УДК 519.6 **DOI: 10.20998/2222-0631.2021.02.11**

О. П. ПРІЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСЬКА

РЕКОНСТРУКЦІЯ ГАУСОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДАНИМИ СПЕКТРУ

Відомо, що стаціонарний випадковий процес зображується у вигляді суперпозиції гармонічних коливань із дійсними частотами та некорельованими амплітудами. При дослідженні нестаціонарних процесів природною є наявність зростаючих або згасаючих коливань. При цьому виникає задача побудови алгоритмів, які дозволяли би конструювати з елементарних нестаціонарних випадкових процесів широкі класи нестаціонарних процесів. Природним узагальненням поняття спектру нестаціонарного випадкового процесу є перехід від дійсного спектру у випадку стаціонарності до комплекснозначного або нескінченнократного спектру в нестаціонарному випадку. Також виникає проблема опису в межах кореляційної теорії випадкових процесів, у яких спектр не має аналогів у випадку стаціонарних випадкових процесів, а саме, точка спектру дійсна, але у відповідного оператора в операторному зображенні ця точка нескінченної кратності, а також, коли сам спектр комплексний. Реконструкція за комплексним спектром нестаціонарної випадкової функції є досить актуальною проблемою як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. В статті розроблена процедура реконструкції випадкового процесу, послідовності, поля за спектром для гаусівських випадкових функцій. Порівняно до стаціонарного випадку, тут відкриваються більш широкі можливості, наприклад, побудова нестаціонарного випадкового процесу з дійсним спектром, який має нескінченну кратність та який може бути розподіленим на всьому скінченному відрізку дійсної осі. Наявність такого спектру приводить, на відміну від випадку стаціонарного випадкового процесу, до появи нових складових у спектральному розкладі випадкових функцій, які відповідають внутрішнім станам «струн», тобто породжуються розв'язками систем рівнянь у часткових похідних гіперболічного типу. В статті розглянуто різні випадки спектру несамоспряженого оператора A, а саме, випадок дискретного спектру та випадок неперервного спектру, який розташований на скінченному відрізку дійсної осі, що є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Розглянуто випадки $a(x)=0$, $a(x)=a_0$, $a(x)=x$ та $a(x)$ – кусково-постійна функція. Автори вважають перспективними відновлення нестаціонарних послідовностей для різних випадків спектра несамоспряженого оператора A тому, що спектральні розклади є суперпозицією дискретних або континуальних внутрішніх станів осциляторів із комплексними частотами та некорельованими амплітудами і тому матимуть глибокий фізичний зміст.

Ключові слова: кореляційна функція, трикутні моделі операторів, нестаціонарні випадкові послідовності і процеси, спектр оператора, ранг нестаціонарності, квазіранг.

О. П. ПРИЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ДАННЫМ СПЕКТРА

Известно, что стационарный случайный процесс представляется в виде суперпозиции гармонических колебаний с вещественными частотами и некоррелированными амплитудами. При исследовании нестационарных процессов естественным является наличие возрастающих или убывающих колебаний. При этом возникает задача построения алгоритмов, позволяющих конструировать из элементарных нестационарных случайных процессов широкие классы нестационарных процессов. Естественным обобщением понятия спектра нестационарного случайного процесса является переход от вещественного спектра в случае стационарности к комплекснозначному или бесконечнократоному спектру в нестационарном случае. Также возникает проблема описания в рамках корреляционной теории случайных процессов, у которых спектр не имеет аналогов в случае стационарных случайных процессов, а именно, точка спектра вещественная, но у соответствующего оператора в операторном представлении эта точка бесконечной кратности, а также, когда сам спектр комплексный. Реконструкция по комплексному спектру нестационарной случайной функции является достаточно актуальной проблемой, как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. В статье разработана процедура реконструкции случайного процесса, последовательности, поля по спектру для гауссовских случайных функций. По сравнению со стационарным случаем, тут открываются более широкие возможности, например, построение нестационаого случайного процесса с вещественным спектром, который имеет бесконечную кратность и может быть распределен на всем конечном отрезке вещественной оси. Наличие такого спектра приводит, в отличие от случая стационарного случайного процесса, к появлению новых составляющих в спектральном разложении случайных функций, которые соответствуют внутренним состояниям "струн", то есть порождаются решениями систем уравнений в частных производных гиперболического типа. В статье рассмотрены разные случаи спектра несамосопряженного оператора A, а именно, случай дискретного спектра и случай непрерывного спектра, который размещен на конечном отрезке вещественной оси, который является областью значений вещественнозначной неубывающей функции $a(x)$. Рассмотрены случаи $a(x)=0$, $a(x)=a_0$, $a(x)=x$ и $a(x)$ – кусочно-постоянная функция. Авторы считают перспективными восстановление нестационарных последовательностей для разных случаев спектра несамосопряженного оператора A потому, что спектральные разложения являются суперпозицией дискретных или континуальных внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами и некоррелированными амплитудами и потому имеют глубокий физический смысл.

Ключевые слова: корреляционная функция, треугольные модели операторов, нестационарные случайные последовательности и процессы, спектр оператора, ранг нестационарности, квазиранг.

O. P. PRISHCHENKO, N. V. CHEREMSKAYA

RECONSTRUCTION OF GAUSSIAN RANDOM FUNCTIONS FROM SPECTRUM DATA

It is known that a stationary random process is represented as a superposition of harmonic oscillations with real frequencies and uncorrelated amplitudes. In the study of nonstationary processes, it is natural to have increasing or declining oscillationcs. This raises the problem of constructing algorithms that would allow constructing broad classes of nonstationary processes from elementary nonstationary random processes. A natural generalization of the concept of the spectrum of a nonstationary random process is the transition from the real spectrum in the case of stationary to a complex or infinite multiple spectrum in the nonstationary case. There is also the problem of describing within the correlation theory of random processes in which the spectrum has no analogues in the case of stationary random processes, namely, the spectrum point is real, but it has infinite multiplicity for the operator image of the corresponding operator, and when the spectrum itself is complex. Reconstruction of the complex spectrum of a nonstationary random function is a very important problem in both theoretical and applied aspects. In the paper the procedure of reconstruction of random process, sequence, field from a spectrum for Gaussian random functions is developed. Compared to the stationary case, there are wider possibilities, for example, the construction of a nonstationary random process with a real spectrum, which has infinite multiplicity and which can be distributed over the entire finite segment of the real axis. The presence of such a spectrum leads, in contrast to the case of a stationary random process, to the appearance of new components in the spectral decomposition of random functions that correspond to the internal states of «strings», i.e. generated by solutions of systems of equations in partial derivatives of hyperbolic type. The paper deals with various cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator A, namely, the case of a discrete spectrum and the case of a continuous spectrum, which is located on a finite segment of the real axis, which is the range of values of the real non-decreasing function $a(x)$. The cases $a(x)=0$, $a(x)=a_0$ ($a(x)=const$), $a(x)=x$ and $a(x)$ is a piecewise constant function are studied. The authors consider the recovery of nonstationary sequences for different cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator A promising since spectral decompositions are a superposition of discrete or continuous internal states of oscillators with complex frequencies and uncorrelated amplitudes and therefore have deep physical meaning.

Key words: correlation function, triangular models of operators, nonstationary random sequences and processes, spectrum of an operator, rank of nonstationarity, quasi-rank.

Вступ. Проблема реконструкції за комплексним спектром *нестаціонарної випадкової функції* є досить актуальною як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. Це пов’язано з тим, що природним узагальненням поняття спектру нестаціонарного випадкового процесу був би перехід від дійсного спектру у випадку стаціонарності до *комплекснозначного* або *нескінченнократного спектру* в нестаціонарному випадку. Підставою для такого узагальнення є той факт, що стаціонарний випадковий процес зображується у вигляді *суперпозиції гармонічних коливань* із дійсною частотою та *некорельованими амплітудами*, тобто елементарний стаціонарний випадковий процес є гармонічними коливаннями вигляду $\xi(t,\omega)=\xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, де λ_0 – дійсна частота гармонічних коливань. При дослідженні нестаціонарних (*перехідних*) процесів природною є наявність зростаючих або згасаючих коливань, тому найпростішими нестаціонарними випадковими процесами є процеси вигляду $\xi(t,\omega)=\xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, де $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$, $\beta_0\neq 0$ (якщо $\beta_0>0$, то коливання зростають, а якщо $\beta_0<0$, то коливання згасають). При цьому виникає питання про побудову алгоритмів, які дозволяли би *складати* з елементарних нестаціонарних випадкових процесів достатньо широкі класи нестаціонарних процесів. Постає аналогічне питання з *нестаціонарними послідовностями* та *неоднорідними полями*. Окремо виникає проблема опису в межах *кореляційної теорії випадкових процесів*, у яких спектр не має аналогів у випадку стаціонарних випадкових процесів, наприклад, точка спектру дійсна, але у відповідного оператора в *операторному зображенні* ця точка нескінченної кратності, а також, коли сам спектр комплексний.

Для *гаусівських випадкових функцій* в статті розроблена процедура реконструкції випадкового процесу, послідовності, поля за спектром. Відзначимо, що порівняно до стаціонарного випадку, тут відкриваються більш широкі можливості, наприклад, побудова нестаціонарного випадкового процесу з дійсним спектром, який має нескінченну кратність та який може бути розподіленим на всьому скінченному відрізку дійсної осі. Наявність такого спектру приводить, на відміну від випадку стаціонарного випадкового процесу, до появи нових складових у спектральному розкладі випадкових функцій, які відповідають внутрішнім станам *струн*, тобто породжуються розв’язками систем рівнянь у *часткових похідних гіперболічного типу*.

Із задачею відновлення випадкового процесу за спектром тісно пов’язана задача отримання фізичних інтерпретацій спектральних розкладів нестаціонарних функцій. У статті продовжено дослідження [7] та розв’язана задача отримання спектральних розкладів деяких нових класів випадкових послідовностей та полів. Відзначимо, що, використовуючи операцію зчеплення операторів (операторних комплексів), можна розглядати більш складні випадки спектрів.

Аналіз останніх досліджень. Спектральний аналіз унітарних операторів був з успіхом використаний *А. М. Колмогоровим* [1] для побудови кореляційної теорії стаціонарних випадкових послідовностей, а також для розв’язку ряду прикладних задач фільтрації та прогнозу стаціонарних випадкових послідовностей. Підхід Колмогорова засновано на тому, що кожній стаціонарній випадковій послідовності відповідає послідовність векторів у побудованому спеціальним чином *гільбертовому просторі*, що дозволяє вивчати нестаціонарні випадкові послідовності *методами математичного аналізу детермінованих функцій*, які приймають значення у відповідному гільбертовому просторі. Пізніше ідеї Колмогорова отримали свій подальший розвиток у працях [2, 3]. Особливо істотний внесок в побудову *загальної теорії стаціонарних послідовностей* у *гільбертовому просторі* зробили *А. М. Яглом* [4] та *Ю. А. Розано*в [5]. Спектральна теорія неунітарних операторів, початок якої був покладений в роботі *М. С. Лившиця* [6], а подальший розвиток отримано в [7 – 19, 21, 22], не могла не з’явитися поштовхом до різноманітних застосувань. Одним з таких прикладів ефективних застосувань є *реконструкція випадкових процесів* та *послідовностей за спектром*. Для стаціонарних випадкових процесів ця задача розв’язана в [1, 4]. Для нестаціонарних випадкових процесів та послідовностей ця задача в такий постановці не ставилась. Ці міркування з’явилися спонукальними мотивами до появи даної статті. В процесі дослідження даної теми виникли ряд задач, які мають самостійний інтерес.

Постановка задачі. Задача реконструкції випадкових процесів (послідовностей) за спектром є однією з важливих задач моделювання випадкових функцій. У випадку стаціонарного випадкового процесу ця задача розв’язується за допомогою спектральної теорії самоспряжених операторів та зводиться, наприклад, у випадку дискретного спектру до побудови спеціальної неспадної функції стрибків зі стрибками в точках спектру. Для нестаціонарних випадкових функцій ця задача в такий постановці не ставилась. Для розв’язку цієї задачі природно використати *спектральну теорію дисипативних несамоспряжених операторів* або *стисків*.

Математична модель. Розглянемо спочатку випадок дискретного спектру. Нехай задана скінченна або злічення множина комплексних чисел $\{\lambda_k\}$, які розташовані у верхній півплощині та обмежені у сукупності: $|\lambda_k| < C$. Побудуємо дисипативний оператор $\widehat{A}$, у якого спектр складається з цих точок. Нехай $\lambda_k = \alpha_k + i\dfrac{\beta_k^2}{2}$ та поставимо додаткову вимогу, щоб $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2 < \infty$. Для побудови дисипативного оператора розглянемо гільбертів простір l_2 та оператор $\widehat{A} \in [l_2, l_2]$ наступного вигляду:

$$\left(\widehat{A}f\right)_k = \lambda_k f_k + i\sum_{j=1}^{k-1} f_j\beta_j\beta_k \quad (k = 1, 2, ...). \tag{1}$$

З (1) видно, що цей оператор будується лише за спектром $\{\lambda_k\}$ та його матричне зображення нижнєтрикутне. Легко перевірити, що $\dfrac{\widehat{A}-\widehat{A}^*}{i} = \left\langle \cdot, \widehat{g}\right\rangle \widehat{g}$, де $\widehat{g} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\end{pmatrix}$, тобто $\widehat{A}$ має одновимірну уявну компоненту. Але тоді крива $\widehat{\xi}_t$ в l_2 вигляду $\widehat{\xi}_t = e^{it\widehat{A}}\widehat{\xi}_0$, де $\widehat{\xi}_0$ фіксований елемент з l_2, є нестаціонарною кривою з рангом нестаціонарності, що дорівнює одиниці, причому спектр цієї кривої складається з $\{\lambda_k\}$. Аналогічно, послідовність $\widehat{\xi}_n$ в l_2 вигляду $\widehat{\xi}_n = \widehat{A}^n\widehat{\xi}_0$ є нестаціонарною послідовністю з квазірангом, що дорівнює одиниці та спектром $\{\lambda_k\}$. Використовуючи зображення для функції від оператора $\widehat{A}$ через його резольвенту, маємо для $k-$ої компоненти $e^{it\widehat{A}}\widehat{\xi}_0$ (у випадку, коли $\widehat{\xi}_0 = \widehat{g}$) зображення:

$$\left(e^{it\widehat{A}}\widehat{g}\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}d\lambda.$$

Якщо всі λ_j відмінні, то, обчислюючи за допомогою *теорії лишків*, цей інтеграл дорівнює сумі лишків в особливих точках. Отримуємо $\left(e^{it\widehat{A}}\widehat{g}\right)_k = \sum\limits_{j=1}^{k} e^{it\lambda_j}a_{jk}$. Для $\widehat{A}^n\widehat{g}$ відповідно отримуємо

$$\left(\widehat{A}^n\widehat{g}\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^n\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}d\lambda.$$

Та у випадку відмінних λ_j відповідно маємо $\left(\widehat{A}^n\widehat{g}\right)_k = \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j^n b_{jk}$, де $e^{it\lambda_j}a_{jk}$, $\lambda_j^n b_{jk}$ лишки відповідних підінтегральних функцій в особливих точках.

У випадку, коли $\xi_0 \neq \widehat{g}$ обчислення більш громіздкі й тому буде наведений лише остаточний результат:

$$\left(e^{it\widehat{A}}\xi_0\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\beta_k}{\overline{\lambda}_k-\lambda}\cdot\left\{\sum_{\mu=0}^{k-1}\left(1+\frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu-\lambda}\right)\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{\prod\limits_{\mu=0}^{\nu}\left(1+\dfrac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu-\lambda}\right)}\right]+\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j-\lambda}{\overline{\lambda}_j-\lambda}\right\}d\lambda,$$

де $a_k = \dfrac{\widehat{\xi}_k}{\beta_k}$. Для $\widehat{A}^n\widehat{\xi}_0$ відповідно маємо:

$$\left(\widehat{A}^n\widehat{\xi}_0\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^n\frac{\beta_k}{\overline{\lambda}_k-\lambda}\cdot\left\{\sum_{\mu=0}^{k-1}\left(1+\frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu-\lambda}\right)\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{\prod\limits_{\mu=0}^{\nu}\left(1+\dfrac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu-\lambda}\right)}\right]+\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j-\lambda}{\overline{\lambda}_j-\lambda}\right\}d\lambda,$$

де $a_k = \dfrac{\widehat{\xi}_k}{\beta_k}$.

Розглянемо випадок, коли спектр несамоспряженого оператора A розташовано на скінченному відрізку дійсної осі, який є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Тоді модельним оператором $\widehat{A}$ є оператор, який діє в $L^2_{[0,l]}$ та набуває вигляду $\left(\widehat{A}f\right)(x) = a(x) f(x) + i\int\limits_0^x f(y)\,dy$. Використовуючи результати роботи [20] про зображення резольвенти, для кривої $\hat{\xi}_t = e^{it\widehat{A}}\hat{\xi}_0$ маємо:

$$e^{it\widehat{A}}\hat{\xi}_0 = e^{ita(x)}\hat{\xi}_0(x) + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma} e^{it\lambda}\left(\int\limits_0^x \hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau} e^{-\int\limits_{\tau}^{x}\frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\tau\right) d\lambda .$$

Відзначимо, що крива $e^{ita(x)}\hat{\xi}_0(x)$ є стаціонарною кривою у гільбертовому просторі $L^2_{[0,l]}$.

Аналогічно для $\hat{\xi}_n = \widehat{A}^n\hat{\xi}_0$ отримуємо:

$$\hat{\xi}_n = \widehat{A}^n\hat{\xi}_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\lambda^n\left(\frac{\hat{\xi}_0(x)}{a(x)-\lambda} - i\int\limits_0^x \hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau} e^{-\int\limits_{\tau}^{x}\frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\tau\right) d\lambda ,$$

або

$$\hat{\xi}_n = a^n(x)\hat{\xi}_0(x) - i\int\limits_0^x \hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}\left(-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\lambda^n e^{-\int\limits_{\tau}^{x}\frac{dy}{a(y)-\lambda}} d\lambda\right) d\tau ,$$

де перший доданок є ганкелевою послідовністю у $L^2_{[0,l]}$, через те, що її кореляційна функція дорівнює $\left\langle a^n(x)\hat{\xi}_0(x), a^m(x)\hat{\xi}_0(x)\right\rangle_{L^2_{[0,l]}} = \int\limits_0^l a^{n+m}(x)\left|\hat{\xi}_0(x)\right|^2 dx$, тобто залежить від суми $n+m$.

Розглянемо випадки:

1. $a(x) = 0$,

$$u_n(x) = e^{it\widehat{A}}\hat{\xi}_0 = \hat{\xi}_0(x) - \int\limits_0^x \hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right) d\tau ,$$

де $J_1(y) = \dfrac{y}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k y^{2k}}{2^{2k}k!(k+1)!}$ *функція Бесселя I-го роду 1-го порядку*, $y = 2\sqrt{t(x-\tau)}$;

2. $a(x) = a_0$,

$$u_n(x) = e^{it\widehat{A}}\hat{\xi}_0 = e^{ita_0}\hat{\xi}_0(x) - \int\limits_0^x e^{ia_0 t}\hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right) d\tau ;$$

3. $a(x) = x$,

$$u_n(x) = e^{it\widehat{A}}\hat{\xi}_0 = e^{itx}\hat{\xi}_0(x) - \int\limits_0^x e^{itx}\hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}} J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right) d\tau ;$$

4. Нехай $a(x)$ – *кусково-постійна функція* вигляду $a(x) = \begin{cases} b_1, & 0 \le x \le a_1; \\ b_2, & a_1 \le x \le a_2; \\ b_3, & a_2 \le x \le 1. \end{cases}$

Можливі шість випадків взаємного розташування точок $\tau < x$ з інтервалу $[0;1]$ відносно точок a_1 та a_2.

Розглянемо лише найскладніше розміщення, при якому інтервал $(\tau; x)$ містить розриви a_1 та a_2.

Нехай $0 < \tau < a_1 < a_2 < x < 1$, тоді

$$\hat{\xi}_n = a^n(x)\hat{\xi}_0(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^y \hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}\left\{\theta(n, x, b_1, b_2, b_3) + \theta(n, x, b_3, b_1, b_2) + \theta(n, x, b_2, b_3, b_1)\right\} d\tau ;$$

$$\theta(n,x,b_1,b_2,b_3)=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[i(a_1-\tau)\right]^n}{n!(n-1)!}\left\{e^{ix\lambda+i\frac{a_2-a_1}{\lambda-b_2}+i\frac{y-a_2}{\lambda-b_3}}\right\}^{(n-1)}\Bigg|_{\lambda=b_1}=$$

$$=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[i(a_1-\tau)\right]^n}{n!(n-1)!}\left\{e^{ixb_1}(ix)^{n-1}e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\cdot e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}+\sum_{j=1}^{n-1}C_{n-1}^{j}e^{ixb_1}(ix)^{n-1-j}\left\{e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\times\right.\right.$$

$$\times e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}\cdot\frac{(-1)^j}{(b_1-b_3)^j}\cdot\sum_{S=1}^{j}\frac{\left[i(y-a_2)\right]^S}{S!(b_1-b_3)^S}\cdot\Phi(S;j)+\sum_{K=1}^{j}C_j^K e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\cdot\frac{(-1)^K}{(b_1-b_2)^K}\times$$

$$\left.\left.\times\sum_{S=1}^{K}\frac{\left[i(a_2-a_1)\right]^S}{S!(b_1-b_2)^S}\cdot\Phi(S,K)\cdot e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}\cdot\frac{(-1)^{j-k}}{(b_1-b_3)^{j-k}}\sum_{S=1}^{j-k}\frac{\left[i(y-a_2)\right]^S}{S!(b_1-b_3)^S}\Phi(S,j-K)\right\}\right\},$$

де $\Phi(S,l)=\sum_{r=0}^{S-1}(-1)^r C_S^r\frac{(S-r+l-1)!}{(S-r-1)!}$.

Відзначимо, що, використовуючи операцію зчеплення операторів (*операторних комплексів*), можна розглядати більш складні випадки спектрів.

Використовуючи *перетворення Келі* можна відновити за спектром нестаціонарну випадкову послідовність, у якої $\dim\overline{\left(I-T^*T\right)H}=1$, де $H=l_2$ гільбертів простір, $T\in\left[l_2,l_2\right]$ оператор, який діє в цьому просторі, а дискретний спектр μ_j міститься всередині одиничного кола комплексної площини. Дійсно, із загального зображення $\xi_n=T^n\xi_0=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\lambda^n\left(T-\lambda I\right)^{-1}\xi_0 d\lambda$, $T\in\left[l_2,l_2\right]$, вважаючи для простоти, що $\xi_0=e$, де e каналовий елемент оператора T $\left(I-T^*T=\langle\cdot,e\rangle e\right)$, та враховуючи, що *резольвенту* $\left(T-\lambda I\right)^{-1}$ можна зобразити у вигляді

$$\left(T-\lambda I\right)^{-1}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\hat{A}-iI\right)\left(\hat{A}-i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}I\right)^{-1}$$

та, відповідно, $e=\sqrt{2}\left(\hat{A}^*-iI\right)^{-1}g_{\hat{A}}$, $g_{\hat{A}}=(1,1,...)$, де $\hat{A}$ перетворення Келі оператора *T*. Це перетворення є несамоспряженим оператором із $\dim\overline{2\operatorname{Im}\hat{A}l_2}=1$ та спектром $\lambda_j=i\frac{1+\mu_j}{1-\mu_j},\left|\mu_j\right|<1$, який розташовано у верхній півплощині. Використовуючи трикутну модель оператора $\hat{A}$ для $\left(\xi_n\right)_k$ остаточно отримуємо:

$$\left(\xi_n\right)_k=\left(T^n e\right)_k=-\frac{\sqrt{1-\left|\mu_k\right|^2}}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\lambda^n}{\lambda-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1-\lambda\overline{\mu_j}}{1-\mu_j}\frac{\left|\lambda_j\right|}{\overline{\lambda_j}}d\lambda .$$

За допомогою аналогічних міркувань можна відновити нестаціонарну послідовність у тому випадку, коли її спектр розташовано на неперервній дузі одиничного кола:

$$\xi_n(x)=T^n\xi_0(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2\pi i}\oint\lambda^n\left(\frac{\xi_0(x)}{(1-\lambda)\alpha(t)-i(1+\lambda)}e^{-i\int_0^x\frac{(1-\lambda)dt}{(1-\lambda)\alpha(t)-i(1+\lambda)}}\right)d\lambda,$$

де $T\in\left[L^2_{[0,l]},L^2_{[0,l]}\right]$, $\alpha(x)$ – неспадна дійснозначна функція.

Маючи модельні зображення для $e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ або $\hat{A}^n\hat{\xi}_0$ легко підрахувати відповідні кореляційні функції.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними відновлення нестаціонарних послідовностей для різних випадків спектра несамоспряженого оператора A. При цьому необхідно мати на увазі, що спектральні розклади матимуть глибокий фізичний зміст, якщо ці розклади являтимуть собою суперпозицію дискретних або континуальних внутрішніх станів осциляторів із комплексними частотами та некорельованими амплітудами. У випадку нескінченнократного спектра слід очікувати появу членів у спектральному розкладі, які відповідають істотно новим, у порівнянні зі стаціонарними випадковими процесами, станам. Ці стани, у свою чергу, відповідають системам, що розподіляються: узагальнені струни, які породжуються рівняннями з частинними похідними вигляду:

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial u}{\partial t} + c_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \alpha u = 0 .$$

Підкреслимо, що побудову кореляційної теорії випадкових полів можна зв'язати з теорією систем двічі переставних операторів. Це дозволить вивчати випадкові поля методами, аналогічними кореляційній теорії випадкових послідовностей та процесів.

Висновки. Таким чином, в даній роботі розв'язана задача реконструкції нестаціонарних випадкових процесів (послідовностей) за спектром. Розглянуто різні випадки спектру несамоспряженого оператора A, а саме випадок дискретного спектру та випадок неперервного спектру, який розташований на скінченному відрізку дійсної осі, що є областю значень дійснозначної неспадної функції $a(x)$. Розглянуто випадки $a(x)=0$, $a(x)=a_0$, $a(x)=x$ та $a(x)$ – кусково-постійна функція.

Слід відзначити, що модельні зображення для нестаціонарних випадкових процесів та послідовностей ($e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ або $\hat{A}^n\hat{\xi}_0$) можна використати для побудови конкретних моделей нестаціонарних випадкових процесів, які можна застосувати для інтерпретації статистичних даних.

Список літератури

1. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюл. МГУ. – 1941. – Т 2 : Математика, № 6. – С. 1 – 40.
2. *Козуляев П. А.* К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР. – 1947. – Том LVI. – №9. – С. 903 – 905.
3. *Козуляев П. А.* К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР, 1941. – Том XXX. – № 1. – С. 13 – 17.
4. *Яглом А. М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Том 1. – Вып. 5(51). – С. 3 – 168.
5. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М. : Физмат. гиз., 1963. – 284 с.
6. *Лившиц М. С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сб. – 1946. – № 19(61):2. – С. 239 – 262.
7. *Лившиц М. С.*, *Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1971. – 160 с.
8. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сибирский матем. журнал. – 1979. – Т. 20. – №2. – С. 211 – 228.
9. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М. : Наука, 1969. – 287 с.
10. *Бродский М. С.*, *Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // Успехи матем. наук. – 1958. – Т.8. – Вып. 1(79). – С. 3 – 85.
11. *Ваксман Л. Л.* Гармонический анализ многопараметрических полугрупп сжатий. –Харьков : Харьковский госуниверситет, 1979. – 167с. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ № 3991 – 80 деп.).
12. *Гихман И. И.*, *Скороход. А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва, 1977. – 654 с.
13. *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва, 1965. – 448 с.
14. *Золотарев В. А.* Об открытых системах и характеристических функциях коммутирующих систем операторов. – Харьков : Харьковский гос. ун-т, 1979 (рукопись депонирована в ВИНИТИ № 858 – 79 деп.).
15. *Золотарев В. А.* О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // ДАН Арм. ССР., ХП. – 1976. – № 3. – 136 – 140.
16. *Поляцкий В. Т.* О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов // ДАН СССР. – 1957. – № 113. – С. 756 – 759.
17. *Сахнович Л. А.* Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Труды Моск. матем. Общества. – 1968. – № 19. – С. 211 – 270.
18. *Bunce J.* The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators // Proc. Amer, math, soc. – 1971. – № 29. – P. 499 – 505.
19. *Taylor J. L.* A joint spectrum for several commuting operators // J. Funct. Anal. – 1970. – № 6. – P. 172 – 191.
20. *Когут Е. А.*, *Черемская Н. В.*, *Янцевич А. А.* О представлении резольвент вольтерровых операторов // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип.1 (17). – С. 99 – 101.
21. *Назиров З. Ф.*, *Черемська Н. В.*, *Янцевич А. А.* Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 13. – С. 146 – 153.
22. *Назиров З. Ф.*, *Черемська Н. В.*, *Янцевич А. А.* Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2011. – № 42. – С. 144 – 154.

References (transliterated)

1. Kolmogorov A. N. Statsionarnyye posledovatel'nosti v gil'bertovom prostranstve [Stationary sequences in Hylbert]. *Byul. MGU* [Bulletin of the Moscow State University]. 1941, Vol. 2 : Matematika, no. 6, pp. 1–40.
2. Kozulyayev P. A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov [On the problem of extrapolation of stationary processes]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1947, vol. LVI, no. 9, pp. 903–905.
3. Kozulyayev P. A. K problemam interpolyatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey [On the problems of interpolation and extrapo-

lation of stationary sequences]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1941, vol. XXX, no. 1, pp. 13–17.
4. Yaglom A. M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy [Introduction to the theory of random stationary functions]. *UMN* [Achievements of Mathematical Sciences]. 1952, vol. 1, no. 5(51), pp. 3–168.
5. Rozanov YU. A. *Statsionarnyye sluchaynyye protsessy* [Stationary random processes]. Moscow, Fizmat. giz. Publ., 1963. 284 p.
6. Livshits M. S. Ob odnom klasse lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve [On a class of operators in Hylbert space]. *Matem. sb*. [Mathematical Collection]. 1946, no. 19(61):2, pp. 239–62.
7. Livshits M. S., Yantsevich A. A. *Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh* [Theory of operator nodes in Hylbert spaces]. Kharkov, Izd-vo KHGU Publ., 1971. 160 p.
8. Arov D. 3. Passivnyye lineynyye statsionarnyye dinamicheskiye sistemy [Passive stationary linear dynamic systems]. *Sibirskiy matem. Zhurnal* [Siberian Mathematical Journal]. 1979, vol. 20, no. 2, pp. 211–228.
9. Brodskiy M. S. *Treugol'nyye i zhordanovy predstavleniya lineynykh operatorov* [Triangular and Jordan representations of linear operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 287 p.
10. Brodskiy M. S., Livshits M. S. Spektral'nyy analiz nesamosopryazhennykh operatorov i promezhutochnyye sistemy [Spectral analysis of non-self-adjoint operators and intermediate systems]. *Uspekhi matem. Nauk* [Achievements of Mathematical Sciences]. 1958, vol. 8, no. 1(79), pp. 3–85.
11. Vaksman L. L. *Garmonicheskiy analiz mnogoparametricheskikh polugrupp szhatiy* [Harmonic analysis of multivariate contraction semigroups]. Kharkov, Khar'kovskiy gosuniversitet Publ., 1979. 167 p. (Rukopis' deponirovana v VINITI №3991 – 80 dep.).
12. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, 1977. 654 p.
13. Gokhberg I. TS., Kreyn M. G. *Vvedeniye v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the theory of non-self-adjoint linear operators]. Moscow, 1965. 448 p.
14. Zolotarev V. A. *Ob otkrytykh sistemakh i kharakteristicheskikh funktsiyakh kommutiruyushchikh sistem operatorov* [On open systems and characteristic functions of commutating systems of operators]. Kharkov, Khar'kovskiy gos. un-t Publ., 1979 (rukopis' deponirovana v VINITI № 858 – 79 dep.).
15. Zolotarev V. A. O treugol'nykh modelyakh sistem dvazhdy perestanovochnykh operatorov [On triangular models of systems of twice commutative operators]. *DAN Arm. SSR* [Reports of the Academy of Science of the Armenian SSR]. KHP, 1976, no. 3, pp. 136–140.
16. Polyatskiy V. T. O privedenii k treugol'nomu vidu kvaziunitarnykh operatorov [On reducing quasiunitary operators to triangular form]. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1957, no. 113, pp. 756–759.
17. Sakhnovich L. A. Dissipativnyye operatory s absolyutno nepreryvnym spektrom [Dissipative operators with absolutely continuous spectrum]. *Trudy Mosk. matem. Obshchestva* [Proceedings of the Moscow Mathematical Society]. 1968, no. 19, pp. 211–270.
18. Bunce J. The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators. *Proc. Amer, math, soc*. 1971, no. 29, pp. 499–505
19. Taylor J. L. A joint spectrum for several commuting operators. *J. Funct. Anal*. 1970, no. 6, pp. 172–191.
20. Kogut E. A., Cheremskaya N. V., Yantsevych A. A. O predstavlenii rezol′vent vol′terrovykh operatorov [On representing resolvents of Volterra operators]. *Krayovi zadachi dlya dyferentsial'nykh rivnyan' : Zb. nauk. pr.* [Boundary problems for differential equations. Collection of scientific papers]. Kyiv, In-t matematyky NAN Ukrayiny Publ., 1998, vol. 1 (17), pp. 99–101.
21. Nazirov Z. F., Cherems′ka N. V., Yantsevych A. A. Pro odyn klas neodnoridnykh vypadkovykh poliv [On a class of heterogeneous random fields]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Mathemetical Modeling in engineering and Technologies]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 13, pp.146–153.
22. Nazirov Z. F., Cherems′ka N. V., Yantsevych A. A. Liniyni peretvorennya dyskretnykh vypadkovykh poliv [Linear transformations of discrete random fields]. *Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Zbirnyk naukovykh prats'. Tematychnyy vypusk : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Series: Mathemetical Modeling in engineering and Technologies]. Kharkiv, NTU «KHPI» Publ., 2011, no. 42, pp. 144–154.

Надійшла (received) 03.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Пріщенко Ольга Петрівна – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Прищенко Ольга Петровна – старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Prishchenko Olga Petrivna – Senior Lecturer, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 300-58-28; e-mail: priolga2305@gmail.com.

Черемська Надія Валентинівна – кандидат технічних наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», м. Харків; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Черемская Надежда Валентиновна – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.

Cheremskaya Nadezhda Valentinovna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com.