УДК 531.011:531.133.3 **DOI: 10.20998/2222-0631.2022.01.01**

Ю. М. АНДРЄЄВ

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПРОГРАМНОГО МОДУЛЯ ДИНАМІКИ ССКА КІДИМ З ВИКОРИСТАННЯМ АВТОМАТИЧНО ГЕНЕРОВАНОЇ DLL-ПРОЦЕДУРИ ТА ІНШИМИ ЗАСОБАМИ

У роботі представлені результати досліджень щодо суттєвого підвищення швидкості розв'язання спеціальною системою комп'ютерної алгебри (ССКА) КіДиМ (програмний комплекс для вирішення задач механіки дискретних механічних систем будь-якої складності) завдань динаміки дискретних механічних систем довільного виду з довільними в'язами. Зокрема, реалізований алгоритм визначення параметрів додаткового повороту центральних систем координат (СК) твердих тіл за наявності недіагонального тензора інерції для перетворення їх в головні центральні СК, в яких рівняння Ейлера мають найпростіший вигляд. Крім того, визначаються основні центральні моменти інерції тіла. Запропоновано більш простий опис перетворень СК ланок роботів з відкритими кінематичними ланцюгами. Він полягає в окремому опису положень СК ланок та положень їх центральних СК відносно СК ланок. Це дозволяє окремо описати кінематику механізму та повну інформацію про інерційні параметри ланки – масу, тензор інерції, положення центральної СК, що зменшує можливість помилок в описах моделі. На прикладі моделі нижніх кінцівок крокуючого робота показано виграш у числі машинних операцій такого опису. Докладно розібрано використання програмно генерованої DLL-процедури для збереження математичної моделі системи. Вона при чисельному інтегруванні може бути завантажена з зовнішнього носія (диску) в пам'ять комп'ютера. Для цього в ССКА КіДиМ створено спеціальну процедуру, яка перетворює внутрішнє представлення аналітичних виразів системи комп'ютерної алгебри в програмний код на C++, викликає відповідний компілятор, який створює та зберігає DLL-процедуру на диску. У блоці чисельного інтегрування система може завантажити її та проводити обчислення правих частин форми Коші динамічних рівнянь у рамках роботи процедури Рунге − Кутта. Показано виграш у часі такої методики інтегрування порівняно з прямими розрахунками формульних дерев в пам'яті ПК для різних завдань, тим більший, чим складніше механічна система. Запропоновано критерій використання такого алгоритму залежно від обсягу коду C++ в DLL-процедурі.

Ключові слова: завдання динаміки робототехнічних механізмів, автоматичне будування рівнянь динаміки, комп'ютерна алгебра, механічні та математичні моделі систем твердих тіл.

Ю. М. АНДРЕЕВ

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ ДИНАМИКИ ССКА КИДИМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АВТОМАТИЧЕСКИ ГЕНЕРИРОВАННОЙ DLL-ПРОЦЕДУРЫ И ДРУГИМИ СРЕДСТВАМИ

Представлены результаты исследований по повышению эффективности ССКА КиДиМ при решении задач динамики дискретных механических систем произвольного вида с произвольными связями. Реализован алгоритм определения параметров дополнительного поворота центральных систем координат (СК) твердых тел при наличии недиагонального тензора инерции для преобразования их в главные центральные СК, в которых уравнения Эйлера имеют простейший вид. Предложено более простое описание преобразований СК звеньев роботов, которое разделяет описание кинематики механизма и информации об инерционных параметрах звеньев. На примере модели нижних конечностей андроподобного робота показан выигрыш в числе машинных операций такого описания. Разобрано использование программно генерируемой DLL-процедуры для сохранения на внешнем носителе (диске) математической модели системы, которая сохраняется и загружается в память компьютера при численном интегрировании. Показан выигрыш во времени интегрирования различных задач, тем больший, чем сложнее механическая система. Предложен критерий включения такого алгоритма в зависимости от объема C++-кода в DLL-процедуре.

Ключевые слова: задачи динамики робототехнических механизмов, автоматическое построение уравнений динамики, компьютерная алгебра, механические и математические модели систем твердых тел.

Y. M. ANDRIEIEV

IMPROVING EFFICIENCY OF SSCA KIDYM DYNAMICS PROGRAM MODULE BY USING AUTOMATICALLY GENERATED DLL-PROCEDURE AND BY OTHER MEANS

The paper presents the results of research on the significant increase in the speed of solving the problems of the dynamics of discrete mechanical systems of an arbitrary form with arbitrary links by a special system of computer algebra (SSCA) KiDyM. In particular, an algorithm for determining the parameters of the additional rotation of the central coordinate systems (CS) of solid bodies in the presence of a non-diagonal inertia tensor to transform them into the main central SCs, in which Euler's equations have the simplest form, is implemented. The main central moments of inertia of the body are determined. A simpler description of SC transformations of robot links with open kinematic chains is proposed. It consists in a separate description of the positions of the SC of the links and the positions of the center of mass and the central SC in relation to the SC of the link. This approach leads to localized description of the kinematics of the mechanism and complete information about the inertial parameters of the link, such as mass, inertia tensor, position of the central SC. The possibility of errors in model descriptions is thereby reduced. On the example of the model of the lower limbs of an human like robot, the gain in the number of machine operations of this description is shown. The use of the software-generated DLL procedure for saving the mathematical model of the system is analyzed in detail. If necessary, it is loaded from an external medium (disk) into the computer's memory during numerical integration. For this purpose, a special procedure has been created in SSCA KiDyM, which transforms the internal representation of analytical expressions of the computer algebra system into program code in C++, calls the appropriate compiler, which creates and saves the DLL-procedure on the disk. In the numerical integration block, the system can load it and calculate the right-hand sides of the Cauchy form of the dynamic equations by the Runge-Kutta procedure. The time gain of this integration method compared to direct calculations of formula trees in PC memory for various tasks is shown. The time gain increases with the increase in the complexity of the mechanical system. A criterion for automatically switching such an algorithm depending on the amount of C++ code in the DLL procedure is proposed.

Key words: task of dynamics of robotic mechanisms, automatic construction of dynamics equations, computer algebra, mechanical and mathematical models of multibody systems.

Вступ. Досягнення сучасної робототехніки [1] значною мірою завдячують накопиченим *класичним методам* складання *рівнянь динаміки* та *кінематики*, реалізації їх на ПК, розвитку та створенню нових. Розрахунки механічної поведінки *робототехнічних систем* є проблемними для сучасної механіки. Це пов'язано з проблемами компактного універсального опису механічних моделей, обумовленими необхідністю обліку просторових рухів ланок, діючих зовнішніх сил і, найпроблемніше, – обліку в'язів, що накладаються на механізм – *стаціонарних* і *нестаціонарних*, що утримують і не утримують (*неголономні* в'язи в таких системах, які практично не зустрічаються, за винятком колісних механізмів). У цій статті аналізуються та пропонуються покращення процесів опису механічних моделей, формування рівнянь рухів робототехнічних систем, їх відображення у відповідних матрицях, побудови чисельних алгоритмів інтегрування рівнянь, зокрема застосуванням зовнішніх DLL-процедур, які формуються програмно.

Аналіз останніх досліджень. У зв'язку з новими можливостями, що надаються комп'ютерною технікою, питанням реалізації та вдосконалення існуючих методик приділяється велика увага. Мова йде про такий продуктивний напрямок теоретичних і практичних досліджень, як становлення, розвиток і застосування комп'ютерної алгебри в цій галузі. Історія вітчизняного розвитку такого напряму добре представлена у роботі [2]. Крім того, розвиваються комп'ютерні методики, які використовують аналітичні комп'ютерні перетворення [3 – 6]. Основою для сучасних розробок комп'ютерної автоматизації побудиви математичних моделей просторово рухомих механічних систем є відомі *методи аналітичної механіки*. Однак протягом останніх 50 років отримали розвиток модифікації цих методів, які полегшують їх комп'ютерну реалізацію, що показано в роботах [7 – 11]. Незважаючи на існуючі рішення, ця проблема, в комплексі, залишається складною для універсальної комп'ютерної реалізації і вимагає в кожному конкретному випадку великих витрат машинного часу для отримання результатів. Тому питанням розвитку та реалізації різних підходів зараз продовжує приділятися увага. Слід зазначити ряд робіт [12 – 13], присвячених дослідженню різних методів чисельного розрахунку динаміки складних *багатомасових систем твердих тіл*. Цю статтю присвячено питанням, що стосуються цих робіт.

Постановка задачі. Наприкінці минулого століття *Л. І. Штейнвольфом* та *В. Н. Мітіним* було запропоновано для автоматичного формування рівнянь руху плоских механізмів використовувати введені ними структури та структурні матриці [14 – 15], а також спеціальний аналітичний опис механічної моделі на основі інерційних, силових, пружних та дисипативних елементів [16]. Такий опис дозволяв повністю автоматизувати комп'ютерне отримання в аналітичному вигляді математичної моделі динамічних процесів застосуванням методів комп'ютерної алгебри. Надалі таку методику вдалося поширити на довільні системи твердих тіл, які здійснюють просторовий рух, з урахуванням нестаціонарних, неголономних і неутримуючих в'язів [10 – 11]. На цій основі було створено програмний комплекс – *спеціальну систему комп'ютерної алгебри (ССКА) КіДиМ* (далі – КіДиМ) [1, 17]. Ефективність такого підходу, наприклад, продемонстрована у статті [16], де описано алгоритм реалізації комп'ютерної аналітичної побудови *перших інтегралів механічних систем*.

На основі математичної моделі, одержаної в КіДиМ у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь, проводиться дослідження *першої* або *другої задачі динаміки*. У цій роботі зупинимося на проблемах реалізації спрощень аналітичних перетворень при формуванні диференціальних рівнянь руху та, особливо, їх чисельного вирішення у другій задачі динаміки.

Аналітичні рішення КіДиМ. У програмному комплексі КіДиМ для задання *кінематичних ланцюгів*, а також *сферичних* та *вільних просторових рухів* твердих тіл до останнього часу використовувався запис, якій називається «*тверде тіло*» [10, 16, 17], що має 3 секції та представляється у вигляді:

$$Name_i\left[\sim Name_j\right] | \left[R_\xi\left(\alpha_\xi\right),...,S_\zeta\left(a_\zeta\right),...\right]\left[Q_\eta\left(q_\eta\right),...,S_\zeta\left(a_\zeta\right),...\right] |$$
$$m\left(m_i\right), J_x\left(J_{x_i}\right), J_y\left(J_{y_i}\right), J_z\left(J_{z_i}\right)\left[, J_{xy}\left(J_{xy_i}\right), J_{yz}\left(J_{yz_i}\right), J_{xz}\left(J_{xz_i}\right)\right], \quad (1)$$

де [] – обрамляє елементи, які можуть бути відсутні, або, коли вони стоять поруч, має бути одне з них; «|» – розділяє секції; «**;**» – завершує запис; $Name_i$ – назва даного тіла; $Name_j$ – назва тіла (*базового*), у системі координат якого визначається положення даного тіла, це не обов'язковий елемент – за його відсутності припускається, що положення даного тіла визначається відносно абсолютної нерухомої системи координат; «~» розділяє ці назви; $R_\xi\left(\alpha_\xi\right),...,S_\zeta\left(a_\zeta\right),...$ – елементи списку послідовності кутів поворотів α_ξ та зміщень a_ζ, що записані у порядку перетворень *системи координат* (далі *СК*) $(i-1)$ – го тіла у СК i – го, при цьому ξ приймає значення x, y, або z, та показує вздовж або навколо якої осі потрібно провести зміщення чи поворот СК; $Q_\eta\left(q_\eta\right)$ – може використовуватися замість попереднього списку поворотів $R_\xi\left(\alpha_\xi\right),...,$ і визначає компоненти відповідного *кватерніона*, що задає поворот тих самих СК; $m\left(m_i\right)$, $J_x\left(J_{x_i}\right)$, $J_y\left(J_{y_i}\right)$, $J_z\left(J_{z_i}\right)$ $\left[, J_{xy}\left(J_{xy_i}\right)\right.$, $J_{yz}\left(J_{yz_i}\right)$, $\left.J_{xz}\left(J_{xz_i}\right)\right]$ – запис типів та значень (в дужках) інерційних параметрів, що означають масу та складові тензору інерції тіла в його центральній СК (з початком в центрі мас), при цьому список відцентрових моментів інерції в квадратних дужках потрібен, коли центральна система координат не є головною.

Списки $\left[R_{\xi}\left(\alpha_{\xi}\right),...,S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]\left[Q_{\eta}\left(q_{\eta}\right),...,S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]$ можуть відображати відоме в робототехніці *перетворення СК Денавита – Хартенберга*, а можуть бути побудованими користувачем незалежним чином.

Записи виду (1) дозволяють автоматично згенерувати КіДиМ інерційні елементи механічної моделі.

Динамічні рівняння, що отримуються у КіДиМ для голономних або неголономних дискретних механічних систем n твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки, можна представити у вигляді [16, 17]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}_{\vec{R}_i^{\text{и}}}^{T} m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}}^{T}\left(\mathbf{J}_{\mathbf{C}i}\vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{\mathbf{C}i}\vec{\omega}_i^{(i)}\right)\right\} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}\,, \tag{2}$$

де $\mathbf{W}_{\vec{R}_i^{\text{и}}}^{T}, \mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}}^{T}, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції $i-$го тіла та активних сил системи відповідно; $\vec{r}_{C_i}, \vec{\omega}_i^{(i)}, \vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас, кутова швидкість та кутове прискорення $i-$го тіла, до того ж радіус-вектор центру мас задається в абсолютній СК, а кутова швидкість та кутове прискорення – у зв'язаній головній центральній СК $i-$го тіла; $m_i, \mathbf{J}_{\mathbf{C}i}$ – маса та діагональний тензор інерції $i-$го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $\mathbf{P}$ – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проекції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Аналітичні вирази структурних матриць будуються диференціюванням: для сил інерції – Декартових *координат* радіус-вектора центра мас $i-$го тіла по вектору узагальнених координат, або – вектора швидкості центра мас $i-$го тіла по вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_{\vec{R}_i^{\text{и}}} = \left[\partial\vec{r}_{C_i}/\partial\mathbf{q}\right] = \left[\partial\vec{v}_{C_i}/\partial\dot{\mathbf{q}}\right]$; для моментів сил інерції – вектора кутової швидкості $i-$го тіла по вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}} = \left[\partial\vec{\omega}_i^{(i)}/\partial\dot{\mathbf{q}}\right]$; для активних сил системи – вектора координат силових елементів по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_{\mathbf{P}} = \; = \left[\partial\boldsymbol{\rho}/\partial\mathbf{q}\right] = \left[\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}/\partial\dot{\mathbf{q}}\right]$.

Для отримання виразів лінійних прискорень $\ddot{\vec{r}}_{C_i}$, та кутових швидкостей $\vec{\omega}_i^{(i)}$ і прискорень $\vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ тіл в (2) від узагальнених координат, швидкостей та прискорень, КіДиМ використовує послідовності $\left[R_{\xi}\left(\alpha_{\xi}\right),..., S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]$, або $\left[Q_{\eta}\left(q_{\eta}\right),...,S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]$ з виразів (1). Вирази координат силових елементів від узагальнених координат системи $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{q})$ (декартових координат точок прикладання активних сил, кутів поворотів тіл для активних моментів) задаються користувачем в вихідних даних відповідними формулами (структурами) вручну, або за допомогою підпрограм КіДиМ.

Практика використання описаного алгоритму побудови рівнянь (2) в рамках КіДиМ виявила деякі незручності. Далі викладається удосконалення записів вихідних даних і їх алгоритмічного перетворення, що реалізовано останнім часом в ССКА КіДиМ.

Удосконалення даних і алгоритмів КіДиМ. Слід зауважити, що друга складова в фігурних дужках рівнянь (2) це не що інше, як приведення до *узагальнених координат системи рівнянь Ейлера* тіл моделі $\left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\varepsilon}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\omega}_i^{(i)}$ з матричним приводним коефіцієнтом $\mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}}^{T}$. Тут можливі 2 варіанти. У першому − СК даного $i-$го тіла, положення якої задається положенням СК $j-$го (базового) тіла і відповідною послідовністю здвигів і поворотів $\left[R_{\xi}\left(\alpha_{\xi}\right),...,S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]$ $\left(\text{або}\left[Q_{\eta}\left(q_{\eta}\right),...,S_{\zeta}\left(a_{\zeta}\right),...\right]\right)$, є головною. Тоді маємо відсутність відцентрових моментів інерції в запису (1), діагональний тензор інерції тіла і рівняння Ейлера у вигляді:

$$\mathbf{I_C} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} &A\varepsilon_x^{(\text{г})} + (B-C)\,\omega_y^{(\text{г})}\omega_z^{(\text{г})} = M_x; \\ &B\varepsilon_y^{(\text{г})} + (C-A)\,\omega_x^{(\text{г})}\omega_z^{(\text{г})} = M_y; \\ &C\varepsilon_z^{(\text{г})} + (A-B)\,\omega_x^{(\text{г})}\omega_y^{(\text{г})} = M_z. \end{aligned} \tag{3}$$

Зауважимо, що в (3) індекс i опущено, а верхній індекс (г) означає, що компоненти векторів беруться в головній центральній СК тіла.

Але мати такий (3) випадок не завжди вдається. В іншому випадку, коли не всі відцентрові моменти інерції в запису (1) дорівнюють нулю, тензор інерції не є діагональним, тоді він і рівняння Ейлера мають вигляд:

$$\mathbf{J_C} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &J_x\varepsilon_x - J_{xy}\varepsilon_y - J_{xz}\varepsilon_z + \omega_y L_z - \omega_z L_y = M_x \\ &-J_{xy}\varepsilon_x + J_y\varepsilon_y - J_{yz}\varepsilon_z + \omega_z L_x - \omega_x L_z = M_y \\ &-J_{yz}\varepsilon_y - J_{xz}\varepsilon_x + J_z\varepsilon_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x = M_z \end{aligned}, \quad \text{де} \quad \begin{aligned} L_x &= J_x\varepsilon_x - J_{xy}\varepsilon_y - J_{xz}\varepsilon_z \\ L_y &= -J_{xy}\varepsilon_x + J_y\varepsilon_y - J_{yz}\varepsilon_z \\ L_z &= -J_{yz}\varepsilon_y - J_{xz}\varepsilon_x + J_z\varepsilon_z \end{aligned}. \tag{4}$$

Для того, щоб використовувати в рівняннях (2) діагональний тензор інерції, треба діагоналізувати тензор (4). Це можна зробити шляхом переходу від центральної СК, заданої послідовністю зсувів і поворотів $\left[R_\xi\left(\alpha_\xi\right),\ldots,S_\zeta\left(a_\zeta\right),\ldots\right]$ $\left(\text{або}\left[Q_\eta\left(q_\eta\right),\ldots,S_\zeta\left(a_\zeta\right),\ldots\right]\right)$ в запису (1), до головної центральної СК. Тобто потрібен ще один поворот центральної СК тіла. Простіше за все задати такий поворот матрицею $\mathbf{V}$, яку можна отримати розв'язанням повної проблеми власних значень матриці тензора (4) *методом обертань Якобі*. Підкреслимо, що ця матриця є *постійною ортонормованою матрицею*, бо постійною є матриця тензору $\mathbf{J_C}$. Тоді отримаємо діагональний тензор за формулою:

$$\mathbf{I_C}=\mathbf{V}^T\mathbf{J_C}\mathbf{V},$$

де зв'язок кутових швидкостей $\vec{\omega}_i^{(i)}=\mathbf{V}_i^T\vec{\omega}_i^{(\text{г}_i)}$ та кутових прискорень $\vec{\varepsilon}_i^{(i)}=\mathbf{V}_i^T\vec{\varepsilon}_i^{(\text{г}_i)}$, що дозволяє знайти компоненти цих векторів в центральній СК через компоненти в головній центральній СК, які отримуються після розв'язання рівнянь (2), записаних відносно повернених кутових швидкостей та прискорень. В цих рівняннях зміняться другі складові в фігурних дужках для тіл, треті секції яких містять відцентрові моменти інерції. З урахуванням викладеного вони будуть мати вигляд:

$$\mathbf{V}_i^T\mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}}^T\left(\mathbf{I}_{\mathbf{C}i}\vec{\varepsilon}_i^{(\text{г}_i)}+\vec{\omega}_i^{(\text{г}_i)}\times\mathbf{I}_{\mathbf{C}i}\vec{\omega}_i^{(\text{г}_i)}\right).\tag{5}$$

Множник $\mathbf{V}_i^T$ з'явився внаслідок того, що диференціальна структура кутових швидкостей в головній центральній СК дає таку похідну для визначення структурної матриці:

$$\left[\partial\vec{\omega}_i^{(\text{г}_i)}/\partial\dot{\mathbf{q}}\right]=\left[\mathbf{V}_i^T\,\partial\vec{\omega}_i^{(i)}/\partial\dot{\mathbf{q}}\right]=\mathbf{V}_i^T\mathbf{W}_{\vec{M}_i^{\text{и}}}.$$

Зазначимо, що кінематичні рівняння доповнюють динамічні (2), які (є) виразами кутових швидкостей через узагальнені швидкості. КіДиМ будує їх шляхом обробки поворотів в послідовності зсувів і поворотів в записах (1). Щоб вони відповідали складовим (5) їх теж треба помножити на $\mathbf{V}_i^T$, бо

$$\vec{\omega}_i^{(\text{г}_i)}=\mathbf{V}_i^T\vec{\omega}_i^{(i)}.$$

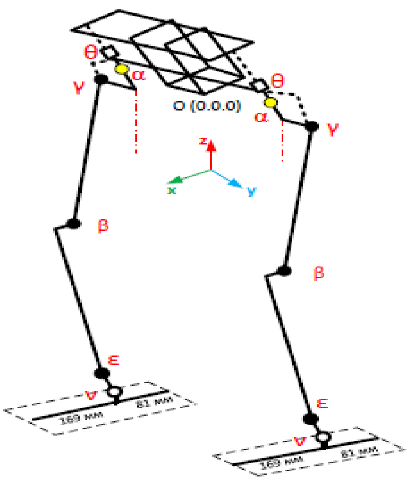

Рис. 1 – Модель нижніх кінцівок робота.

Повернемось до записів (1). Тут передбачається, як уже було сказано, що в другій секції записано алгоритм перетворення СК ланки до її центральної СК. Саме це і дає змогу КіДиМ побудувати рівняння (2). Практика застосування такого підходу до розв'язання задач динаміки і кінематики робототехнічних систем виявила деяку незручність в такому описанні твердих тіл механічної моделі. Ця незручність полягає в тому, що центри мас ланок таких механізмів не розташовані в загальних точках сусідніх твердих тіл, де зручно мати початки СК наступних ланок. Тому для запису перетворення СК треба повертатись з центру мас поточної ланки до таких загальних точок и потім іти далі до центру мас наступного твердого тіла, проходячи через такі загальні точки, розташовані на з'єднуючих шарнірах. Це веде до суттєвого збільшення аналітичних виразів в рівняннях (2). Тому наступна доробка в даних КіДиМ полягає в доповненні третьої секції в запису (1) послідовністю перетворень СК, як це має місце в другій секції. Це дає змогу скоротити загальний опис перетворень СК ланок, бо в другій секції буде розташовуватись опис перетворень СК твердих тіл, а в третій секції буде дано перетворення СК даного тіла до його центральної СК. Тобто для кожної ланки вводиться СК, найбільш зручна для користувача. І перетворення цих СК записуються в другій секції записів виду (1). А в третій секції, таким чином, розташовується вся інформація про інерційну структуру даного тіла, що є, безумовно, більш логічно завершеним. Це – положення центральної (або головної центральної) СК даного тіла відносно призначеної його СК, величини його маси і компоненти центрального тензора інерції. Таким чином, запис (1) набуває вигляду:

$$Name_i\left[\sim Name_j\right]|\left[R_\xi\left(\alpha_\xi\right),\ldots,S_\zeta\left(a_\zeta\right),\ldots\right]\left[Q_\eta\left(q_\eta\right),\ldots,S_\zeta\left(a_\zeta\right),\ldots\right]|$$
$$\left[R_{\xi c}\left(\alpha_{\xi c}\right),\ldots,S_{\zeta c}\left(a_{\zeta c}\right),\ldots\right],m\left(m_i\right),J_x\left(J_{x_i}\right),J_y\left(J_{y_i}\right),J_z\left(J_{z_i}\right)\left[,J_{xy}\left(J_{xy_i}\right),J_{yz}\left(J_{yz_i}\right),J_{xz}\left(J_{xz_i}\right)\right].\tag{6}$$

Приклад 1. В якості прикладу розглянемо опис механічної моделі нижніх кінцівок двоногого робота (рис. 1). Модель представляє собою 14-масову конструкцію. Таз та тулуб жорстко скріплені між собою. Права та ліва нога – це сукупність 5 ланок – твердих тіл кожна, що мають назву: ефектор, стегно, гомілка, гомілкоступ, ступня. Положення ефектора відносно тазу задається двома кутами – θ та α. Таким чином, тут 12 ступе нів свободи та 12 узагальнених координат – кутів повороту ланок один щодо одного: θ_L, α_L, γ_L, β_L, ε_L, ν_L,

θ_R, α_R, γ_R, β_R, ε_R, ν_R.

Початки ланкових систем координат розташовано в верхніх (рис. 1) їх точках в центрах шарнірів. Початок абсолютної СК співпадає с початковим положенням центру тазу (т. O). Початкова орієнтація цих СК:

таз: вісь x – вперед, вісь y – до лівого стегна, вісь z – вгору;

стегно: вісь z – вздовж стегна вгору, вісь y – паралельно осі y;

гомілка: вісь z – вздовж гомілки вгору, вісь y – паралельно осі верхнього шарніра;

гомілкостоп: вісь z – вздовж ланки вгору, вісь x – паралельно осі коліна;

ступня: вісь x – вперед, вісь y – вліво, вісь z – вгору.

Приведемо (рис. 2) записи твердих тіл моделі за старою формою (1).

```
Taz    | Sx(Ax),    Sy(Ay),    Sz(Az)    | m(mt),  Jx(Jtx),  Jy(Jty),  Jz(Jtz);
Mvv~Taz | Sx(Tx-Ax), Sy(Ty-Ay), Sz(Tz+hv-Az) | m(mV),  Jx(Jmvx),  Jy(Jmvy), Jz(Jmvz);
EfL~Taz | Sx(-Ax),  Sy(a2L-Ay), Sz(-Az),    Ry(psiL), Rz(teta$L), Sz(-cL), Rx(alfa$L),
        Sx(Elx),  Sy(Ely),   Sz(Elz)    | m(meL),  Jx(Jex),   Jy(Jey), Jz(Jez);
BdL~EfL | Sx(-Elx), Sy(fL-Ely), Sz(-Elz-eL), Ry(-gamma$L-psiL),
        Sx(Blx),  Sy(Bly),   Sz(Blz)    | m(mbL),  Jx(Jbx),   Jy(Jby), Jz(Jbz);
GlL~BdL | Sx(-Blx), Sy(-Bly),  Sz(-Blz-bL), Ry(beta$L),
        Sx(Glx),  Sy(Gly),   Sz(Glz)    | m(mgL),  Jx(Jgx),   Jy(Jgy), Jz(Jgz);
GsL~GlL | Sx(kL-Glx), Sy(-Gly),  Sz(-Glz-qL), Ry(-nu$L),
        Sx(Qlx),  Sy(Qly),   Sz(Qlz)    | m(mpL),  Jx(Jpx),   Jy(Jpy), Jz(Jpz);
StL~GsL | Sx(-Qlx), Sy(-Qly),  Sz(-Qlz-sL), Rx(epsilon$L),
        Sx(Slx),  Sy(Sly),   Sz(Slz)    | m(msL),  Jx(Jsx),   Jy(Jsy), Jz(Jsz);
EfR~Taz | Sx(-Ax),  Sy(-Ay-a2R), Sz(-Az),   Ry(psiR), Rz(-teta$R), Sz(-cR), Rx(-alfa$R),
        Sx(Erx),  Sy(Ery),   Sz(Erz)    | m(meR),  Jx(Jex),   Jy(Jey), Jz(Jez);
BdR~EfR | Sx(-Erx), Sy(-fR-Ery), Sz(-Erz-eR), Ry(-gamma$R-psiR),
        Sx(Brx),  Sy(Bry),   Sz(Brz)    | m(mbR),  Jx(Jbx),   Jy(Jby), Jz(Jbz);
GlR~BdR | Sx(-Brx), Sy(-Bry),  Sz(-Brz-bR), Ry(beta$R),
        Sx(Grx),  Sy(Gry),   Sz(Grz)    | m(mgR),  Jx(Jgx),   Jy(Jgy), Jz(Jgz);
GsR~GlR | Sx(kR-Grx), Sy(-Gry),  Sz(-qR-Grz), Ry(-nu$R),
        Sx(Qrx),  Sy(Qry),   Sz(Qrz)    | m(mpR),  Jx(Jpx),   Jy(Jpy), Jz(Jpz);
StR~GsR | Sx(-Qrx), Sy(-Qry),  Sz(-Qrz-sR), Rx(-epsilon$R),
        Sx(Srx),  Sy(Sry),   Sz(Srz)    | m(msR),  Jx(Jsx),   Jy(Jsy), Jz(Jsz);
```

Рис. 2 – Записи інерційної структури КіДиМ-моделі робота за формою (1).

Тут в дужках стоять змінні, або вирази змінних – параметрів або узагальнених координат моделі. Значення параметрів вказані в файлі даних і для ілюстрації запису моделі їх величини вказувати немає сенсу. Бачимо, що, практично, для кожної ланки треба спочатку повернутись з заданого положення центру мас попереднього тіла до початку його СК, а потім – вказати, як розташована СК цієї ланкі та її центральна СК.

```
Taz    |Sx(XO),  Sy(YO),    Sz(ZO)      | Sx(Ax), Sy(Ay), Sz(Az),
                                                    m(mt), Jx(Jtx), Jy(Jty), Jz(Jtz);
Mvv~Taz |Sx(0),   Sy(0),     Sz(hv)      | Sx(Tx), Sy(Ty), Sz(Tz),
                                       m(mV),Jx(Jmvx),Jy(Jmvy),Jz(Jmvz);
EfL~Taz |Sy(a2L), Ry(psiL),   Rz(teta$L),
      Sz(-cL), Rx(alfa$L)            | Sx(Elx),Sy(Ely),Sz(Elz),
                                                    m(meL),Jx(Jex), Jy(Jey), Jz(Jez);
BdL~EfL |Sz(-eL), Sy(fL),    Ry(-gamma$L-psiL)| Sx(Blx),Sy(Bly),Sz(Blz),
                                                    m(mbL),Jx(Jbx), Jy(Jby), Jz(Jbz);
GlL~BdL |Sz(-bL), Ry(beta$L)            | Sx(Glx),Sy(Gly),Sz(Glz),
                                                    m(mgL),Jx(Jgx), Jy(Jgy), Jz(Jgz);
GsL~GlL |Sx(kL),  Sz(-qL),   Ry(-nu$L)    | Sx(Qlx),Sy(Qly),Sz(Qlz),
                                                    m(mpL),Jx(Jpx), Jy(Jpy), Jz(Jpz);
StL~GsL |Sz(-sL), Rx(epsilon$L)          | Sx(Slx),Sy(Sly),Sz(Slz),
                                                    m(msL),Jx(Jsx), Jy(Jsy), Jz(Jsz);
EfR~Taz |Sy(-a2R), Ry(psiR),  Rz(-teta$R),
      Sz(-cR), Rx(-alfa$R)           | Sx(Erx),Sy(Ery),Sz(Erz),
                                                    m(meR),Jx(Jex), Jy(Jey), Jz(Jez);
BdR~EfR |Sz(-eR), Sy(-fR),   Ry(-gamma$R-psiR)| Sx(Brx),Sy(Bry),Sz(Brz),
                                                    m(mbR),Jx(Jbx), Jy(Jby), Jz(Jbz);
GlR~BdR |Sz(-bR), Ry(beta$R)            | Sx(Grx),Sy(Gry),Sz(Grz),
                                                    m(mgR),Jx(Jgx), Jy(Jgy), Jz(Jgz);
GsR~GlR |Sx(kR),  Sz(-qR),   Ry(-nu$R)    | Sx(Qrx),Sy(Qry),Sz(Qrz),
                                                    m(mpR),Jx(Jpx), Jy(Jpy), Jz(Jpz);
StR~GsR |Sz(-sR), Rx(-epsilon$R)         | Sx(Srx),Sy(Sry),Sz(Srz),
                                                    m(msR),Jx(Jsx), Jy(Jsy), Jz(Jsz);
```

Рис. 3 – Записи інерційної структури КіДиМ-моделі робота за формою (6).

На рис. 3 приведено записи твердих тіл моделі за новою формою (6).

В результаті отримано такі кількості математичних операцій в цих моделях (табл. 1), що свідчить про перевагу нової форми записів.

Таблиця 1 – Порівняння кількості операцій в рівняннях моделей

Стара форма записів	724⊕, 695⊗, 2∅, функцій 28
Нова форма записів	364⊕, 421⊗, 2∅, функцій 28

Використання DLL-процедур. Вузьким місцем методів розв'язання задач динаміки роботів є необхідність чисельного інтегрування систем диференціальних рівнянь. Ці рівняння представляють звичайні диференціальні рівняння другого і першого порядку у вигляді дуже громіздких трансцендентних виразів, куди входять узагальнені координати, швидкості та прискорення разом з параметрами моделі. Вони перетворюються в *форму Коші* і інтегруються процедурами на основі *методів Рунге − Кутта*, *Адамса* та інших. В будь-якому випадку для досягнення необхідної точності праві частини їх форми Коші повинні обчислюватись багато-багато разів для різних значень часу, узагальнених та псевдокоординат, узагальнених та псевдошвидкостей. Використання програмного комплексу КіДиМ суттєво поліпшує складання таких рівнянь, але отримання розв'язків залишається шляхом використання чисельних процедур. Оскільки рівняння КіДиМ складає в аналітичній формі в пам'яті ПК у вигляді дерев з константами, змінними, унарними та бінарними операціями, то і обчислювання правих частин рівнянь в формі Коші проводиться шляхом розрахунків таких дерев. Не зважаючи на використання спеціальних засобів для прискорення такого процесу, – це може бути не найкращим рішенням. Для того, щоб прискорити розрахунки формул в уявленні дерев в пам'яті комп'ютера в програмі КіДиМ всі змінні та унарні операції мають спеціальну позначку, яка виключає повторні розрахунки їх значень в циклах, всі вирази компонент матриць і векторів більш складні ніж константи, змінні та унарні операції перепозначаються новими змінними, що скорочує вирази, куди вони входять.

В програмному комплексі [4] математична модель формується на мовах програмування, що підтримують створення *бібліотек*, які динамічно завантажуються *(DLL)*. Це дозволяє завантажувати такі бібліотеки в програми і проводити необхідні розрахунки механічної поведінки складних моделей.

Виходячи з цієї ідеї, в даній статті представляються результати тестування включення до комплексу КіДиМ можливості прямого програмування процедур розрахунку правих частин рівнянь у формі Коші на мові С++, створення на цій основі DLL-процедури, яка на етапі чисельного інтегрування методом Рунге − Кутта завантажується в пам'ять ПК та здійснює розрахунки цих правих частин. Метою є оцінка ефективності такої заміни.

Для цього було створено спеціальний програмний модуль, який за вказівкою користувача створює програму на мові С++ шляхом перетворення аналітичних виразів в пам'яті ПК в програмний код, записує його в спеціальний файл, компілює його за допомогою *транслятора Borland Builder 6.0* в DLL-файл, завантажує з нього готову для розрахунків DLL-процедуру в середовище програм КіДиМ і викликає її на етапі чисельного інтегруванн. Для реалізації такого алгоритму треба було розв'язати низку проблем.

По-перше, змінні і формули розташовуються в пам'яті ПК в КіДиМе повільно і при розрахунках використовується спеціальна позначка в них, яка показує − розраховувалась ця змінна в даному циклі чи ні. Коли ні, то перевіряються і при необхідності обчислюються всі змінні, що входять в її формулу. В програмному коді на мові С++ треба пересортувати всі змінні за правилом – спочатку розташувати змінні, формули для яких є константи, потім – змінні, які залежать тільки від цих змінних, потім змінні, що в свою чергу залежать від цих змінних і так далі. Це дуже нетривіальний алгоритм.

По-друге, щоб уникнути повторних розрахунків унарних операцій і функцій (sin, cos, ln, тощо) всі формули правих частин рівнянь аналізуються на присутність таких операцій і функцій і при знаходженні таких функцій вони замінюються в формулах на змінні з іменами, що складаються з імен функцій та імен їх аргументів, а самі такі згенеровані змінні розташовуються в голові всієї процедури після змінних з константними значеннями. Тому ці змінні розраховуються спочатку і більш в даному циклі не перераховуються.

По-третє, імена змінним в вихідних даних дає користувач, практично без всяких обмежень. А імена ідентифікаторів мови С++ повинні включати тільки дозволені символи. Тому було потрібно створити процедуру для перейменування таких змінних.

Крім того, треба перевіряти, чи вже існує така DLL-процедура, що була створена раніше для тієї ж механічної моделі. Тоді вона не оновлюється, а завантажується одразу в пам'ять комп'ютера.

Приклад 2. Для демонстрації отриманих результатів використання DLL-процедур наведемо розрахунки часу інтегрування трьох типових в цьому сенсі задач динаміки – визначення законів: руху подвійного плоского маятника на другій формі коливань, вільного руху гайки-баранчика в моделюванні *ефекту Джанібекова* і руху нижніх кінцівок крокуючого робота типу, як на рис. 1.

Таблиця 2 – Порівняння харктеристик розрахунків за прикладом 2

Об'єкт руху	Час розрахунків без DLL, с	Об'єм CPP-файлу, Кб	Час компіляції, с	Об'єм OBJ-файлу, Кб	Об'єм DLL-файлу, Кб	Час розрахунків з DLL, *с*	Коефіцієнт прискорення рзрахунків
Подвійний маятник	3,6	5	0,47	9,5	59,4	3,27	1,10
Гайка-баранчик	37,3	11,4	0,41	12,6	63,0	25,13	1,48
Робот	130,0	81,3	0,80	27,7	77,3	48,59	2,67

З табл. 2 бачимо, що час розрахунків сильно залежить від об'єму CPP-файлу, що створює КіДиМ. В той же час видно прискорення, що дає використання пропонованої методики з DLL-процедурою. Час розрахунків, природно залежить від розрахункового інтервалу реального часу, тому мало інформативний. Тому в останньому стовбці розраховано коефіцієнт прискорення часу розрахунків як дріб з чисельником – часом розрахунку задачі без використання DLL-процедури і знаменником – часом розрахунку задачі в умовах її використання. Ці дані, а також дані аналогічних розрахунків показують, що коефіцієнт прискорення можна оцінити як кубічний корінь від співвідношень об'ємів CPP-файлів. З урахуванням малості часу компіляції, створення і динамічного завантаження DLL-процедури в пам'ять комп'ютера таку апроксимацію можна використовувати для автоматичного прийняття рішення про доцільність використання DLL-процедури при чисельному інтегруванні. Безумовно можна казати, що це має сенс в складних завданнях, наприклад, в галузі робототехніки.

Перспективи подальших досліджень. Перспективними дослідженнями у сфері підвищення продуктивності комп'ютерних програм розрахунків динаміки роботів є спрощення аналітичних виразів в одержуваних ССКА КіДиМ рівняннях, випробування нових схем чисельного інтегрування цих рівнянь, запропонованих в роботах [12, 13].

Висновки. У роботі представлено результати досліджень щодо суттєвого підвищення швидкості чисельного інтегрування автоматично одержуваних програмним комплексом КіДиМ рівнянь руху дискретних механічних систем довільного виду з довільними в'язами.

Зокрема, реалізовано алгоритм визначення параметрів додаткового повороту центральних систем координат твердих тіл за наявності недіагонального тензора інерції для перетворення їх у головні центральні СК, у яких рівняння Ейлера мають найпростіший вигляд. Разом з цим визначаються головні центральні моменти інерції тіла.

Запропоновано простіше завдання перетворень СК ланок роботів з відкритими кінематичними ланцюгами, яке полягає в окремому описі систем координат ланок та положення центру мас разом з центральною СК вже щодо СК ланки. Це локалізує опис кінематики механізму та повної інформації про інерційні параметри ланки – маси, тензора інерції, положення центральної СК кожної ланки, що зменшує можливість помилок в описах моделі. На прикладі моделі нижніх кінцівок крокуючого робота показано виграш у числі машинних операцій такого опису.

Докладно розібрано використання програмно-генерованої DLL-процедури для запису математичної моделі системи, яка зберігається на зовнішньому носії (диску) і завантажується в пам'ять комп'ютера за потребою при чисельному інтегруванні. Для цього створена спеціальна процедура в ССКА КіДиМ, яка перетворює внутрішнє уявлення аналітичних виразів системи комп'ютерної алгебри – ядра КіДиМ – в код програми мовою С++, викликає відповідний компілятор, який створює та зберігає DLL-процедуру в файлі. У блоці чисельного інтегрування система може завантажити її та проводити обчислення правих частин форми Коші динамічних рівнянь у рамках роботи процедури Рунге – Кутта. Показано виграш у часі інтегрування різних завдань, тим більший, чим складніше механічна система. Запропоновано критерій перемикання використання такої методики залежно від об'єму С++-коду в DLL-процедурі.

Список літератури

1. На заре «эпохи роботов»: достижения 2021 года. – Режим доступу : https://newstyle-mag.com/na-zare-epokhi-robotov-dostizheniya-2021-goda/. – Дата звертання : 01 липня 2022.
2. *Ефимов Г. Б.*, *Грошева М. В.* Из истории отечественной компьютерной алгебры // Математичні машини і системи. – 2009. – № 2. – С. 61 – 67.
3. *Мелентьев В. С.*, *Гвоздев А. С.* Основы кинематического и динамического моделирования в MSC.ADAMS: метод. указания. – Самара : Изд-во Самарского университета, 2018. – 48 с.
4. Универсальный механизм : динамика машин и механизмов, динамика автомобилей и железнодорожных экипажей, прикладная механика, кинематика, обратная кинематика // Лаборатория вычислительной механики / Брянский государственный технический университет. Брянск, 2012. – Режим доступу : http://www.umlab.ru/index_rus.htm. – Дата звертання : 01 липня 2022.
5. EULER : программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем // ЗАО «АвтоМеханика». – М., 1993 – 2011. – Режим доступу: http://www.euler.ru/index.php/euler. – Дата звертання : 02 липня 2022.
6. ФРУНД : моделирование динамики систем твёрдых и упругих тел // Волгоградский государственный технический университет. – Волгоград. – 2005. – Режим доступу: http://frund.vstu.ru /frund.htm. – Дата звертання : 02 липня 2022.
7. *Kane T. R.*, *Levinson D. A.* Dynamics: Theory and Applications – New York : McGraw-Hill, 1985. – 402 p.
8. *Величенко В. В.* Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 280 с.
9. *Лилов Л. К.* Моделирование систем связанных тел. М. : Наука, 1993. – 272 с.
10. *Андреев Ю. М.*, *Морачковский О. К.* О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41. – №7. – С. 130 – 138.
11. *Андреев Ю. М.*, *Морачковский О. К.* Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера – Лагранжа // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42. – №9. – С. 106 – 115.
12. *Иванов В. Н.*, *Шимановский В. А.* Применение итерационных методов для разрешения уравнений движения систем связанных твёрдых тел // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Вып. 4 (20). – С. 109 – 116.
13. *Иванов В. Н.*, *Домбровский И. В.*, *Набоков Ф. В.*, *Шевелев Н. А.*, *Шимановский В. А.* Классификация моделей систем твердых тел, используемых в численных расчетах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – Вып. 2. – С. 139 – 155.
14. *Митин В. Н.*, *Штейнвольф Л. И.* Структуры дискретных механических моделей конструкций // Динамика и прочность машин. – 1982. – Вып. 35. – С. 3 – 6.

15. *Андреев Ю. М.*, *Ларин А. А.* Метод структурных матриц в механике машин (история вопроса) // Механіка та машинобудування. – 2012. – Вип. 1. – С. 129 – 137.
16. *Андреев Ю. М.* Аналитическое компьютерное построение первых интегралов движения дискретных механических систем // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях – Х. : НТУ «ХПІ». – 2017. – № 30 (1252). – С. 5 – 12.
17. *Андреев Ю. М.*, *Морачковский О. К.* Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел // Надежность и долговечность машин и сооружений : междунар. науч.-техн. сбор. НАН Украины. – К. : ИПП им. Писаренко Г. С., Ассоциация «Надежность машин и сооружений». – 2006. – Вып. 26. – С. 11 – 18.
18. *Андреев Ю. М.*, *Ларин А. А.* Эффект Джанибекова и очередной конец света // «UNIVERSITATES. Наука и просвещение». – 2013. – С. 66 – 70.

References (transliterated)

1. *Na zare «epokhi robotov»: dostizheniya 2021 goda.* [At the down of the "robot era" : achievements of 2021]. Available at : https://newstyle-mag.com/na-zare-epokhi-robotov-dostizheniya-2021-goda/. (accessed 01.07.2022).
2. Efimov G. B., Grosheva M. V. Iz istorii otechestvennoy komp'yuternoy algebry [From the history of the national computer algebra]. *Matematychni mashyny i systemy* [Mathematical machines and systems]. 2009, no. 2, pp. 61–67.
3. Melent'ev V. S., Gvozdev A. S. *Osnovy kinematicheskogo i dinamicheskogo modelirovaniya v MSC.ADAMS : metod. ukazaniya* [Fundamentals of kinematic and dynamic modeling in MSC.ADAMS: method. instructions]. Samara, Izd-vo Samarskogo universiteta Publ., 2018. 48 p.
4. Universal'nyy mekhanizm : dinamika mashin i mekhanizmov, dinamika avto mobiley i zheleznodorozhnykh ekipazhey, prikladnaya mekhanika, kinematika, obratnaya kinematika [Universal mechanism: dynamics of machines and mechanisms, dynamics of cars and railway vehicles, applied mechanics, kinematics, inverse kinematics]. *Laboratoriya vychislitel'noy mekhaniki* [Labolatory of computed mechanics]. Bryansk, Bryanskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet Publ., 2012. Available at : http://www.umlab.ru/index_rus.htm. (accessed 01.07.2022).
5. *EULER : programmnyy kompleks avtomatizirovannogo dinamicheskogo analiza mnogokomponentnykh mekhanicheskih sistem* [EULER: software package for automated dynamic analysis of multicomponent mechanical systems]. Moskow, ZAO «AvtoMekhanika» Publ., 1993 – 2011. Available at : http://www.euler.ru/index.php/euler. (accessed 02.07.2022).
6. *FRUND : modelirovanie dinamiki sistem tvyordykh i uprugikh tel* [FRUND: simulation of the dynamics of systems of rigid and elastic bodies]. Volgograd Volgogradskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet Publ., 2005. Available at : http://frund.vstu.ru /frund.htm. (accessed 02.07.2022).
7. Kane T. R., Levinson D. A. Multibody Dynamics. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1983, Vol. 50, pp. 1071–1078.
8. Velichenko V. V. *Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki* [Matrix and geometrical methods in mechanics with applications to the problems of robototechnics]. Moskow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1988. 280 p.
9. Lilov L. K. *Modelirovanie sistem svyazannykh tel* [Modeling of systems of coupled bodies]. Moskow, Nauka. Publ., 1993. 272 p.
10. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh sistem tverdykh tel [On the dynamics of holonomic systems of rigid bodies]. *Prikladnaya Mekhanika* [Applied Mechanics]. 2005, vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
11. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Komp'yuternoe modelirovanie negolonomnykh sistem tverdykh tel na osnove printsypa Dalambera – Lagranzha [Computer modeling of nonholonomic systems of rigid bodies based on the d'Alembert-Lagrange principle]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 106–115.
12. Ivanov V. N., Shimanovskiy V. A. Primenenie iteratsionnykh metodov dlya razresheniya uravneniy dvizheniya sistem svyazannykh tvyordykh tel [Application of iterative methods for solving the equations of motion of systems of coupled rigid bodies]. *Vestnik Perm. un-ta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2008, Vol. 4 (20), pp. 109–116.
13. Ivanov V. N., Dombrovskiy I. V., Nabokov F. V., Shevelev N. A., Shimanovskiy V. A. Klassifikatsiya modeley sistem tverdykh tel, ispol'zuemykh v chislennykh raschetakh dinamicheskogo povedeniya mashinostroitel'nykh konstruktsiy [Classification of models of solid body systems used in numerical calculations of the dynamic behavior of machine-building structures]. *Vestnik Perm. un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki* [Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Compute sciences]. 2012, Vol. 2, pp. 139–155.
14. Mitin V. N., Shteynvol'f L. I. Struktury diskretnykh mekhanicheskikh modeley konstruktsiy [Structures of discrete mechanical models of structures]. *Dinamika i prochnost' mashin* [Dynamics and strength of machines]. 1982, Vol. 35, pp. 3–6.
15. Andreev Yu. M., Larin A. A. Metod strukturnykh matrits v mekhanike mashin (istoriya voprosa) [Structural matrix method in machine mechanics (history)]. *Mekhanika ta mashinobuduvannya* [Mechanics and mechanical engineering]. 2012, Vol. 1, pp. 129–137.
16. Andreev Yu. M. Analiticheskoe komp'yuternoe postroenie pervykh integralov dvizheniya diskretnykh mekhanicheskikh sistem [Analytical computer construction of the first integrals of motion of discrete mechanical systems]. *Visnik NTU «KhPI». Zbirnik naukovikh prats'. Seriya* : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2017, no. 30 (1252), pp. 5–12.
17. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Novaya sistema komp'yuternoy algebry dlya issledovaniya kolebaniy strukturno-slozhnykh golonomnykh i negolonomnykh sistem tverdykh tel [A new computer algebra system for studying oscillations of structurally complex holonomic and nonholonomic systems of rigid bodies]. *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzheniy : mezhdunar. nauch.-tekhn. sbor. NAN Ukrainy* [Reliability and durability of machines and structures : international scientific and technical collection of works. The National Academy of Science of Ukraine]. Kyiv, IPP im. Pisarenko G. S., Assotsiatsiya «Nadezhnost' mashin i sooruzheniy» Publ., 2006, Vol. 26, pp. 11–18.
18. Andreev Yu. M., Larin A. A. Effekt Dzhanibekova i ocherednoy konets' sveta [Dzhanibekov effect and another doomsday]. *UNIVERSITATES. Nauka i prosveshhenie* [«UNIVERSITATES. Science and education»]. 2013. pp. 66–70.

Надійшла (received) 17.07.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Андреев Юрий Михайлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерного моделирования процессов и систем, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.