
10. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Погарский С. А., Калиберда М. Е. Дифракция волн на периодических многослойных структурах. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2017. – 268 с.
11. Ванин В. А., Просвирнин С. Л. Дифракция нестационарной электромагнитной волны на бипериодической решетке // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9. – № 4. – С. 417 – 429.

#### References (transliterated)

1. Landau L. D., Livshiei E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 624 p.
2. Nikol'skiy V. V. *Variatsionnye metody dlya vnutrennikh kraevykh zadach elektrodinamiki* [Variational methods for interior boundary value problems of electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 460p.
3. Demmel J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997. 416 p.

4. Bakhvalov N., Zhidkov N., Kobel'kov G. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, 2002. 632 p.
5. Steng G., Phiks D. *Teoriya metoda konechnykh elementov* [Theory of the method of finite elements]. Moscow, Mir Publ., 1977. 349 p.
6. Mittra R., Lee S. *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*. New York, University of Illinois, 1971. 572 p.
7. Kirilenko A. A., Tkachenko V. I., Rud L. A., Kulik D. Y. The mode-matching technique and fast numerical models of arbitrary coordinate waveguide objects. *Quasi-optical Control of Intense Microwave Transmission In ed. by Hirshfield, J.L. Michael, I. Petelin*. Netherlands, Springer, 2005. pp. 41–53.
8. Zavadskiy V. Yu. *Metod setok dlya volnovodov* [Grid method for waveguides]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 368 p.
9. Amitey N., Galindo V., Vu. Ch. *Teoriya i analiz fazirovanykh antennoykh reshetok* [Theory and analysis of phased antenna grates]. *Perevod s angliyskogo A. P. Mishustina, Z. V. Pastrona, pod redakzy A. Ph. Chaplina* [Translated from English by A. P. Gridina, V. A. Mishustin, Z. V. Pastrone, editor A. F. Chaplin]. Moscow, Mir Publ., 1974. 456 p.
10. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L., Pogarskiy S. A., Kaliberda M. E. *Difraktsiya voln na periodicheskikh mnogosloynnykh strukturakh* [Wave diffraction on periodical multilayered structures]. Kharkov, KhNU imeni V.N.Karasina Publ., 2017. 268 p.
11. Vanin V. A., Prosvirnin S. L. Difraktsiya nestatsionarnoy elektromagnitnoy volny na biperiodicheskoy reshetke [Diffraction of non-stationary electromagnetic waves on biperiodic grates]. *Radiophysika i radioastronomiya* [Radiophysics and radio astronomy]. 2004, vol. 9, no. 4, pp. 417–429.

Надійшла (received) 17.09.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ванін Віктор Антонович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

**Ванин Виктор Антонович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

**Vanin Viktor Antonovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (095) 819-89-23; e-mail: vvaplb5256@gmail.com.

**Просвірнін Сергій Леонідович** – доктор фізико-математичних наук, професор, головний науковий співробітник відділу теоретичної радіофізики, Радіоастрономічний інститут НАН України, м. Харків; тел.: (050) 235-764-50; e-mail: prosvirn@rian.kharkov.ua.

**Просвирнин Сергей Леонидович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теоретической радиофизики, Радиоастрономический институт НАН Украины, г. Харьков; тел.: (050) 235-764-50; e-mail: prosvirn@rian.kharkov.ua.

**Prosvirnin Sergiy Leonidovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Researcher, Department of Theoretical Radiophysics, Institute of Radio Astronomy, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv; tel.: (050) 235-764-50; e-mail: prosvirn@rian.kharkov.ua.